T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AV-AVCI MODELLERİ VE AV-AVCI PROBLEMLERİNİN CAPUTO KESİRLİ TÜREV İLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serap MUTLU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR**

Temmuz 2022

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AV-AVCI MODELLERİ VE AV-AVCI PROBLEMLERİNİN CAPUTO KESİRLİ TÜREV İLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serap MUTLU

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ**

Bu tez 08/07/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Serap MUTLU
08/07/2022

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, çalışmamın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez sürecindeki çok değerli geri bildirimleri için jüri üyelerim Prof. Dr. Emrah Evren KARA ve Doç. Dr. Aynur ŞAHİN'e ayrıca Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nün tüm öğretim görevlilerine üzerimdeki emek ve katkıları için teşekkürlerimi sunarım.

Annem rahmetli Beyze MUTLU, babam Ziya MUTLU ve kardeşlerim Sena MUTLU ve Fatma MUTLU'ya gerek tez sürecindeki katkı ve çabaları gerekse tüm hayatımdaki destek ve varlıkları için ne kadar teşekkür etsem azdır.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathrm{Arg}\lambda$	: λ nın esas Argümenti
a	: Av popülasyonunun tür içi rekabet katsayısı
β	: Birinci avcı popülasyonunun ikinci avcı popülasyonuyla rekabet oranı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
${}_0^cD_t^q$	: q. mertebeden Caputo kesirli türevi
e_1	: Av biyokütlesinin birinci avcı popülasyonuna dönüşüm oranı
e_2	: Av biyokütlesinin ikinci avcı popülasyonuna dönüşüm oranı
$f(x)$	: Birinci avcı popülasyonunun av popülasyonuyla etkileşim oranı
$g(x)$	: İkinci avcı popülasyonunun av popülasyonuyla etkileşim oranı
k	: Uzayın taşıma kapasitesi
μ_1	: Birinci avcı popülasyonun ölüm oranı
μ_2	: İkinci avcı popülasyonun ölüm oranı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
r	: Av popülasyonunun içsel büyüme oranı
γ	: İkinci avcı popülasyonunun birinci avcı popülasyonuyla rekabet oranı
$x(t)$	: t zamanında av popülasyonun yoğunluğu
$u(t)$	: t zamanında av popülasyonu için geri besleme kontrol değişkeni
$y(t)$	: t zamanında ilk avcı popülasyonunun yoğunluğu
$z(t)$	: t zamanında ikinci avcı popülasyonunun yoğunluğu

ÖZET

Anahtar kelimeler: Av-avcı modeli, kararlılık, asimptotik kararlılık, kesirli türev, geri besleme kontrolü, popülasyon dinamiği, avcı popülasyonlarının rekabeti

Ekolojideki temel süreçlerden biri av ve avcı arasındaki etkileşimlerdir. Av ve avcı arasındaki etkileşimi; av ile avcının aynı ortamı paylaşması ve bir türün diğerini avlaması nedeniyle iki türün popülasyon yoğunluğunun birbirleriyle bağlantılı olarak değişimleri ifade eder. Bu tez çalışmasında geri besleme kontrolüyle iki avcı-tek av içeren genelleştirilmiş etkileşim fonksiyonuna sahip av-avcı etkileşim modelinin dinamik davranışı incelenmiştir. Model oluşturulmasındaki en önemli varsayım, gerçek dünya durumunun güçlü bir yansımasını veren tek av üzerindeki geri besleme kontrolünün ve iki avcı popülasyonunun rekabetinin etkileridir. Model oluşturulduktan sonra elde edilen modelin denge noktalarının varlığı araştırılmış, bulunan denge noktalarında Jacobian matrisi yardımıyla sistemin karakteristik denklemleri analiz edilerek sistemin kararlılığı incelenmiştir. Ayrıca, kesirli zaman türevi ile ölçülen belleğin zamansal davranış üzerindeki etkisi incelenmiş, üç türün bir arada yaşadığı denge noktasında sistemin kararlılığı gösterilmiştir.

PREDATOR- PREY MODELS AND INVESTIGATION OF PREDATOR- PREY CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

SUMMARY

Keywords: Predator-prey model, stability, asymptotic stability, fractional-order, feedback control, population dynamics, predator competition

The interaction between prey and predator is one of the most fundamental processes in ecology. In this thesis, we first consider the system incorporating a feedback control and we discuss the dynamic behavior of prey-predator interaction model that includes two competitive predators and one prey with a generalized interaction functional. The primary presumption in the model construction is the effects of feedback control and the competition between two predators on the only prey which gives a strong implication of the real-world situation. By analyzing characteristic equations, we carry out detailed discussion with respect to stability of equilibrium points of the considered model. Further, we investigate the impact of the memory measured by fractional time derivative on the temporal behavior.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Gerçek dünya etkileşimlerinin matematiksel modellemesi bazı ekolojik ve biyolojik bileşenleri tahmin etmek için güçlü bir araçtır. Araştırmacılar karşılaştıkları doğa olaylarını anlayabilmek amacıyla ve bilime dayanarak açıklama yapabilmek için birçok çalışma yapmışlardır. Bu çalışmalar matematik, fizik, biyoloji, ekoloji gibi temel bilimlerin daha fazla önem kazanmasını ve bu bilim dallarının kendi aralarında etkileşim içinde olan biyofizik, matematiksel biyoloji gibi genel olarak uygulamalı matematik alanında toplanan alanlarının doğmasını sağlamıştır. Bu alanlar matematiksel modelleme teknikleri kullanarak doğa olaylarını anlamaya çalışmışlardır.

Genel olarak matematiksel model oluşturmak için; önce çalışılan olayı yansıtacak probleme ait bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren; matematiksel olarak problemi ifade eden model oluşturulur. Daha sonra modelin davranışını anlayabilmek için; analiz, diferansiyel denklemler teorisi gibi matematik bilgileri modele uygulanır ve matematiksel sonuçlar elde edilir. Son olarak modelin analizinden elde edilen sonuçlar yorumlanarak problem ile karşılaştırılır ve bulunan matematiksel sonuçlar ile yapılan tahminler toplanan gerçek verilerle karşılaştırılır.

Yapısı zamana, konuma, yaşa veya başka değişkenlere göre değişen sistemlere dinamik sistemler; dinamik sistemlerin geçmiş zamandaki, şimdiki zamandaki ve gelecek zamandaki durumlarını analiz eden disiplinler arası çalışma alanına ise dinamik denir.

Dinamikte esas amaç, üzerinde çalıştığımız modeli matematiksel olarak modelleyerek, elde edilen dinamik sistem modelinin matematiksel olarak incelenmesi ve dinamik sistem modelinin incelenen önceki değişimleri yardımıyla sistemin gelecekteki durumu hakkında çıkarımlarda bulunabilmektir.

Herhangi bir kompleks dinamik sistemin davranışı o sistemin bileşenleri arasındaki etkileşimin doğal sonucudur. Bu sistemlerin önemli örnekleri, biyolojik bir ortamda belirli organizmalar arasındaki kompleks etkileşimlerin özelliklerini tanımlayan biyolojik modellerdir. Bu sistemlerin incelenmesi matematikte kesin ve gelişmiş hesaplama yöntemlerinin kullanılmasını gerektirir.

Dinamik sistemlerde modelleme yapmak için en yaygın olarak kullanılan denklemler; diferansiyel denklemler, kısmi türevli denklemler ya da fark denklemleridir. Çalıştığımız probleme göre seçimimiz değişiklik gösterir. Modelde kullanılan zaman aralığı ayrık zaman dilimleri halinde ise fark denklemleri, değişim sürekli bir zamanda gerçekleşiyor ise diferansiyel denklemler kullanılabilir. Dinamik sistemlerde modelleme yapmak için son yıllarda çoğunlukla modeli daha doğru tanımlayabildiği ve türler arasındaki ilişkiyi, araştırılan durumu gerçeğe daha yakın modelleyebildiği için kesirli mertebeden türevler kullanılmaktadır.

Modeller başlangıçta oldukça basit tutulurken, daha sonra bu modeller geliştirilebilir. Örneğin, modelleri iyileştirmek için daha çok parametre ekleyebilir, modele başka fonksiyonlar eklenebilir ya da modelin boyutunu arttırmak gibi yöntemler kullanılabilinir. Bu özelliğiyle dinamik sistemler; fizik, kimya, biyoloji, mühendislik, ekoloji ve ekonomi gibi birçok alanda uygulama alanına sahip olup birçok teknolojik gelişmenin ortaya çıkmasında etkin rol oynayan çalışma alanıdır.

Canlıların yaşamları boyunca sürekli olarak besin ve enerji ihtiyaçları olmaktadır. Aynı türden bireyler; kaynakların sınırlı olması, bireysel çabaların yetersiz kalması, nesillerin devamlılığını sağlama, değişen çevre şartlarına karşı hayatta kalma mücadeleleri gibi çeşitli nedenlerle bir arada yaşarlar.

Belirli bir yaşam alanında bulunan tek bir türe ait bireylerin, oluşturduğu topluluklara popülasyon denir. Son yıllarda, dinamikte biyolojik modellerin dinamik sistemleri alanındaki birçok bilim insanı ve araştırmacı tarafından yapılan çalışmalar, popülasyon modelleri ve popülasyonlar arası etkileşim üzerine yoğunlaşmıştır. Bu yoğunlaşmanın temel nedenlerinden birisi doğal popülasyonların sürekli olarak değişim içinde olmasıdır.

Yaşam alanı ortak olan canlılar; barınma ortamı oluşturma, su bulma, besin bulma, enerji kaynaklarından faydalanma gibi çeşitli faktörler nedeniyle birbirleriyle yarış halindedirler.

Farklı türler aynı ortamda yaşasa bile ortamdan farklı etkilenir ve ortama farklı etkiler bırakırlar. Popülasyon türleri, kendi bireyleri arasında tür içi rekabet; farklı türlerle türler arası rekabet veya av-avcı ilişkisi içerisinde olurlar.

Av-avcı ilişkisi aynı alanda yaşayan farklı türler arasında gözlemlenen beslenme ilişkisidir. Avcı, avdan beslenerek beslenme ihtiyacını karşılar, av ise ortamda bulunan başka yiyeceklerle beslenir

Avcı ve av arasındaki etkileşim ekolojideki en temel süreçlerden biridir. Bu nedenle, birçok matematikçi, ekolog ve biyolog bu konu üzerinde araştırmalar yapmış ve av-avcı arasındaki etkileşimi tanımlayan dinamik davranışı incelemişlerdir.

Av-avcı modellerinde av popülasyonlarının ve avcı popülasyonlarının arasındaki etkileşimin zamana göre değişimi incelenmektedir. Örneğin avcı popülasyonunun besin kaynağının sadece av olduğu varsayımıyla avcı popülasyonun yoğun olması, av popülasyonun azalmasına yol açmaktadır. Av popülasyonunun azalması, temel besin kaynağı av olan avcı popülasyonunun azalmasına yol açacaktır. Azalan avcı popülasyonu karşısında av popülasyonu üremek için elverişli ortam bulacağından dolayı av popülasyonu artar. Dolayısıyla artan av popülasyonu, avcı popülasyonu için uygun besleme alanı oluşturup avcı popülasyonunun artmasına katkı sağlamaktadır. Böylece av ve avcı popülasyonları arasındaki etkileşim bu şekilde döngü halinde devam etmektedir.

Av ve avcı etkileşimleri genellikle lineer olmayan diferansiyel denklemler aracılığı ile ifade edilir. Dinamik sistem modellerinden biri olan av-avcı denklem sistemleri fark denklemleri, adi diferansiyel denklemler veya kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilebilir ve av-avcı modelleri de diğer dinamik sistem modelleri gibi son yıllarda popülasyon modellerini daha doğru tanımlayabildiği ve av türleri ile avcı türleri arasındaki ilişkiyi gerçeğe daha yakın modelleyebildiği için kesirli mertebeden türevler kullanılarak oluşturulmaktadır.

Ekolojik sistemlerin kararlılığı ve içindeki türlerin kalıcılığı ekolojide temel kaygılardır. Belli bir denklem veya denklem sistemleri için başlangıç şartları değiştirildiğinde problemi yeniden çözmek gerekir. Üstelik, söz konusu özel çözümler bağımsız değişkenin belli bir aralıktaki değerleri için geçerlidir, yani bağımsız değişkenin keyfi değerlerinde (değişken sonsuza da yaklaşabilir) çözümün ne olduğunu söylemek kolay olmayabilir.

Av-avcı problemleri gibi çoğu problem türlerinde merak konusu, problemin çözümü değil, çözümün karakteridir. Örneğin, başlangıç şartlarının değişimi çözümü nasıl etkiler, çözüm periyodik midir, çözümün diferansiyel özellikleri nelerdir, asimptotik olarak belli bir fonksiyona yaklaşıyor mu gibi sorular merak edilmektedir. Bu durumda incelenmesi gereken çözümün kararlılığıdır.

Bu tez çalışmasında, amacımız av-avcı modellerinde iki avcı arasındaki rekabetin ve geri besleme kontrolü ile av-avcı popülasyonlarının etkileşimini incelemektir. Bu nedenle, çalışmamızda av-avcı problem modelini avcı popülasyonunu ikiye çıkarıp modele geri besleme kontrol değişkeni getirerek Caputo kesirli türevi ile inceledik.

Bu tez çalışmasında sırasıyla;

1. bölümde, gerçek doğa olaylarının dinamik sistemler ile matematiksel modellenmesinden, bu modelin bir örneği olan av-avcı modeli ve av ile avcı aralarındaki etkileşimden bahsedildi.

2. bölümde, ilk av avcı modeli olan Lotka-Volterra av-avcı modeli tanıtıla-

rak, av-avcı modelinin tarihsel gelişimi, daha önce literatürde yapılan çalışmalar ve analiz edilen sistemler incelendi.

3. bölümde, denge noktaları, sistemin kararlılığı ve Caputo kesirli türev ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edildi.

4. bölümde, geri besleme kontrol değişkeni içeren iki avcı-tek av modeli q. mertebeden Caputo kesirli türeviyle modellenerek, oluşturulan denklem sisteminin denge noktaları araştırılmış ve bulunan denge noktalarında denklem sisteminin kararlılığı ve sayısal çözümü incelenmiştir.

5. bölümde Caputo kesirli türev ile oluşturulan av-avcı modelinin denge noktalarında denklem sisteminin kararlılığıyla ilgi elde edilen teroremler ifade edilmiştir.

6. bölümde yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

BÖLÜM 2. AV-AVCI MODELLERİNİN TARİHSEL GELİŞİMİ

Av ve avcı grupları arasında var olan ilişkinin incelenmesi Lotka-Volterra modeli ile başlamıştır. Av ve avcı sistemlerini modelleyen ilk denklem sistemi 1925'te Amerikalı biyofizikçi Alfred Lotka [1] tarafından, kimyasal bileşiklerin salınımsal davranış gösterdiği kimyasal bileşikleri ifade etmek; 1926'da Lotka'dan bağımsız olarak İtalyan matematikçi Vito Volterra [2] tarafından, I. Dünya Savaşı sırasında Adriyatik Denizindeki avcı balıklar ile avcı balıklar tarafından yenilen av balıklarının nüfusundaki değişiklikleri incelemek için geliştirilmiştir. Avusturya ve İtalya arasındaki savaş, ticari avlanmayı duraksamaya uğrattığından savaştan önceki yıllara oranla avcı balıkların nüfusu artmış, av balıklarının nüfusu da azalmıştır. Savaş avcı balıklara fayda sağlamıştır. Savaştan sonraki nüfusları da ifade eden klasik Lotka-Volterra modeli diferansiyel denklem sistemi ile aşağıdaki gibi verilmiştir;

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by),$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(-c + dx)\,.$$

Avcının avı besin kaynağı olarak seçmesi durumunda aralarında düşmanlık ilişkisi başlamaktadır. Burada biri diğerini avlayan, diğeri ise farklı kaynaklardan beslenen iki türden oluşan ekolojik bir durumu (yemek için rekabet etmiyorlar, ancak avcı besin kaynağı olan avı avlıyor) incelenmektedir.

Örneğin, kapalı bir ormandaki tilkiler ve tavşanlar düşünüldüğünde tilkiler tavşanları avlar, tavşanlar ormandaki bitkilerle beslenir. Diğer örnekler şöyledir; bir gölde avcı olarak levrek ve av olarak güneş balığı, avcı olarak uğur böceği ve av olarak yaprak biti verilebilir. İki türü içeren bir modelin doğada türler arasında meydana gelen karmaşık ilişkileri tamamen tarif edemeyeceğini tekrar vurgulayabiliriz. Bununla birlikte basit modellerin araştırılması daha karmaşık fenomenlerin anlaşılmasına doğru ilk adımdır. İki türün etkileşiminin bir modelini oluştururken;

1. Avcının yokluğunda, av şimdiki popülasyonuyla orantılı bir hızda artar. Böylece; $y = 0$ olduğunda $\frac{dx}{dt} = ax, a > 0$ olur.

2. Av olmadığı zaman, avcı nüfusu kendi nüfusuyla orantılı bir hızda azalır ve yok olur. Böylece; $x = 0$ olduğunda $\frac{dy}{dt} = -cy, c > 0$ olur.

3. Av ve avcının bir arada bulunması avcı türünün nüfusunun artmasına yararken av nüfusunun azalmasına neden olur. Av ve avcı arasındaki karşılaşma sayısı avların ve avcıların popülasyonlarının çarpımı ile orantılıdır. Bu karşılaşmaların her birisi avcının çoğalmasını desteklemeye ve avın çoğalmasını kısıtlamaya eğilimlidir. Böylece avcının çoğalma hızı dxy formundaki bir terimle artarken, avın çoğalma hızı $-bxy$ formundaki bir terimle azalır. Burada b ve d pozitif sabitlerdir.

Modelde $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla t anındaki av ve avcı popülasyonlarını gösterirken, $a, b, c\ ve\ d$ sabitlerinin hepsi pozitiftir. a avın çoğalma hızını, c ise avcının ölüm hızını gösterir. b ve d iki tür arasındaki etkileşimin birbirlerine etkilerinin ölçümleridir. b parametresi av ve avcı karşılaşması sonucu ölen av oranını, bx avcı başına düşen avlanma miktarını, bxy ise avlanma sonucunda av popülasyonunda meydana gelen azalmayı göstermektedir. d parametresi av ve avcının karşılaşmasının, avcı popülasyonuna olan pozitif etkisini göstermektedir.

Modelde avcının sadece avı tükettiği varsayıldığı için d parametresi avcı büyüme oranı olarak da düşünülebilir. dx avcı başına düşen av tüketim miktarını dxy ise avcı nüfusunun tükettiği toplam av miktarını göstermektedir. Her ne kadar bunlar oldukça basit denklemler olsa da, geniş bir problem sınıfını karakterize eder [3].

Lotka-Volterra modeliyle birlikte av-avcı problemiyle ilgili birçok araştırılmalar yapılmış, yeni modeller üretilmiştir. Bu modeller üretilirken av ya da avcı popülasyon sayısını arttırılmış veya modele taşıma kapasitesi, av sığınağı, geri besleme, benzer türden popülasyonların bir arada olma etkisi, göç etkisi ve çevresel şartlarda değişiklik gibi daha birçok değişken eklenerek araştırılmalar yapılmıştır.

Av ve avcı popülasyonları arasında belirtilen ilişki, her iki popülasyon için döngü oluşturur. Ancak incelenen bazı modeller bu döngüye olanak sağlarken bazı modeller türlerden birinin yok oluşunu ya da sınırsız büyümesini ortaya çıkarabilmektedir. Modelde döngü oluşmamasının nedeni, modeldeki başlangıç şartları ve seçilen parametrelerle ilişkilendirilmektedir.

Literatürde, av-avcı modellerinde avlanma miktarı işlevsel tepki fonksiyonu, avlanmanın avcı popülasyon büyüme oranına etkisi ise nümerik tepki olarak adlandırılmaktadır. Belirli bir ortamda farklı popülasyon türleri arasındaki etkileşimi tanımlayan fonksiyona ise etkileşim fonksiyonu denir. Literatürde bu fonksiyonların her birinin iki tür arasında belirli bir birbirine geçme tarzını açıkladığı farklı türleri vardır [4,5,6,7,8]. $x(t)$ ve $y(t)$, sırasıyla t anında av ve avcı popülasyonlarının yoğunluklarını göstermek üzere ilk etkileşim fonksiyonlarından biri a avcının saldırma oranı olmak üzere $ax(t)y(t)$, Holling I etkileşim fonksiyonudur. Bu fonksiyon literatürde en çok kullanılanlardan biridir. Ancak bu etkileşim fonksiyonuyla avın avcı tarafından tüketilmesinin doğadaki gerçek şartlarla bağdaşmayan sınırsızlığı gerçek etkileşimi tam olarak yansıtmamaktadır.

Holling tarafından yapılan diğer çalışmada [4], avcı tarafından av tüketiminin sınırsızlığı Holling II, $\frac{ax(t)y(t)}{1+at_h x(t)}$ etkileşim fonksiyonuyla ortadan kaldırılmıştır. Burada t_h avcının bir avı ortalama avlanma süresidir.

Literatürdeki diğer etkileşim fonksiyonları aşağıda listelenmiştir;

Holling III etkileşim fonksiyonu $\frac{a\left(x(t)\right)^2 y(t)}{1+at_h\left(x(t)\right)^2}$ [9], Genelleştirilmiş Holling III etkileşim fonksiyonu $\frac{a(x(t))^2 y(t)}{1+bx(t)+c(x(t))^2}$ [10],

Beddington-De Angelis etkileşim fonksiyonu $\frac{ax(t)y(t)}{1+bx(t)+cx(t)}$ [11],

Ratio-Dependent etkileşim fonksiyonu $\frac{ax(t)y(t)}{x(t)+y(t)}$ [12,13].

Etkileşim fonksiyonlarındaki tüm parametreler pozitiftir. Fonksiyonlardaki bu büyük çeşitliliğin sebebi problemdeki çevresel şartların çeşitliliğinden kaynaklanmaktadır. Bu parametrelerin seçimini etkileyen faktörlerden bazıları, avın davranışı, avcının davranışı, av ve avcının birbirleriyle etkileşimi ve çalışılan alandır. Çalışılan alan için nehirler (su mevcudiyeti), yiyecek (av için) ile av ve avcının yoğunluğu gibi birçok bileşen önemli rol oynar.

C.S Holling, Lotka-Volterra sistemini, b, c, d pozitif birer katsayı olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{k}\right)x - bxy,$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-c + zx),$$

şeklinde düzenlemiştir [4]. Burada; r, artan av popülasyon oranını gösteren pozitif sabit ve k ise popülasyon yoğunluğunun taşıma kapasitesidir. Holling, bu denklem sisteminin diğer av popülasyon modellerinden daha iyi olduğu sonucuna varmıştır. x küçüldükçe, kaynaklar için popülasyon türleri arasında rekabet çok azdır. Çünkü $1 - \frac{x}{k}$ değeri 1'e yaklaşır ve $r\left(1 - \frac{x}{k}\right)$ değeri r'ye yaklaşır. x artarken türler arasında rekabet azalır yani $1 - \frac{x}{k}$ değeri 0'a yaklaşır ve birey başına üreme oranı 0'a yaklaşır.

Holling ve arkadaşlarının çalışmalarında, sınır kapasitesine ulaşana kadar av yoğunluğunun artmasıyla birlikte avcılığın da arttığı görülmüştür. Çok fazla av olduğunda avcılar daha fazla av öldüremeyeceğinden dolayı;

$$y = w\frac{x}{r + x}$$

fonksiyonuyla, av oranı temsil edilmektedir.

James Tanner [14], bu düzenlemeleri dikkate alarak çalışmalarını genişletmiştir. Burada w ve r sabitleri avın az olması durumunda avcının avlanma ihtiyacının ne kadar hızlı arttığının belirlenmesi için kullanılan değerlerdir. r avcının av arama süresi, w ise maksimum avlanma oranı olarak ifade edilir (yani x sonsuza gittiğinde avlanma limiti). Avlanma için bu yeni modelle birlikte sistem yeniden düzenlenirse a, c, d pozitif birer katsayı olmak üzere Holling -Tanner modeli;

$$\frac{dx}{dt} = a\left(1 - \frac{x}{k}\right) - yw\frac{x}{r + x} \; ,$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-c + zx),$$

şeklinde olur.

Bazı araştırmacılar av sığınağının av-avcı modelleri için etkilerini araştırmış ve av sığınağının av-avcı etkileşimi üzerinde olumlu bir dengeleyici etkisi olduğu aynı zamanda av popülasyonunun kısmen avcılardan korunabileceği sonucuna varmışlardır [15,16].

Ma [7] tarafından yapılan çalışmada, sabit bir av sığınağı içeren bir av-avcı denklem sistemi aşağıdaki şekilde incelenmiştir;

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - c(x - R)y,$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -dy + e(x - R)y.$$

Buradaki $x(t)$ ve $y(t)$ avın ve avcının ilgili popülasyon yoğunluklarıdır, R ise av popülasyonunun sığınakta saklanma miktarıdır. Bu denklem sisteminde t ve denklem sistemiyle ilgili bütün diğer parametreler pozitiftir.

Kesirli mertebeden denklem sistemleri, yalnızca matematikte geleneksel tam sayı mertebeli denklem sistemlerinin bir uzantısı değil aynı zamanda bellek ve kalıtsal özellikler gibi tam sayı mertebeli denklem sistemlerinin sahip olmadığı bazı değerlere sahiptir [17,18].

Bilindiği gibi birçok biyolojik sistem belleğe sahiptir [19]. Tam sayılı mertebeden denklem sistemleri ile karşılaştırıldığında kesirli mertebeden denklem sistemleri popülasyon modellerini daha doğru tanımlayabilir ve av türleri ile avcı türleri arasındaki ilişkileri gerçeğe daha yakın olarak ortaya koyabilir [20,21]. Ek olarak, kesirli sıralı türevler birçok disiplinler arası alana da yaygın olarak uygulanmıştır. Ahmed ve ark. [20] yaptıkları çalışmada aşağıdaki gibi Lotka-Volterra av-avcı denklem sisteminin kesirli av-avcı sistemi haline getirmiştir;

$$
\begin{aligned}
{}_0^cD_t^q x(t) &= x(r - ax - by), \qquad x(0) = x_{0,}\\
{}_0^cD_t^q y(t) &= y(-d + cx), \qquad y(0) = y_0.
\end{aligned}
$$

Buradaki $0 < q < 1$ için ${}_0^cD_t^q$ $q.$ mertebeden Caputo kesirli türevi olmak üzere $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ sırasıyla av ve avcı nüfuslarıdır ve r, a, b, c, d pozitif sabitlerdir.

Tam sayı mertebelü türev içeren Leslie-Gower av-avcı modeli, x_1 av popülasyonu ve x_2 avcı popülasyonu olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= rx_1\left(1 - \frac{x_1}{d}\right) - \frac{a_1x_1x_2}{n_1 + x_1},\\
\frac{dx_2}{dt} &= sx_2\left(1 - \frac{a_2x_2}{n_2 + x_2}\right),
\end{aligned}
$$

şeklindedir [22].

Caputo kesirli türevi içeren Leslie-Gower av-avcı modeli ise;

$$\left({}^{c}D_{0^+}^{q}x\right)(t) = x\left(1 - \frac{ay}{k+x} - \frac{\sigma}{\tau + x}\right),$$
$$\left({}^{c}D_{0^+}^{q}y\right)(t) = \gamma y\left(1 - \frac{\beta y}{k+x}\right),$$

olarak modellenmiştir [23]. Burada $a, \beta, k, \sigma, \tau$ ve γ pozitif parametrelerdir ve $q \in (0,1)$ dir.

Av-avcı modellerinde incelenen modelin denge değerinin bazen istediğimiz şey olmadığını, belki de daha küçük bir değerin bazı durumlarda aranan değer olduğunu unutmayalım. Bu durumda biyolojik kontrol stratejisi kullanılarak uygulanabilecek bir geri besleme kontrol değişkeni getirerek modeli yapısal olarak değiştirebiliriz [24,25]. Son yıllarda geri bildirim kontrollerine sahip popülasyon modelleri ve biyolojik modeller yaygın olarak incelenmiştir [26,27]. Li ve ark. [28] tarafından yaptıkları çalışmada, sabit bir av sığınağı ve kontrol değişkeni içeren sistemi aşağıdaki şekilde incelenmiştir;

$$ {}_{0}^{c}D_{t}^{q}x(t) = x(r - ax) - b(x - R)y - cu, \qquad x(0) = x_0,$$
$$ {}_{0}^{c}D_{t}^{q}y(t) = -dy + e(x - R)y, \qquad y(0) = y_0,$$
$$ {}_{0}^{c}D_{t}^{q}u(t) = -ku + mx, \qquad u(0) = u_0.$$

Burada $x(t)$ ve $y(t)$, t zamanında avın ve avcının ilgili popülasyon yoğunlukları olduğunda, $u(t)$, t zamanında av popülasyonu geri besleme kontrol değişkenini belirtir; r, av popülasyonunun içsel büyüme oranını; a av popülasyonunun spesifik olmayan rekabet katsayısını; b, avcıların av popülasyonuna saldırı oranını; e tüketilen avları yeni avcıya dönüştüren avcıların etkinliğini; d, avcıların ölüm oranını belirtmektedir. R ise avın saklanma miktarını belirtir.

Üç türe sahip av ve avcı modelleri birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Çevrede iç içe geçme sadece iki popülasyonla sınırlı değildir ancak etkileşimler tek bir yerde ikiden fazla tür arasında tanımlanabilir. Bu bakış açısına sahip bilim insanları son yıllarda bu tür kompleks etkileşimleri modellemek üzerine çalıştılar. Örnek olarak; iki tür av ve bir avcı modeli verilebilir. Burada avcı her iki av popülasyonunu da avlama kapasitesine sahiptir [29]. Dahası av-avcı-süper avcı modellerinde avcı yalnızca avdan beslenirken süper avcı hem avdan hem avcıdan beslenir [30]. Bazı modellerde bir av iki avcı arasındaki etkileşim incelenmiştir. Burada iki tür aynı avdan beslenir ve avcı hayvanların doğası gereği bu tek avı yakalayabilmek için sürekli bir mücadele halindedirler. Gerçek durumlarda, bir avcının kendi avlanma bölgesini belirlediği görülmektedir. Bu tür bölgelerde başka yırtıcıların varlığı kesinlikle kabul edilemez. Bu duruma rekabet denir. Rekabetin bulunduğu modeller, birçok araştırma makalesinde de büyük ilgi görmüştür [8,31].

Dijilali ve ark. [32] yaptıkları çalışmada iki avcı bir av içeren av-avcı modeli Caputo kesirli türevi ile aşağıdaki gibi incelemiştir;

$$\frac{d^{\varepsilon}x}{dt^{\epsilon}} = rx\left(1-\frac{x}{k}\right) - f(x)y - g(x)z,$$
$$\frac{d^{\varepsilon}y}{dt^{\epsilon}} = e_1 f(x)y - \mu_1 y - \beta yz,$$
$$\frac{d^{\varepsilon}z}{dt^{\epsilon}} = e_2 g(x)y - \mu_2 y - \gamma yz.$$

Burada tek avcı içeren denklemlerden farklı olarak sisteme iki avcı türünün kendi arasındaki rekabet katsayısı eklenmiştir.

BÖLÜM 3. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

3.1. Özdeğer ve Özvektörler

$A, n \times n$ türünde reel değerli sabit bir matris olsun ve S bütün, $n \times 1$ türünde sabit kolon vektörlerini göstersin. $x \in S$ bilinmeyen vektör ve λ bir sayı olmak üzere;

$$Ax = \lambda x$$

denklemini göz önüne alalım. Açık olarak, 0 vektörü bu denklemin her λ sayısı için bir çözümüdür. λ sayısının bazı değerlerine karşılık gelen, $Ax = \lambda x$ denklemini sağlayan ve sıfır olmayan bir $x \in S$ vektörü için sağlanıyorsa, bu durumda λ ya A matrisinin bir özdeğeri, x vektörüne de A matrisinin bir karakteristik vektörü denir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

ve

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

olsun. Buna göre $Ax = \lambda x$ denklemi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır. Bu iki eşit matrisin karşılıklı bileşenleri eşitlenip düzenlenirse,

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

denklem sistemi bulunur. Aşikar olmayan bir çözüm aradığımızdan (3.1) denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. O halde

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

olmalıdır. Bu determinant matris notasyonu yardımıyla

$$|A - \lambda I| = 0$$

şeklinde yazılabilir, burada $I, n \times n$ türünde birim matristir. Böylece $Ax = \lambda x$ denkleminin belli bir λ değerine karşılık sıfır olmayan bir x vektör çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart λ nın n. dereceden (3.2) polinom denklemini sağlamasıdır.

Tanım 3.1. $A = (a_{ij})$, $n \times n$ türünde bir reel matris olsun. (3.2) denklemine A matrisinin karakteristik denklemi denir. A matrisinin özdeğerleri (3.2) denkleminin kökleridir.

Tanım 3.2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \tag{3.3}$$

denklem sistemini ele alalım.

$F(x_0, y_0) = 0$ ve $G(x_0, y_0) = 0$

eşitliklerini sağlayan (x_0, y_0) noktalarına (3.3) denklem sisteminin kritik noktaları denir. Kritik noktada garanti olan tek çözüm $x = x_0,\ y = y_0$ sabit çözümüdür [33].

(3.3) denklem sistemine eşdeğer olan lineer olmayan denklem,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{3.4}$$

şeklindedir.

x ekseni üzerinde hareket eden birim kütleli bir parçacıktan oluşan dinamik sistem düşünülürse ve $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ de ona etki yapan kuvvet ise bu durumda (3.4) denklemi parçacığın hareket denklemidir. (3.4) denklemi ya da ona eşdeğer (3.3) denklem sisteminin kritik noktaları $(0, x_0)$ noktalarıdır.

Böyle bir nokta parçacığın hareketinin hem $\frac{dx}{dt}$ hızı hem de $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ivmesinin sıfır olduğu bir duruma karşılık gelir. Dolayısıyla parçacık hareketsiz durumdadır ve bu yüzden parçacık denge durumundadır denir. Bu nedenle kritik nokta yerine denge noktası terimi de kullanılır.

Tanım 3.3. (x_0, y_0), (3.3) denklem sisteminin kritik noktası olsun. $C : [x(t), y(t)]$, (3.3) denklem sisteminin bir yolu olmak üzere;

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0 \tag{3.5}$$

ise; bu durumda $t \to \infty$ a giderken C yolu (x_0, y_0) kritik noktasına yaklaşıyor denir.

Tanım 3.4. (x_0, y_0), (3.3) denklem sisteminin kritik noktası olsun ve (3.5) eşitlikleri sağlansın;

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}$$

limiti mevcut ya da $t \to \infty$ için bu oran pozitif ya da negatif sonsuz ise bu durumda $t \to \infty$ için C yolu (x_0, y_0) kritik noktasına giriyor denir.

3.2. Denge Noktalarının Bulunması

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

diferansiyel denklem sisteminde t bağımsız değişken, $x_1, \dots, x_n$ bağımlı değişkenler ve $f_1, f_2, \dots, f_n$ sürekli ve kısmi türevlere sahip fonksiyonlardır. Bu denklem sistemini;

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ ve } F(x) = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

vektörleri ile en genel formda,

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x)$$

olarak ifade edersek; $F(\tilde{x}) = 0$ şartınu sağlayan dinamik bir sistemin $\tilde{x}$ sabit vektörü denge noktası olarak adlandırılır. $i = 1,2, \dots, n$ için

$$\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{\tilde{x}} = 0$$

denkleminin sonucu olarak, $x(t) = \tilde{x}$ sabit fonksiyonu dinamik sistemin bir çözümüdür.

Genellikle denge noktaları civarındaki sistemin davranışı ile ilgileniriz ve denge noktalarının civarındaki yörüngeler bu noktalara yakınsıyor ise sistem asimptotiksel olarak kararlı denir. Denge noktalarının civarındaki yörüngeler bu noktalara ıraksıyor ise kararsız ya da denge noktası civarında bir yörüngede kalıyor ise kararlı fakat asimptotiksel olarak kararlı değil denir. Kritik nokta olmayan bir noktadan başlayan sistem sonlu zaman sonra kritik noktaya ulaşamaz. Ayrıca kritik nokta olmayan en az bir noktadan geçen yörünge periyodik çözüme karşılık gelen kapalı bir eğri olmadıkça kendini kesmez.

Dört temel denge noktası çeşidi bulunmaktadır. Bunlar; düğüm noktası, semer noktası, merkez nokta ve sarmal noktadır.

1. Düğüm Noktası**:** Yolların dört tane yarı doğru ve parabol benzeri eğrilerden oluştuğu bir denge noktası düğüm noktasıdır. Böyle bir noktaya $t \to \infty$ (ya da $t \to -\infty$) için her bir yol ile yaklaşılır ve girilir.

2. Semer Noktası: Yolların dört tane yarı doğru ve hiperbol benzeri eğrilerden oluştuğu bu denge noktası bir semer noktasıdır. Böyle bir noktaya $t \to \infty$ için iki yarı doğru boyunca, $t \to -\infty$ boyunca diğer iki yarı doğru için yaklaşma

ve girme yoktur.

3. Merkez Nokta: Bir kapalı yol ailesi ile çevrili her bir denge noktası merkez noktadır. Böyle bir denge noktasına $t \to \infty$ ya da $t \to -\infty$ için yaklaşma ve girme yoktur.

4. Sarmal Nokta: Etrafında sarmal biçimde sonsuz sayıda dönen yollar ile çevrili bir denge noktası sarmal noktadır. Böyle bir noktaya bir yol boyunca $t \to \infty$ ya da $t \to -\infty$ için yaklaşma vardır ancak girme yoktur.

3.3. Denge Noktalarının Kararlılığı

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \tag{3.6}$$

denklem sistemi ele alındığında; a_1, a_2, b_1, b_2 katsayıları reel sabitler olmak üzere $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ise sistemin tek denge noktası (0,0) noktasıdır.

(3.6) denklem sisteminin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

olmak üzere bu karakteristik denklemin kökleri λ_1 ve λ_2 özdeğerleri olsun. Buna göre (3.6) denklem sisteminin denge noktasının yapısını λ_1 ve λ_2 denkleminin köklerinin yapısıyla belirleneceği açıktır. λ_1 ve λ_2 köklerinin yapısıyla ilgili ortaya çıkan durumlar incelendiğinde denge noktasının kararlılığıyla ilgili şartlar aşağıdaki şekilde elde edilir.

1. λ_1 ve λ_2 kökleri farklı reel sayı ve aynı işaretli olsun. Bu durumda (0,0) denge noktası bir düğüm noktasıdır. Ayrıca λ_1, $\lambda_2 < 0$ ise denge noktası asimptotik kararlıdır. λ_1, $\lambda_2 > 0$ ise denge noktası kararsızdır.

2. λ_1 ve λ_2 kökleri farklı reel sayı ve zıt işaretli olsun. Bu durumda (0,0) denge noktası bir semer noktasıdır. Semer noktasında bir özdeğer kararlılık bölgesinde olmasına rağmen diğer özdeğer kararlılık bölgesinde olmadığı için semer noktası kararsız olur.

3. λ_1 ve λ_2 kökleri sırf sanal olmayan eşlenik kompleks sayı ise bu durumda (0,0) denge noktası bir sarmal noktadır. Ayrıca λ_1, $\lambda_2 = a \pm ib$ olmak üzere $a < 0$ ise denge noktası asimptotik kararlı, $a > 0$ ise denge noktası kararsızdır.

4. λ_1 ve λ_2 kökleri eşit reel sayı olsun. Bu durumda (0,0) denge noktası bir düğüm noktasıdır. Ayrıca $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ise denge noktası asimptotik kararlı, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ise denge noktası kararsızdır.

5. λ_1 ve λ_2 kökleri sırf sanal olsun. Bu durumda (0,0) denge noktası bir merkez nokta olup kararsızdır.

6. (0,0) denge noktasının kararlı olması; her iki λ_1 ve λ_2 kökünün pozitif olmayan reel kısımlı olması ile ve asimptotik kararlı olması her iki kökünün negatif reel kısımlı olması ile eşdeğerdir.

n sayıda denklemin oluşturduğu,

$$
\begin{aligned}
x_1^{\prime(t)} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
x_2{}'(t) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_n x_n \\
&\vdots \\
x_n{}'(t) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

sabit katsayılı lineer homojen denklem sisteminin, $(i = 1,2,3, \dots n)$ olmak üzere $x_i{}'(t) = 0$ çözümü için,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

karakteristik denkleminin köklerine göre kararlılık şartları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

1. Tüm köklerinin (birinci veya k. dereceden kök) reel kısımları negatif olduğunda asimptotik kararlıdır (reel kökler de kompleks sayı olarak düşünülür);

2. Köklerinden en az birinin reel kısmı sıfırdan büyük olduğunda kararsızdır;

3. Tüm kökleri birinci dereceden aynı zamanda reel kısmı sıfır veya bir bölümünün sıfırdan küçük, bir bölümünün ise reel kısmı sıfır olduğunda marjinal kararlıdır ancak asimptotik kararlı değildir;

4. Yukarıdaki seçeneklerin kapsamadığı tüm durumlarda kararsızdır.

Tanım 3.5. [17] Bir ξ fonksiyonun q. mertebeden Riemann- Liouville kesirli integrali aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$${}_0\mathrm{I}_t^q \xi(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1}\ \xi(s)\mathrm{d}s, \qquad q > 0.$$

Burada $\Gamma(.)$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$ şeklinde tanımlanan Gamma fonksiyonudur.

Tanım 3.6. [17] Bir ξ fonksiyonunun q. mertebeden Caputo kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$ {}_{0}^{c}D_{t}^{q}\xi(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{0}^{t} (t-s)^{n-q-1} \ \xi^{(n)}(s)ds. $$

Burada $n-1 < q < n$ için n pozitif bir tamsayı ve $\xi^{(n)}(s)$, $\xi(s)$ nin $n.$ mertebeden türevidir. Özel olarak $0 < q < 1$ olduğunda;

$$ {}_{0}^{c}D_{t}^{q}\xi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{0}^{t} (t-s)^{-q} \ \xi'^{(s)}ds $$

elde edilir.

Lemma 3.1. [17] Caputo kesirli türevi; ${}_{t_0}^{c}D_{t}^{q}\xi(t)$ nin integrallenebilir olması durumunda,

$$ {}_{0}\mathrm{I}_{t}^{q} \ {}_{0}^{c}D_{t}^{q}\xi(t) = \xi(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\xi^{(k)}(0)}{k!} t^{k} $$

dir. Özel olarak $0 < q \leq 1$ için,

$$ {}_{0}\mathrm{I}_{t}^{q} \ {}_{0}^{c}D_{t}^{q}\xi(t) = \xi(t) - \xi(0) $$

elde edilir.

3.4. Kesirli Analizin Temel Teoremi

Caputo türevinin en önemli uygulamalarından biri kesirli diferansiyel denklemlerdir. Tam sayı mertebeli olmayan türevlerle başlatılan Riemann-Liouville türevli kesirli diferansiyel denklemlerin aksine, Caputo'nun türevine sahip bir kesirli diferansiyel denklem (veya bir kesirli diferansiyel denklemler sistemi) için bir başlangıç değer problemi şu şekilde formüle edilebilir:

$$\begin{cases} {}_{0}^{c}D_{t_0}^{q} y(t) = f\big(t, y(t)\big), \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = {y_0}^{(1)}, \dots, y^{(m-1)}(t_0) = {y_0}^{(m-1)}. \end{cases}$$

Burada, $f(t, y)$'nin sürekli olduğu varsayılır ve $y_0, {y_0}^{(1)}, \dots, {y_0}^{(m-1)}(t_0)$ türevleri $y(t_0)$'ın t_0 noktasındaki türevinin değerleridir. Açıkça kesirli türevlere göre daha net bir fiziksel anlama sahip olduklarından, tam sayı mertebeden türevlerin atanmış değerleri ile kesirli diferansiyel denklemi başlatmak daha faydalıdır. Riemann-Liouville ${}_{0}\mathrm{I}_{t_0}^{q}$ integralinin denklem sisteminin her iki tarafına uygulanması; $y(t)$ fonksiyonun t_0 merkezli $(m-1)$ dereceli Taylor polomu olmak üzere,

$$T_{m-1}[y; t_0](t) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!}$$

ve

$${}_{0}\mathrm{I}_{t_0}^{q}\, {}_{0}^{c}D_{t_0}^{q} y(t) = y(t) - T_{m-1}[y; t_0](t)$$

ile birlikte kesirli diferansiyel denklemin;

$$y(t) = [y; t_0](t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1}\ \mathrm{f(s, y(s))ds}$$

olarak yeniden formüle edilmesine yol açar [34].

Lemma 3.2. [35] $v(t)$, $[0, \infty)$üzerinde sürekli fonksiyon olma şartlarını sağlarsa

$${}_{0}^{c}D_{t}^{q} v(t) \leq \theta v(t)$$

elde edilir. Burada $0 < \mathrm{q} < 1$ ve θ sabittir ve

$$v(t) \leq v(0)E_q(\theta t^q), \quad \forall t \geq 0$$

elde edilir.

Tanım 3.7. $z \neq 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere bir $z = x + iy$ kompleks sayısını orijine birleştiren doğrunun reel eksenle pozitif yönde yaptığı açı θ olsun. Bu z kompleks sayısı için,

$$\theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda θ sayısına z nin argümenti denir. Eğer $0 \leq \theta < 2\pi$ ise bu durumda θ ya esas argüment denir ve $\mathrm{Arg}(z) = \theta$ şeklinde gösterilir.

Lemma 3.3. [36] q. mertebeden kesirli denklem sistemini;

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^q z(t) = f(z), \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

göz önüne alalım.

Burada $0 < q < 1$ ve $z \epsilon \mathbb{R}^n$ dir. Bu kesirli mertebeden denklem sisteminin denge noktası $f(z) = 0$ denklemi çözülerek hesaplanabilir. Eğer denge noktalarında $J = \frac{\partial f}{\partial t}$ Jacobian matrisinin bütün λ_i özdeğerleri Matignon şartını,

$$|Arg\lambda_i| > \frac{q\pi}{2},$$

sağlarsa denklem sistemi bu noktalarda yerel asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.1. [28] Sistemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + (k - r)\lambda + cm - rk = 0$ ise aşağıdaki kriterlerden herhangi birinin sağlanması durumunda sistem denge noktasında yerel asimptotik olarak kararlıdır.

1. $k \geq r$ ve $rk < cm,$

2. $k < r,\ rk < cm$, $(k + r)^2 < 4cm$ ve
   $0 < q < \frac{2}{\pi} arctan\left(\frac{\sqrt{4(cm-rk)-(k-r)^2}}{r-k}\right)$.

Teorem 3.2. [28] Sistemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + (k - r)\lambda + cm - rk = 0$ ise aşağıdaki kriterlerden herhangi birinin sağlanması durumunda sistem denge noktasında yerel asimptotik olarak kararlıdır.

1. $k^2 + rk - 2cm \geq 0$ ve $rk > cm$,

2. $k^2 + rk - 2cm < 0$ ve $rk > cm$, $(k^2 + rk - 2cm)^2 < 4k^2(rk - \ 2cm)$
   ve $< q < \frac{2}{\pi} arctan\left(\frac{\sqrt{4k^2(rk-2cm)-(k^2+rk-2cm)^2}}{2cm-k^2-rk}\right)$.

3.5. Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri

Routh-Hurwitz kararlılık kriteri bir denklem sisteminin kararkteristik denklemini çözmeye gerek kalmadan denklem sisteminin kararlılığını veya kararsızlığını gösterir. Bu kriter sadece sonlu sayıda terime sahip karakteristik denklemlere uygulanabilir.

$$L(D) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{3.8}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $a_1, a_2, \dots, a_n$ katsayıları reel sabitlerdir. (3.8) denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı onun

$$L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + \ a_{n-1}\lambda + a_n$$

karakteristik polinomunun köklerinin yapısına bağlıdır.

Reel katsayılı,

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

karakteristik denkleminin köklerinin tümünün reel kısımlarının negatif olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki $n \times n$ boyutundaki Hurwitz matrisinin bütün asli köşegen minörlerinin pozitif olmasıdır.

$$(H_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Hurwitz matrisinin bütün asli köşegen minörleri aşağıdaki gibidir:

$$D_1 = |a_1|, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, D_n = detH_n.$$

Burada $D_n = a_n D_{n-1}$ olduğundan $D_1 > 0,\ D_2 > 0, \dots, D_n > 0$ şartlarından sonuncusu $a_n > 0$ şartı ile değiştirilebilir [37].

Tanım 3.8. (3.8) denkleminin $L(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerinin tümü negatif reel kısımlara sahip ise bu durumda $L(D)$ polinomuna kararlıdır denir.

Teorem 3.3. (3.8) denkleminin $L(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerinin tümü negatif reel kısımlara sahip ise bu durumda diferensiyel denklemin $y \equiv 0$ aşikar çözümü asimptotik kararlıdır.

3.6. n. Dereceden Polinomların Diskriminantı

n. dereceden;

$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_ix^{n-i} + \cdots + a_n$

polinomu için genel diskriminant ifadesi;

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & \vdots & (n-1)a_1 & n & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & 1 & (n-2)a_2 & (n-1)a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_1 & \vdots & (n-2)a_2 & \ddots & n \\ \vdots & \ddots & a_2 & \vdots & \vdots & \ddots & (n-1)a_1 \\ a_{n-1} & \ddots & \vdots & a_{n-1} & \vdots & \ddots & (n-2)a_2 \\ a_n & \ddots & \vdots & 0 & a_{n-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [38].

BÖLÜM 4. AV-AVCI MODELİNİN CAPUTO KESİRLİ TÜREV İLE İNCELENMESİ

Bu bölümde q.mertebeden Caputo kesirli türev ile geri besleme kontrol değişkeni içeren iki avcı-tek av modeli incelenmiştir. İlk olarak Caputo kesirli türev ile av-avcı modeli oluşturularak daha sonra bu modelin denge noktaları incelenmiş ve bulunan denge noktalarında modelin kararlılığı incelenmiştir.

4.1. Geri Besleme Kontrol Değişkeni ile İki Avcı-Tek Av İçeren Modelin Caputo Kesirli Türev ile İncelenmesi

$0 < q < 1$ olmak üzere q. mertebeden ${}_0^cD_t^q$ Caputo kesirli türevi ile aşağıdaki sistemi göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
{}_0^cD_t^q x(t) &= x\left(r - ax - \frac{rx}{k}\right) - f(x)y - g(x)z - cu, \qquad x(0) = x_0, \\
{}_0^cD_t^q y(t) &= e_1 f(x)y - \mu_1 y - \beta yz, \qquad y(0) = y_0, \\
{}_0^cD_t^q z(t) &= e_2 g(x)z - \mu_2 z - \gamma yz, \qquad z(0) = z_0, \\
{}_0^cD_t^q u(t) &= -hu + mx, \qquad u(0) = u_0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

(4.1) denklem sisteminde f ve g fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlar;

1. $f(0) = 0, \quad g(0) = 0,$
2. $x > 0$ için $f'(x) > 0, \quad g'(x) > 0.$ (4.2)

Burada; ${}_0^cD_t^q$, $q \in (0,1)$ olmak üzere q. mertebeden Caputo kesirli türevini $x(t)$, t zamanında av popülasyonun yoğunluğunu; $y(t)$ ve $z(t)$ sırasıyla t zamanında birinci avcı ve ikinci avcıların popülasyon yoğunluğunu; $u(t)$, t zamanında av popülasyonu için geri besleme kontrol değişkenini; r, av popülasyonunun içsel büyüme oranınını; a, av popülasyonunun tür içi rekabet katsayısını; k, av popülasyonu için uzayın taşıma kapasitesini; e_1, av biyokütlesinin birinci avcı popülasyonuna dönüşüm oranını; e_2, av biyokütlesinin ikinci avcı popülasyonuna dönüşüm oranını; μ_1, birinci avcı popülasyonun ölüm oranını; μ_2, ikinci avcı popülasyonun ölüm oranını; β, birinci avcı popülasyonunun ikinci avcı popülasyonuyla rekabet oranını; γ, ikinci avcı popülasyonunun birinci avcı popülasyonuyla rekabet oranını; $f(x)$, birinci avcı popülasyonunun av popülasyonuyla etkileşim oranını; $g(x)$, ikinci avcı popülasyonunun av popülasyonuyla etkileşim oranını göstermektedir. Burada tüm parametreler pozitiftir.

4.2. İki Avcı-Tek Av Modelinin Denge Noktaları

Bu kısımda (4.1) denklem sisteminin yerel davranışı incelenecektir. Öncelikle (4.1) denklem sisteminin çözümleri olan aşağıdaki sistemin çözümleri bulunarak, (4.1) denklem sisteminin denge noktaları bulunacaktır;

$$\begin{aligned}
0 &= x\left(r - ax - \frac{rx}{k}\right) - f(x)y - g(x)z - cu,\\
0 &= e_1 f(x)y - \mu_1 y - \beta yz,\\
0 &= e_2 g(x)z - \mu_2 z - \gamma yz, \qquad (4.3)\\
0 &= -hu + mx.
\end{aligned}$$

1. (4.1) denklem sisteminin her zaman $E_0(0,0,0,0)$ denge noktası vardır. Bu durumda E_0 denge noktası, üç popülasyon türünün yok oluşunu temsil eder.

2. İki avcının da olmadığı denge noktası $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ olmak üzere bu denge noktası iki avcının da neslinin tükenmesi anlamına gelir. E_1 denge noktasına yırtıcı olmayan denge noktası denir. Burada,

$x_1 = \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$, $u_1 = \frac{km(rh-cm)}{h^2(ak+r)}$ dır.

3. Birinci avcının yok olduğu ikinci avcının var olduğu denge noktası, $E_2(x_2, 0, z_2, u_2)$ denge noktasıdır. $y = 0$ değerini (4.3) denklem sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazarak $x_2 = g^{-1}\left(\frac{\mu_2}{e_2}\right)$, $u_2 = \frac{m}{h}g^{-1}\left(\frac{\mu_2}{e_2}\right)$ bulunur. Burada, g fonksiyonu birebir ve örten olduğundan g^{-1} ters fonksiyonu vardır. Bu son sonucu (4.3) denklem sisteminin ilk denkleminde yerine yazarak,

$$z_2 = \frac{e_2 x_2 \left(r - a x_2 - \frac{r x_2}{k} - \frac{cm}{h}\right)}{\mu_2}$$

elde edilir. z_2 değerinin pozitif olması için $x_2 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ olması gerekir. Böylece $x_2 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ sağlandığında birinci avcının olmadığı ama av ve ikinci avcı türünün birlikte yaşadığı pozitif bir dengenin var olduğu bilgisine ulaşabiliriz.

4. İkinci avcıdan arınmış, birinci avcının var olduğu denge noktası, $E_3(x_3, y_3, 0, u_3)$ noktasıdır. $z = 0$ değerini (4.3) denklem sisteminin ikinci denkleminde yerine yazarak $x_3 = f^{-1}\left(\frac{\mu_1}{e_1}\right)$, $u_3 = \frac{m}{h}f^{-1}\left(\frac{\mu_1}{e_1}\right)$ bulunur. Burada f fonksiyonu birebir ve örten olduğundan f^{-1} ters fonksiyonu vardır. Bu son sonucu (4.3) denklem sisteminin ilk denkleminde yerine yazarak,

$$y_3 = \frac{e_1 x_3 \left(r - a x_3 - \frac{r x_3}{k} - \frac{cm}{h}\right)}{\mu_1}$$

elde edilir. y_3 değerinin pozitif olması için $x_3 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ sağlanması gerekir.

$x_3 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ olması biyolojik açıdan birinci avcı ve avın birlikte yaşadıkları pozitif dengeyi verdiği için önemlidir. Bu durumda, $E_3(x_3, y_3, 0, u_3)$ denge noktasının varlığında $x_3 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ olduğu sonucunu elde ederiz.

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları (4.2) denklemleriyle verilen (1) ve (2) şartlarını sağladığı için x'e göre artan fonksiyonlardır. x_2 ve x_3 değerleri için eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = b_1$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x) = b_2$ ise parametreler üzerinde $\frac{\mu_1}{e_1} < b_1$ ve $\frac{\mu_2}{e_2} < b_2$ şartı daha ortaya çıkar ki bu $f(x) = \frac{\mu_1}{e_1}$ ve $g(x) = \frac{\mu_2}{e_2}$ denklemlerinin bir çözüme sahip olması için gerekli şarttır.

5. Şimdi üç türün bir arada varoluş dengesini inceleyelim. Üç türün bir arada yaşadığı pozitif denge noktası $E_4 = (x^*, y^*, z^*, u^*)$, aşağıdaki denklem sisteminin pozitif çözümleridir.

$$\begin{aligned}
0 &= x\left(r - ax - \frac{rx}{k}\right) - f(x)y - g(x)z - cu,\\
0 &= e_1 f(x) - \mu_1 - \beta z,\\
0 &= e_2 g(x) - \mu_2 - \gamma y,\\
0 &= -hu + mx.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4) denklem sisteminde $0 = e_2 g(x) - \mu_2 - \gamma y$ eşitliğinden,

$$y^* = \frac{e_2}{\gamma} g(x) - \frac{\mu_2}{\gamma}, \tag{4.5}$$

eşitliğini elde ederiz. Daha sonra, $0 = e_1 f(x) - \mu_1 - \beta z$ eşitliğinden,

$$z^* = \frac{e_1}{\beta} f(x) - \frac{\mu_1}{\beta}, \tag{4.6}$$

eşitliğini elde ederiz.

Bulduğumuz (4.5) ve (4.6) değerlerini, (4.4) denklem sisteminin ilk denkleminde yerine yazarak, $F_1(x) = F_2(x)$ sonucuna ulaşırız. Burada;

$$F_1(x) = x\left(r - ax - \frac{rx}{k}\right) - \frac{cmx}{h},$$
$$F_2(x) = f(x)g(x)\left(\frac{e_2}{\gamma} - \frac{e_1}{\beta}\right) - \left(\frac{\mu_2}{\gamma}f(x) - \frac{\mu_1}{\beta}g(x)\right),$$

olarak elde edilir.

Böylece, $F_1(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$F_1(0) = F_1\left(\frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)}\right) = 0,$$

$$F_1(x) = \begin{cases} > 0, & x < \dfrac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} \quad ise \\ < 0, & x > \dfrac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} \quad ise \end{cases}$$

İki eğri arasında, değişkenlerin sıfır olmadığı en az bir kesişmeyi garanti etmek için $x_2 = g^{-1}\left(\frac{\mu_2}{e_2}\right)$ ve $x_3 = f^{-1}\left(\frac{\mu_1}{e_1}\right)$ olmak üzere, $F_1(x)$ ve $F_2(x)$ fonksiyonları için aşağıdaki şartları ele alabiliriz.

$\tilde{x} = max\{x_2, x_3\}$ için $F_1(\tilde{x}) > F_2(\tilde{x})$ ve $F_2\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) > 0.$

Bu şartı; $\tilde{x} < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$, $r > r_\varepsilon := \dfrac{k\left(\frac{f(x)g(x)\left(\frac{e_2}{\gamma}-\frac{e_1}{\beta}\right)-\left(\frac{\mu_2}{\gamma}f(x)-\frac{\mu_1}{\beta}g(x)\right)}{x} + \frac{cm}{h} + ax\right)}{k-x}$ şeklinde yeniden yazabiliriz. Böylece bu şart bize sistemin negatif olmayan en az bir çözümün varlığını gösterir. Bu durum bize (4.1) denklem sisteminin üç türün bir arada yaşadığı pozitif denge noktasının varlığını verir.

4.3. İki Avcı-Tek Av Modelinin Asimptotik Davranışı

Bu bölümde önceki bölümde ifade edilen (4.1) denklem sisteminin, denge noktalarının asimptotik kararlılığını inceleyeceğiz. Kesirli mertebeden türev için yerel asimptotik kararlılık kavramı, birinci mertebeden türevden farklıdır. Birinci mertebeden türev ile karşılaştırıldığında kararlılık bölgesinin genişlediği görülür.

$E(x,y,z,u)$ noktası (4.1) denklem sisteminin denge noktası olmak üzere (4.1) denklem sisteminin $E(\mathrm{x,y,z,u})$ denge noktasındaki Jacobian matrisi;

$$J(E) = \begin{pmatrix} r-2ax-\frac{2rx}{k}-f'(x)y-g'(x)z & -f(x) & -g(x) & -c \\ e_1 f'(x)y & e_1 f(x)-\mu_1-\beta z & -\beta y & 0 \\ e_2 g'(x)z & -\gamma z & e_2 g(x)-\mu_2-\gamma y & 0 \\ m & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Üç türün yok olması anlamına gelen $E_0(0,0,0,0)$ denge noktasının kararlılığını inceleyelim. $E_0(0,0,0,0)$ denge noktasında (4.1) denklem sisteminin Jacobian matrisi;

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r & -f(0) & -g(0) & -c \\ 0 & e_1 f(0)-\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 g(0)-\mu_2 & 0 \\ m & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

ve $J(E_0)$ Jacobian matrisi için karakteristik denklem,

$$\left(\lambda-(e_1f(0)-\mu_1)\right)\left(\lambda-(e_2g(0)-\mu_2)\right)(\lambda^2+(h-r)\lambda+cm-rh)=0 \qquad (4.7)$$

olur. (4.7) karakteristik denklemin özdeğerleri;

$\lambda_2=e_1f(0)-\mu_1, \qquad \lambda_3=e_2g(0)-\mu_2$

ve

$$\lambda_{1,4}=\frac{-(h-r)\pm\sqrt{\Delta_1}}{2} \qquad (4.8)$$

olarak elde edilir. Burada $\Delta_1=(h-r)^2-4(cm-rh)$ dir.

Açıkça görülmektedir ki $\lambda_2=e_1f(0)-\mu_1<0$ ve $\lambda_3=e_2g(0)-\mu_2<0$ yani λ_2 ve λ_3 özdeğerleri daima negatiftir. Böylece $|Arg\,(\lambda_2)|=\pi>\frac{q\pi}{2}$ ve $|Arg\,(\lambda_3)|=\pi>\frac{q\pi}{2}$ dir.

Bu durumda (4.1) denklem sisteminin; E_0 denge noktasında kararlığının belirlenebilmesi için diğer iki özdeğerlerin incelenmesi gerekmektedir. λ_1 ve λ_4 özdeğerleri için $h>r,\ h=r$ ve $h<r$ olmak üzere üç farklı durum incelenmelidir.

1. $h>r$.

   (1a) $rh<cm$ için eğer $\Delta_1\geq 0$ ise (4.8) denkleminden E_0 denge noktasında Jacobian matrisin karakteristik denkleminin $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ve λ_4 özdeğerlerinin negatif olduğu görülür. Bu durumda (4.1) denklem sistemi E_0 denge noktasında her $0<q<1$ değeri için yerel asimptotik kararlı olur. Aslında $\left|Arg\,(\lambda_{1,2,3,4})\right|=\pi>\frac{q\pi}{2}$ olduğu için her $0<q<1$ için Lemma 3.3 e göre kararlıdır.

Eğer $\Delta_1 < 0$ ise λ_1 ve λ_4 özdeğerleri negatif reel kısımlara sahip kompleks eşlenik köklerdir. Bu durumda her $0 < q < 1$ için

$$\left|\mathrm{Arg}(\lambda_{1,4})\right| = arctan\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{r-h}\right) + \pi > \frac{q\pi}{2},$$

olur.

Lemma 3.3 ten E_0 denge noktasında yerel asimptotoik kararlı olduğunu görürüz.

(1b) $rh = cm$ için Jacobian matrisin karakteristik denkleminden bir özdeğerin sıfır olduğunu ve kalan üç özdeğerin negatif olacağını söyleyebiliriz. Öyleyse E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi marjinal kararlıdır.

(1c) $rh > cm$ ise $\Delta_1 = (h+r)^2 - 4cm > 0$ ve E_0 denge noktasındaki Jacobian matrisin karakteristik denkleminden ise λ_1 ve λ_4 özdeğerlerinden birinin pozitif diğerinin negatif olduğunu görürüz.

Öyleyse $\lambda_1 > 0$ ve $\lambda_4 < 0$ olsun. Bu durumda her $0 < q < 1$ için $|Arg\ (\lambda_1)| = 0 < \frac{q\pi}{2}$ $|Arg\ (\lambda_4)| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ olur. Dolayasıyla E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

2. $h = r$.

(2a) $rh < cm$ ve $\Delta_1 < 0$ sağlanırsa karakteristik denklem reel olmayan eşlenik özdeğerlere sahiptir. $\lambda_1 = 2\sqrt{cm - rh}i$ ve $\lambda_4 = -2\sqrt{cm - rh}i$ özdeğerlerine sahiptir. Bu durumda her $0 < q < 1$ için $\left|Arg\ (\lambda_{1,4})\right| = \frac{\pi}{2} > \frac{q\pi}{2}$ sağlanır. Aynı zamanda $\lambda_2 < 0$ ve $\lambda_3 < 0$ olduğu için Lemma 3.3. gereği E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

(2b) $rh = cm$ için $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ ve λ_2 ve λ_3 negatiftir. Bu durumda E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi marjinal olarak kararlıdır.

(2c) $rh > cm$ ise (4.7) denkleminden $\lambda_1 = 2\sqrt{cm - rh}$ ve $\lambda_4 = -2\sqrt{cm - rh}$ değerleri elde edilir. Bu durumda her $0 < q < 1$ için $|\mathrm{Arg}\,(\lambda_1)| = 0 < \frac{q\pi}{2}$ ve $|\mathrm{Arg}\,(\lambda_4)| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ olur. Dolayısıyla E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

3. h < r.

(3a) $rh < cm$ için eğer $\Delta_1 \geq 0$ olursa λ_1 ve λ_4 özdeğerleri pozitif olur. Bu durumda her $0 < q < 1$ için

$$\left|Arg\,(\lambda_{1,4})\right| = 0 < \frac{q\pi}{2}$$

olur. Dolayısıyla E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

$\Delta_1 < 0$ olursa λ_1 ve λ_4 pozitif reel kısımları olan kompleks eşleniklerdir. Lemma 3.3. gereği $\left|\mathrm{Arg}\,(\lambda_{1,4})\right| = \arctan\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{r-h}\right) > \frac{q\pi}{2}$ sağlanırsa E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik kararlı olur.

(3b) $rh = cm$ ise (4.7) denkleminin $\lambda_1 = r - h$ özdeğerinin pozitif olduğu görülür. Bu durumda her $0 < q < 1$ için $|Arg\,(\lambda_1)| = 0 < \frac{q\pi}{2}$ olur ve Lemma 3.3 ten E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

(3c) $rh > cm$ için $\Delta_1 = (h + r)^2 - 4cm > 0$ olur. (4.7) denkleminden λ_1 ve λ_4 pozitif ve diğer iki özdeğer olan λ_2 ve λ_3 negatif olduğunu görürüz. Dolayısıyla E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

$r < h,$ $rh < cm,$ $(h + r)^2 < 4cm$ için $\left|\mathrm{Arg}(\lambda_{1,4})\right| = \arctan\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{r-h}\right)$ olduğunda;

$\Delta_1 = (h-r)^2 - 4(cm - rh)$ olmak üzere,

$$0 < \mathrm{q} < \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\sqrt{4(\mathrm{cm}-\mathrm{rh})-(\mathrm{h}-\mathrm{r})^2}}{\mathrm{r}-\mathrm{h}}\right) < \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$$

elde edilir.

Şimdi (4.1) denklem sisteminin avcıdan arınmış $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ denge noktasının kararlılığını inceleyelim. (4.1) denklem sisteminin $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ denge noktasındaki Jacobian matrisi;

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} r - \frac{2cm}{h} & -f\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) & -g\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) & -c \\ 0 & e_1 f\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 g\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_2 & 0 \\ m & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu Jacobian matrisin karakterstik denklemi,

$$\left(\lambda - (e_1 f(x_1) - \mu_1)\right)\left(\lambda - (e_2 g(x_1) - \mu_2)\right)\left(\lambda^2 + \left(r - \frac{2cm}{h} + h\right)\lambda + \mathrm{rh} - \mathrm{cm}\right) = 0$$

olur. $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ denge noktasındaki Jacobian matrisin özdeğerleri ;

$$\lambda_2 = e_1 f\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_1, \quad \lambda_3 = e_2 g\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_2,$$

ve

$$\lambda_{1,4} = \frac{-\frac{h^2 + rh - 2cm}{h} \pm \sqrt{\Delta_2}}{2} \tag{4.9}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\Delta_2 = \frac{(h^2 + rh - 2cm)^2 - 4h^2(rh - cm)}{h^2}$$

olarak yazılabilir. Böylece $x_3 = f^{-1}\left(\frac{\mu_1}{e_1}\right)$ olmak üzere;

$$\lambda_2 = \begin{cases} < 0, & \dfrac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} < \mathrm{x}_3 \ ise \\ > 0, & \dfrac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} > \mathrm{x}_3 \ ise \end{cases}$$

ve $x_2 = g^{-1}\left(\frac{\mu_2}{e_2}\right)$ olmak üzere;

$$\lambda_3 = \begin{cases} < 0, & \dfrac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} < \mathrm{x}_2 \ ise \\ > 0, & \dfrac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} > \mathrm{x}_2 \ ise \end{cases}$$

elde edilir. Açıkça görülmektedir ki eğer $x < \tilde{x} = \min\{\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$ ise λ_2 ve λ_3 negatiftir.

Şimdi λ_1 ve λ_4 özdeğerlerini inceleyelim. Burada $h^2 + rh - 2cm > 0$, $h^2 + rh - 2cm = 0$ ve $h^2 + rh - 2cm < 0$ olmak üzere üç farklı durum oluşur. Bu üç farklı durumu sırasıyla inceleyelim.

1. $h^2 + rh - 2cm > 0$.

   rh > cm için eğer $\Delta_2 \geq 0$ olursa (4.9) denkleminden λ_1 ve λ_4 özdeğerlerinin negatif olduğunu görürüz. Eğer $x < \tilde{x} = \min\{\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$ ise λ_2 ve λ_3 özdeğerleri de negatif olur. Bu durumda $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ denge noktasında (4.1) denklem sistemi her $0 < q < 1$ için yerel asimptotik kararlı olur.

Aslında $|Arg\ (\lambda_{1,2,3,4})| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ ise her $0 < q < 1$ için (4.1) denklem sistemi Lemma 3.3. nedeniyle kararlıdır.

Eğer $\Delta_2 < 0$ ise λ_1 ve λ_4 özdeğerleri negatif reel kısımlara sahip kompleks eşlenik köklerdir. Böylece her $0 < q < 1$ için $|\mathrm{Arg}(\lambda_{1,4})| = \arctan\left(\frac{h\sqrt{-\Delta_1}}{-h^2-rh+2cm}\right) + \pi > \frac{q\pi}{2}$ sağlanır. Bu durumda eğer $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3\}$ ise $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ denge noktasında (4.1) denklem sistemi Lemma 3.3. gereği yerel asimptotik olarak kararlıdır.

2. $h^2 + rh - 2cm = 0.$

rh > cm için $\Delta_2 < 0$ ise E_1 denge noktasındaki Jacobian matrisin karakteristik denkleminden $\lambda_1 = 2\sqrt{rh - cm}i$ ve $\lambda_4 = -2\sqrt{rh - cm}i$ özdeğerleri sanal köklere sahiptir.

Bunun anlamı her $0 < q < 1$ için $|Arg\ (\lambda_{1,4})| = \frac{\pi}{2} > \frac{q\pi}{2}$. Böylece eğer $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3\}$ ise $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ denge noktası Lemma 3.3. gereği (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

3. $h^2 + rh - 2cm < 0.$

$rh > cm$ için eğer $\Delta_2 \geq 0$ olursa λ_1 ve λ_4 pozitif olur. Bunun anlamı her $0 < q < 1$ için $|Arg\ (\lambda_{1,4})| = 0 < \frac{q\pi}{2}$ ve $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

$\Delta_2 < 0$ ise λ_1 ve λ_4 reel kısımları olan kompleks eşleniklerdir. Eğer $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3\}$ ise $\lambda_2 < 0$ ve $\lambda_3 < 0$ olur. Lemma 3.3 gereği $|Arg\ (\lambda_{1,4})| = arctan\left(\frac{h\sqrt{-\Delta_1}}{-h^2-rh+2cm}\right) > \frac{q\pi}{2}$ sağlanırsa E_1 denge noktasında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik kararlı olur.

$h^2 + rh - 2cm < 0,\ rh > cm,\ (h^2 + rh - 2cm)^2 < 4h^2(rh - cm)$ için,

$\left|\operatorname{Arg}(\lambda_{1,4})\right| = \arctan\left(\frac{\sqrt{4h^2(rh-cm)-(h^2+rh-2cm)^2}}{-h^2-rh+2cm}\right) < \frac{\pi}{2}$ sağlanırsa,

$$q < \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\sqrt{4h^2(rh-cm)-(h^2+rh-2cm)^2}}{-h^2-rh+2cm}\right) < \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$$

elde edilir.

Şimdi (4.1) denklem sisteminin birinci avcının olmayıp ikinci avcının ve avın olduğu $E_2(x_2, 0, z_2, u_2)$ denge noktasının kararlılığını inceleyelim. (4.1) denklem sisteminin $E_2(x_2, 0, z_2, u_2)$ denge noktasındaki Jacobian matrisi,

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} r - 2ax_2 - \frac{2rx_2}{k} - g'(x_2)z_2 & -f(x_2) & -g(x_2) & c \\ 0 & e_1 f(x_2) - \mu_1 - \beta z_2 & 0 & 0 \\ e_2 g'(x_2) z_2 & -\gamma z_2 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

şeklindedir. İlk olarak $\lambda_2 = e_1 f(x_2) - \mu_1 - \beta z_2$ nin $J(E_2)$ Jacobian matrisinin özdeğeri olduğu görülebilir.

λ_2 özdeğerinde, $z_2 = \frac{e_2 x_2\left(r - ax_2 - \frac{rx_2}{k} - \frac{cm}{h}\right)}{\mu_2}$ ifadesini yerine yazarak,

$$\lambda_2 = e_1 f(x_2) - \mu_1 - \frac{\beta e_2 x_2 \left(r - ax_2 - \frac{rx_2}{k} - \frac{cm}{h}\right)}{\mu_2}$$

elde ederiz. Açıkça görülmektedir ki eğer $e_1 f(x_2) - \mu_1 < 0$ ($x_2 < x_3$ ise) olursa $|\operatorname{Arg}(\lambda_2)| > \frac{q\pi}{2}$ olur. Şimdi biz $e_1 f(x_2) - \mu_1 > 0$ ($x_2 > x_3$ ise) olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\lambda_2 = \begin{cases} > 0, & r < r_1 := \dfrac{k\left(\frac{(e_1 f(x_2)-\mu_1)\mu_2}{\beta e_2 x_2}+a x_2+\frac{cm}{h}\right)}{k-x_2}\ ise \\ < 0, & r > r_1\ ise \end{cases}$$

elde edilir. $\lambda_2 > 0$ olduğunda $|\mathrm{Arg}\,(\lambda_2)| < \frac{q\pi}{2}$ olur ve bunun anlamı E_2 denge noktasında (4.1) denklem sisteminin kararsız olduğudur.

Bu durumda E_2 denge noktasında (4.1) denklem sisteminin kararlılığını ya da kararsızlığını diğer üç özdeğer belirleyecektir. Bu önemli özdeğerlerin aşağıdaki matrisin özdeğerleri olduğuna dikkat edelim.

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} r - 2ax_2 - \dfrac{2rx_2}{k} - g'(x_2)z_2 & -g(x_2) & -c \\ e_2 g'(x_2)z_2 & 0 & 0 \\ m & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$\tilde{J}$ indirgenmiş matrisinin özdeğerlerinin doğasını belirlemek için $\tilde{J}$ indirgenmiş matrisinin karakteristik denklemi,

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \vartheta_1\lambda^2 + \vartheta_2\lambda + \vartheta_3$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\vartheta_1 = h - r + 2ax_2 + \frac{2rx_2}{k} + g'(x_2)z_2,$$

$$\vartheta_2 = -cm - hr + 2hax_2 + \frac{2hrx_2}{k} + hg'(x_2)z_2 - e_2 g'(x_2)z_2 g(x_2),$$

$$\vartheta_3 = he_2 g'(x_2)z_2 g(x_2),$$

denklemlerine karşılık gelmektedir. $P(\lambda)$ polinomunun $\Delta_3(P)$ diskriminantı;

$$\Delta_3(P) = \begin{vmatrix} 1 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & 0 \\ 0 & 1 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \\ 3 & 2\vartheta_1 & \vartheta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2\vartheta_1 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2\vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix}$$
$$= 18\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 + (\vartheta_1\vartheta_2)^2 - 4\vartheta_3(\vartheta_1)^2 - 4(\vartheta_2)^2 - 27(\vartheta_3)^2$$

şeklindedir.

$P(\lambda)$ polinomunun Hurwitz matrisi;

$$H(P) = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_3 & 0 \\ 1 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & \vartheta_1 & \vartheta_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. [39], [40] ve [41]' de tanımlanan kesirli hesap için Routh–Hurwitz kararlılık kriterini kullanarak, indirgenmiş $\widetilde{J}$ matrisinin denge noktalarına ilişkin kararlılık şartlarını elde ederiz.

Teorem 4.1. İndirgenmiş $\widetilde{J}$ matrisinin karakteristik denklemine ilişkin;

1. $\Delta_3(P) > 0$ için $\vartheta_1 > 0,\ \vartheta_3 > 0,\ \vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_3 > 0, q\epsilon(0,1),$

2. $\Delta_3(P) < 0$ için $\vartheta_1 \geq 0,\ \vartheta_2 \geq 0,\ \vartheta_3 > 0,\quad 0 < q < \frac{2}{3},$

3. $\Delta_3(P) < 0$ için $\vartheta_1 > 0,\ \vartheta_2 > 0,\ \vartheta_1\vartheta_2 = \vartheta_3,\ q\epsilon(0,1),$

şartlarından herhangi birinin sağlanması durumunda denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararlıdır.

İspat 4.1. Teoremin ispatı üç farklı durum incelenerek yapılabilir.

1. $\Delta_3(P) > 0$ için $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin tüm kökleri yani özdeğerleri farklı reel sayıdır. $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin reel bir kökünün

λ_1 olduğunu varsayalım. λ_3 ve λ_4 diğer iki eşlenik kompleks kök olsun. Kökler yardımıyla $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin diskriminantı;

$$\Delta_3(P) = [(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)]^2$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Δ_3 diskriminant denklemini yeniden düzenlersek;

$$\begin{aligned}
\Delta_3(P) &= [(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)]^2 \\
&= \left[(\lambda_1 - \lambda_3)\left(\lambda_1 - \bar{\lambda}_3\right)\left(\lambda_3 - \bar{\lambda}_3\right)\right]^2 \\
&= \left[(\lambda_1 - \lambda_3)\left(\lambda_1 - \bar{\lambda}_3\right)2Im(\lambda_3)i\right]^2 \\
&= \left[(\lambda_1 - \lambda_3)\overline{(\lambda_1 - \lambda_3)}2Im(\lambda_3)i\right]^2 \\
&= [2|(\lambda_1 - \lambda_3)|^2 Im(\lambda_3)i]^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\Delta_3(P) < 0$ çıkar. Bu ise $\Delta_3(P) > 0$ olmasıyla çelişir.

Bu nedenle $\Delta_3(P) > 0$ olduğundan, $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin tüm özdeğerleri farklı reel sayıdır. $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_3 > 0$, $\vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_3 > 0$ olduğundan Hurwitz kararlılık kriterleri sağlanır ve $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin tüm kökleri yani özdeğerleri negatif reel sayı köklere veya negatif reel kısımları olan kompleks eşlenik köklere sahip olur.

Böylece $\Delta_3(P) > 0$ olduğundan, $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin tüm kökleri negatif reel sayıdır. Sonuç olarak,

$$\left|\mathrm{Arg}\left(\lambda_{1,3,4}\right)\right| = \pi > \frac{q\pi}{2},$$

elde edilir. Böylece denge noktasında sistem yerel asimptotik kararlı olur.

2. $\Delta_3(P) < 0$ olduğunda 1. şıktan $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin reel bir kökünün λ_1 olduğu, λ_3 ve λ_4 diğer iki özdeğerinin iki kompleks eşlenik kök

olduğu elde edilir. $P(\lambda)$ karakteristik denkleminden, $\vartheta_3 > 0$ olduğunda reel kök negatiftir. Kökler, $\lambda_1 = -l \ (l \in \mathbb{R}^+)$ ve $\lambda_{3,4} = m \pm ni \ (m, n \in \mathbb{R})$ olarak alınırsa;

$$P(\lambda) = (\lambda + \mathrm{l})(\lambda - \mathrm{m} - \mathrm{ni})(\lambda - \mathrm{m} + \mathrm{ni})$$

elde edilir. Buradan $\vartheta_1 = l - 2m,\ \vartheta_2 = m^2 + n^2 - 2mn,\ \vartheta_3 = l(m^2 + n^2)$ elde edilir. $\vartheta_1 \geq 0$ ise $l \geq 2m$ ve $m^2 sec^2\theta = m^2 + n^2$ olur ve $\vartheta_2 \geq 0$ ise $sec^2\theta \geq 4$ elde edilir.

Böylece $\theta = |\mathrm{Arg}(\lambda)| > \frac{\pi}{3}$ olduğundan $0 < q < 1$ için $|\mathrm{Arg}(\lambda)| = \theta > \frac{\pi}{3} > \frac{q\pi}{2}$ olur. Böylece $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin bütün özdeğerleri;

$$\left|\mathrm{Arg}(\lambda_{1,3,4})\right| > \frac{q\pi}{2},$$

şartını sağlar. Bu durumda sistem denge noktasında yerel asimptotik olarak kararlıdır.

3. $\Delta_3(P) < 0$ oldğunda $\vartheta_1 > 0,\ \vartheta_2 > 0$ olduğunda önceki şıktan,

$$\vartheta_1 = l - 2m,\ \vartheta_2 = m^2 + n^2 - 2mn,\ \vartheta_3 = l(m^2 + n^2)$$

eşitlikleri elde edildi. Burada $\vartheta_1 > 0$ ise $l \geq 2m$, $\vartheta_2 > 0$ ise $m^2 + n^2 - 2mn > 0$ ve $\vartheta_1\vartheta_2 = \vartheta_3$ ise $(l - 2m)(m^2 + n^2 - 2mn) = l(m^2 + n^2)$ ise $m(l^2 + m^2 + n^2 - 2mn) = 0$ bulunur. Buradan iki farklı durum ortaya çıkar.

Eğer $m = 0$ ise $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin özdeğerleri, $\lambda_1 = -l,\ \lambda_{3,4} = \pm in$ olur. Böylece $0 < q < 1$ için $|\mathrm{Arg}(\lambda_1)| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ ve $\left|\mathrm{Arg}(\lambda_{3,4})\right| = \frac{\pi}{2} > \frac{q\pi}{2}$ elde edilir. Bu durumda sistem denge noktasında yerel asimptotik kararlı olur.

Eğer $(l^2+m^2+n^2-2mn)=0$ ise $l=m$ ve $n=0$ olur. Bu durum $l \geq 2m$ ve $m^2+n^2>2mn$ olduğundan $l<0$ ise bu durum $l \in \mathbb{R}^+$ olmasıyla çelişir.

Böylece $\vartheta_1>0$, $\vartheta_2>0$ ve $\vartheta_1\vartheta_2=\vartheta_3$ ise özdeğerlerden biri reel negatif diğer ikisi sanal köktür. Böylece $0<q<1$ için $|\mathrm{Arg}(\lambda_1)|=\pi>\frac{q\pi}{2}$ ve $|\mathrm{Arg}(\lambda_{3,4})|=\frac{\pi}{2}>\frac{q\pi}{2}$ sağlandığı için sistem denge noktasında yerel asimptotik kararlı olur.

Böylece üç durumunda incelenmesiyle teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Bu durumda, $E_2(x_2,0,z_2,u_2)$ denge noktası için $x_2<x_3$ veya ($x_2>x_3$ ve $r>r_1$) sağlanır ve eğer Teorem 4.1. in (1), (2) ya da (3) şartlarından herhangi biri sağlanırsa (4.1) denklem sistemi E_2 denge noktasında yerel asimptotik olarak kararlıdır.

Şimdi (4.1) denklem sisteminin birinci avcının ve avın olduğu ikinci avcının olmadığı $E_3(x_3,y_3,0,u_3)$ denge noktasının kararlılığını inceleyelim. (4.1) denklem sisteminin $E_3(x_3,y_3,0,u_3)$ denge noktasındaki Jacobian matrisi;

$$J(E_3)=\begin{pmatrix} r-2ax_3-\dfrac{2rx_3}{k}-f'(x_3)y_3 & -f(x_3) & -g(x_3) & -c \\ e_1f'(x_3)y_3 & 0 & -\beta y_3 & 0 \\ 0 & 0 & e_2g(x_3)-\mu_2-\gamma y_3 & 0 \\ m & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

şeklindedir. İlk olarak $\lambda_3=e_2g(x_3)-\mu_2-\gamma y_3$ ün $J(E_3)$ Jacobian matrisinin özdeğeri olduğunu görebiliriz. Bu denklemde

$$y_3=\frac{e_1x_3\left(r-ax_3-\frac{rx_3}{k}-\frac{cm}{h}\right)}{\mu_1}$$

değerini yerine yazarak,

$$\lambda_3 = e_2 g(x_3) - \mu_2 - \frac{\gamma e_1 x_3 \left(r - 2ax_3 - \frac{rx_3}{k} - \frac{cm}{h}\right)}{\mu_1}$$

elde ederiz. Açıkça görülmektedir ki eğer $e_2 g(x_3) - \mu_2 < 0$ ($x_2 > x_3$ ise) olursa $|\mathrm{Arg}\,(\lambda_3)| > \frac{q\pi}{2}$ dir. $e_2 g(x_3) - \mu_2 > 0$ ($x_2 < x_3$ ise) olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\lambda_3 = \begin{cases} > 0, & r < r_2 := \dfrac{k\left(\frac{(e_2 g(x_2) - \mu_2)\mu_1}{\gamma e_1 x_3} + ax_3 + \frac{cm}{h}\right)}{k - x_3} \quad ise\,, \\ < 0, & r > r_2 \ \ ise, \end{cases}$$

elde edilir. $\lambda_3 > 0$ olduğunda $|\mathrm{Arg}\,(\lambda_3)| < \frac{q\pi}{2}$ olur ve bunun anlamı E_3 denge noktasında (4.1) denklem sisteminin kararsız olduğudur. Bu durumda E_3 denge noktasında denklem sisteminin kararlılığını ya da kararsızlığını diğer üç özdeğer belirleyecektir. Bu önemli özdeğerlerin;

$$\overline{J} = \begin{pmatrix} r - 2ax_3 - \frac{2rx_3}{k} - f'(x_3)y_3 & -f(x_3) & -c \\ e_1 f'(x_3) y_3 & 0 & 0 \\ m & 0 & -h \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri olduğuna dikkat edelim.

$\overline{J}$ indirgenmiş matrisinin özdeğerlerinin doğasını belirlemek için $\overline{J}$ indirgenmiş matrisinin karakteristik denklemi;

$$P^*(\lambda) = \lambda^3 + \theta_1 \lambda^2 + \theta_2\, \lambda + \theta_3$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$\theta_1 = h - r + 2ax_3 + \frac{2rx_3}{k} + f'(x_3)y_3,$$

$$\theta_2 = -cm - hr + 2hax_3 + \frac{2hrx_3}{k} + hf'(x_3)y_3 + e_1 f'(x_3)f(x_3)y_3,$$

$$\theta_3 = he_1 f'(x_3)f(x_3)y_3,$$

denklemlerine karşılık gelmektedir. $P^*(\lambda)$ polinomunun $\Delta_4(P^*)$ diskriminantı;

$$\Delta_4(P^*) = \begin{vmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 3 & 2\theta_1 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2\theta_1 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2\theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}$$

$$= 18\theta_1\theta_2\theta_3 + (\theta_1\theta_2)^2 - 4\theta_3(\theta_1)^2 - 4(\theta_2)^2 - 27(\theta_3)^2$$

şeklindedir.

$P^*(\lambda)$ polinomunun Hurwitz matrisi,

$$H(P^*) = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_3 & 0 \\ 1 & \theta_2 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \theta_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda $x_2 > x_3$ veya ($x_2 < x_3$ ve $r > r_1$) sağlanır ve eğer Teorem 4.1. in (1), (2) ya da (3) şartlarından herhangi biri sağlanırsa E_3 denge noktasında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

Şimdi üç türün birlikte yaşadığı $E_4(x^*, y^*, z^*, u^*)$ pozitif denge noktasının yerel davranışını inceleyelim.

Bu pozitif denge noktası için, (4.1) denklem sisteminin en az bir negatif olmayan çözümünün var olması için gerekli şartların sağlandığını kabul edelim.

$E_4(x^*, y^*, z^*, u^*)$ denge noktasında (4.1) denklem sisteminin Jacobian matrisi;

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} r - 2ax^* - \frac{2rx^*}{k} - f'(x^*)y^* - g'(x^*)z^* & -f(x^*) & -g(x^*) & -c \\ e_1 f'(x^*)y^* & e_1 f(x^*) - \mu_1 - \beta z^* & -\beta y^* & 0 \\ e_2 g'(x^*)z^* & -\gamma z^* & e_2 g(x^*) - \mu_2 - \gamma y^* & 0 \\ m & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $J(E_4)$ Jacobian matrisinin karakteristik denklemi,

$$P^{**}(\lambda) = \lambda^4 + \Phi_1\lambda^3 + \Phi_2\lambda^2 + \Phi_3\lambda + \Phi_4$$

şeklindedir. Burada;

$$\Phi_1 = h - r + 2ax^* + \frac{2rx^*}{k} + g'(x^*)z^* + f'(x^*)y^*,$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 = cm - rh + 2hax^* + \frac{2hrx^*}{k} + hg'(x^*)z^* + hf'(x^*)y^* + \beta y^*\gamma z^* \\ + e_1 f'(x^*)f(x^*)y^* + e_2 g'(x^*)g(x^*)z^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3 = h\beta y^*\gamma z^* + he_1 f'(x^*)f(x^*)y^* + he_2 g'(x^*)g(x^*)z^* - r\beta y^*\gamma z^* \\ + 2ax^*\beta y^*\gamma z^* + \frac{2rx^*}{k}\beta y^*\gamma z^* + g'(x^*)(z^*)^2\beta y^*\gamma \\ + f'(x^*)(y^*)^2\beta\gamma z^* - f(x^*)\beta y^* e_2 g'(x^*)z^* - g(x^*)e_1 f'(x^*)y^*\gamma z^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4 = cm\beta y^*\gamma z^* - rh\beta y^*\gamma z^* + h2ax^*\beta y^*\gamma z^* + \frac{2hrx^*}{k}\beta y^*\gamma z^* \\ + hg'(x^*)(z^*)^2\beta y^*\gamma + hf'(x^*)(y^*)^2\beta\gamma z^* - hf(x^*)\beta y^* e_2 g'(x^*)z^* \\ - hg(x^*)e_1 f'(x^*)y^*\gamma z^*,\end{aligned}$$

denklemlerine karşılık gelmektedir. Dördüncü dereceden $P^{**}(\lambda)$ polinomunun $\Delta_5(P^{**})$ diskriminantı;

$$\Delta_5(P^{**}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_1 & 1 & 0 & 3\Phi_1 & 4 & 0 & 0 \\ \Phi_2 & \Phi_1 & 1 & 2\Phi_2 & 3\Phi_1 & 4 & 0 \\ \Phi_3 & \Phi_2 & \Phi_1 & \Phi_3 & 2\Phi_2 & 3\Phi_1 & 4 \\ \Phi_4 & \Phi_3 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 2\Phi_2 & 3\Phi_1 \\ 0 & \Phi_4 & \Phi_3 & 0 & 0 & \Phi_3 & 2\Phi_2 \\ 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 & 0 & \Phi_3 \end{vmatrix}$$

$$= 256(\Phi_4)^3 - 192\Phi_1\Phi_3(\Phi_4)^2 - 128(\Phi_4)^2(\Phi_2)^2 + 144\Phi_2(\Phi_3)^2\Phi_4 - 27(\Phi_3)^4$$
$$+144(\Phi_1)^2\Phi_2(\Phi_4)^2 - 6(\Phi_1)^2(\Phi_3)^2\Phi_4 - 80\Phi_1(\Phi_2)^2\Phi_3\Phi_4 + 18\Phi_1\Phi_2(\Phi_3)^3$$
$$+16(\Phi_2)^4\Phi_4 - 4(\Phi_2)^3(\Phi_3)^2 - 27(\Phi_1)^4(\Phi_4)^2 + 18(\Phi_1)^3\Phi_2\Phi_3\Phi_4 - 4(\Phi_1)^3(\Phi_3)^3$$
$$-4(\Phi_1)^2(\Phi_2)^3\Phi_4 + (\Phi_1)^2(\Phi_2)^2(\Phi_3)^2$$

şeklindedir. $P^{**}(\lambda)$ polinomunun Hurwitz matrisi,

$$H(P^{**}) = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_3 & 0 & 0 \\ 1 & \Phi_2 & \Phi_4 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & \Phi_3 & 0 \\ 0 & 1 & \Phi_2 & \Phi_4 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Böylece Routh-Hurwitz kararlılık kriterini kullanarak, (4.1) denklem sistemi üç türün bir arada yaşadığı $E_4(x^*, y^*, z^*, u^*)$ pozitif denge noktasında;

1. $\Delta_5(P^{**}) > 0$ için,

   $\Phi_1 > 0,\ \Phi_3 > 0,\ \Phi_4 > 0,\ \ \Phi_1\Phi_2 - \Phi_3 > 0,\ \Phi_3(\Phi_1\Phi_2 - \Phi_3) - (\Phi_1)^2\Phi_4 > 0$ ve $q \in (0,1)$,

2. $\Delta_5(P^{**}) < 0$ için,

   $\Phi_1 \geq 0,\ \Phi_2 \geq 0,\ \Phi_3 \geq 0,\ \Phi_4 \geq 0$ ve $0 < q < \frac{2}{3}$,

3. $\Delta_5(P^{**}) < 0$ için,

$\Phi_1 > 0,\ \Phi_3 > 0,\ \Phi_4 > 0,\ \ \Phi_1\Phi_2 = \Phi_3,\ \Phi_3(\Phi_1\Phi_2 - \Phi_3) = (\Phi_1)^2\Phi_4$
ve $q \in (0,1)$,

şartlarından birinin sağlanması durumunda, (4.1) denklem sisteminin asimptotik kararlı olduğu sonucuna ulaşılır.

4.4. Modelin Sayısal Analizi

Bu bölümde

$${}_0^cD_t^qV(t) = P\big(t, V(t)\big),$$

kesirli türevinin sayısal olarak çözümünü araştıracağız.

Kesirli analizin temel teoremini, (4.1) denklem sistemine uygulayarak,

$$V(t) - V(0) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t P\big(s, V(s)\big)\,(t-s)^{q-1}ds$$

elde ederiz. Bu denklemde $t = t_n = nh$ alınırsa,

$$V(t_n) = V(0) + \frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} P\big(s, V(s)\big)\,(t_n - s)^{q-1}ds \tag{4.10}$$

sonucuna ulaşırız. Şimdi $P\big(t, V(t)\big)$ fonksiyonunu aşağıdaki lineer yaklaşımla elde edebiliriz.

$$\begin{gathered} P\big(t, K(t)\big) \approx P(t_{i+1}, V_{i+1}) + \frac{t_i - t_{i+1}}{h}\big(P(t_{i+1}, V_{i+1}) - P(t_i, V_i)\big) \\ t \in [t_i, t_{i+1}] \end{gathered} \tag{4.11}$$

Burada $V_i = V(t_i)$ olarak yazılabilir.

(4.10) ve (4.11) denklemlerinde cebirsel işlemler uygulayarak; (daha fazla bilgi için [34]'e bakılabilir.)

$$V_n = V_0 + h^q \left(\Phi_n P(t_0, V_0) + \sum_{i=0}^{n} \Psi_{n-i} P(t_i, V_i) \right) \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada;

$$\Phi_n = \frac{(n-1)^{q+1} - n^q (n-q-1)}{\Gamma(q+2)},$$

$$\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(q+2)}, & n = 0, \\ \dfrac{(n-1)^q - 2n^q + (n+1)^q}{\Gamma(q+2)}, & n = 1,2,3, \dots \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.1) denklem sistemini çözmek için (4.12) formülünde verilen sayısal yöntemi kullanarak

$$x_n = x_0 + h^q \left(\Phi_n P_1(x_0, y_0, z_0, u_0) + \sum_{i=0}^{n} \Psi_{n-i} P_1(x_i, y_i, z_i, u_i) \right),$$

$$y_n = y_0 + h^q \left(\Phi_n P_2(x_0, y_0, z_0, u_0) + \sum_{i=0}^{n} \Psi_{n-i} P_2(x_i, y_i, z_i, u_i) \right),$$

$$z_n = z_0 + h^q \left(\Phi_n P_3(x_0, y_0, z_0, u_0) + \sum_{i=0}^{n} \Psi_{n-i} P_3(x_i, y_i, z_i, u_i) \right),$$

$$u_n = x_0 + h^q \left(\Phi_n P_4(x_0, y_0, z_0, u_0) + \sum_{i=0}^{n} \Psi_{n-i} P_4(x_i, y_i, z_i, u_i) \right),$$

iterasyon dizilerini elde ederiz.

Burada;

$$P_1(x, y, z, u) = x\left(r - ax - \frac{rx}{k}\right) - f(x)y - g(x)z,$$

$$P_2(x, y, z, u) = e_1 f(x)y - \mu_1 - \beta yz,$$

$$P_3(x, y, z, u) = e_2 g(x)z - \mu_2 - \gamma yz,$$

$$P_4(x, y, z, u) = -hu + mx.$$

şeklinde ifade edilir.

BÖLÜM 5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde elde edilen sonuçlardan oluşan makale [42], Proceedings of International Mathematical Science Dergisinde yayınlanmıştır.

Bu bölümde geri besleme kontrolü ile iki avcı-tek av içeren av-avcı modelinin Caputo kesirli türev ile incelenmesiyle oluşturulan modelin, denge noktalarındaki kararlılığıyla ilgili elde edilen teoremler ifade edildi.

Teorem 5.1. (E_0 Denge Noktasının Kararlılığı) Üç türün neslinin tükenmesi anlamına gelen (4.1) denklem sisteminin aşikâr $E_0(0,0,0,0)$ denge noktasında;

1. $h \geq r$ için $rh < cm$,

2. $h < r, rh < cm$ için $(h+r)^2 < 4cm$ ve
$0 < \mathrm{q} < \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{4(\mathrm{cm}-\mathrm{rh})-(\mathrm{h}-\mathrm{r})^2}}{\mathrm{r}-\mathrm{h}}\right)$,

şartlardan herhangi birinin sağlanması durumunda, (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

Teorem 5.2. (E_1 Denge Noktasının Kararlılığı) Avcı neslinin tükenmesi anlamına gelen (4.1) denklem sisteminin $E_1(x_1, 0,0, u_1)$ denge noktasında $x_2 = g^{-1}\left(\frac{\mu_2}{e_2}\right)$ ve $x_3 = f^{-1}\left(\frac{\mu_1}{e_1}\right)$, olmak üzere;

1. $h^2 + rh - 2cm \geq 0$ için $x < \tilde{x} = \min\{\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$,

2. $h^2 + rh - 2cm < 0$ için $rh > cm$, $(h^2 + rh - 2cm)^2 < 4h^2(rh - 2cm)$, $0 < q < \frac{2}{\pi} arctan\left(\frac{\sqrt{4h^2(rh-2cm)-(h^2+rh-2cm)^2}}{2cm-h^2-rh}\right)$ ve $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3\}$,

şartlardan herhangi birinin sağlanması durumunda (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

Teorem 5.3. (E_2 Denge Noktasının Kararlılığı) Birinci avcının olmadığı sadece ikinci avcı ve avın olduğu $E_2(x_2, 0, z_2, u_2)$ denge noktası için $x_2 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ ise kararlılık şartları aşağıdaki gibidir:

1. Eğer $x_2 > x_3$ ve $r < r_1$ ise E_2 denge noktasında (4.1) denklem kararsızdır.

2. Eğer $x_2 < x_3$ veya ($x_2 > x_3$ ve $r > r_1$) sağlanır ve Teorem 4.1 in (1), (2) ya da (3) şartlarından herhangi biri sağlanırsa E_2 denge noktasında, (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

Teorem 5.4. (E_3 Denge Noktasının Kararlılığı) Birinci avcının ve avın olduğu ikinci avcının olmadığı denge noktası $E_3(x_3, y_3, 0, u_3)$ için $x_3 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ ise kararlılık şartları aşağıdaki gibidir:

1. Eğer $x_2 < x_3$ ve $r < r_2$ ise E_2 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

2. Eğer $x_2 > x_3$ veya ($x_2 < x_3$ ve $r > r_1$) sağlanır ve Teorem 4.1 in (1), (2) ya da (3) şartlarından herhangi biri sağlanırsa E_3 denge noktasında, (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

Teorem 5.5. (E_4 Denge Noktasının Kararlılığı) Üç türün bir arada yaşadığı pozitif $E_4(x^*, y^*, z^*, u^*)$ denge noktasında;

1. $\Delta_5(P^{**}) > 0$ için,

   $\Phi_1 > 0,\ \Phi_3 > 0,\ \Phi_4 > 0,\ \ \Phi_1\Phi_2 - \Phi_3 > 0,\ \Phi_3(\Phi_1\Phi_2 - \Phi_3) - (\Phi_1)^2\Phi_4 > 0$ ve $q \in (0,1)$,

2. $\Delta_5(P^{**}) < 0$ için,

   $\Phi_1 \geq 0,\ \Phi_2 \geq 0,\ \Phi_3 \geq 0,\ \Phi_4 \geq 0$ ve $0 < q < \frac{2}{3}$,

3. $\Delta_5(P^{**}) < 0$ için,

   $\Phi_1 > 0,\ \Phi_3 > 0,\ \Phi_4 > 0,\ \ \Phi_1\Phi_2 = \Phi_3,\ \Phi_3(\Phi_1\Phi_2 - \Phi_3) = (\Phi_1)^2\Phi_4$ ve $q \in (0,1)$,

şartlarından herhangi biri sağlandığında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

BÖLÜM 6. SONUÇ

Bu araştırmada, genelleştirilmiş bir işlevsel tepki fonksiyonu ile bir av üzerinde savaşan iki avcı ile ekolojik bir model incelenmiştir. Av popülasyonu için geri besleme kontrolünü içeren kesirli mertebeden iki avcı-tek av modeli ele alınarak iki avcının bir av üzerindeki rekabeti araştırılmıştır. Kapsamlı bir genelleştirilmiş fonksiyonel etkileşim sınıfının düşünülmesinin nedeni, çevre ile avcı-av etkileşimindeki çeşitliliği modellemektir. Bu etkileşimler, çevre ve üç türün adaptasyonu gibi birçok faktörden etkilenebilir. Farklı denge noktalarının varlığı analiz edilerek, bu denge noktalarının asimptotik kararlılığını sağlamak için bazı kriterler türetilmiştir. İlk olarak üç türün neslinin tükenme noktası anlamında gelen denge, daha sonra avcı popülasyonlarının olmadığı dengenin yanında sırasıyla birinci avcının ve ikinci avcının olmadığı dengeler ve son olarak üç türün bir arada yaşayabildiği denge gibi (4.1) denklem sisteminin sahip olduğu dengelerin varlığı incelendi. Denge noktalarının varlığını analiz ederek, bu popülasyonların birçok senaryoya sahip olabileceği elde edildi. Bunlar, üç popülasyonun neslinin tükenmesini, iki tür avcı neslinin tükenmesini, sırayla her bir yırtıcı popülasyonun neslinin tükenip diğer yırtıcı popülasyonunun yaşamasını ve son olarak üç popülasyonun bir arada yaşamasını içerir. Birlikte yaşama aşaması ve bu dengenin varlığı için model parametreleri üzerinde bazı şartlar sağlanmıştır. Hangi senaryonun geçerli olacağını belirlemek için Jacobian matrisini kullanarak (4.1) denklem sisteminin yerel asimptotik kararlılığı incelendi. Teorik sonuçlar, geri besleme kontrolünün, av türlerinin ve yırtıcı türlerin bir arada yaşamasının ayarlanmasında önemli roller oynadığını ve iki avcı ve tek avın bir arada yaşayabileceği pozitif dengenin gerekli şartlar sağlandığında kararlılığını göstermektedir.

KAYNAKLAR

[1] Lotka, A.J., Elements of Physcal Biology, Williams & Wilkins, Baltimore, 1-462, 1925.

[2] Volterra, V., Variazioni et fluttuazioni del numerod'individui in specie animali conviventi, Scudo & Ziegler (Trans.), R. Comitato Talas so grafico Memoria (original printing 1927), 1-81, 1978.

[3] Boyce, W., DiPrima, R., Elementary Differential Equations Solutions and Boundary Value Problems, 7.baskı, A John Wiley & Sons, 1-745, 2001.

[4] Holling C.S., The Functional Response of Predators to Prey Density and Its Role in Mimicry and Population Regulation, Memoirsof the Entomological Society of Canada, 45, 3-60, 1965.

[5] Huang, Y., Chen, F., Li, Z., Stability analysis of a prey-predator model with Holling type III response function incorporating a prey refuge, Appl.Math. Comput, 182, 672-683, 2006.

[6] Ma, Z., Li, W., Zhao, Y., Wang, W., Zhang, H., Li, Z., Effects of prey refuges on a predator or prey model with class o functional responses: the role of refuges, Math. Biosci, 218 (2), 73-79, 2009.

[7] Ma, Z., The research of predator–prey models incorporating prey refuges. Ph.D. Thesis, Lanzhou University, P.R. China, 2010.

[8] Persson, L., Behavioral response to predators reverses the outcome of competition between prey species, Behavioral Ecology and Sociobiology, 28, 101–105, 1991.

[9] Jia, Y., Xue, P., Effects of the self and cross diffusion on positive teady states for a generalized predator–prey system, Nonlinear Anal., Real World Appl. 32, 229–241, 2016.

[10] Liu, X., Liu, Y., Li, Q., Multiple bifurcations and chaos in a discrete prey–predator system with generalized Holling III functional response, Discrete Dyn. Nat. Soc., https://doi.org/10.1155/2015/245421, 2015.

[11] Hwang, T.-W., Global analysis of the predator–prey system with Beddington–DeAngelis functional response, J. Math. Anal. Appl., 281(1), 395–401, 2001.

[12] Sen, M., Banerjee, M., Morozov, A., Bifurcation analysis of a ratio-dependent prey–predator model with the Allee effect, Ecol. Complex, 11, 12–27, 2012.

[13] Xu, R., Gan, Q., Ma, Z., Stability and bifurcation analysis on a ratio-dependent predator–prey model with time delay, J. Comput. Appl. Math., 230, 187–203, 2009.

[14] Tanner, J. T., The Stability and The Intrinsic Growth Rates of Prey and Predator Populations, Ecology, 56, 855-867, 1975.

[15] Maynard-Smith, J., Models in Ecology, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[16] Chen, F., Ma, Z., Zhang, H., Global asymptotical stability of the positive equilibrium of the Lotka–Volterra prey–predator model incorporating a constant number of prey refuges, Nonlinear Anal., Real World Appl., 13, 2790–2793 (2012)

[17] Kilbas, A., Srivastava, H., Trujillo, J., Theory and Application of fractional Differential Equations, Elsevier, New York, 2006.

[18] Podlubny, I.: Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego 1999.

[19] Moustafa, M., Mohd, M., Ismail, A., Abdullah, F., Dynamical analysis of a fractional-order Rosenzweig–MacArthur model incorporating a prey refuge, Chaos Solitons Fractals, 100, 1–13, 2018.

[20] Ahmed, E., El-Sayed, A., El-Saka, H., Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models, J.Math. Anal. Appl., 325, 542–553, 2007.

[21] Du, M., Wang, Z., Hu, H., Measuring memory with the order of fractional derivative, Sci. Rep., 3, 3431, 2013.

[22] Das, T., Mukherjee, R. N., Chaudhari, K. S., Bioeconomic harvesting of a prey-predator fishery, Journal of Biological Dynamics, 3(5), 447-462, 2009.

[23] Ghaziani, R. K., Alidousti, J. and Eshkaftaki, A. B., Stability and dynamics of a fractional order Leslie-Gower prey-predator model, Applied Mathematical Modelling, 40, 2075-2086, 2016.

[24] Aizerman, M., Gantmacher, F., Absolute Stability of Regulator Systems, Holden-Day, San Francisco, 1964.

[25] Lefschetz, S. Stability of Nonlinear Control Systems, Academic Press, New York, 1965.

[26] Xu, J., Teng, Z., Permanence for a nonautonomous discrete single- species system with delays and feedback control, Appl. Math. Lett., 23, 949–954, 2010.

[27] Li, H., Zhang, L., Teng, Z., Jiang, Y., Muhammadhaji, A., Global stability of an SI epidemic model with feedback controls in a patchy environment, Appl. Math. Comput., 321, 372–384, 2018.

[28] Li, H., Muhammedhaji, A., Zhang, L., Teng, Z., Stability analysis of a fractional-order predator–prey model incorporating a constant prey refuge and feedback control, 2018:325, 1-12, 2018.

[29] Elettreby, M.F., Two-prey one-predator model, Chaos Solitons Fractals, 39(5), 2018–2027, 2009.

[30] Michel, P., Touaoula, T.M., Asymptotic behavior for a class of the renewal nonlinear equation with diffusion, Math. Methods Appl. Sci., 36(3), 323–335 2013.

[31] Arditi, R., Abillon, J.M., Vieira Da Silva, J., A predator-prey model with satiation and intraspecific competition, Ecol. Model., 5(3), 173–191, 1978.

[32] Ghanabri, B., Djilali, S., Dynamical behavior of two predators–one prey model with generalized functional response and time-fractional derivative, Advances in difference Equations, 2021:235, 1-19, 2021.

[33] https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/8856/mod_resource/content/0/1. Hafta.pdf, Erişim Tarihi: 02/05/2022.

[34] Garrappa, R., Numerical solution of fractional differential equations: a survey and a software tutorial, Mathematics, 6 (2), 1–16, 2018.

[35] Chen, J., Zeng, Z., Jiang, P., Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks, Neural Netw., 51, 1–8, 2014.

[36] Petras, I., Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation, Higher Education Press, Beijing, 2011.

[37] https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/8866/mod_resource/content/0/11. Hafta.pdf, Erişim Tarihi: 02/05/2022.

[38] Cox, D.A., Galois Theory, 2.baskı, A John Wiley & Sons,1-570, 2012.

[39] Matouk, A., Chaos, feedback control and synchronization of a fractional-order modified autonomous Van der Pol-Duffing circuit, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 16, 975–986, 2011.

[40] Mondal, S., Lahiri, A., Bairagi, N., Analysis of a fractional order eco-epidemiological model with prey infection and type 2 functional response, Math. Methods Appl. Sci., 40, 6776–6789, 2017.

[41] Ghanabri, B., Djilali, S., Mathematical and numerical analysis of a three-species predator–prey model with herd behavior and time-fractional-order derivative, Math. Methods Appl. Sci., https://doi.org/10.1002/mma.5999, 2019.

[42] Başarır M., Mutlu S., Stability analysis of two predators-one prey model with feedback control and time fractional derivate, Proc. Int. Math. Sci., 4(1), 15-30, 2022.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Serap MUTLU

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik/ Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	Devam ediyor
Önlisans	İstanbul Üniversitesi/ Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi/ Adalet	Devam ediyor
Lisans	Anadolu Üniversitesi/ Açıköğretim Fakültesi/ Felsefe	Devam ediyor
Lisans	Anadolu Üniversitesi/ İktisat Fakültesi/ İktisat	2020
Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi / Matematik	2017
Lise	Süleyman Nazif Anadolu Lisesi	2009

YABANCI DİL

İngilizce

ESERLER

1. Başarır M., Mutlu S., Stability analysis of two predators-one prey model with feedback control and time fractional derivate, Proc. Int. Math. Sci., 4(1), 15-30, 2022.