T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÖNÜMLÜ TİPTEN BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Sema BAYRAKTAR

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Şevket GÜR**

Temmuz 2022

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÖNÜMLÜ TİPTEN BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Sema BAYRAKTAR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez / / 2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı **Üye** **Üye**

Üye **Üye**

Babam Aydın BAYRAKTAR'a,

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Sema BAYRAKTAR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte bana yol gösteren, iyi kötü her anımda yanımda olan ve olacağına inandığım değerli danışman hocam Prof. Dr. Şevket GÜR'e teşekkürlerimi sunarım.

Doktora yeterlilik sınavı hazırlığında ve makale yazma sürecinde desteğini esirgemeyen, her fırsatta değerli vaktini ayıran sevgili arkadaşım Dr. Elif UYSAL'a teşekkür ederim.

Ders ve tez aşamasında bana kalbini ve çalışma odasını açan Arş. Gör. Zülal MISIR'a teşekkür ederim.

Tez yazım aşamasında bilgi ve birikimiyle desteğini sağlayan Dr. Tuğba PETİK'e teşekkür ederim.

Bu uzun süreçte her zaman yanımda olduğunu hissettiğim aileme ve rahmetli babama bu tezi ithaf eder, şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbf{R}^n$	: n boyutlu Euclid uzayı
$u(x,t)$	: Bilinmeyen fonksiyon
∇	: Gradiant operatörü
$\nabla^2 = \Delta$	: Laplace operatörü
Ω	: $\mathbf{R}^n$ 'de düzgün sınıra sahip sınırlı bölge
$C(\Omega)$	: Sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^m(\Omega)$	: m. mertebeye kadar türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_B^m(\Omega)$	: m. mertebeye kadar türevli, sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C^\infty(\Omega)$	: Sonsuz mertebeden türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev uzayı
$L^p(\Omega)$	: p.mertebeden Lebesque integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^p(\Omega)$	: $W^{0,p}(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	: $W^{m,2}(\Omega)$
$\Vert u\Vert_{p(\cdot)}$	: Luxemburg normu
$\Vert u\Vert$	: $\Vert u\Vert_2 = \left[\int_\Omega \vert u(x)\vert^2\right]^{\frac{1}{2}}$
$\Vert u\Vert_{L^p(\Omega)}$	: $\Vert u\Vert_p = \left[\int_\Omega \vert u(x)\vert^p\right]^{\frac{1}{p}}$
■	: İspat sonu

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sürekli bağımlılık, yapısal kararlılık, çözümlerin nitel davranışı, güçlü sönümlü terim, hidrodinamik sönümlü terim, disipatif katsayı, dalga denklemi, geliştirilmiş Boussinesq denklemi, Rosenau denklemi

Bu tezin ilk bölümünde incelenen problemlerin çözümlerinin global, lokal ve zayıf çözümlerinin varlığı hakkında günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle ele alınmıştır. Ayrıca sürekli bağımlılık konusu ile ilgili bir çok çalışmaya da yer verilmiştir.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, özdeşlik ve eşitsizlikler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde başlangıç ve sınır koşullarına bağlı lineer olmayan sönüm terimi içeren geliştirilmiş Boussinesq denkleminin çözümlerinin problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı konusu esas alınmıştır.

Dördüncü bölümde hidrodinamik sönüm terimli Rosenau denklemi için Cauchy probleminin çözümlerinin problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı çalışılmıştır.

Beşinci bölümde lineer olmayan disipatif katsayı içeren başlangıç ve Dirichlet sınır koşullarıyla tanımlanmış yarı lineer dalga denkleminin çözümlerinin problemin katsayılarına sürekli bağımlılığı araştırılmıştır.

İncelenen problemler için çalışmada standart enerji yöntemi uygulanmıştır.

BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS FROM THE DAMPED TYPE

SUMMARY

Keywords: Continuous dependence, structural stability, qualitative behavior of the solutions, strong damped term, hydrodynamic damped term, dissipative coefficient, wave equation, improved Boussinesq equation, Rosenau equation.

In the first part of this thesis, studies on the existence of global, local and weak solutions to the problems examined were discussed with historical development. It is also included in a very study of continuous dependence.

In the second chapter, the basic definition, identity and inequalities to be used throughout the thesis are given.

In the third chapter of this thesis, the continuous dependence of the solutions of the initial and boundary values of the improved Boussinesq equation, which includes nonlinear damping terms, to the coefficients of the problem are taken as the base of the study.

In the fourth chapter, the continuous dependence of solutions of the Cauchy problem on the coefficients of the problem was studied for the Rosenau equation with the term hydrodynamic damping.

In the fifth chapter, the continuous dependence of the solutions of the semi-linear wave equation defined by the initial and Dirichlet boundary conditions containing non-linear dissipative coefficient were investigated.

Standard energy method has been applied in the study for the examined problems.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematiksel fizikte ortaya çıkan olayların çoğu ve mühendislik alanları kısmi türevli diferansiyel denklemler (PDE) ile tanımlanabilir. Örneğin fizikte ısı akışı ve dalga yayılımı olayı, ekolojide çoğu popülasyon modeli, kimyasal olarak reaktif bir malzemenin dağılımı kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Ayrıca akışkanlar dinamiği, kuantum mekaniği, elektrik, plazma fiziği, sığ su dalgalarının yayılması ve diğer birçok model geçerlilik alanı içinde kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ele alınır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler, bilim ve mühendislik modellerinin bu doğal olaylarını tanımlamak için kullanışlı bir araç haline gelmiştir. Bu nedenle, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü ve yöntemlerin uygulanması için geleneksel ve son zamanlarda geliştirilen tüm yöntemlere aşina olmak giderek daha önemli hale gelmektedir. Bu yöntemlere örnek olarak Backlund dönüşümü, Hirota bilineer yöntemi, ters saçılım dönüşümü, Adomian ayrışma yöntemi, varyasyonel yöntem, homotopi pertürbasyon yöntemi verilebilir. Ek olarak son zamanlarda lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümünü bulma konusunda tanh metodu, yardımcı denklem metodu, Riccati genişletme metodu gibi çeşitli çalışma ve yöntemler gerçekleştirilmiştir (Alotaibi ve Althobaiti, 2021).

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözümleri keyfi fonksiyonları içerdiği için birden fazla çözüm vardır. Bunun aksine başlangıç veya sınır değerleri verilmiş kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bir tane özel çözümü vardır. Hemen söylemek gerekir ki problemlerin fiziğinden ortaya çıkan başlangıç şartı veya sınır şartı pek çok problemde mevcuttur. Kısmi türevli bir denklemde t bağımsız değişkeni zamanı göstermek üzere $u\left(x,t\right)$'nin $t=t_0$ veya $t=0$ anındaki problemin fiziksel durumunu gösteren şartlara başlangıç şartı (Initial Conditions) ve bu tür kısmi türevli denkleme başlangıç değer problemi denir. Eğer $u(x,t)$ fonksiyonunun $u(x,0)$ ve/veya $u_t(x,0)$ belli ise ($t=0$ anında) bu tür şartlara Cauchy başlangıç şartı, bu tür probleme Cauchy problemi denir. Bütün fiziksel problemlerin belli bir D bölgesinde çözümü aranır ve aranan fonksiyonun D bölgesinde belli noktalarda değerleri verilir bu değerlere sınır şartları ve bu tür problemlere sınır değer problemleri denir. Bazen sınırlar belli bir sonlu bölgede olmayabilir. Böyle bir durumda sınır sonsuzdur denir. Tezde ele alınan sınır şartlarına örnek olarak Dirichlet şartı verilecektir. Belli bir D bölgesinde çözümü aranan $u(x,t)$ fonksiyonu için bu D bölgesinin her bir yerinde değerlerinin verilmesi ile tanımlanan probleme Dirichlet Sınır değer problemi denir.

Başlangıç ve/veya sınır şartları ile verilen kısmi türevli diferansiyel denkleme iyi konulmuş problem denir ve aşağıdaki şartları sağlar:

- En az bir çözüm vardır ve bu çözüm tektir.
- Çözüm kararlıdır. Yani giriş verilerindeki küçük değişiklikler çözümde küçük değişiklikler oluşturur.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin eliptik, parabolik ve hiperbolik olmak üzere üç farklı tipi vardır. Eliptik tipten denkleme örnek olarak akışkanlar mekaniğinde sıkıştırılamayan ideal akışkanın akım fonksiyonu, dikdörtgen levhadaki kararlı sıcaklık fonksiyonu gibi fiziksel olaylar tarafından sağlanan Laplace denklemi, çevrintili ideal sıkıştırılamayan akışkanın akım fonksiyonu tarafından sağlanan Poison denklemi verilebilir. Parabolik tipten denkleme homojen bir çubuğun sıcaklığını veren ısı (difüzyon) denklemi, hiperbolik tipten denkleme ise titreşen bir telin üzerindeki tüm noktaların küçük yer değiştirmeleri, ideal akışkanın yüzey dalgalarındaki hızı, dalga denklemi örnek olarak verilebilir (Keskin, 2010).

Su dalgalarının teorik ve fiziksel modellemesi, üzerinde on altıncı yüzyıldan bu yana çalışılan bir konudur. Genel olarak rüzgar etkisi ile oluşan açık deniz ve kıyı bölgesi dalgalarının yanı sıra su içindeki bir cismin (gemi vb.) hareketinden ötürü oluşan dalgaların incelenmesi de önem taşımaktadır. Gemi hareketlerinden kaynaklanan dalgaların modellenmesi özellikle son yılların güncel konularındandır. Lineer olmayan özellikteki bu dalgaları sayısal olarak modelleyebilmek için "Boussinesq Denklemleri" kullanılmıştır. Bayraktar ve Beji (2013) ele aldıkları makalelerinde, seyir halindeki tekneyi temsil edecek olan basınç alanı belirlemiş ve bu basınç alanı ilerlediğinde oluşacak olan dalgaları bir bilgisayar programında sayısal olarak modellemiştir. Boussinesq denklemleri, derinlik integre edilmiş denklemler olup, dispersiyon terimleri kısmi olarak dikey yöndeki akışkan ivmesinin etkisini temsil eder. Boussinesq Denklemleri bu özellikleri ile uzun dalga denklemlerinden ayrılırlar. Bu sayede, çok sığ olmayan bölgelerde de değişik hızlardaki teknelerin yarattığı dalgaların gerçekçi bir şekilde simülasyonu yapılmıştır.

Boussinesq denklemleri genel olarak yakın kıyı bölgelerindeki ya da orta derinlikteki dalgaları modellemek için kullanılmaktadır. Bu uygulamaların dışında, ilerleyen bir cismin oluşturduğu dalgaları modellemek için de Boussinesq denklemleri kullanılabilir.

Boussinesq denklemi aşağıdaki gibi iki temel biçimde yazılabilir:

$$u_{tt} - u_{xx} + \delta u_{xxxx} = (u^2)_{xx} \tag{1.1}$$

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = (u^2)_{xx} \tag{1.2}$$

(1.2) denklemi diğer Boussinesq denklemlerinde olduğu gibi sığ suda uzun dalgaların yayılımını yaklaşık olarak detaylandıran önemli bir modeldir. (u_{xxxx} yerine u_{xxtt}) $\delta > 0$ olduğunda, (1.1) denklemi elastik bir kirişin küçük, doğrusal olmayan, enine salınımlarını yönetir ve doğrusal olarak kararlıdır. 'İyi' Boussinesq denklemi olarak adlandırılır. $\delta < 0$ olduğunda ise doğrusal kararsızlık nedeniyle "kötü" Boussinesq denklemi olarak adlandırılmıştır. (1.1) denklemi ilk olarak Boussinesq tarafından ele alınmıştır (Boussinesq, 1871).

(1.2) denklemi geliştirilmiş Boussinesq denklemi (IBq denklemi) olarak adlandırılmıştır. Geliştirilmiş Boussinesq denkleminin Boussinesq denkleminden farkı, dördüncü dereceden bir uzay-zaman türevi u_{xxtt} içermesidir. Geliştirilmiş

Boussinesq denkleminin uygulama alanları incelendiğinde, enine hareket ve doğrusal olmayan koşullar göz önüne alındığında bu denklem, akustik dalgalar içinde dairesel kesitli elastik çubuklarda meydana gelir. Ayrıca kötü gelişmiş Boussinesq denklemi, plazmadaki iyon-ses dalgalarının yayılımını, doğrusal olmayan kafes dalgalarını araştırmak, kötü Boussinesq denklemine yaklaşmak ve manyetik açıya dik açılarda yayılan dalgaları tanımlamak için kullanılır. İyi gelişmiş Boussinesq denklemi de benzer şekilde ele alınabilir (Bayraktar ve Gür, 2020).

Dalganın zamanla kaybolduğu bilinmektedir. Örneğin durgun bir su yüzeyine taş atıldığında, parmağın durgun suya batırılıp çıkarılmasında ya da su birikintisi üzerine düşen yağmur damlalarının su yüzeyinde oluşturduğu dalgalar belli bir zaman sonra oluştuğu andaki etkisini kaybeder. Dalganın zaman içinde kaybolmasına dalganın sönümlenmesi (damping of the wave) denilmektedir. Bu sönümlenme durumu bir çeşit sürtünme sebebiyle oluşan değişim sırasında sistemin enerjisini yavaş yavaş kaybettiğini gösterir. Bu duruma sistemin disipatif olması ya da enerji tüketmesi de denmektedir.

İhmal edilebilir ağırlıkta, L uzunluğunda, ince, esnek bir tel düşünüldüğünde telin iki ucunun bazı desteklerde sıkıca sabitlendiği (sıkıştırıldığı) varsayılır, böylece hareket etmezler. Bu yapının sönümleme olduğu varsayılırsa telin dikey yer değiştirmesi $0 < x < L$ ve herhangi bir zamanda $t > 0$ olmak üzere $u(x,t)$ yer değiştirme fonksiyonu tarafından verilir. Bir boyutlu sönümlü dalga denklemi,

Başlangıç koşulları:	$u(x,0) = f(x)$	$u_t(x,0) = g(x)$	$0 < x < L$
Sınır koşulları:	$u(0,t) = 0,$	$u(L,t) = 0,$	$t > 0$

olduğunda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - a u_t, \tag{1.3}$$

olarak verilir.

Bu tezde amaçlanan, başlangıç değeri ve ilk sınır değeri verilen sönümlü tipten dalga durumu modellenmiş denklemler için problemin yapısal kararlılığını (structural stability) ya da başka bir ifadeyle çözümün davranışını (qualitative behavior of the solutions) incelemek olacaktır.

Yapısal kararlılık, verilen denklemin çözümünün denklemin katsayılarına, sınır verilerine, sınır koşullarının katsayılarına olan sürekli bağımlılığının incelenmesi üzerinedir. Burada önemli olan problemin katsayılarındaki ya da sınır koşulundaki katsayılarda olan küçük bir değişimin problemin çözümü için büyük değişimlere neden olup olmadığıdır. Eğer ele alınan problemin çözümleri katsayılara sürekli bağımlı ise katsayılarda küçük değişiklik olduğunda problemin çözümünde de küçük değişiklikler olması öngörülür. Bu da problem modellenirken kullanılan aracın özellikleri değişse de oluşan problemin çözümlerinin nasıl olacağının tahmin edilmesini sağlar. Lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için çözümlerin başlangıç sınır değer problemlerine sürekli bağımlılığı ile ilgili birçok yayın vardır. Bu tür birçok sonuç Straughan ve Ames (1997) tarafından kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. Russell (1844) tarafından su dalgaları üzerine yapılan araştırmada sıvılarda, plazmalarda, elastik gövdelerde vb. lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ilerlemesi sağlanmıştır. Daha sonra Polat ve ark. (2005) (1.4) denklemiyle ifade edilen sönümlenmiş Boussinesq denkleminin çözümlerinin patlamasını bulmuştur:

$$u_{tt} - bu_{xx} + \delta u_{xxxx} - ru_{xxt} = f\left(u\right)_{xx} \tag{1.4}$$

Son zamanlarda, daha yüksek dereceli Boussinesq denklemleri için daha fazla çalışma yapılmıştır. Su dalgası problemini yüzey gerilimi ile modelleyen Schneider ve Eugene (2001) $x, t, \mu \in \mathbb{R}$ ve $u\left(x,t\right) \in \mathbb{R}$ olmak üzere (1.5)'teki gibi bir Boussinesq denklemi sınıfını incelemiştir:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} - \mu u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (u^2)_{xx} \tag{1.5}$$

Varlamov (1999) tarafından, u_{txx} damping terim ve $a,b>0,\ \beta\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$u_{tt}-2bu_{txx}=-au_{xxxx}+u_{xx}+\beta(u^2)_{xx} \tag{1.6}$$

sönümlü tipten Boussinesq denklemi için çözümlerin asimptotik davranışı incelenmiştir. Varlamov (2001), (1.6) denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerin uzun zaman davranışını iki uzay boyutunda incelemiştir.

Xu ve ark. (2017) tarafından (1.7)'de gösterilen sönümlü genelleştirilmiş Cauchy probleminin çözümlerinin patlaması incelenmiştir, öncelikle zayıf çözüm ve düzgün çözümün lokal varlığı kanıtlanıp böylece potansiyel kuyu yöntemi ve dışbükeylik yöntemi kullanılarak çözümün global varlığı ve sonlu zaman patlaması ispatlanmıştır.

$$u_{tt}-u_{xx}+\left(u_{xx}+f\left(u\right)\right)_{xx}-\alpha u_{xxt}=0 \tag{1.7}$$

Liu ve Wang (2019), (1.8) denkleminde $\mathbb{R}^n$'de $f\left(u^\varepsilon\right)=O\left(\left|u^\varepsilon\right|^p\right)$ küçük viskozitenin sistemindeki sönümlü Boussinesq denklemi için Cauchy probleminin çözümlerinin sınır davranışını çalışmıştır.

$$u_{tt}^{\varepsilon}-\Delta u^\varepsilon+\Delta^2u^\varepsilon-\varepsilon\,\Delta u_t^\varepsilon=\beta\,\Delta f\left(u^\varepsilon\right) \tag{1.8}$$

Burada, $x\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$ ve $t>0$ olup $\varepsilon>0,\ \beta\in\mathbb{R}$ parametreleri reel katsayılar olmak üzere $u^\varepsilon=u^\varepsilon\left(t,x\right)$ bilinmeyen fonksiyondur.

Tezin üçüncü bölümünde,

$$u_{tt}-b\Delta u-\delta\Delta u_{tt}-r\Delta u_t+u\left|u\right|^{p-2}=0,\qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{1.9}$$

$$u\left(x,t\right)=0,\qquad x\in\partial\Omega,\ t>0 \tag{1.10}$$

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\quad u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right),\qquad x\in\Omega \tag{1.11}$$

şeklinde dördüncü mertebeden disipatif terim içeren lineer olmayan Boussinesq başlangıç sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Bazı sürekli ortamlarda sinüzoidal dalganın hızı frekansa bağlıdır. Hızın frekansla değişimi dispersiyon olarak adlandırılır. Burada problemin çözümlerinin $b,\delta,r \geq 0$ olmak üzere, b (disipatif), δ (dispersif), r (sönüm) katsayılarına göre sürekli bağımlılığı araştırılacaktır. Ayrıca denklemin bu katsayılara aynı anda sürekli bağımlı olduğu da ispatlanacaktır. $p>2$ olduğu durum incelenecektir. u bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlandırılmış bölgede tanımlanmış olup $n=1,2$ ise $1<p\leq\infty$, $n\geq 3$ ise $2<p\leq \frac{2n-2}{n-2}$'dir. Δ, n boyutlu Laplace operatör, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ile tanımlı ikinci dereceden diferansiyel operatördür (Bayraktar ve Gür, 2020).

Tezin dördüncü bölümünde hidrodinamik disipatif katsayılı Rosenau denklemi ele alınmıştır. Hollandalı bilim adamı olan Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries tarafından Russell'ın gözlemlediği sığ su akıntılarındaki su dalgaları için bugünkü soliton teorisinin üzerine kurulduğu Korteweg-de Vries (KdV) denklemi olarak tanınan matematiksel bir model ortaya konulmuştur. x ve t sırasıyla uzaklık ve zaman koordinatları olmak üzere dalga yüzeyinin yüksekliği $\eta(x,t)$ ile gösterilirse, ρ yoğunluğuna sahip bir akışkan üzerinde tek yöndeki dalga hareketi,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\beta\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) \tag{1.12}$$

denklemi ile ele alınır. Burada h suyun denge derinliği, g yerçekimi ivmesi, α keyfi bir sabit, $\beta = \frac{1}{3}h^3 - \frac{Th}{\sigma g}$, T ise su yüzeyi gerilimidir. Uygun dönüşümlerle KdV denkleminin

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.13}$$

standart formlarından biri elde edilir. Bu denklem, içerisindeki lineer olmayan terimin etkisinden dolayı dalga olayının uzun süre yayıldığını gösterir (Ames ve Straughan, 1997). Korteweg-de Vries denklemi, yüzey dalgalarını birkaç lineer olmayan dağılım ortamını tek yönlü yayılımla modellemektedir. Zayıf bir şekilde anharmonik ayrık kafes varsayımı altında türetildiği için, yüksek genlikli dalgaların davranışını tahmin etmeyebilir. Bu sebeple yoğun ayrık sistemlerin dinamiklerinin incelenmesinde, dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimleri durumu iyi bilinen KdV denklemi kullanılarak açıklanamaz (Wang ve Su, 2015). KdV denkleminin bu eksikliğinin üstesinden gelmek için Rosenau (1986) tarafından kendi ismini verdiği Rosenau denklemi önerilmiştir. Rosenau denklemi aşağıdaki gibi iki temel biçimde yazılabilir:

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = f(u)_x \tag{1.14}$$

ve

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxxx} + \gamma u_{xxxxtt} = f(u)_{xx} \tag{1.15}$$

Burada $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $\gamma > 0$ 'dır. (1.14) Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği (Park, 1990) tarafından kanıtlanmıştır. (1.15) denkleminin $\gamma = 0$ olduğu durumda iyi Boussinesq denklemi olduğu görülmektedir.

Sistemde yer alan geri dönüşü olmayan süreçler nedeniyle oluşan iç sürtünmeyi (hidrodinamik) hesaba katmak için dağılım fonksiyonu, ilgili yer değiştirmelerin zaman türevlerine bağlıdır. Hidrodinamik, sıvıların hızları ve ivmeleri arasındaki ilişkiler, hareket halindeki sıvılar veya sıvı üzerine gelen kuvvetlerle ilgilenir, sıvıların akımını sağlayan kuvvetleri, bu kuvvetlerin etkilerini ve hareket halindeki sıvılarda hareket değişimlerini inceler.

Wang ve Wang (2013), hidrodinamik sönümlü terim ile Rosenau denkleminin Cauchy problemi için küçük genlikli çözümlerinin global varlığını, Wang ve Su (2015) ise Stokes sönüm terimli Rosenau denklemi için çözümün asimptotik davranışını ve global varlığını kanıtlamışlardır.

Bu bilgiler ışığında tezin dördüncü bölümünde,

$$u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t + \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} + u|u|^{p-1} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{1.16}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{1.17}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{1.18}$$

şeklinde dördüncü mertebeden lineer olmayan enerji yitimini ifade eden hidrodinamik disipatif katsayı içeren Rosenau başlangıç sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Burada problemin çözümlerinin $\alpha > 0$ olmak üzere, α (sönüm) katsayısına göre sürekli bağımlılığı araştırılacak olup $p > 1$ olduğu durum incelenecektir. Δ, n boyutlu Laplace operatörüdür. u bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlandırılmış bölgede tanımlanmıştır. $n = 1,2$ ise $1 < p \leq \infty$, $n \geq 3$ ise $1 < p \leq \dfrac{n}{n-2}$ ’dir (Wang ve Wang, 2013).

Tezin beşinci bölümünde (1.19)–(1.21)’de ifade edilen lineer olmayan disipatif katsayı içeren başlangıç ve Dirichlet sınır koşullarıyla tanımlanmış yarı lineer dalga denklemi incelenmiştir.

$$u_{tt} - \Delta u - k\Delta u_t + a|u_t|^{m-2} u_t + b|u|^{p-2} u = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{1.19}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{1.20}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{1.21}$$

Burada problemin çözümlerinin $k \geq 0$ olmak üzere, k (sönüm), a (sönüm), b (lineerliği bozan terimin katsayısı) pozitif katsayılarına göre sürekli bağımlılık incelemesi ayrı ayrı gösterilecektir. Aynı zamanda denklemin bu katsayıların tümüne aynı anda sürekli bağımlı olduğu da ispatlanacaktır. $a > 0,\ b > 0,\ m \geq 2,\ p > 2$ olduğu durum incelenecektir. Δ, n boyutlu Laplace operatörüdür. u bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sınırında tanımlanmış olup $n = 1, 2$ ise $2 < p < \infty$, $n \geq 3$ ise $2 < p \leq \dfrac{2n-2}{n-2}$'dir (Chen ve Liu, 2013).

(1.9)-(1.16) ve (1.19) denklemlerinin ilgili başlangıç sınır değer probleminin uygun uzaylarda çözümünün varlığı ve tekliği için yeterli koşullar elde edilmiş ve bu koşullar altında çözümün varlığı ve tekliği ispat edilmiştir (Polat, 2005; Wang ve Wang, 2013; Chen ve Liu, 2013). Bu tezde ayrı başlıklar altında (1.9)-(1.11), (1.16)-(1.18) ve (1.19) -(1.21) problemlerinin uygun uzaylardaki çözümlerinin denklemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı incelenecektir.

Birinci bölüm giriş bölümüdür ve problemlerin literatür çalışmasını içermektedir. İkinci bölümde temel kavramlar ve kullanılacak eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde dördüncü mertebeden disipatif terim içeren lineer olmayan Boussinesq denkleminin çözümlerinin problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı incelemesi her katsayı ve aynı anda tüm katsayılar için verilmiştir. Dördüncü bölümde dördüncü mertebeden lineer olmayan enerji yitimini ifade eden hidrodinamik disipatif katsayı içeren Rosenau başlangıç sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Problemin sönüm katsayısına olan sürekli bağımlılığı araştırılmıştır. Beşinci bölümde lineer olmayan disipatif katsayı içeren başlangıç ve Dirichlet sınır koşullarıyla tanımlanmış yarı lineer dalga denkleminin çözümlerinin problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı incelenmiştir. Ardından bu denklem için tüm katsayılar aynı anda ele alınıp sürekli bağımlılık incelemesi yapılmıştır.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde elde edilmiş sonuçlar "Continuous dependence of solutions for damped improved Boussinesq equation" isimli makale de Turk J Math. dergisinde yayınlanmıştır (Bayraktar ve Gür, 2020).

BÖLÜM 2. TANIMLAR VE TEMEL BİLGİLER

2.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 2.1.1 (Normlu uzay). X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}$ dönüşümü $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X$ ve $\forall a \in \mathbf{R}$ için,

- $\|\vec{x}\| \geq 0$ ve $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$
- $\|a\vec{x}\| = |a|\|\vec{x}\|$
- $\|\overrightarrow{x+y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

özelliklerini sağlarsa X üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay adı verilir, $\|\vec{x}\|$ gösterimine de $\vec{x}$ vektörünün normu denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X$ olmak üzere, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonu X üzerinde bir metrik uzaydır (Pişkin, 2017).

Tanım 2.1.2 (Cauchy dizisi). (x_n), X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı en az bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Pişkin, 2017).

Tanım 2.1.3 (Yakınsak-Güçlü yakınsak dizi). (x_n), X normlu uzayında bir dizi olsun. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\|_X = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsak veya güçlü yakınsak dizi denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir (Pişkin, 2017).

Tanım 2.1.4 (Zayıf yakınsak dizi). (x_n), X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $u \in X'$ (X' dual uzay) için $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) \to u(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine zayıf yakınsak dizi denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir. Dual uzay X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesidir (Pişkin, 2017).

Tanım 2.1.5 (Banach Uzayı). Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi X 'in bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam normlu uzay, $(X, \|\cdot\|)$ uzayı tam ise bu uzaya Banach uzayı denir (Uysal, 2019).

Tanım 2.1.6 (İç Çarpım). K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli $(\cdot,\cdot): X \times X \to K$ bir fonksiyonun her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona iç çarpım denir.

- $(x,x) \geq 0;\ (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (Burada $\bar{c}, c \in \mathbb{C}$ 'nin bir karmaşık eşleniğidir.),
- $(ax + by, z) = a(x,z) + b(y,z).$

$K = \mathbf{R}$ halinde $(x,y) = (y,x)$'dir. Bir iç çarpım ile $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ tanımlanan $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya iç çarpım uzayı denir (Uysal, 2019).

Tanım 2.1.7 (Hilbert uzayı). Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzay içinde bir limite sahipse bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Pişkin, 2017).

Tanım 2.1.8 (Standart iç çarpım). n -boyutlu $\mathbf{R}^n$ ve gerçel Euclid uzayında bir nokta $x=(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ve bu noktanın normu

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır. x ve y 'nin standart iç çarpımı

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklindedir (Uysal, 2019).

Tanım 2.1.9 (Diferansiyel operatör). $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ negatif olmayan α_j 'lerin n bileşenlisi ise α 'ya çoklu indis denir ve x^α, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ ise, o zaman $D_j^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir (Uysal, 2019).

Tanım 2.1.10 ($\mathbf{C(\Omega)}$ Fonksiyonlar kümesi). Ω kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi $C(\Omega)$ ile gösterilir. Normu ise $\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ 'dır (Pişkin, 2017).

Tanım 2.1.11 ($\mathbf{C^m}(\mathbf{\Omega})$ Fonksiyonlar kümesi). Ω, $\mathbf{R}^n$'de bir bölge olsun. Negatif olmayan her m tamsayısı için Ω bölgesinde sürekli bütün u fonksiyonları ve $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar bütün $D^{\alpha}u$ kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^{\infty}(\Omega)$ uzayı ise bütün mertebeden türevli ve sürekli fonksiyonlardır (Polat, 2005).

Tanım 2.1.12 (Kapanış-Kompakt Destek-$\mathbf{C_0^{\infty}}(\mathbf{\Omega})$ Uzayı). Eğer $G \subset \mathbf{R}^n$ ise $\mathbf{R}^n$'de G'nin kapanışı $\overline{G}$ ile belirtilir. $\overline{G} \subset \mathbf{R}^n$ ve G, $\mathbf{R}^n$'in kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesi ise $G \subset\subset \mathbf{R}^n$ şeklinde gösterilir. $\mathbf{R}^n$'de tanımlı ve sonlu bir bölge dışında kendisi ve bütün mertebeden türevleri sıfır olan fonksiyonlar sınıfına kompakt destekli fonksiyonlar denir. u fonksiyonunun desteği

$$\text{supp}\, u = \{x \in G : u(x) \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\text{supp}\, u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω'da kompakt desteğe sahiptir denir ve $C_0^{\infty}(\Omega)$ ile gösterilir (Polat, 2005).

2.2. Lebesque Uzayı $L^p(\Omega)$

Tanım 2.2.1 ($\mathbf{L^p}(\mathbf{\Omega})$ Uzayı). Ω, $\mathbf{R}^n$'de ölçülebilir bir küme, u ölçülebilir fonksiyon sınıfı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları $p.$ kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak isimlendirilir ve $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Not: $L^p(\Omega)$ uzayında

$p=1$ alınırsa $L^1(\Omega) = L(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,

$p=2$ alınırsa $L^2(\Omega)$ karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır.

$p=2$ için $L^2(\Omega)$ Hilbert uzayıdır ve üzerindeki iç çarpım $\forall u, v \in L^2(\Omega)$ için,

$$(u,v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx$$

biçiminde tanımlanır (Pişkin, 2017).

Tanım 2.2.2 ($\mathbf{L^\infty(\Omega)}$ Uzayı). Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \le K$ olacak şekilde bir K sabiti bulunabiliyorsa u fonksiyonuna hemen hemen her yerde sınırlıdır denir. Böyle K'ların en büyük alt sınırına $|u|$'nun Ω bölgesindeki esas(essential) supremumu denir. $ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$ ile gösterilir.

Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonları ile tanımlanan uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzayda norm,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{K : |u| \le K\}$$

biçiminde gösterilir (Pişkin, 2017).

Tanım 2.2.3 ($\mathbf{L_{p,loc}}(\Omega)$ uzayı). Ω, $\mathbf{R}^n$'de bir bölge ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{p,loc}(\Omega)$ uzayı denir (Polat, 2005).

Tanım 2.2.4 ($\mathbf{L^p}((\mathbf{a},\mathbf{b});\mathbf{X})$ uzayı). $-\infty \le a < b \le \infty$ olsun. $\|u\|_X \in L^p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b)'den X'e tanımlanmış ölçülebilir u fonksiyonlar uzayına $L^p((a,b);X)$ uzayı denir.

$L^p((a,b);X)$ uzayı;

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty \\ ess \sup\limits_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $u \in L^p(c,d;X)$ ise, o zaman $u \in L^p(a,b;X)$ yazılır ve $p = 1$ için u lokal integrallenebilirdir denir (Polat, 2005).

Tanım 2.2.5 (Genelleştirilmiş(zayıf) türev). $u, v \in L_{1,loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için $\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$ eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. genelleştirilmiş (zayıf) türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır. Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda D^α sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Klasik anlamda bir fonksiyonun türevli olması için sürekli olması gerekir. Zayıf türevde ise sürekliliğe ve klasik türevin varlığına gerek yoktur. İntegralin olması yeterlidir (Polat, 2005).

2.3. Sobolev Uzayı $\mathbf{W^{m,p}}(\boldsymbol{\Omega})$

Tanım 2.3.1 (Sobolev Uzayı). Ω, $\mathbf{R}^n$ 'de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Böylece kendisi ve m. mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir. Sobolev uzayında normlar $1 \le p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

bir Banach uzayıdır. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında

$m = 0$ ise $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

$p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ile verilir (Pişkin, 2017).

Tanım 2.3.2 (Gömme operatörü). X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer X, Y 'nin bir alt uzayı ve her $u \in X$ ve u 'dan bağımsız bir $c > 0$ sabiti için $\|u\|_Y \leq c\|u\|_X$ oluyorsa X uzayı Y uzayına sürekli gömülmüştür denir ve $X \to Y$ ile gösterilir. Her $u \in X$ elemanını aynı $u \in Y$ elemanına götüren operatöre gömme operatörü denir (Pişkin, 2017).

2.4. Kullanılan Eşitsizlikler

Eşitsizlik 2.4.1 (Young Eşitsizliği).

$1 < p,q < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $a,b > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{|\varepsilon a|^p}{p} + \frac{|b/\varepsilon|^q}{q}$$

olur (Polat, 2005).

Eşitsizlik 2.4.2 (ε 'lu Young Eşitsizliği).

Young eşitsizliğinde $a = (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} X$ ve $b = \dfrac{Y}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}$ alınırsa

$$XY \leq \varepsilon X^p + c(\varepsilon) Y^q$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $c(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ 'dir (Pişkin, 2017).

Eşitsizlik 2.4.3 (Cauchy Eşitsizliği).

$a, b \in \mathbf{R}$ olmak üzere,

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Pişkin, 2017).

Eşitsizlik 2.4.4 (ε 'lu Cauchy Eşitsizliği).

$a, b > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Bir diğer gösterimle

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

olur (Evans, 2010).

Eşitsizlik 2.4.5 (Hölder Eşitsizliği).

$1 \leq p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ ise, o zaman $uv \in L^1(\Omega)$ olup

$$\int_{\Omega} |uv|\, dx = \|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$p=1$ durumunda, $q=\infty$ ve $\|v\|_{L^q(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega}|v|$

$p=q=2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz Bunyakowski eşitsizliği denir (Polat, 2005).

Eşitsizlik 2.4.6 (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği).

$1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_m \leq \infty$ ve $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k} = 1$ için

$u_k \in L^{p_k}(\Omega)\ (1 \leq k \leq m)$ olduğunda

$$\int_{\Omega} |u_1 \ldots u_m|\, dx \leq \prod_{k=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

olur (Evans, 2010).

Eşitsizlik 2.4.7 (Minkowski Eşitsizliği).

$1 \leq p < \infty$ ve $u, v \in L^p(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir (Evans, 2010).

Eşitsizlik 2.4.8 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği).

$u, v \in \mathbf{R}^n$ olmak üzere

$$|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$$

olur (Evans, 2010).

Eşitsizlik 2.4.9 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Eşitsizliği).

$1 \leq p < n$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ açık olsun. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq c\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak şekilde $c = c(n, p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise o zaman $u \in c(\bar{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega}|u| \leq c|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur (Evans, 2010).

Eşitsizlik 2.4.10 (Sobolev-Poincaré Eşitsizliği).

p sayısı $2 \leq p < \infty (n = 1, 2)$ ve $2 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2}(n \geq 3)$ şeklinde olsun.

Bu durumda $c = c(\Omega, p)$ sabit sayısı ve $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

olur (Pişkin, 2017).

Eşitsizlik 2.4.11 (Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel form)).

$\eta(t)$ negatif olmayan, $[0,T]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, tüm $0 \le t \le T$ için

$$\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right)$$

olur (Evans, 2010).

Eşitsizlik 2.4.12 (Gronwall Eşitsizliği (İntegral form)).

$\xi(t)$, hemen hemen her t ve $C_1, C_2 \ge 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun. O zaman hemen hemen her $0 \le t \le T$ için

$$\xi(t) \le C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

Özel olarak $0 \le t \le T$ için

$$\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds$$

ise o zaman her yerde $\xi(t)=0$ 'dır (Evans, 2010).

Özdeşlik 2.4.13 (Green Özdeşliği).

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x)=(A_1(x),\ldots,A_n(x))$ vektörü $i=1,\ldots n$ olmak üzere $A_i(x)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $divA(x)=\dfrac{\partial A_1}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\bar{\Omega}$ ($\mathbf{R}^n$ uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise

$$\int_{\Omega} divA(x)\,dx=\int_{\partial\Omega} A(x)n(x)\,ds$$

olup, burada $n(x)$, Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektördür. Bu formül Ostrogradsky formülü olarak bilinmektedir.

$u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega}), v(x)\in C^1(\bar{\Omega})$, ve $\Delta u = div(\nabla u)=\nabla\cdot\nabla u$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun.

$$v\Delta u = v\cdot div(\nabla u)=div(v\nabla u)-\nabla u\nabla v,\ \ \nabla u\nabla v = u_{x_1}v_{x_1}+\cdots+u_{x_n}v_{x_n}$$

olduğundan Ostrogradsky formülüne göre

$$\int_{\Omega} v\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\,dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u\cdot n\big|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$ olup bu formül Green formülü olarak bilinmektedir (Polat, 2005).

BÖLÜM 3. SÖNÜM TERİMLİ GELİŞTİRİLMİŞ BOUSSİNESQ DENKLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde,

$$u_{tt} - b\Delta u - \delta\Delta u_{tt} - r\Delta u_t + u|u|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.3}$$

şeklinde dördüncü mertebeden disipatif terim içeren lineer olmayan Boussinesq başlangıç sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Burada problemin çözümlerinin $b, \delta, r \geq 0$ olmak üzere, b (disipatif), δ (dispersif), r (sönüm) katsayılarına göre sürekli bağımlılığı araştırılacak, aynı zamanda denklemin bu katsayılara aynı anda sürekli bağımlı olduğu da ispatlanacaktır. $p > 2$ olduğu durum incelenecektir. u bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlandırılmış bölgede tanımlanmış olup $n = 1,2$ ise $1 < p \leq \infty$, $n \geq 3$ ise $2 < p \leq \dfrac{2n-2}{n-2}$'dir.

3.1. Ön kestirimler

Şimdi, (3.1)-(3.3) probleminin çözümüne ilişkin bazı eşitsizlikler elde edelim.

Teorem 3.1. $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ için (3.1)-(3.3) probleminin çözümü olan $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u_t(t)\|^2 \leq A_1, \ \|\nabla u(t)\|^2 \leq A_2, \ \|\nabla u_t(t)\|^2 \leq A_3, \tag{3.4}$$

eşitsizliklerini sağlar. $A_1, A_2, A_3 > 0$ problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 3.1. (3.4) eşitsizliğini elde edebilmek için (3.1) denklemi u_t ile $L^2(\Omega)$'de çarpılırsa,

$$(u_{tt}, u_t) - b(\Delta u, u_t) - \delta(\Delta u_{tt}, u_t) - r(\Delta u_t, u_t) + \left(|u|^{p-2} u, u_t\right) = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında

$$(u_{tt}, u_t) = \int_\Omega u_t u_{tt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2$$

$$(\Delta u, u_t) = \int_\Omega u_t \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2$$

$$(\Delta u_{tt}, u_t) = \int_\Omega u_t \Delta u_{tt} dx = \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u_{tt}}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u_{tt} \nabla u_t dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t(t)\|^2$$

$$(\Delta u_t, u_t) = \int_\Omega u_t \Delta u_t dx = \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u_t}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u_t \nabla u_t dx = -\|\nabla u_t(t)\|^2$$

$$\left(|u|^{p-2} u, u_t\right) = \int_\Omega |u|^{p-2} u u_t dx = \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{d}{dt}|u|^p dx = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_p^p$$

olur. Yukarıdaki eşitlikler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta}{2}\|\nabla u_t(t)\|^2 + \frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p\right] + r\|\nabla u_t(t)\|^2 = 0 \tag{3.6}$$

elde edilir.

Enerji fonksiyonu $E_u(t)=\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\frac{\delta}{2}\|\nabla u_t(t)\|^2+\frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p$ olmak üzere, $r\geq 0$ olduğu göz önüne alınarak (3.6) eşitliğinde $\frac{d}{dt}E_u(t)\leq 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Buradan $(0,t)$ aralığında integral alındığında $E_u(t)\leq E_u(0)$ olarak bulunur.

$$\frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u(x,t)\|^2+\frac{\delta}{2}\|\nabla u_t(x,t)\|^2+\frac{1}{p}\|u(x,t)\|_p^p\leq\frac{1}{2}\|u_1(x,0)\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u(x,0)\|^2$$
$$+\frac{\delta}{2}\|\nabla u_1(x,0)\|^2+\frac{1}{p}\|u(x,0)\|_p^p$$

$A_1=\|u_1(x,0)\|^2+b\|\nabla u_0(x,0)\|^2+\delta\|\nabla u_1(x,0)\|^2+\frac{2}{p}\|u_0(x,0)\|_p^p$ olmak üzere

$\|u_t(t)\|^2\leq A_1$ olur.

$$A_2=\frac{1}{b}\|u_1(x,0)\|^2+\|\nabla u_0(x,0)\|^2+\frac{\delta}{b}\|\nabla u_1(x,0)\|^2+\frac{2}{pb}\|u_0(x,0)\|_p^p$$

$$\|\nabla u(t)\|^2\leq A_2$$

$$A_3=\frac{1}{\delta}\|u_1(x,0)\|^2+\frac{b}{\delta}\|\nabla u_0(x,0)\|^2+\|\nabla u_1(x,0)\|^2+\frac{2}{p\delta}\|u_0(x,0)\|_p^p$$

$$\|\nabla u_t(t)\|^2\leq A_3$$

Böylece

$\|u_t(t)\|^2\leq A_1,\ \|\nabla u(t)\|^2\leq A_2,\ \|\nabla u_t(t)\|^2\leq A_3,$

eşitsizlikleri elde edilir.

■

Teorem 3.2. Varsayalım ki, $u_0 \in L^2(\Omega)$ ve $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ olsun. Bu sayede, (3.1)-(3.3) problemi için

$$\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leq A_4, \qquad \forall t \in (0,T] \tag{3.7}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $A_4 > 0$ olup başlangıç verilerine ve denklemin parametrelerine bağlıdır.

İspat 3.2. Bu kestirimi bulabilmek için önce (3.1) denkleminin t 'ye göre bir kez türevi alınır.

$$u_{ttt} - b\Delta u_t - \delta\Delta u_{ttt} - r\Delta u_{tt} + u_t |u|^{p-2} = 0 \tag{3.8}$$

(3.8) eşitliği u_{tt} ile $L^2(\Omega)$ uzayında çarpılırsa,

$$(u_{ttt}, u_{tt}) - b(\Delta u_t, u_{tt}) - \delta(\Delta u_{ttt}, u_{tt}) - r(\Delta u_{tt}, u_{tt}) + \left(|u|^{p-2} u_t, u_{tt}\right) = 0 \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitliğindeki integraller alınırsa,

$$(u_{ttt}, u_{tt}) = \int_\Omega u_{tt} u_{ttt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}(t)\|^2$$

$$(\Delta u_t, u_{tt}) = \int_\Omega u_{tt} \Delta u_t dx = \int_{\partial\Omega} u_{tt} \frac{\partial u_t}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u_t \nabla u_{tt} dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t(t)\|^2$$

$$(\Delta u_{ttt}, u_{tt}) = \int_\Omega u_{tt} \Delta u_{ttt} dx = \int_{\partial\Omega} u_{tt} \frac{\partial u_{ttt}}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u_{ttt} \nabla u_{tt} dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_{tt}(t)\|^2$$

$$\left(\Delta u_{tt}, u_{tt}\right) = \int_{\Omega} u_{tt} \Delta u_{tt} dx = \int_{\partial\Omega} u_{tt} \frac{\partial u_{tt}}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u_{tt} \nabla u_{tt} dx = -\left\|\nabla u_{tt}\left(t\right)\right\|^{2}$$

$$\left(\left|u\right|^{p-2} u_t, u_{tt}\right) = \int_{\Omega} \left|u\right|^{p-2} u_t u_{tt} dx = \left(p-1\right) \int_{\Omega} \left|u\right|^{p-2} u_t u_{tt} dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler (3.9) eşitliği için düzenlendiğinde,

$$E_{u_t}\left(t\right) = \frac{1}{2}\left\|u_{tt}\left(t\right)\right\|^{2} + \frac{b}{2}\left\|\nabla u_{t}\left(t\right)\right\|^{2} + \frac{\delta}{2}\left\|\nabla u_{tt}\left(t\right)\right\|^{2}$$

olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} E_{u_t}\left(t\right) + r\left\|\nabla u_{tt}\left(t\right)\right\|^{2} = -\left(p-1\right) \int_{\Omega} \left|u\right|^{p-2} u_t u_{tt} dx \tag{3.10}$$

olacaktır. (3.10) denklemi

$$\frac{d}{dt} E_{u_t}\left(t\right) + r\left\|\nabla u_{tt}\left(t\right)\right\|^{2} \le \left|-\left(p-1\right) \int_{\Omega} \left|u\right|^{p-2} u_t u_{tt} dx\right| \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla eşitsizliğin sağ tarafındaki terim için üst sınır elde edilerek Sobolev-Poincaré eşitsizliği ve aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\left|-\left(p-1\right) \int_{\Omega} \left|u\right|^{p-2} u_t u_{tt} dx\right| &\le \left(p-1\right) \int_{\Omega} \left|u\right|^{p-2} \left|u_t\right|\left|u_{tt}\right| dx \le \left(p-1\right)\left|\Omega\right| \max\left|u\right|^{p-2} \int_{\Omega} \left|u_t\right|\left|u_{tt}\right| dx \\
&\le \left(p-1\right)\left|\Omega\right| \max\left|u\right|^{p-2} \left\|u_t\left(t\right)\right\|\left\|u_{tt}\left(t\right)\right\| \\
&\le \left(p-1\right) C \left|\Omega\right| \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^{p-2} \left\|u_t\left(t\right)\right\|\left\|u_{tt}\left(t\right)\right\| \\
&\le C_4\left[\left\|\nabla u_t\left(t\right)\right\|^{2} + \left\|\nabla u_{tt}\left(t\right)\right\|^{2}\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $C_4 = \dfrac{C(p-1)|\Omega| A_2^{\frac{p-2}{2}}}{2}$ ’dir.

(3.11) eşitsizliği düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t)+r\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leq C_4\left[\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\nabla u_{tt}(t)\|^2\right] \tag{3.12}$$

elde edilir. Aynı zamanda $r>0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t)\leq C_4\left[\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\nabla u_{tt}(t)\|^2\right] \tag{3.13}$$

yazılabilir. Bu sayede $M_1 = \max\left\{\frac{b}{2}, C_4, \frac{\delta}{2}\right\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t)\leq M_1 E_{u_t}(t) \tag{3.14}$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin her tarafı $e^{-M_1 t}$ ile çarpılıp $(0,t)$ ’de integre edildiğinde $E_{u_t}(t)\leq e^{M_1 t}E_{u_t}(0)$ bulunur. Buradan

$$\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leq \frac{2E_{u_t}(0)}{\delta}e^{M_1 t} \tag{3.15}$$

olur. İstenen eşitsizlik $\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leq A_4, \forall t\in(0,T]$ için elde edilir. ■

3.1.1. δ katsayısına sürekli bağımlılık

Bu bölümde, (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin δ katsayısına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir. u fonksiyonu,

$$u_{tt} - b\Delta u - \delta_1 \Delta u_{tt} - r\Delta u_t + u|u|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.16}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.17}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.18}$$

probleminin çözümü

v fonksiyonu ise,

$$v_{tt} - b\Delta v - \delta_2 \Delta v_{tt} - r\Delta v_t + v|v|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.19}$$

$$v(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.20}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.21}$$

probleminin çözümü olsun. Bu iki çözümün farkı $w = u - v$ olup $\delta_1 - \delta_2 = \delta$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $\delta_1 \Delta v_{tt}$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$w_{tt} - b\Delta w - \delta_1 \Delta w_{tt} - \delta\, \Delta v_{tt} - r\Delta w_t + |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v = 0, \tag{3.22}$$

$$w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.23}$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{3.24}$$

başlangıç sınır değer probleminin (BSD) çözümü olsun.

Teorem 3.1.1. (3.22)-(3.24) probleminin çözümü olan w fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{\delta_1}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{e^{M_2 t} A_4}{r M_2}\delta^2, \qquad \forall t > 0 \tag{3.25}$$

$A_4 > 0,\ M_2 > 0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 3.1.1. (3.22) denklemi w_t ile çarpılıp $L_2(\Omega)$'de iç çarpımı alınırsa,

$$\left(w_{tt},w_t\right)-b\left(\Delta w,w_t\right)-\delta_1\left(\Delta w_{tt},w_t\right)-\delta\left(\Delta v_{tt},w_t\right)-r\left(\Delta w_t,w_t\right)$$
$$+(w_t,|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v)=0 \tag{3.26}$$

olur.

(3.26) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$\left(w_{tt},w_t\right)=\int_\Omega w_t w_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta w,w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta w dx=\int_{\partial\Omega} w_t\frac{\partial w}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla w_t\nabla w dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta w_{tt},w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta w_{tt}dx=\int_{\partial\Omega} w_t\frac{\partial w_{tt}}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla w_{tt}\nabla w_t dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta v_{tt},w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta v_{tt}dx=\int_{\partial\Omega} w_t\frac{\partial v_{tt}}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla w_t\nabla v_{tt}dx=-\left(\nabla w_t,\nabla v_{tt}\right)$$

$$\left(\Delta w_t,w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta w_t dx=\int_{\partial\Omega} w_t\frac{\partial w_t}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla w_t\nabla w_t dx=-\left(\nabla w_t,\nabla w_t\right)=-\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v,w_t\right)=\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{b}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2+\frac{\delta_1}{2}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2\right]+\delta\left(\nabla v_{tt},\nabla w_t\right)+r\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$
$$+\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx=0 \tag{3.27}$$

elde edilir.

$$E_w\left(t\right)=\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{b}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2+\frac{\delta_1}{2}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2 \tag{3.28}$$

olmak üzere (3.27) denklemi,

$$\frac{d}{dt}E_w\left(t\right)+r\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2 \leq \left|-\delta\left(\nabla v_{tt},\nabla w_t\right)\right|+\left|-\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \tag{3.29}$$

eşitsizliği şeklinde yazılabilir. (3.29) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için sırasıyla Cauchy-Schwarz ve ε Young eşitsizliği $\varepsilon=\dfrac{r}{4}$ için uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\delta\left|\left(\nabla v_{tt},\nabla w_t\right)\right| &\leq \delta\left\|\nabla v_{tt}\left(t\right)\right\|\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\| \\ &\leq \varepsilon\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{\delta^2}{4\varepsilon}\left\|\nabla v_{tt}\left(t\right)\right\|^2 \quad (3.30) \\ &\leq \frac{r}{4}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{\delta^2}{r}\left\|\nabla v_{tt}\left(t\right)\right\|^2\end{aligned}$$

olur. (3.29) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için $2<p\leq\dfrac{2n-2}{n-2}$ olmak üzere sırasıyla ortalama değer teoremi, Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri uygulanırsa $\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx$ integrali için,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx\right| &\leq \left(\mathrm{p}-1\right)\int_\Omega\left|w\right|\left|w_t\right|\left(\left|u\right|^{p-2}+\left|v\right|^{p-2}\right)dx \\ &\leq \left(p-1\right)\left\|w_t\right\|\left\|w\right\|_{\frac{2n}{n-2}}\left(\left\|u\right\|^{p-2}_{\left(p-2\right)n}+\left\|v\right\|^{p-2}_{\left(p-2\right)n}\right) \quad (3.31) \\ &\leq \left(p-1\right)\left\|w_t\right\|C_1\left\|\nabla w\right\|C_2\left(\left\|\nabla u\right\|^{p-2}+\left\|\nabla v\right\|^{p-2}\right)\end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır bulunabilir. Böylelikle, (3.29) eşitsizliği yeniden düzenlenip $\left\|\nabla u\right\|^2\leq A_2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+r\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 \le \frac{r}{4}\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2+\frac{\delta^2}{r}\left\|\nabla v_{tt}(t)\right\|^2$$
$$+(p-1)\left\|w_t(t)\right\|C_1\left\|\nabla w(t)\right\|C_2 2A_2^{\frac{p-2}{2}} \tag{3.32}$$

yazılabilir.

$C_3=2C_1C_2A_2^{\frac{p-2}{2}}(p-1)$ alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+r\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 \le \frac{r}{4}\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2+\frac{\delta^2}{r}\left\|\nabla v_{tt}(t)\right\|^2+C_3\left\|w_t(t)\right\|\left\|\nabla w(t)\right\|$$

elde edilir. Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+r\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 \le \frac{r}{4}\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2+\frac{\delta^2}{r}\left\|\nabla v_{tt}(t)\right\|^2$$
$$+C_3\frac{\left\|w_t(t)\right\|^2}{2}+C_3\frac{\left\|\nabla w(t)\right\|^2}{2} \tag{3.33}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $r>0$, $\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2\ge 0$ olduğundan

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\le\frac{\delta^2}{r}\left\|\nabla v_{tt}(t)\right\|^2+M_2E_w(t) \tag{3.34}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir. $M_2=\max\left\{1,C_3,b,\frac{\delta_1}{2},\frac{r}{4}\right\}$'dir.

(3.4) kestirimi göz önüne alınarak (3.34) eşitsizliğinin her iki tarafı e^{-M_3t} ile çarpılıp $(0,t)$'de integrali alınırsa bu diferansiyel eşitsizlik,

$$E_w(t) \le \frac{e^{M_2 t} A_4}{rM_2}\delta^2 \tag{3.35}$$

şeklinde tüm $t \in (0,T]$ için geçerli olmaktadır.

(3.35) eşitsizliği gösteriyor ki δ_1 ve δ_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v birbirine o kadar yaklaşır. $\delta_1 - \delta_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin u ve v çözümlerinin δ katsayısına çözümlerinin sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur. ■

3.1.2. b katsayısına sürekli bağımlılık

Bu bölümde, (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin b katsayısına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir. u fonksiyonu,

$$u_{tt} - b_1\Delta u - \delta\,\Delta u_{tt} - r\Delta u_t + u|u|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.36}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.37}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.38}$$

probleminin çözümü

v fonksiyonu ise,

$$v_{tt} - b_2\Delta v - \delta\,\Delta v_{tt} - r\Delta v_t + v|v|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.39}$$

$$v(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.40}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.41}$$

probleminin çözümü olsun.

Bu iki çözümün farkı $w=u-v$ olup $b_1-b_2=b$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $b_1\Delta v$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$w_{tt}-b_1\Delta w-b\Delta v-\delta\,\Delta w_{tt}-r\Delta w_t+|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v=0, \tag{3.42}$$

$$w(x,t)=0, \qquad x\in\partial\Omega,\ t>0 \tag{3.43}$$

$$w(x,0)=0, \quad w_t(x,0)=0, \qquad x\in\Omega \tag{3.44}$$

başlangıç sınır değer probleminin(BSD) çözümü olsun.

Teorem 3.1.2. (3.42)-(3.44) probleminin çözümü olan w için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{b_1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{\delta}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\le\frac{e^{M_3t}A_2}{rM_3}b^2, \qquad \forall t\in(0,T] \tag{3.45}$$

$A_2>0, M_3>0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 3.1.2. (3.42) denklemi w_t ile çarpılıp $L_2(\Omega)$'de iç çarpımı alınırsa,

$$\begin{aligned}&(w_{tt},w_t)-b_1(\Delta w,w_t)-b(\Delta v,w_t)-\delta(\Delta w_{tt},w_t)-r(\Delta w_t,w_t)\\&+\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t\right)=0\end{aligned} \tag{3.46}$$

elde edilir.

(3.46) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$(w_{tt},w_t)=\int_\Omega w_t w_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t(t)\|^2$$

$$\left(\Delta w, w_t\right)=\int_{\Omega} w_t \Delta w dx=\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \nabla w_t \nabla w dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta v, w_t\right)=\int_{\Omega} w_t \Delta v dx=\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial v}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \nabla w_t \nabla v dx=-\left(\nabla w_t, \nabla v\right)$$

$$\left(\Delta w_{tt}, w_t\right)=\int_{\Omega} w_t \Delta w_{tt} dx=\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w_{tt}}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \nabla w_{tt} \nabla w_t dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta w_t, w_t\right)=\int_{\Omega} w_t \Delta w_t dx=\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w_t}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \nabla w_t \nabla w_t dx=-\left(\nabla w_t, \nabla w_t\right)=-\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v, w_t\right)=\int_{\Omega}\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{b_1}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2+\frac{\delta}{2}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2\right]+b\left(\nabla v, \nabla w_t\right)+r\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$
$$+\int_{\Omega}\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx=0 \tag{3.47}$$

elde edilir.

$$E_w\left(t\right)=\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{b_1}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2+\frac{\delta}{2}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2 \tag{3.48}$$

olmak üzere, (3.47) denklemi,

$$\frac{d}{dt} E_w\left(t\right)+r\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2=-b\left(\nabla v, \nabla w_t\right)-\int_{\Omega}\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx \tag{3.49}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (3.49) denklemi,

$$\frac{d}{dt} E_w\left(t\right)+r\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2 \le \left|-b\left(\nabla v, \nabla w_t\right)\right|+\left|-\int_{\Omega}\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx\right| \tag{3.50}$$

şeklinde yazılabilir. (3.50) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için sırasıyla Cauchy-Schwarz ve ε Young eşitsizliği $\varepsilon = \frac{r}{4}$ için uygulanırsa,

$$\begin{aligned} b\left|(\nabla v, \nabla w_t)\right| &\le b\|\nabla v(t)\|\|\nabla w_t(t)\| \\ &\le \varepsilon\|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}\|\nabla v(t)\|^2 \qquad (3.51) \\ &\le \frac{r}{4}\|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{b^2}{r}\|\nabla v(t)\|^2 \end{aligned}$$

olur. (3.50) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için $n \ge 3,\ 2 < p \le \frac{2n-2}{n-2}$ olmak üzere sırasıyla ortalama değer teoremi, Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri uygulanırsa $\int_\Omega \left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right)w_t dx$ integrali için

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right)w_t dx\right| &\le (p-1)\int_\Omega |w||w_t|\left(|u|^{p-2} + |v|^{p-2}\right)dx \\ &\le (p-1)\|w_t\|\|w\|_{\frac{2n}{n-2}}\left(\|u\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|v\|_{(p-2)n}^{p-2}\right) \qquad (3.52) \\ &\le (p-1)\|w_t\|C_1\|\nabla w\|C_2\left(\|\nabla u\|^{p-2} + \|\nabla v\|^{p-2}\right) \end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır bulunabilir. Böylelikle, (3.50) eşitsizliği yeniden düzenlenip $\|\nabla u\|^2 \le A_2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}E_w(t) + r\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{r}{4}\|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{b^2}{r}\|\nabla v(t)\|^2 \\ &+(p-1)\|w_t(t)\|C_1\|\nabla w(t)\|C_2 2A_2^{\frac{p-2}{2}} \end{aligned} \qquad (3.53)$$

yazılabilir. $C_3 = 2C_1C_2A_2^{\frac{p-2}{2}}(p-1)$ alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t) + r\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{r}{4}\|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{b^2}{r}\|\nabla v(t)\|^2 + C_3\|w_t(t)\|\|\nabla w(t)\|$$

elde edilir. Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{d}{dt}E_w(t) + r\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{r}{4}\|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{b^2}{r}\|\nabla v(t)\|^2$$
$$+C_3\frac{\|w_t(t)\|^2}{2} + C_3\frac{\|\nabla w(t)\|^2}{2} \tag{3.54}$$

elde edilir. $r > 0$ ve $\|\nabla w_t(t)\|^2 \ge 0$ olduğundan (3.54) eşitsizliği

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \le \frac{b^2}{r}\|\nabla v(t)\|^2 + M_3E_w(t) \tag{3.55}$$

şeklinde yazılabilir. $M_2 = \max\left\{1, C_3, b, \frac{\delta_1}{2}, \frac{r}{4}\right\}$ ’dir.

(3.4) kestirimi göz önüne alınarak (3.55) eşitsizliğinin her iki tarafı e^{-M_3t} ile çarpılıp $(0,t)$ ’de integrali alınırsa bu diferansiyel eşitsizlik,

$$E_w(t) \le \frac{e^{M_3t}A_2}{rM_3}b^2 \tag{3.56}$$

şeklinde tüm $t \in (0,T]$ için geçerli olmaktadır.

(3.56) eşitsizliği gösteriyor ki b_1 ve b_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v birbirine o kadar yaklaşır. $b_1 - b_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin u ve v çözümlerinin b katsayısına çözümlerinin sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur. ■

3.1.3. r katsayısına sürekli bağımlılık

Bu bölümde, (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin r katsayısına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir. u fonksiyonu,

$$u_{tt} - b\Delta u - \delta\,\Delta u_{tt} - r_1\Delta u_t + u|u|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.57}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.58}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.59}$$

probleminin çözümü

v fonksiyonu ise,

$$v_{tt} - b\Delta v - \delta\,\Delta v_{tt} - r_2\Delta v_t + v|v|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.60}$$

$$v(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.61}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.62}$$

probleminin çözümü olsun. Bu iki çözümün farkı $w = u - v$ olup $r_1 - r_2 = r$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $r_1\Delta v_t$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$w_{tt} - b\Delta w - \delta\,\Delta w_{tt} - r_1\Delta w_t - r\Delta v_t + |u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v = 0, \tag{3.63}$$

$$w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3.64}$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{3.65}$$

başlangıç sınır değer probleminin (BSD) çözümü olsun.

Teorem 3.1.3. (3.63)-(3.65) probleminin çözümü olan w için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{\delta}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\le\frac{e^{M_4 t}A_3}{M_4}r,\qquad \forall t\in(0,T] \tag{3.66}$$

$A_3>0, M_4>0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 3.1.3. (3.63) denklemi w_t ile çarpılıp $L_2(\Omega)$'de iç çarpımı alınırsa,

$$\begin{aligned}&(w_{tt},w_t)-b(\Delta w,w_t)-\delta(\Delta w_{tt},w_t)-r_1(\Delta w_t,w_t)-r(\Delta v_t,w_t)\\&+\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t\right)=0\end{aligned} \tag{3.67}$$

elde edilir.

(3.67) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$(w_{tt},w_t)=\int_\Omega w_t w_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t(t)\|^2$$

$$(\Delta w,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta w dx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla w dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2$$

$$(\Delta w_{tt},w_t)=\int_\Omega w_t\Delta w_{tt}dx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w_{tt}}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_{tt}\nabla w_t dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w_t(t)\|^2$$

$$(\Delta v_t,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta v_t dx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial v_t}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla v_t dx=-(\nabla w_t,\nabla v_t)$$

$$(\Delta w_t,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta w_t dx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w_t}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla w_t dx=-(\nabla w_t,\nabla w_t)=-\|\nabla w_t(t)\|^2$$

$$\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t\right)=\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{\delta}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\right]+r_1\|\nabla w_t(t)\|^2+r\left(\nabla v_t,\nabla w_t\right)\\&+\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx=0\end{aligned} \tag{3.68}$$

elde edilir.

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{\delta}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2 \tag{3.69}$$

olmak üzere (3.68) denklemi,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+r_1\|\nabla w_t(t)\|^2=-r\left(\nabla v_t,\nabla w_t\right)-\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx \tag{3.70}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (3.70) denklemi,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+r_1\|\nabla w_t(t)\|^2\leq\left|-r\left(\nabla v_t,\nabla w_t\right)\right|+\left|-\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \tag{3.71}$$

şeklinde yazılabilir. (3.71) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için sırasıyla Cauchy-Schwarz ve ε Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}r\left|\left(\nabla v_t,\nabla w_t\right)\right|&\leq r\|\nabla v_t(t)\|\|\nabla w_t(t)\|\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2+\frac{r^2}{2\varepsilon}\|\nabla v_t(t)\|^2\end{aligned} \tag{3.72}$$

elde edilir. (3.71) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için $2 < p \leq \dfrac{2n-2}{n-2}$ olmak üzere sırasıyla ortalama değer teoremi, Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri uygulanırsa $\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx$ integrali için,

$$\left|\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \leq (p-1)\int_{\Omega}|w||w_t|\left(|u|^{p-2}+|v|^{p-2}\right)dx$$

$$\leq (p-1)\|w_t\|\|w\|_{\frac{2n}{n-2}}\left(\|u\|_{(p-2)n}^{p-2}+\|v\|_{(p-2)n}^{p-2}\right) \tag{3.73}$$

$$\leq (p-1)\|w_t\|C_1\|\nabla w\|C_2\left(\|\nabla u\|^{p-2}+\|\nabla v\|^{p-2}\right)$$

şeklinde bir üst sınır bulunabilir. Böylelikle, (3.71) eşitsizliği yeniden düzenlenip $\|\nabla u\|^2 \leq A_2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(r_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|\nabla w_t(t)\|^2 \leq \frac{r^2}{2\varepsilon}\|\nabla v_t(t)\|^2$$

$$+(p-1)\|w_t(t)\|C_1\|\nabla w(t)\|C_2 2A_2^{\frac{p-2}{2}} \tag{3.74}$$

şeklinde yazılabilir. (3.74) eşitsizliğinin sağ tarafına $\dfrac{\delta}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2$ eklenip Young eşitsizliği yardımıyla $C_3 = 2C_1C_2A_2^{\frac{p-2}{2}}(p-1)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(r_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|\nabla w_t(t)\|^2 \leq \frac{r^2}{2\varepsilon}\|\nabla v_t(t)\|^2+C_3\frac{\|w_t(t)\|^2}{2}$$

$$+C_3\frac{\|\nabla w(t)\|^2}{2}+\frac{\delta}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2 \tag{3.75}$$

elde edilir.

Burada, $r_1-\frac{\varepsilon}{2}>0,\ \varepsilon=\frac{r_1}{2}$ olup $\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2\geq 0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}E_w\left(t\right)\leq\frac{r^2}{r_1}\left\|\nabla v_t\left(t\right)\right\|^2+M_4E_w\left(t\right) \tag{3.76}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir. $M_4=\max\left\{1,C_3,b\right\}$ ’dir.

(3.4) kestirimi göz önüne alınarak (3.76) eşitsizliğinin her iki tarafı e^{-M_3t} ile çarpılıp $\left(0,t\right)$ ’de integrali alınırsa bu diferansiyel eşitsizlik,

$$E_w\left(t\right)\leq\frac{e^{M_4t}A_3}{r_1M_4}r^2 \tag{3.77}$$

şeklinde tüm $t\in\left(0,T\right]$ için geçerli olmaktadır.

(3.77) eşitsizliği gösteriyor ki r_1 ve r_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v birbirine o kadar yaklaşır. $r_1-r_2=0$ olursa $w=u-v=0$ olur. Böylece (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin u ve v çözümlerinin r katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur.

■

3.1.4. Tüm katsayılara sürekli bağımlılık

Bundan önceki kısımlarda çözümün her bir parametreye göre sürekli bağımlılığı ayrı ayrı incelenmiş olup bu bölümde ise bütün parametreler aynı anda değişikliğe uğradığında çözümde nasıl bir değişikliğin meydana geldiği ve çözümün bütün parametrelere aynı anda sürekli bağımlı olup olmadığı incelenecektir.

u fonksiyonu,

$$u_{tt} - b_1 \Delta u - \delta_1 \Delta u_{tt} - r_1 \Delta u_t + u|u|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \qquad (3.78)$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \qquad (3.79)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \qquad (3.80)$$

probleminin çözümü

v fonksiyonu ise,

$$v_{tt} - b_2 \Delta v - \delta_2 \Delta v_{tt} - r_2 \Delta v_t + v|v|^{p-2} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \qquad (3.81)$$

$$v(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \qquad (3.82)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \qquad (3.83)$$

probleminin çözümü olsun.

Bu iki çözümün farkı $w=u-v$ şeklinde olup $b = b_1 - b_2, \delta = \delta_1 - \delta_2, r = r_1 - r_2$ tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $b_1 \Delta v,\ \delta_1 \Delta v_{tt},\ r_1 \Delta v_t$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$w_{tt} - b_1 \Delta w - b \Delta v - \delta_1 \Delta w_{tt} - \delta \Delta v_{tt} - r_1 \Delta w_t - r \Delta v_t + |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v = 0, \qquad (3.84)$$

$$w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \qquad (3.85)$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega \qquad (3.86)$$

başlangıç sınır değer probleminin(BSD) çözümü olsun.

Teorem 3.1.4. (3.84)-(3.86) probleminin çözümü olan w fonksiyonu için $\forall t \in (0,T]$ olduğunda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{b_1}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2+\frac{\delta_1}{2}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2\le\left(\frac{3b^2}{4\varepsilon}A_2+\frac{3\delta^2}{4\varepsilon}A_4+\frac{3r^2}{4\varepsilon}A_3\right)\frac{e^{M_5t}}{M_5} \tag{3.87}$$

$A_2, A_3, A_4>0,\ M_5>0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 3.1.4. (3.84) denklemi w_t ile çarpılıp $L_2\left(\Omega\right)$'de iç çarpımı alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left(w_{tt},w_t\right)-b_1\left(\Delta w,w_t\right)-b\left(\Delta v,w_t\right)-\delta_1\left(\Delta w_{tt},w_t\right)-\delta\left(\Delta v_{tt},w_t\right)\\&-r_1\left(\Delta w_t,w_t\right)-r\left(\Delta v_t,w_t\right)+(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t)=0\end{aligned} \tag{3.88}$$

elde edilir.

(3.88) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$\left(w_{tt},w_t\right)=\int_\Omega w_tw_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\left(t\right)\|^2$$

$$\left(\Delta w,w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta wdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla wdx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta v,w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta vdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial v}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla vdx=-\left(\nabla w_t,\nabla v\right)$$

$$\left(\Delta w_{tt},w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta w_{tt}dx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w_{tt}}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_{tt}\nabla w_tdx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta v_{tt},w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta v_{tt}dx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial v_{tt}}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla v_{tt}dx=-\left(\nabla w_t,\nabla v_{tt}\right)$$

$$\left(\Delta w_t,w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta w_tdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w_t}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla w_tdx=-\left(\nabla w_t,\nabla w_t\right)=-\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta v_t,w_t\right)=\int_\Omega w_t\Delta v_tdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial v_t}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla v_tdx=-\left(\nabla w_t,\nabla v_t\right)$$

$$\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t\right)=\int_\Omega\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{b_1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{\delta_1}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\right]+b(\nabla v,\nabla w_t)+\delta(\nabla v_{tt},\nabla w_t)\\&+r_1\|\nabla w_t(t)\|^2+r(\nabla v_t,\nabla w_t)+\int_\Omega\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx=0\end{aligned}\tag{3.89}$$

şeklinde yazılabilir.

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{b_1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{\delta_1}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\tag{3.90}$$

olmak üzere (3.89) denklemi,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_w(t)+r_1\|\nabla w_t(t)\|^2=-b(\nabla v,\nabla w_t)-\delta(\nabla v_{tt},\nabla w_t)\\&-r(\nabla v_t,\nabla w_t)-\int_\Omega\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx\end{aligned}\tag{3.91}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (3.91) denklemi

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_w(t)+r_1\|\nabla w_t(t)\|^2\le\left|-b(\nabla v,\nabla w_t)\right|+\left|-\delta(\nabla v_{tt},\nabla w_t)\right|\\&+\left|-r(\nabla v_t,\nabla w_t)\right|+\left|-\int_\Omega\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx\right|\end{aligned}\tag{3.92}$$

şeklinde yazılabilir. (3.92) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk üç terim için sırasıyla Cauchy-Schwarz ve ε Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$b\left|\left(\nabla v,\nabla w_t\right)\right| \le b\left\|\nabla v(t)\right\|\left\|\nabla w_t(t)\right\|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3}\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 + \frac{3b^2}{4\varepsilon}\left\|\nabla v(t)\right\|^2 \tag{3.93}$$

$$\delta\left|\left(\nabla v_{tt},\nabla w_t\right)\right| \le \delta\left\|\nabla v_{tt}(t)\right\|\left\|\nabla w_t(t)\right\|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3}\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 + \frac{3\delta^2}{4\varepsilon}\left\|\nabla v_{tt}(t)\right\|^2 \tag{3.94}$$

$$r\left|\left(\nabla v_t,\nabla w_t\right)\right| \le r\left\|\nabla v_t(t)\right\|\left\|\nabla w_t(t)\right\|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3}\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 + \frac{3r^2}{4\varepsilon}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2 \tag{3.95}$$

olur. (3.92) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son terim için $2 < p \le \dfrac{2n-2}{n-2}$ olmak üzere sırasıyla ortalama değer teoremi, Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri uygulanırsa $\int_\Omega \left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right)w_t dx$ integrali için,

$$\left|\int_\Omega \left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \le (p-1)\int_\Omega |w||w_t|\left(|u|^{p-2} + |v|^{p-2}\right)dx$$
$$\le (p-1)\left\|w_t\right\|\left\|w\right\|_{\frac{2n}{n-2}}\left(\left\|u\right\|_{(p-2)n}^{p-2} + \left\|v\right\|_{(p-2)n}^{p-2}\right) \tag{3.96}$$
$$\le (p-1)\left\|w_t\right\|C_1\left\|\nabla w\right\|C_2\left(\left\|\nabla u\right\|^{p-2} + \left\|\nabla v\right\|^{p-2}\right)$$

bir üst sınır bulunabilir.

Böylelikle, (3.92) eşitsizliği yeniden düzenlenip $\left\|\nabla u\right\|^2 \le A_2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+r_1\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{\varepsilon}{3}\|\nabla w_t(t)\|^2+\frac{3b^2}{4\varepsilon}\|\nabla v(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{3}\|\nabla w_t(t)\|^2$$

$$+\frac{3\delta^2}{4\varepsilon}\|\nabla v_{tt}(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{3}\|\nabla w_t(t)\|^2+\frac{3r^2}{4\varepsilon}\|\nabla v(t)\|^2 \tag{3.97}$$

$$+(p-1)\|w_t(t)\|C_1\|\nabla w(t)\|C_2 2A_2^{\frac{p-2}{2}}$$

elde edilir. $C_3=2C_1C_2A_2^{\frac{p-2}{2}}(p-1)$ alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+(r_1-\varepsilon)\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{3b^2}{4\varepsilon}\|\nabla v(t)\|^2+\frac{3\delta^2}{4\varepsilon}\|\nabla v_{tt}(t)\|^2$$
$$+\frac{3r^2}{4\varepsilon}\|\nabla v_t(t)\|^2+C_3\|w_t(t)\|\|\nabla w(t)\| \tag{3.98}$$

elde edilir. Young eşitsizliği kullanılarak (3.98) eşitsizliğinin sağ tarafına $\frac{\delta_1}{2}\|\nabla w_t\|^2$ eklenirse,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+(r_1-\varepsilon)\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{3b^2}{4\varepsilon}\|\nabla v(t)\|^2+\frac{3\delta^2}{4\varepsilon}\|\nabla v_{tt}(t)\|^2$$
$$+\frac{3r^2}{4\varepsilon}\|\nabla v_t(t)\|^2+C_3\frac{\|w_t(t)\|^2}{2}+C_3\frac{\|\nabla w(t)\|^2}{2}+\frac{\delta_1}{2}\|\nabla w_t\|^2 \tag{3.99}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $(r_1-\varepsilon)>0$ ve $\|\nabla w_t(t)\|^2>0$ olup (3.4)'teki kestirimler göz önüne alındığında,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\le M_5E_w(t)+\frac{3b^2}{4\varepsilon}A_2+\frac{3\delta^2}{4\varepsilon}A_4+\frac{3r^2}{4\varepsilon}A_3 \tag{3.100}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir. $M_5=\max\{1,C_3,b_1\}$ 'dir.

(3.100) eşitsizliğinin her tarafı $e^{-M_5 t}$ ile çarpılıp $\left(0,t\right)$ de integre edildiğinde bu diferansiyel eşitsizlik,

$$E_w\left(t\right) \leq \left(\frac{3b^2}{4\varepsilon} A_2 + \frac{3\delta^2}{4\varepsilon} A_4 + \frac{3r^2}{4\varepsilon} A_3 \right) \frac{e^{M_5 t}}{M_5} \tag{3.101}$$

şeklinde tüm $t \in \left(0,T\right]$ için geçerli olmaktadır.

(3.101) eşitsizliği gösteriyor ki r_1 ve r_2, b_1 ve b_2, δ_1 ve δ_2 katsayıları birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v birbirine o kadar yaklaşır. $r_1 - r_2 = 0$, $b_1 - b_2 = 0$, $\delta_1 - \delta_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin u ve v çözümlerinin tüm katsayılara sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur.

■

BÖLÜM 4. HİDRODİNAMİK SÖNÜM TERİMLİ ROSENAU DENKLEMİ İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Tezin dördüncü bölümünde,

$$u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t + \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} + u|u|^{p-1} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{4.3}$$

şeklinde dördüncü mertebeden lineer olmayan enerji yitimini ifade eden hidrodinamik disipatif katsayı içeren Rosenau başlangıç sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Burada problemin çözümlerinin $\alpha > 0$ olmak üzere, α (sönüm) katsayısına göre sürekli bağımlılığı araştırılacak olup $p > 1$ olduğu durum incelenecektir. u bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlandırılmış bölgede tanımlanmıştır. $n = 1,2$ ise $1 < p \le \infty$, $n \ge 3$ ise $1 < p \le \dfrac{n}{n-2}$ 'dir.

4.1. Ön Kestirimler

Şimdi, (4.1) - (4.3) probleminin çözümüne ilişkin bazı eşitsizlikler elde edelim.

Teorem 4.1. $(u_0, u_1) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H^2(\Omega)$ için (4.1) - (4.3) probleminin çözümü olan

$u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u_t(t)\|^2 \le B_1,\ \|\nabla u(t)\|^2 \le B_1,\ \|\Delta u(t)\|^2 \le B_1,\ \|\Delta u_t(t)\|^2 \le B_1,$$
$$\int_0^t \|\nabla u_s(x,s)\|^2 ds \le B_2 \tag{4.4}$$

eşitsizliklerini sağlar. $B_1, B_2 > 0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 4.1. (4.4) eşitsizliğini elde edebilmek için (4.1) denklemi u_t ile $L^2(\Omega)$'de çarpılırsa,

$$(u_{tt},u_t)-(\Delta u,u_t)-\alpha(\Delta u_t,u_t)+(\Delta^2 u,u_t)+(\Delta^2 u_{tt},u_t)+\left(u|u|^{p-1},u_t\right)=0 \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında

$$(u_{tt},u_t)=\int_\Omega u_t u_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2$$

$$(\Delta u,u_t)=\int_\Omega u_t\Delta u dx=\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2$$

$$(\Delta u_t,u_t)=\int_\Omega u_t\Delta u_t dx=\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u_t}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla u_t\nabla u_t dx=-\|\nabla u_t(t)\|^2$$

$$\begin{aligned}(\Delta^2 u,u_t)&=\int_\Omega u_t\Delta^2 u dx=\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial\Delta u}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla\Delta u\nabla u_t dx\\&=-\left[\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial\Delta u}{\partial n}ds-\int_\Omega \Delta u_t\Delta u dx\right]=+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u(t)\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta^2 u_{tt},u_t)&=\int_\Omega u_t\Delta^2 u_{tt} dx=\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial\Delta u_{tt}}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla\Delta u_{tt}\nabla u_t dx\\&=-\left[\int_{\partial\Omega} \nabla u_t\frac{\partial\Delta u_{tt}}{\partial n}ds-\int_\Omega \Delta u_t\Delta u_{tt} dx\right]=+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_t(t)\|^2\end{aligned}$$

$$\left(|u|^{p-1}u,u_t\right)=\int_\Omega |u|^{p-1}uu_t dx=\frac{1}{p+1}\int_\Omega\frac{d}{dt}|u|^{p+1}dx=\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u_t(t)\|^2+\frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\right]$$

$$+\alpha\|\nabla u_t(t)\|^2=0 \tag{4.6}$$

elde edilir.

Enerji fonksiyonu

$$E_u(t)=\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u_t(t)\|^2+\frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}$$

olmak üzere, $\alpha>0$ olduğu göz önüne alınıp (4.6) eşitliğinden $\frac{d}{dt}E_u(t)\le 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Enerji fonksiyonu artmayan bir fonksiyondur. Buradan $(0,t)$ aralığında integral alındığında $E_u(t)\le E_u(0)$ olarak bulunur.

$$\frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u(x,t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u_t(x,t)\|^2+\frac{1}{p+1}\|u(x,t)\|_{p+1}^{p+1}\le\frac{1}{2}\|u_1(x,0)\|^2$$

$$+\frac{1}{2}\|\nabla u_0(x,0)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u_0(x,0)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u_1(x,0)\|^2+\frac{1}{p+1}\|u_0(x,0)\|_{p+1}^{p+1}$$

$B_1=\|u_1(x,0)\|^2+\|\nabla u_0(x,0)\|^2+\|\Delta u_0(x,0)\|^2+\|\Delta u_1(x,0)\|^2+\frac{2}{p+1}\|u_0(x,0)\|_{p+1}^{p+1}$ olmak üzere

$$\|u_t(t)\|^2\le B_1,\ \|\nabla u(t)\|^2\le B_1,\ \|\Delta u(t)\|^2\le B_1,\ \|\Delta u_t(t)\|^2\le B_1$$

kestirimleri elde edilir. (4.6) eşitliğinde $(0,t)$ aralığında integral alındığında

$$\int_0^t \frac{d}{dt} E_u(t)\,dx + \int_0^t \alpha \left\| \nabla u_t(t) \right\|^2 dx \le 0$$

$$E_u(t) - E_u(0) + \alpha \int_0^t \left\| \nabla u_t(t) \right\|^2 dx = 0$$

$$\int_0^t \left\| \nabla u_s(x,s) \right\|^2 ds \le \frac{E_u(0)}{\alpha} = B_2$$

olarak bulunur. Buradan (4.4)'teki diferansiyel eşitsizliğin sağlandığı görülür.

■

4.1.1. α katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde, (4.1)-(4.3) başlangıç sınır değer probleminin α katsayısına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir.

u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \Delta u - \alpha_1 \Delta u_t + \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} + u|u|^{p-1} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{4.7}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{4.8}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{4.9}$$

probleminin çözümü, v fonksiyonu ise,

$$v_{tt} - \Delta v - \alpha_2 \Delta v_t + \Delta^2 v + \Delta^2 v_{tt} + v|v|^{p-1} = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{4.10}$$

$$v(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{4.11}$$

$$v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{4.12}$$

probleminin çözümü olsun. Bu iki çözümün farkı $w = u - v$ olup $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $\alpha_1 \Delta v_t$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$w_{tt} - \Delta w - \alpha_1 \Delta w_t - \alpha \Delta v_t + \Delta^2 w + \Delta^2 w_{tt} + u|u|^{p-1} - v|v|^{p-1} = 0, \tag{4.13}$$

$$w(x,t)=0, \qquad x\in\partial\Omega,\ t>0 \tag{4.14}$$

$$w(x,0)=0, w_t(x,0)=0, \qquad x\in\Omega \tag{4.15}$$

başlangıç sınır değer probleminin (BSD) çözümü olsun.

Teorem 4.1.1. (4.13)-(4.15) probleminin çözümü olan w fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir. $\forall t\in(0,T]$ için,

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta w(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta w_t(t)\|^2\le\frac{e^{M_1t}B_2}{\alpha_1}\alpha^2 \tag{4.16}$$

elde edilir. Burada $B_2>0,\ M_1>0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 4.1.1. (4.13) denklemi w_t ile çarpılıp $L_2(\Omega)$'de iç çarpımı alınırsa,

$$\begin{aligned}&(w_{tt},w_t)-(\Delta w,w_t)-\alpha_1(\Delta w_t,w_t)+\alpha(\Delta v_t,w_t)+(\Delta^2 w,w_t)+(\Delta^2 w_{tt},w_t)\\&+\left(u|u|^{p-1}-v|v|^{p-1},w_t\right)=0\end{aligned} \tag{4.17}$$

olur.

(4.17) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$(w_{tt},w_t)=\int_\Omega w_tw_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t(t)\|^2$$

$$(\Delta w,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta w dx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w\nabla w_tdx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2$$

$$(\Delta w_t,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta w_tdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w_t}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla w_tdx=-\|\nabla w_t(t)\|^2$$

$$\left(\Delta v_t, w_t\right)=\int_{\Omega} w_t \Delta v_t dx=\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial v_t}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \nabla w_t \nabla v_t dx=-\left(\nabla w_t, \nabla v_t\right)$$

$$\left(\Delta^2 w, w_t\right)=\int_{\Omega} w_t \Delta^2 w dx=\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial \Delta w}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \nabla \Delta w \nabla w_t dx$$

$$=-\left[\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial \Delta w}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \Delta w_t \Delta w dx\right]=+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta w(t)\right\|^2$$

$$\left(\Delta^2 w_{tt}, w_t\right)=\int_{\Omega} w_t \Delta^2 w_{tt} dx=\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial \Delta w_{tt}}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \nabla \Delta w_{tt} \nabla w_t dx$$

$$=-\left[\int_{\partial\Omega} \nabla w_t \frac{\partial \Delta w_{tt}}{\partial n} ds-\int_{\Omega} \Delta w_t \Delta w_{tt} dx\right]=+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta w_t(t)\right\|^2$$

$$\left(u|u|^{p-1}-v|v|^{p-1}, w_t\right)=\int_{\Omega}\left(u|u|^{p-1}-v|v|^{p-1}\right) w_t dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta w(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta w_t(t)\right\|^2\right]+\alpha_1\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2$$
$$+\alpha\left(\nabla w_t, \nabla v_t\right)+\int_{\Omega}\left(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right) w_t dx=0 \tag{4.18}$$

elde edilir.

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta w(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta w_t(t)\right\|^2 \tag{4.19}$$

olmak üzere (4.18) denklemi

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\alpha_1\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2=-\alpha\left(\nabla w_t, \nabla v_t\right)-\int_{\Omega}\left(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right) w_t dx \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir. (4.20) denklemi

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\alpha_1\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 \le \left|-\alpha\left(\nabla w_t,\nabla v_t\right)\right|+\left|-\int_\Omega\left(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right)w_t dx\right| \tag{4.21}$$

şeklinde yazılabilir. (4.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için sırasıyla Cauchy-Schwarz ve ε 'lu Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\alpha\left|\left(\nabla w_t,\nabla v_t\right)\right| &\le \alpha\left\|\nabla w_t(t)\right\|\left\|\nabla v_t(t)\right\| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2+\frac{\alpha^2}{2\varepsilon}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için $1<p\le\frac{n}{n-2}$ olmak üzere sırasıyla ortalama değer teoremi, Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri uygulanırsa $\left|\int_\Omega\left(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right)w_t dx\right|$ integrali için

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\left(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right)w_t dx\right| &\le p\int_\Omega |w||w_t|\left(|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)dx \\ &\le p\left\|w_t\right\|\left\|w\right\|_{\frac{2n}{n-2}}\left(\left\|u\right\|_{(p-1)n}^{p-1}+\left\|v\right\|_{(p-1)n}^{p-1}\right) \\ &\le p\left\|w_t\right\|C_1\left\|\nabla w\right\|C_2\left(\left\|\nabla u\right\|^{p-1}+\left\|\nabla v\right\|^{p-1}\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

bir üst sınır bulunabilir. Böylelikle, (4.21) eşitsizliği yeniden düzenlenip $\left\|\nabla u\right\|^2\le B_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(\alpha_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 \le \frac{\alpha^2}{2\varepsilon}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2+p\left\|w_t\right\|C_1\left\|\nabla w\right\|C_2 2B_1^{\frac{p-1}{2}} \tag{4.24}$$

şeklinde yazılabilir. $C_3=2pC_1C_2B_1^{\frac{p-1}{2}}$ alındığında,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(\alpha_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 \le \frac{\alpha^2}{2\varepsilon}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2 + C_3\left\|w_t\right\|\left\|\nabla w\right\| \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.25) eşitsizliği Young eşitsizliği yardımıyla,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(\alpha_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 \le \frac{\alpha^2}{2\varepsilon}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2 + C_3\frac{\left\|w_t\right\|^2}{2}+C_3\frac{\left\|\nabla w\right\|^2}{2}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliğin sağına $\frac{1}{2}\left\|\Delta w(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta w_t(t)\right\|^2$ pozitif terimleri eklenirse,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(\alpha_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2 &\le \frac{\alpha^2}{2\varepsilon}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2 + C_3\frac{\left\|w_t\right\|^2}{2}+C_3\frac{\left\|\nabla w\right\|^2}{2}\\ &+\frac{1}{2}\left\|\Delta w(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta w_t(t)\right\|^2\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Burada

$\alpha_1-\frac{\varepsilon}{2}>0,\ \varepsilon=\frac{\alpha_1}{2}$ olup $\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2>0$ olduğundan (4.26) eşitsizliği,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\le\frac{\alpha^2}{\alpha_1}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2+M_1E_w(t) \tag{4.27}$$

şeklinde yazılabilir. $M_1=\max\{1,C_3\}$ 'dir.

(4.27) eşitsizliğinin her tarafı $e^{-M_5 t}$ ile çarpılıp $(0,t)$ de integre edildiğinde bu diferansiyel eşitsizlik,

$$E_w(t) \le \frac{e^{M_1 t} B_2}{\alpha_1} \alpha^2 \tag{4.28}$$

şeklinde tüm $t \in (0, T]$ için geçerli olmaktadır.

(4.28) eşitsizliği gösteriyor ki α_1 ve α_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v birbirine o kadar yaklaşır. $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece (4.1)-(4.3) başlangıç sınır değer probleminin u ve v çözümlerinin α katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur. ■

BÖLÜM 5. BAZI TİPTEN GÜÇLÜ SÖNÜMLÜ YARI LİNEER DALGA DENKLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde,

$$u_{tt} - \Delta u - k\Delta u_t + a|u_t|^{m-2} u_t + b|u|^{p-2} u = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.1}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.3}$$

şeklinde lineer olmayan disipatif katsayı içeren başlangıç ve Dirichlet sınır koşullarıyla tanımlanmış yarı lineer dalga denklemi göz önüne alınmıştır. Burada problemin çözümlerinin $k \geq 0$ olmak üzere, k (sönüm), a (sönüm), b (lineerliği bozan terimin katsayısı) pozitif katsayılarına göre sürekli bağımlılık incelemesi ayrı ayrı gösterilecektir. Aynı zamanda denklemin bu katsayıların tümüne aynı anda sürekli bağımlı olduğu da ispatlanacaktır. $a > 0,\ b > 0,\ m \geq 2,\ p > 2$ olduğu durum incelenecektir. İspatlarda ilk bölümde olduğu gibi standart enerji metodu kullanılacaktır. u bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sınırında tanımlanmış olup $n = 1,2$ ise $2 < p < \infty$, $n \geq 3$ ise $2 < p \leq \dfrac{2n-2}{n-2}$'dir.

5.1. Ön Kestirimler

Şimdi, (5.1)-(5.3) probleminin çözümüne ilişkin bazı eşitsizlikler elde edelim.

Teorem 5.1. $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için (5.1)-(5.3) probleminin çözümü olan $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\left\|u_t(t)\right\|^2 \le D_1,\ \left\|\nabla u(t)\right\|^2 \le D_1,\ \left\|u(t)\right\|_p^p \le D_2,$$

$$\int_0^t \left\|\nabla u_s(x,s)\right\|^2 ds \le D_3, \tag{5.4}$$

eşitsizliklerini sağlar. $D_1, D_2, D_3 > 0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.1. (5.4) eşitsizliğini elde edebilmek için (5.1) denklemi u_t ile $L^2(\Omega)$'de çarpılırsa,

$$\left(u_{tt}, u_t\right) - \left(\Delta u, u_t\right) - k\left(\Delta u_t, u_t\right) + a\left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t, u_t\right) + b\left(\left|u\right|^{p-2} u, u_t\right) = 0 \tag{5.5}$$

elde edilir.

(5.5) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında

$$\left(u_{tt}, u_t\right) = \int_\Omega u_t u_{tt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t(t)\right\|^2$$

$$\left(\Delta u, u_t\right) = \int_\Omega u_t \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u(t)\right\|^2$$

$$\left(\Delta u_t, u_t\right) = \int_\Omega u_t \Delta u_t dx = \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u_t}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u_t \nabla u_t dx = -\left\|\nabla u_t(t)\right\|^2$$

$$\left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t, u_t\right) = \int_\Omega \left|u_t\right|^{m-2} u_t u_t dx = \left\|u_t(t)\right\|_m^m$$

$$\left(\left|u\right|^{p-2} u, u_t\right) = \int_\Omega \left|u\right|^{p-2} u u_t dx = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|u\right|^p dx = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_p^p$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p\right]+k\|\nabla u_t(t)\|^2+a\|u_t(t)\|_m^m=0 \tag{5.6}$$

elde edilir.

Enerji fonksiyonu

$$E_u(t)=\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p \tag{5.7}$$

olmak üzere, $a>0,\ k\geq 0$ olduğu göz önüne alınıp (5.6) eşitliğinden $\frac{d}{dt}E_u(t)\leq 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Enerji fonksiyonu artmayan bir fonksiyondur.

$$\frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|^2+\frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p\leq\frac{1}{2}\|u_1(x,0)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_0(x,0)\|^2+\frac{b}{p}\|u_0(x,0)\|_p^p$$

$D_1=\|u_1(x,0)\|^2+\|\nabla u_0(x,0)\|^2+\frac{2b}{p}\|u_0(x,0)\|_p^p$ olmak üzere

$$\|u_t(t)\|^2\leq D_1,\|\nabla u(t)\|^2\leq D_1$$

$D_2=\frac{p}{2b}\|u_1(x,0)\|^2+\frac{p}{2b}\|\nabla u_0(x,0)\|^2+\|u_0(x,0)\|_p^p$ olmak üzere,

$$\|u(t)\|_p^p\leq D_2$$

kestirimleri elde edilir. (5.6) denkleminde $(0,t)$ aralığında integral alındığında

$$\int_0^t\frac{d}{dt}E_u(t)\,dx+\int_0^t k\|\nabla u_t(t)\|^2\,dx=0$$

$$E_u(t) - E_u(0) + k\int_0^t \|\nabla u_t(t)\|^2\, dx = 0$$

$$\int_0^t \|\nabla u_t(t)\|^2\, dx \le \frac{E_u(0)}{k} = D_3$$

olarak bulunur. Böylece (5.4) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. ■

5.1.1. k katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde, (5.1)-(5.3) başlangıç sınır değer probleminin k katsayısına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir.

u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \Delta u - k_1 \Delta u_t + a|u_t|^{m-2} u_t + b|u|^{p-2} u = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.8}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.9}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.10}$$

probleminin çözümü,

v fonksiyonu ise,

$$v_{tt} - \Delta v - k_2 \Delta v_t + a|v_t|^{m-2} v_t + b|v|^{p-2} v = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.11}$$

$$v(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.12}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad v_t(0,x) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.13}$$

probleminin çözümü olsun. Bu iki çözümün farkı $w = u - v$ olup $k_1 - k_2 = k$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $k_1 \Delta v_t$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$w_{tt}-\Delta w-k_1\Delta w_t-k\Delta v_t+a\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t\right)$$
$$+b\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)=0, \qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{5.14}$$

$$w(t,x)=0, \qquad x\in\partial\Omega,\ t>0 \tag{5.15}$$

$$w(0,x)=0, \quad w_t(0,x)=0 \qquad x\in\Omega \tag{5.16}$$

başlangıç sınır değer probleminin (BSD) çözümü olsun.

Teorem 5.1.1. (5.14)-(5.16) probleminin çözümü olan w fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2\le\frac{e^{M_1t}tD_3}{k_1}k^2, \qquad \forall t\in(0,T] \tag{5.17}$$

$D_3>0,\ M_1>0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.1.1. (5.14) denklemi w_t ile çarpılıp $L_2(\Omega)$’de iç çarpımı alınırsa,

$$(w_{tt},w_t)-(\Delta w,w_t)-k_1(\Delta w_t,w_t)-k(\Delta v_t,w_t)$$
$$+a\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t,w_t\right)+b\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t\right)=0 \tag{5.18}$$

elde edilir.

(5.18) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$(w_{tt},w_t)=\int_\Omega w_tw_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t(t)\|^2$$

$$(\Delta w,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta wdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w\nabla w_tdx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2$$

$$\left(\Delta w_t, w_t\right) = \int_\Omega w_t \Delta w_t dx = \int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w_t}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla w_t \nabla w_t dx = -\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\Delta v_t, w_t\right) = \int_\Omega w_t \Delta v_t dx = \int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial v_t}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla w_t \nabla v_t dx = -\left(\nabla w_t, \nabla v_t\right)$$

$$\left(\left|u\right|^{p-2} u - \left|v\right|^{p-2} v, w_t\right) = \int_\Omega \left(\left|u\right|^{p-2} u - \left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx$$

$$\left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t - \left|v_t\right|^{m-2} v_t, w_t\right) = \int_\Omega \left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t - \left|v_t\right|^{m-2} v_t\right) w_t dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2\right] + k_1\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2 + k\left(\nabla w_t, \nabla v_t\right) \\ &+a\int_\Omega \left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t - \left|v_t\right|^{m-2} v_t\right) w_t dx + b\int_\Omega \left(\left|u\right|^{p-2} u - \left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx = 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir.

$$E_w\left(t\right) = \frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2 \tag{5.20}$$

olmak üzere (5.19) denklemi,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}E_w\left(t\right) + k_1\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2 + a\int_\Omega \left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t - \left|v_t\right|^{m-2} v_t\right) w_t dx = -k\left(\nabla w_t, \nabla v_t\right) \\ &-b\int_\Omega \left(\left|u\right|^{p-2} u - \left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx \end{aligned} \tag{5.21}$$

şeklinde yazılabilir. (5.21) denklemi

$$\frac{d}{dt}E_w\left(t\right)+k_1\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2+a\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t dx\le\left|-k\left(\nabla w_t,\nabla v_t\right)\right|+$$
$$\left|-b\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \tag{5.22}$$

şeklinde yazılabilir.

Eşitsizliğin sol tarafındaki $\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t dx$ terimi ele alındığında,

$$\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t=\sum_{i=0}^{n}\left(\left|u_{t_i}\right|^{m-2}u_{t_i}-\left|v_{t_i}\right|^{m-2}v_{t_i}\right)w_{t_i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_{t_i}-v_{t_i}+u_{t_i}\right)w_{t_i}+\frac{1}{2}\left|u_t\right|^{m-2}u_{t_i}w_{t_i}-\frac{1}{2}\left|v_t\right|^{m-2}v_{t_i}w_{t_i}+\frac{1}{2}\left|v_t\right|^{m-2}\left(u_{t_i}-v_{t_i}-u_{t_i}\right)w_{t_i}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}+\left|v_t\right|^{m-2}\right)w_{t_i}w_{t_i}+\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}-\left|v_t\right|^{m-2}\right)\left(u_{t_i}^2-v_{t_i}^2\right)\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}+\left|v_t\right|^{m-2}\right)w_{t_i}w_{t_i}+\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}-\left|v_t\right|^{m-2}\right)\left(\left|u_t\right|-\left|v_t\right|\right)\left(\left|u_t\right|+\left|v_t\right|\right)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left(\left|u_t\right|^{m-2}-\left|v_t\right|^{m-2}\right)\left(\left|u_t\right|-\left|v_t\right|\right)\ge 0 \tag{5.23}$$

olmaktadır. Buna göre $k\ge 0$ olup $\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t dx\ge 0$ olduğu (5.23) eşitsizliğinde ispatlandığından (5.22) eşitsizliği

$$\frac{d}{dt}E_w\left(t\right)+k_1\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2\le\left|-k\left(\nabla w_t,\nabla v_t\right)\right|+\left|-b\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \tag{5.24}$$

şeklinde yazılabilir.

(5.24) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için sırasıyla Cauchy-Schwarz ve ε 'lu Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} k\left|\left(\nabla w_t,\nabla v_t\right)\right| &\le k\left\|\nabla w_t(t)\right\|\left\|\nabla v_t(t)\right\| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2+\frac{k^2}{2\varepsilon}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2 \end{aligned} \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.24) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için $2<p\le\dfrac{2n-2}{n-2}$ olmak üzere sırasıyla ortalama değer teoremi, Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri uygulanırsa $\left|\int_\Omega\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx\right|$ integrali için

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx\right| &\le (p-1)\int_\Omega |w||w_t|\left(|u|^{p-2}+|v|^{p-2}\right)dx \\ &\le (p-1)\|w_t\|\|w\|_{\frac{2n-2}{n-2}}\left(\|u\|^{p-2}_{(p-2)n}+\|v\|^{p-2}_{(p-2)n}\right) \\ &\le (p-1)\|w_t\|C_1\|\nabla w\|C_2\left(\|\nabla u\|^{p-2}_{(p-2)n}+\|\nabla v\|^{p-2}_{(p-2)n}\right) \end{aligned} \tag{5.26}$$

bir üst sınır bulunabilir. Böylelikle, (5.24) eşitsizliği yeniden düzenlenip $\|\nabla u\|^2\le D_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(k_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2\le\frac{k^2}{2\varepsilon}\left\|\nabla v_t(t)\right\|^2+(p-1)b\|w_t\|C_1\|\nabla w\|C_2 2D_1^{\frac{p-2}{2}} \tag{5.27}$$

elde edilir. $C_3=(p-1)bC_1C_2D_1^{\frac{p-2}{2}}$ alınırsa (5.27) eşitsizliği,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(k_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{k^2}{2\varepsilon}\|\nabla v_t(t)\|^2 + C_3\|w_t\|\|\nabla w\| \tag{5.28}$$

şeklinde yazılabilir. Young eşitsizliği yardımıyla,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\left(k_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|\nabla w_t(t)\|^2 \le \frac{k^2}{2\varepsilon}\|\nabla v_t(t)\|^2 + C_3\frac{\|w_t\|^2}{2}+C_3\frac{\|\nabla w\|^2}{2} \tag{5.29}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $k_1-\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ olup eşitsizliğin sağ tarafında $\varepsilon=\dfrac{k_1}{2}$ alınırsa, $\|\nabla w_t(t)\|^2>0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\le\frac{k^2}{k_1}\|\nabla v_t(t)\|^2+M_1E_w(t) \tag{5.30}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir. $M_1=\max\{1+C_3\}$ 'dir.

(5.30) eşitsizliğine kestirimlerden yola çıkarak Gronwall eşitsizliği uygulanırsa, bu diferansiyel eşitsizlik,

$$E_w(t)\le\frac{e^{M_1t}tD_3}{k_1}k^2 \tag{5.31}$$

şeklinde tüm $t\in(0,T]$ için geçerli olmaktadır. (5.31) eşitsizliği gösteriyor ki $k_1-k_2\to 0$ olurken $\|u(t)-v(t)\|\to 0$ olur. Böylece (5.1)-(5.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü k katsayısına sürekli bağımlıdır. ■

5.1.2. a katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde (5.1)-(5.3) probleminin çözümünün a katsayısı için sürekli bağımlılığı incelenecektir. u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \Delta u - k\Delta u_t + a_1 |u_t|^{m-2} u_t + b|u|^{p-2} u = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.32}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.33}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.34}$$

probleminin çözümü

v fonksiyonu ise,

$$v_{tt} - \Delta v - k\Delta v_t + a_2 |v_t|^{m-2} v_t + b|v|^{p-2} v = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.35}$$

$$v(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.36}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad v_t(0,x) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.37}$$

probleminin çözümü olsun. Bu iki çözümün farkı $w = u - v$ olup $a_1 - a_2 = a$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $a_1 |v_t|^{m-2} v_t$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$\begin{aligned} &w_{tt} - \Delta w - k\Delta w_t + a_1\left(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t\right) + a|v_t|^{m-2} v_t \\ &+ b\left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v\right) = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$w(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.39}$$

$$w(0,x) = 0, \quad w_t(0,x) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{5.40}$$

başlangıç sınır değer probleminin (BSD) çözümü olsun.

Teorem 5.1.2. Problem (5.38)-(5.40) ’in çözümü olan w için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w(t)\right\|^2\le\frac{e^{M_2t}D_3^{m-1}tC}{2}a^2 \tag{5.41}$$

$D_3>0,\ M_2>0$ olup problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.1.2. Denklem (5.38)'i w_t ile $L^2(\Omega)$'de çarptığımızda,

$$\begin{aligned}&(w_{tt},w_t)-(\Delta w,w_t)-k(\Delta w_t,w_t)+a_1\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t,w_t\right)\\&+a\left(|v_t|^{m-2}v_t,w_t\right)+b\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t\right)=0\end{aligned} \tag{5.42}$$

elde edilir.

(5.42) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$(w_{tt},w_t)=\int_\Omega w_tw_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_t(t)\right\|^2$$

$$(\Delta w,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta wdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w\nabla w_tdx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w(t)\right\|^2$$

$$(\Delta w_t,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta w_tdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w_t}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w_t\nabla w_tdx=-\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2$$

$$\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t,w_t\right)=\int_\Omega\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t\right)w_tdx$$

$$\left(|v_t|^{m-2}v_t,w_t\right)=\int_\Omega|v_t|^{m-2}v_tw_tdx$$

$$\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t\right)=\int_\Omega\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_tdx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w(t)\right\|^2\right]+k\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2+a_1\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t dx$$

$$+a\int_\Omega\left|v_t\right|^{m-2}v_t w_t dx+b\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx=0 \tag{5.43}$$

elde edilir. Enerji fonksiyonu,

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w(t)\right\|^2 \tag{5.44}$$

olmak üzere (5.43) denklemi,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+k\left\|\nabla w_t(t)\right\|^2+a_1\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t dx$$

$$\leq\left|-a\int_\Omega\left|v_t\right|^{m-2}v_t w_t dx\right|+\left|-b\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \tag{5.45}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliğin sol tarafındaki $\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t dx$ terimi ele alındığında,

$$\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t=\sum_{i=0}^{n}\left(\left|u_{t_i}\right|^{m-2}u_{t_i}-\left|v_{t_i}\right|^{m-2}v_{t_i}\right)w_{t_i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_{t_i}-v_{t_i}+u_{t_i}\right)w_{t_i}+\frac{1}{2}\left|u_t\right|^{m-2}u_{t_i}w_{t_i}-\frac{1}{2}\left|v_t\right|^{m-2}v_{t_i}w_{t_i}\\+\frac{1}{2}\left|v_t\right|^{m-2}\left(u_{t_i}-v_{t_i}-u_{t_i}\right)w_{t_i}\end{array}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}+\left|v_t\right|^{m-2}\right)w_{t_i}w_{t_i}+\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}-\left|v_t\right|^{m-2}\right)\left(u_{t_i}^2-v_{t_i}^2\right)\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}+\left|v_t\right|^{m-2}\right)w_{t_i}w_{t_i}+\frac{1}{2}\left(\left|u_t\right|^{m-2}-\left|v_t\right|^{m-2}\right)\left(\left|u_t\right|-\left|v_t\right|\right)\left(\left|u_t\right|+\left|v_t\right|\right)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left(\left|u_t\right|^{m-2}-\left|v_t\right|^{m-2}\right)\left(\left|u_t\right|-\left|v_t\right|\right)\geq 0 \tag{5.46}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Buna göre $k\geq 0$ olup $\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2}u_t-\left|v_t\right|^{m-2}v_t\right)w_t dx\geq 0$ olduğu (5.46) eşitsizliğinde ispatlandığından (5.45) eşitsizliği

$$\frac{d}{dt}E_w\left(t\right)\leq\left|a\int_\Omega\left|v_t\right|^{m-2}v_t w_t dx\right|+\left|b\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \tag{5.47}$$

şeklinde yazılabilir.

$2<m\leq\dfrac{2n-2}{n-2}$ ve C bir Sobolev sabiti olmak üzere (5.47) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için bir üst sınır elde edilirse,

$$\begin{aligned}\left|a\int_\Omega\left|v_t\right|^{m-2}v_t w_t dx\right|&\leq a\int_\Omega\left|v_t\right|^{m-1}w_t dx\leq a\left\|w_t\left(t\right)\right\|\left\|v_t\left(t\right)\right\|_{2(m-1)}^{(m-1)}\\&\leq\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{a^2}{2}C\left\|\nabla v_t\left(t\right)\right\|_{2(m-1)}^{2(m-1)}\end{aligned} \tag{5.48}$$

eşitsizliği sağlanır.

$\left\|\nabla u\right\|^2\leq D_1$ kestirimi göz önüne alınarak $C_3=b\left(p-1\right)C_1C_2D_1^{\frac{p-2}{2}}$'dir.

(5.47) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için,

$$\left| b\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx\right| \le b\left(p-1\right)\int_{\Omega}|w||w_t|\left(|u|^{p-2}+|v|^{p-2}\right)dx$$

$$\le b\left(p-1\right)\|w_t\|_2\|w\|_{\frac{2n-2}{n-2}}\left(\|u\|_{(p-2)n}^{p-2}+\|v\|_{(p-2)n}^{p-2}\right)$$

$$\le b\left(p-1\right)\|w_t\|C_1\|\nabla w\|C_2\left(\|\nabla u\|_{(p-2)n}^{p-2}+\|\nabla v\|_{(p-2)n}^{p-2}\right) \tag{5.49}$$

$$\le C_3\|w_t\|\|\nabla w\|$$

$$\le C_3\frac{\|w_t\|^2}{2}+C_3\frac{\|\nabla w\|^2}{2}$$

elde edilir. (5.47) eşitsizliği yeniden düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\le\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{a^2}{2}C\|\nabla v_t(t)\|_{2(m-1)}^{2(m-1)}+C_3\frac{\|w_t\|^2}{2}+C_3\frac{\|\nabla w\|^2}{2} \tag{5.50}$$

şeklinde yazılabilir.

Dolayısıyla, $M_2=\max\{1+C_3\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\le M_2E_w(t)+\frac{a^2}{2}CD_3^{m-1} \tag{5.51}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir. Gronwall eşitsizliği kullanılarak istenilen sonuç,

$$E_w(t)\le\frac{e^{M_2t}D_3^{m-1}Ct}{2}a^2 \tag{5.52}$$

elde edilir.

(5.52) eşitsizliği gösteriyor ki a_1 ve a_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v birbirine o kadar yaklaşır. $a_1 - a_2 = 0$ olduğunda $w = u - v = 0$ olur. Böylece (5.1)-(5.3) başlangıç sınır değer probleminin u ve v çözümlerinin a katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur. ■

5.1.3. b katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde (5.1)-(5.3) probleminin çözümünün b katsayısı için sürekli bağımlılığı incelenecektir.

u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \Delta u - k\Delta u_t + a|u_t|^{m-2} u_t + b_1 |u|^{p-2} u = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.53}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.54}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.55}$$

probleminin çözümü

v fonksiyonu ise,

$$v_{tt} - \Delta v - k\Delta v_t + a|v_t|^{m-2} v_t + b_2 |v|^{p-2} v = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.56}$$

$$v(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.57}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad v_t(0,x) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.58}$$

probleminin çözümü olsun.

Bu iki çözümün farkı $w = u - v$ olup $b_1 - b_2 = b$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $b_1 |v|^{p-2} v$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$w_{tt}-\Delta w-k\Delta w_t+a\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t\right)+b_1\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)+b|v|^{p-2}v=0, \qquad (5.59)$$

$$w(t,x)=0, \qquad x\in\partial\Omega,\ t>0 \qquad (5.60)$$

$$w(0,x)=0, \quad w_t(0,x)=0 \qquad x\in\Omega \qquad (5.61)$$

başlangıç sınır değer probleminin (BSD) çözümü olsun.

Teorem 5.1.3. Problem (5.59)-(5.61)'un bir çözümü w olsun. Dolayısıyla w fonksiyonu,

$$\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w(t)\right\|^2\le\frac{e^{M_3t}D_1^{p-1}tC}{2}b^2 \qquad (5.62)$$

eşitsizliğini sağlar.

$M_3>0$ ve $D_1>0$ problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.1.3. Denklem (5.59)'u w_t ile $L^2(\Omega)$'de çarptığımızda,

$$\begin{aligned}&(w_{tt},w_t)-(\Delta w,w_t)-k(\Delta w_t,w_t)+a\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t,w_t\right)\\&+b\left(|v|^{p-2}v,w_t\right)+b_1\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v,w_t\right)=0\end{aligned} \qquad (5.63)$$

elde edilir. Buna göre (5.63) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$(w_{tt},w_t)=\int_\Omega w_tw_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_t(t)\right\|^2$$

$$(\Delta w,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta wdx=\int_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial w}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla w\nabla w_tdx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w(t)\right\|^2$$

$$\left(\Delta w_t, w_t\right)=\int_\Omega w_t \Delta w_t dx=\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w_t}{\partial n} ds-\int_\Omega \nabla w_t \nabla w_t dx=-\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t-\left|v_t\right|^{m-2} v_t, w_t\right)=\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t-\left|v_t\right|^{m-2} v_t\right) w_t dx$$

$$\left(\left|v\right|^{p-2} v, w_t\right)=\int_\Omega\left|v\right|^{p-2} v w_t dx$$

$$\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v, w_t\right)=\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2\right]+k\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2+a\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t-\left|v_t\right|^{m-2} v_t\right) w_t dx\\&+b_1\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx+b\int_\Omega\left|v\right|^{p-2} v w_t dx=0\end{aligned} \tag{5.64}$$

elde edilir. Enerji fonksiyonu,

$$E_w\left(t\right)=\frac{1}{2}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w\left(t\right)\right\|^2 \tag{5.65}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_w\left(t\right)+k\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2+a\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t-\left|v_t\right|^{m-2} v_t\right) w_t dx\\&\leq\left|-b_1\int_\Omega\left(\left|u\right|^{p-2} u-\left|v\right|^{p-2} v\right) w_t dx\right|+\left|-b\int_\Omega\left|v\right|^{p-2} v w_t dx\right|\end{aligned} \tag{5.66}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliğin sol tarafındaki $\int_\Omega\left(\left|u_t\right|^{m-2} u_t-\left|v_t\right|^{m-2} v_t\right) w_t dx$ terimi ele alındığında,

$$\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t\right)w_t=\sum_{i=0}^{n}\left(\left|u_{t_i}\right|^{m-2}u_{t_i}-\left|v_{t_i}\right|^{m-2}v_{t_i}\right)w_{t_i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2}u_{t_i}-v_{t_i}+u_{t_i}\right)w_{t_i}+\frac{1}{2}|u_t|^{m-2}u_{t_i}w_{t_i}-\frac{1}{2}|v_t|^{m-2}v_{t_i}w_{t_i}\\+\frac{1}{2}|v_t|^{m-2}\left(u_{t_i}-v_{t_i}-u_{t_i}\right)w_{t_i}\end{array}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2}+|v_t|^{m-2}\right)w_{t_i}w_{t_i}+\frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2}-|v_t|^{m-2}\right)\left(u_{t_i}^2-v_{t_i}^2\right)\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2}+|v_t|^{m-2}\right)w_{t_i}w_{t_i}+\frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2}-|v_t|^{m-2}\right)\left(|u_t|-|v_t|\right)\left(|u_t|+|v_t|\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left(|u_t|^{m-2}-|v_t|^{m-2}\right)\left(|u_t|-|v_t|\right)\geq 0 \tag{5.67}$$

olmaktadır.

Buna göre $k\geq 0$ olup $\int_{\Omega}\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t\right)w_t dx\geq 0$ olduğu (5.67)'de ispatlandığından (5.66) eşitsizliği

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\leq\left|b_1\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_t dx\right|+\left|b\int_{\Omega}|v|^{p-2}vw_t dx\right| \tag{5.68}$$

şeklinde yazılabilir.

$2<m\leq\dfrac{2n-2}{n-2}$ ve C bir Sobolev sabiti olmak üzere eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim için bir üst sınır elde edilirse

$$\left| b\int_{\Omega} |v|^{p-2} v w_t dx \right| \le b\int_{\Omega} |v|^{p-1} w_t dx \le b\|w_t(t)\| \|v(t)\|_{2(p-1)}^{(p-1)}$$
$$\le \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{b^2}{2} C \|\nabla v(t)\|_{2(p-1)}^{2(p-1)} \tag{5.69}$$

eşitsizliği sağlanır. $C_3 = b(p-1)C_1C_2D_1^{\frac{p-2}{2}}$ ve $\|\nabla u\|^2 \le D_1$ olmak üzere,

$$\left| \int_{\Omega} b_1 \left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right) w_t dx \right| \le b_1(p-1) \int_{\Omega} |w| |w_t| \left(|u|^{p-2} + |v|^{p-2} \right) dx$$
$$\le b_1(p-1)\|w_t\|_2 \|w\|_{\frac{2n-2}{n-2}} \left(\|u\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|v\|_{(p-2)n}^{p-2} \right)$$
$$\le b_1(p-1)\|w_t\| C_1 \|\nabla w\| C_2 \left(\|\nabla u\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|\nabla v\|_{(p-2)n}^{p-2} \right) \tag{5.70}$$
$$\le C_3 \|w_t\| \|\nabla w\|$$
$$\le C_3 \frac{\|w_t\|^2}{2} + C_3 \frac{\|\nabla w\|^2}{2}$$

elde edilir. (5.68) eşitsizliği yeniden düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \le \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{b^2}{2} C \|\nabla v(t)\|_{2(p-1)}^{2(p-1)} + C_3 \frac{\|w_t\|^2}{2} + C_3 \frac{\|\nabla w\|^2}{2} \tag{5.71}$$

elde edilir. $M_3 = \max\{1 + C_3\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \le M_3 E_w(t) + \frac{b^2}{2} C D_1^{p-1} \tag{5.72}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir.

Gronwall eşitsizliği kullanılarak istenilen sonuç,

$$E_w(t) \le \frac{e^{M_3 t} D_1^{p-1} C t}{2} b^2 \tag{5.73}$$

elde edilir.

(5.73) eşitsizliği gösteriyor ki b_1 ve b_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v birbirine o kadar yaklaşır. $b_1 - b_2 = 0$ olduğunda $w = u - v = 0$ olur. Böylece (5.1)-(5.3) başlangıç sınır değer probleminin u ve v çözümlerinin b katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur. ■

5.1.4. Tüm katsayılara sürekli bağımlılık

Bu bölümde çözümün bütün parametrelere sürekli bağımlı olup olmadığı incelenecektir. Tüm parametreler aynı anda değiştiğinde çözümde oluşan değişiklik araştırılacaktır. u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \Delta u - k_1 \Delta u_t + a_1 |u_t|^{m-2} u_t + b_1 |u|^{p-2} u = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.74}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.75}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.76}$$

probleminin çözümü

v fonksiyonu,

$$v_{tt} - \Delta v - k_2 \Delta v_t + a_2 |v_t|^{m-2} v_t + b_2 |v|^{p-2} v = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.77}$$

$$v(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{5.78}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad v_t(0,x) = v_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{5.79}$$

probleminin çözümü olsun. Bu iki çözümün farkı $w=u-v$ olup $k=k_1-k_2,\ a=a_1-a_2,\ b=b_1-b_2$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen denkleme $k_1\Delta v_t,\ a_1|v_t|^{m-2}v_t,\ b_1|v|^{p-2}v$ eklenip çıkarılırsa w fonksiyonu,

$$\begin{aligned} &w_{tt}-\Delta w-k\Delta v_t-k_1\Delta w_t+a\left(|v_t|^{m-2}v_t\right)+a_1\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t\right)\\ &+b_1\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)+b|v|^{p-2}v=0, \qquad x\in\Omega,\ t>0 \end{aligned} \tag{5.80}$$

$$w(t,x)=0, \qquad x\in\partial\Omega,\ t>0 \tag{5.81}$$

$$w(0,x)=0,\quad w_t(0,x)=0 \qquad x\in\Omega \tag{5.82}$$

başlangıç sınır değer probleminin (BSD) çözümü olsun.

Teorem 5.1.4. (5.80)-(5.82) probleminin bir çözümü w olmak üzere, Teorem 5.1. kestirimleri altında denklemin k,a,b katsayılarına sürekli bağımlıdır.

İspat 5.1.4. (5.80) denklemi w_t ile çarpıldığında,

$$(w_{tt},w_t)=\int_\Omega w_t w_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t(t)\|^2$$

$$(\Delta w,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta w dx=\int_{\partial\Omega} w_t\frac{\partial w}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla w\nabla w_t dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2$$

$$(\Delta v_t,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta v_t dx=\int_{\partial\Omega} w_t\frac{\partial v_t}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla w_t\nabla v_t dx=-(\nabla w_t,\nabla v_t)$$

$$(\Delta w_t,w_t)=\int_\Omega w_t\Delta w_t dx=\int_{\partial\Omega} w_t\frac{\partial w_t}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla w_t\nabla w_t dx=-\|\nabla w_t(t)\|^2$$

$$\left(|v_t|^{m-2}v_t,w_t\right)=\int_\Omega |v_t|^{m-2}v_t w_t dx$$

$$\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t,w_t\right)=\int_\Omega\left(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t\right)w_t dx$$

$$\left(|v|^{p-2} v, w_t\right) = \int_{\Omega} |v|^{p-2} v w_t dx$$

$$\left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v, w_t\right) = \int_{\Omega} \left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v\right) w_t dx$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2\right] + k_1\|\nabla w_t(t)\|^2 + k(\nabla w_t, \nabla v_t) \\ &+ a_1\int_{\Omega}\left(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t\right) w_t dx + a\int_{\Omega} |v_t|^{m-2} v_t w_t dx \\ &+ b_1\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v\right) w_t dx + b\int_{\Omega} |v|^{p-2} v w_t dx = 0 \end{aligned} \tag{5.83}$$

elde edilir. Enerji fonksiyonu,

$$E_w(t) = \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2 \tag{5.84}$$

olduğunda, (5.83) denklemi

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}E_w(t) + k_1\|\nabla w_t(t)\|^2 + a_1\int_{\Omega}\left(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t\right) w_t dx \le \left|-k(\nabla w_t, \nabla v_t)\right| \\ &+ \left|-a\int_{\Omega} |v_t|^{m-2} v_t w_t dx\right| + \left|-b_1\int_{\Omega}\left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v\right) w_t dx\right| + \left|-b\int_{\Omega} |v|^{p-2} v w_t dx\right| \end{aligned} \tag{5.85}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafı için üst sınırlar elde etmek için Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla, $\varepsilon = k_1$ alındığında

$$k\left|\left(\nabla w_t,\nabla v_t\right)\right| \le \varepsilon\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{k^2}{4\varepsilon}\left\|\nabla v_t\left(t\right)\right\|^2$$

$$\le k_1\left\|\nabla w_t\left(t\right)\right\|^2+\frac{k^2}{4k_1}\left\|\nabla v_t\left(t\right)\right\|^2 \qquad (5.86)$$

elde edilir. ε -Young ve Sobolev eşitsizliği yardımıyla $m\ge 2,\ 2<p\le\dfrac{2n-2}{n-2}$ olduğu göz önüne alınıp $\varepsilon=a$ olmak üzere,

$$\left|\int_\Omega |v_t|^{m-2}v_tw_tdx\right| \le \int_\Omega |v_t|^{m-1}w_tdx \le \left\|w_t\left(t\right)\right\|\left\|v_t\left(t\right)\right\|_{2(m-1)}^{(m-1)}$$

$$\le C_0^{m-1}\left\|\nabla v_t\left(t\right)\right\|_{2(m-1)}^{m-1}\left\|w_t\left(t\right)\right\| \qquad (5.87)$$

$$\le aC_0^{m-1}A_3^{\frac{m-1}{2}}+\frac{1}{4a}\left\|w_t\left(t\right)\right\|^2$$

elde edilir. Benzer şekilde, $C_3=b_1\left(p-1\right)C_1C_2D_1^{\frac{p-2}{2}}$ ve $\varepsilon=b_1$ olmak üzere,

$$\left|\int_\Omega\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right)w_tdx\right| \le \left(p-1\right)\int_\Omega |w||w_t|\left(|u|^{p-2}+|v|^{p-2}\right)dx$$

$$\le\left(p-1\right)\left\|w_t\right\|_2\left\|w\right\|_{\frac{2n-2}{n-2}}\left(\left\|u\right\|_{(p-2)n}^{p-2}+\left\|v\right\|_{(p-2)n}^{p-2}\right)$$

$$\le\left(p-1\right)\left\|w_t\right\|C_1\left\|\nabla w\right\|C_2\left(\left\|\nabla u\right\|_{(p-2)n}^{p-2}+\left\|\nabla v\right\|_{(p-2)n}^{p-2}\right) \qquad (5.88)$$

$$\le C_3\left\|w_t\right\|\left\|\nabla w\right\|$$

$$\le b_1C_3\frac{\left\|w_t\right\|^2}{2}+b_1C_3\frac{\left\|\nabla w\right\|^2}{2}$$

elde edilir.

$\left|\int_\Omega |v|^{p-2} v w_t dx\right|$ integralinde de benzer şekilde $\varepsilon = b$ alınarak

$$\left|\int_\Omega |v|^{p-2} v w_t dx\right| \le \int_\Omega |v|^{p-1} |w_t| dx \le \|w_t(t)\| \|v(t)\|_{2(p-1)}^{(p-1)}$$

$$\le C_4^{p-1} \|\nabla v(t)\|_{2(p-1)}^{(p-1)} \|w_t(t)\| \tag{5.89}$$

$$\le bC_4^{p-1} D_1^{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{4b} \|w_t(t)\|^2$$

elde edilir.

Eşitsizliğin sol tarafındaki $\int_\Omega \left(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t\right) w_t dx$ terimi ele alındığında,

$$\left(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t\right) w_t = \sum_{i=0}^{n} \left(|u_{t_i}|^{m-2} u_{t_i} - |v_{t_i}|^{m-2} v_{t_i}\right) w_{t_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2} u_{t_i} - v_{t_i} + u_{t_i}\right) w_{t_i} + \frac{1}{2}|u_t|^{m-2} u_{t_i} w_{t_i} - \frac{1}{2}|v_t|^{m-2} v_{t_i} w_{t_i} \\ + \frac{1}{2}|v_t|^{m-2}\left(u_{t_i} - v_{t_i} - u_{t_i}\right) w_{t_i} \end{array}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2} + |v_t|^{m-2}\right) w_{t_i} w_{t_i} + \frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2} - |v_t|^{m-2}\right)\left(u_{t_i}^2 - v_{t_i}^2\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2} + |v_t|^{m-2}\right) w_{t_i} w_{t_i} + \frac{1}{2}\left(|u_t|^{m-2} - |v_t|^{m-2}\right)\left(|u_t| - |v_t|\right)\left(|u_t| + |v_t|\right)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left(|u_t|^{m-2} - |v_t|^{m-2}\right)\left(|u_t| - |v_t|\right) \geq 0 \tag{5.90}$$

olmaktadır.

Buna göre $k \geq 0$ olup $\int_\Omega \left(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t\right) w_t dx \geq 0$ olduğu (5.90)'da ispatlandığından (5.85) eşitsizliği,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \leq k_1 \|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{k^2}{4k_1} D_3^{\frac{m-1}{2}} + a^2 C_0^{m-1} D_3^{\frac{m-1}{2}} + \frac{1}{4}\|w_t(t)\|^2$$
$$+b_1 C_3 \frac{\|w_t\|^2}{2} + b_1 C_3 \frac{\|\nabla w\|^2}{2} + b^2 C_4^{p-1} D_1^{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{4}\|w_t(t)\|^2 \tag{5.91}$$

şeklinde yazılabilir.

$$E_w(t) = \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2$$

olmak üzere (5.4)'teki kestirimler yardımıyla (5.91) eşitsizliği düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \leq M_4 E_w(t) + B \tag{5.92}$$

olduğu görülür.

Burada $M_4 = \max\left\{\frac{1+b_1C_3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ ve $B = \left(\frac{k^2}{4k_1} + a^2 C_0^{m-1}\right) D_3^{\frac{m-1}{2}} + b^2 C_4^{p-1} D_1^{\frac{p-1}{2}}$'dır. Bu diferansiyel eşitsizlik Gronwall eşitsizliği yardımıyla çözüldüğünde

$$E_w(t) \leq Bte^{M_4 t} \tag{5.93}$$

elde edilir.

(5.93) eşitsizliği gösteriyor ki k_1 ve k_2, a_1 ve a_2, b_1 ve b_2 katsayıları birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v birbirine o kadar yaklaşır. $k_1 - k_2 = 0$, $a_1 - a_2 = 0$, $b_1 - b_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece (5.1)-(5.3) başlangıç sınır değer probleminin u ve v çözümlerinin tüm katsayılara sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde dördüncü mertebeden disipatif terim içeren lineer olmayan Boussinesq denkleminin çözümlerinin problemin b (disipatif) δ (dispersif), r (sönüm) katsayılarına olan sürekli bağımlılığı ispatlanmış olup ayrıca problemin tüm katsayılarına sürekli bağımlılığı da kanıtlanmıştır. Dördüncü mertebeden lineer olmayan enerji yitimini ifade eden hidrodinamik disipatif katsayı içeren Rosenau başlangıç sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Problemin α (sönüm) katsayısına olan sürekli bağımlılığı araştırılarak ispatlanmıştır. Lineer olmayan disipatif katsayı içeren başlangıç ve Dirichlet sınır koşullarıyla tanımlanmış yarı lineer dalga denkleminin çözümlerinin k (sönüm), a (sönüm), b (lineerliği bozan terimin katsayısı) pozitif katsayılarına göre sürekli bağımlılık incelemesi ayrı ayrı gösterilmiştir. Aynı zamanda denklemin bu katsayıların tümüne aynı anda sürekli bağımlı olduğu da ispatlanmıştır. İspatlarda her bölümde olduğu gibi standart enerji metodu kullanılmıştır.

Fiziksel olarak gerçek süreçlerde sönüm ve dispersif terimler lineer olmamaktan kaynaklanan enerji büyümelerinde önemli rol oynarlar ve bu terimlerin lineer olmayan terimlerle etkileşimleri yığılma, denge ve enerjinin yayılımına eşlik eder (Kaya ve Polat, 2009). Boussinesq denklemlerinde, lineer olmama ve dispersiyon etkileri dikkate alınırken birçok gerçek durumda sönüm etkileri lineer olmama ve dispersif etkilerle karşılaştırılır. Bu nedenle denklemin sönüm terimli olması önemlidir.

Problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılık konusu birçok lineer olmayan kısmi türevli denklemler için uygun uzaylarda enerji metodu ile incelenebilir. Ele alınan problemler farklı sınır koşullarıyla araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Alotaibi, T., Althobaiti, A. 2021. Exact wave solutions of the nonlinear Rosenau equation using an analytical method. Open Physics, 19(1), 889-896.

Ames, K. A., Straughan, B. 1997. Non-standard and Improperly Posed Problems. Mathematics in Science and Engineering Series. New York, NY., USA: Academic Press.

Bayraktar, D., Beji, S. 2013. Numerical simulation of waves generated by a moving pressure field. Ocean Engineering, 59: 231-239.

Bayraktar, S., Gür, Ş. 2020. Continuous dependence of solutions for damped improved Boussinesq equation. Turk J. Math., 44: 334-341.

Boussinesq, J. V. 1871. Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal. Comptesrendus de l'Académie des Sciences Paris, 73: 256-260.

Chen, H., Liu, G. 2013. Global existence, uniform decay and exponential growth for a class of semi-linear wave equation with strong damping. Acta Mathematica Scientia, 33: 41-58.

Evans, L. 2010. Partial Differential Equations. American Mathematical Soc.

Keskin, Y. 2010. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözülmesi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora tezi.

Liu, G., Wang, W. 2019. Inviscid limit for the damped Boussinesq equation. Journal of Differential Equations, 267: 5521-5542.

Park, M. 1990. On the Rosenau equation. Mathematics and Its Applications, 9:145–152.

Pişkin, E. 2017. Sobolev Uzayları. Seçkin Yayınları.

Polat, N. 2005. Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu (blow up). Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora Tezi.

Polat, N., Ertaş, A. 2009. Existence and blow-up of solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 249:10-20.

Polat, N., Kaya, D. 2009. Existence, asymptotic behaviour and blow up of solution for a class of nonlinear wave equations with dissipative and dispersive term. Z.Naturforsch, 64a, 1-12.

Polat, N., Kaya, D., Tutalar, H. I. 2005. Blow-up of solutions for the damped Boussinesq equation. Zeitschrift für Naturforschung, 60: 473-476.

Rosenau, P. 1986. A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line. Physica Scripta, 34:827–829.

Russell, J. S. 1844. Report on Water Waves. London, UK: British Association for the Advancement of Science.

Schneider, G., Eugene, C. W. 2001. Kawahara dynamics in dispersive media. Physica D Nonlinear Phenomena, 152–153: 384–394.

Uysal, M. E. 2019. Bazı tipten başlangıç sınır değer problemleri için sürekli bağımlılık sonuçları. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

Varlamov, V. V. 1999. Asymptotic behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two space dimensions. Int. J. Math. Math. Sci., 22:131–145.

Varlamov, V. V. 2001. Eigenfunction expansion method and the long-time asymptotics for the damped Boussinesq equation. Discrete Continuous Dynamical Systems A, 7 (4): 675-702.

Wang, H., Wang, S. 2013. Global existence and asymptotic behavior of solution for the Rosenau equation with hydrodynamical damped term. Journal of Mathematical Analysis and Applications., 401:763–773.

Wang, S., Su, X. 2015. Global existence and asymptotic behavior of solution for Rosenau equation with Stokes damped term. Math. Methods Appl. Sci., 38(17), 3990–4000.

Xu, R., Luo, Y., Shen, J. 2017. Global existence and blow up for damped generalized Boussinesq equation. Acta Mathematicae Applicatae Sinica English Series, 33: 251-262.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Sema BAYRAKTAR

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	Devam ediyor
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	2014
Lisans	Kocaeli Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi / Matematik	2009
Lise	Çelik Halat Lisesi	2004

İŞ DENEYİMİ

Yıl	**Yer**	**Görev**
2020-Halen	Özel Kocaeli İstek Okulları	Matematik Öğretmeni
2019-2020	Özel İzdüşüm Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni
2014-2019	Özel Kocaeli Doğa Koleji	Matematik Öğretmeni
2009-2014	Özel Final Dergisi Dershaneleri	Geometri Öğretmeni

YABANCI DİL

İngilizce

ESERLER (makale, bildiri, proje vb.)

1. Bayraktar, S., Gür, Ş. 2020. Continuous dependence of solutions for damped improved Boussinesq equation. Turk J. Math., 44: 334-341.

2. Gür, Ş., Bayraktar, S. 2013. Global behaviour of solutions to nonlinear wave equation. SAÜ Fen Edebiyat Dergisi (II), 83-89.