ÜÇ BOYUTLU LORENTZ UZAYI L^3 DE TIMELIKE MANNHEİM EĞRİ ÇİFTİ ÜZERİNE

A. ZEYNEP AZAK
Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 54187, SAKARYA
apirdal@sakarya.edu.tr

ÖZET

Bu makalede, L^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike Mannheim eğri çiftleri tanımlandı ve bu eğri çiftlerinin birbirlerine göre eğrilikleri ile torsiyonları arasındaki bağıntılar verildi. Ayrıca verilen bir eğri çiftinin Mannheim eğri çifti olabilmesi için gerek ve yeter şart elde edildi.
Anahtar Kelimeler: *Mannheim eğrileri, Lorentz uzayı*

Ams Classification: *53B30, 51M30, 53A35, 53A04*

ON THE TIMELIKE MANNHEİM CURVE COUPLE IN TRIDIMENSIONAL LORENTZ SPACE L^3

ABSTRACT

In this paper, timelike mannheim curve couple was defined in 3-dimensional Lorentz sapace and the relations were given between the curvatures and torsions of these curves. Morever for a given curve couple the necessary ans sufficient conditions were obtained to become Mannheim curve couple.

Key Words: *Mannheim Curves, Lorentz Space*

GİRİŞ

Regüler eğrilerin diferensiyel geometrisi çalışılırken, eğriler arasında karşılıklı bağıntıların ortaya çıkması çok ilginç ve önemli bir problem olarak bilinir. Bu yüzden birçok geometrici eğrilerin özellikle eğrilikleri ve torsiyonları arasında bağıntılar elde etmeye çalıştılar. Böylece ilk olarak 1878 de Mannheim tarafından $k_1^2 + k_2^2 = w^2 = sabit$ bağıntısı ile tanımlanan eğri sınıfı Mannheim eğrileri olarak adlandırıldı. Daha sonra 1965 de E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında Riccati denklemleri yardımıyla Mannheim eğrileri için bazı teoremler verildi [6].

Son yıllarda Mannheim eğri çiftleri ve bu eğri çiftleri ile ilgili bağıntılar Orbay ve Liu tarafından çalışıldı [2,4]. Bu makalede L^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike Mannheim eğri çiftleri ile ilgili bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verildi.

1. TEMEL KAVRAMLAR

IR^3, 3-boyutlu Öklid uzayı $\langle , \rangle = -dx_1 + dx_2 + dx_3$ indefinit iç çarpımı ile 3-boyutlu Lorentz uzayı adını alır ve L^3 ile gösterilir. Burada x_1, x_2, x_3 L^3 ün doğal koordinatlarıdır. $\langle , \rangle$ indefinit iç çarpım olduğundan $a \in L^3$ vektörü için $\langle a, a \rangle > 0$ ya da $a = 0$ ise a ya spacelike vektör, $\langle a, a \rangle < 0$ ise a ya timelike vektör, $\langle a, a \rangle = 0$ ve $a \neq 0$ ise a ya null vektör denir. Ayrıca L^3 de bir a vektörünün normu $\|a\| = \sqrt{|\langle a, a \rangle|}$ ile verilir. Benzer şekilde, L^3 deki keyfi bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\alpha'(s)$ hız vektörü timelike ise timelike eğri olarak adlandırılır. $\alpha(s)$ birim hızlı timelike bir eğri ise $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -1$ dir.

Diğer yandan, L^3 deki herhangi $a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri için a ve b vektörlerinin Lorentzian vektörel çarpımı

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_2 b_1 - a_1 b_2) . \quad (1)$$

olarak tanımlanır.

L^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike $\alpha \; s$ eğrisi boyunca Frenet çatısı T, N, B olmak üzere $\alpha \; s$ timelike eğrisinin Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Burada $\langle T, T \rangle = -1$, $\langle N, N \rangle = 1$, $\langle B, B \rangle = 1$, $\langle T, N \rangle = 0$, $\langle T, B \rangle = 0$, $\langle N, B \rangle = 0$ dır [3].

Tanım 1.1. i) Hiperbolik açı: a ve b, L^3 de iki timelike future pointing (ya da past pointing) vektör olsun. O zaman $\langle a, b \rangle = -\|a\|\|b\|\cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya a ve b vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir [1].

ii) Merkezi açı: L^3 de bir timelike alt vektör uzayını geren spacelike vektörler a ve b olsun. O zaman $\langle a, b \rangle = \|a\|\|b\|\cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya a ve b vektörleri arasındaki merkezi açı denir [1].

iii) Spacelike açı: L^3 de bir spacelike alt vektör uzayını geren spacelike vektörler a ve b olsun. O zaman $\langle a, b \rangle = \|a\|\|b\|\cos\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya a ve b vektörleri arasındaki spacelike açı denir [1].

iv) Lorentzian timelike açı: L^3 de a spacelike bir vektör ve b timelike bir vektör olsun. O zaman $\langle a, b \rangle = \|a\|\|b\|\sinh\theta$ olacak şekilde bir tek

$\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya a ve b vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir [1].

2. L^3 DE TİMELİKE MANNHEİM EĞRİ ÇİFTİ

Bu bölümde 3-boyutlu Lorentz uzayındaki timelike Mannheim eğri çifti tanıtılarak, bu eğri çiftleri ile ilgili bazı karakteristik özelliklere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. α ve α^* timelike uzay eğrilerinin $\alpha\ s$ ve $\alpha^*\ s^*$ noktalarındaki Frenet çatıları T, N, B ve T^*, N^*, B^* olsun. α eğrisinin $\alpha\ s$ noktasındaki B binormal doğrusu ile α^* eğrisinin $\alpha^*\ s^*$ noktasındaki N^* asli normal doğrusu çakışıyorsa, α, α^* çifti timelike Mannheim eğri çifti olarak adlandırılır.

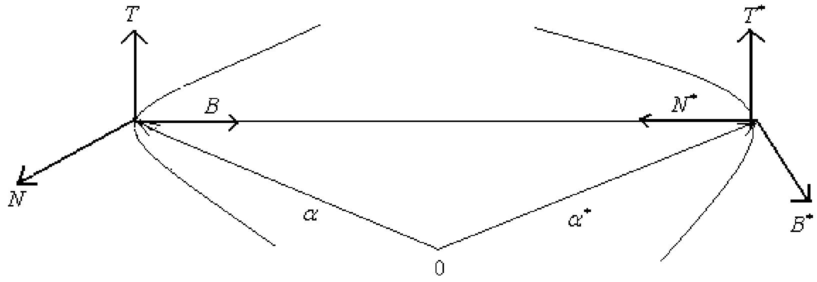
α ve α^* timelike Mannheim eğri çiftinin teğetleri sırasıyla T ve T^* olsun. O zaman T ve T^* teğetleri arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

eşitlikleri mevcuttur [5].

Teorem 2.1. L^3 deki timelike Mannheim eğri çiftinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat:



Şekil 2.1

Şekil 2.1 den,

$$\alpha^{*} \; s^{*} \; = \alpha \; s \; + \lambda \; s \; B \; s \qquad (3)$$

dir. (3) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (2) denklemi kullanılırsa,

$$T^{*} \frac{ds^{*}}{ds} = T - \lambda k_2 N + \lambda' B \qquad (4)$$

elde edilir. Burada timelike Mannheim eğrilerin tanımından, N^{*} ve B nin lineer bağımlılığı göz önüne alınarak, $\left\langle T^{*}, B \right\rangle = 0$ yazılabilir. Böylece (4) denkleminden,

$$\lambda = sabit.$$

elde edilir. Diğer yandan iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonundan

$$\begin{aligned} d \; \alpha^{*} \; s^{*} \; , \alpha \; s \; &= \left\| \alpha \; s \; - \alpha^{*} \; s^{*} \; \right\| \\ &= \left\| \lambda B \right\| \\ &= \left| \lambda \right| = sabit \end{aligned}$$

dır.

Teorem 2.2. α, α^* timelike Mannheim eğri çifti olacak şekilde L^3 de bir α timelike eğrisi mevcuttur.

İspat. N^* ve B lineer bağımlı olduğundan (3) denkleminden

$$\alpha = \alpha^* - \lambda N^* \tag{5}$$

dir.

O halde Teorem 2.1 den λ sabit olmak üzere bütün λ değerleri için bir α timelike eğrisi mevcuttur.

Teorem 2.3. L^3 de α, α^* bir timelike Mannheim eğri çifti olsun. O zaman α timelike eğrisinin torsiyonu $k_2 = \dfrac{k_1^*}{\lambda k_2^*}$ şeklindedir.

İspat. (4) denklemindeki λ nın sabit olduğu göz önüne alınırsa,

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = T - \lambda k_2 N \tag{6}$$

denklemi elde edilir. α ve α^* timelike eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki T ve T^* timelike vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$\begin{aligned} T^* &= \cosh\theta T + \sinh\theta N \\ B^* &= \sinh\theta T + \cosh\theta N \end{aligned} \tag{7}$$

dir. O halde (6) ve (7) denklemleri göz önünde bulundurularak

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cosh\theta}, \qquad -\lambda k_2 = \sinh\theta \frac{ds^*}{ds} \tag{8}$$

elde edilir.

Ayrıca (5) denkleminin s ye göre türevi alınıp, (2) denklemi ve Teorem 2.1 kullanılarak,

$$T = \ 1-\lambda k_1^* \ \ T^* \frac{ds^*}{ds} - \lambda k_2^* B^* \frac{ds^*}{ds} \tag{9}$$

bulunur. Ayrıca (7) denkleminden,

$$\begin{aligned} T &= \cosh\theta T^* - \sinh\theta B^* \\ N &= -\sinh\theta T^* + \cosh\theta B^* \end{aligned} \tag{10}$$

yazılabilir. O halde (9) ve (10) denklemleri yardımıyla

$$\cosh\theta = \ 1-\lambda k_1^* \ \ \frac{ds^*}{ds} \quad , \quad \sinh\theta = \lambda k_2^* \frac{ds^*}{ds} \tag{11}$$

elde edilir. Bu son denklemlerden

$$\cosh^2\theta = \ 1-\lambda k_1^* \quad , \quad \sinh^2\theta = -\lambda^2 k_2^* k_2 \tag{12}$$

dır. Böylece (12) denkleminden, $k_2 = \dfrac{\lambda k_1^*}{k_2^*}$ elde edilir.

Sonuç 2.1. α, α^* ikilisi L^3 de timelike Mannheim eğri çifti olsun. O zaman timelike Mannheim eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki k_2 ve k_2^* torsiyonlarının çarpımı sabit değildir. Yani, Shell teoremi timelike Mannheim eğriler için geçerli değildir.

Teorem 2.3 ün ispatından elde edilen $\sinh^2\theta = -\lambda^2 k_2^* k_2$ denklemi ele alınırsa, aşağıdaki sonuç kolayca görülebilir.

Sonuç 2.2. α, α^* , L^3 de timelike Mannheim eğri çifti ise k_2 ve k_2^* torsiyonları zıt işaretlidir.

Teorem 2.4. α, α^* , L^3 de timelike Mannheim eğri çifti olsun. α^* ın eğrilik ve torsiyonu arasında

$$\mu k_2^* + \lambda k_1^* = 1$$

bağıntısı mevcuttur. Burada λ ve μ sıfırdan farklı reel sayılardır.

İspat. (11) denklemi göz önüne alınırsa,

$$\frac{\cosh\theta}{1-\lambda k_1^*} = \frac{\sinh\theta}{\lambda k_2^*}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenir ve $\mu = \lambda \coth\theta$ seçilirse,

$$\mu k_2^* + \lambda k_1^* = 1$$

bulunur.

Sonuç 2.3. α, α^* , L^3 de timelike Mannheim eğri çifti olsun. O zaman sabit katsayılı k_1^* ve k_2^*, eğrilik ve torsiyonu arasında lineer bir bağıntı mevcuttur. Yani, timelike Mannheim eğriler için Bertrand teoremi geçerlidir.

Teorem 2.5. α, α^* , L^3 de timelike Mannheim eğri çifti olsun. α ve α^* timelike eğrilerinin eğrilikleri ve torsiyonları için aşağıdaki denklemler mevcuttur:

i. $k_1 = -\dfrac{d\theta}{ds}$,

ii. $k_2 = -k_1^* \sinh\theta \dfrac{ds^*}{ds} - k_2^* \cosh\theta \dfrac{ds^*}{ds}$,

iii. $k_1^* = k_2 \sinh\theta \dfrac{ds}{ds^*}$,

iv. $k_2^* = -k_2 \cosh\theta \dfrac{ds}{ds^*}$.

İspat. $\langle T, T^* \rangle = -\cosh\theta$ denkleminin s ye göre türevi alınarak,

$$\langle k_1 N, T^* \rangle + \left\langle T, k_1^* N^* \frac{ds^*}{ds} \right\rangle = -\sinh\theta \frac{d\theta}{ds}$$

bulunur. Ayrıca N^* ve B nin lineer bağımlı oldukları göz önüne alınır, (2) ve (10) denklemleri kullanılırsa,

$$k_1 = -\frac{d\theta}{ds}$$

ifadesine ulaşılır.

Benzer şekilde $\langle N, N^* \rangle = 0$, $\langle B, T^* \rangle = 0$ ve $\langle B, B^* \rangle = 0$ denklemleri göz önüne alınarak, ispatın **i.** şıkkındaki metotla teoremin **ii.**, **iii.** ve **iv.** şıkları sırasıyla elde edilebilir.

Teorem 2.5 in **iii.** ve **iv.** den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.4. α, α^* timelike Mannheim eğri çifti olsun. Bu durumda α timelike eğrisinin torsiyonu k_2 ile α^* timelike eğrisinin torsiyonu k_2^* ve eğriliği k_1^* arasında

$$k_2^{*2} - k_1^{*2} = k_2^{\,2} \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2$$

bağıntısı vardır.

Teorem 2.6. L^3 deki bir timelike eğrinin, timelike Mannheim eğri olması için gerek ve yeter şart k_1^* eğriliğinin ve k_2^* torsiyonunun $\lambda \;\; k_1^{*2} - k_2^{*2} \;\; = k_1^*$ eşitliğini sağlamasıdır. Burada λ sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat. Teorem 2.1 göz önüne alınıp, (5) denkleminin s^* a göre türevi alınırsa,

$$T \frac{ds}{ds^*} = T^* - \lambda \;\; k_1^* T^* + k_2^* B^* \tag{13}$$

denklemi elde edilir. O halde (13) denkleminin s^* a göre türevi alınarak,

$$k_1 N \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2 + T \frac{d^2 s}{ds^{*2}} = k_1^* N^* - \lambda \;\; k_1^{*\prime} T^* + k_2^{*\prime} B^* + \;\; k_1^{*2} - k_2^{*2} \;\; N^* \tag{14}$$

bulunur. N^* ve B nin lineer bağımlı olduğu göz önüne alınarak, (14) denklemi B ile iç çarpım yapılırsa,

$$\lambda \;\; k_1^{*2} - k_2^{*2} \;\; = k_1^*$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] B. O'Neill, "Semi–Riemannian geometry with applications to relativity", New York: Academic Press, 1983.

[2] H. Liu, F. Wang "Mannheim Partner Curves in 3-space", J. Geom., Vol. 88(1-2), 120-126, 2008.

[3] K. İlarslan, E. Nesovıc "Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space E_1^3, Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 35(7), 881-888, 2004.

[4] K. Orbay, E. Kasap "On Mannheim Partner Curves in E^3", International Journal of Physical Sciences, Vol.4 (5), 261-264, 2009.

[5] M. Kazaz, M. Önder, "Mannheim Offsets of Timelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-space R_1^3", eprint/arXiv:0906.2077v3.

[6] R. Blum, A Remarkable Class of Mannheim-Curves, Canad. Math. Bull., Vol. 9(2), 223-228, 1966.