BAZI HADAMARD MATRİS TÜRETME TEKNİKLERİ

Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Serdivan-SAKARYA

E-posta:farukg@sakarya.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada Hadamard matris türetme yöntemlerinden Kronecker Çarpımı yöntemi ve Konferans matris yöntemi üzerinde durulmuştur. Konferans matrislerden yararlanarak 2x2 mertebesinde simetrik Hadamard matrislerin türetilebildiği, 4x4, 8x8 gibi daha büyük mertebeler için ise türetilemeyeceği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Hadamard matrisler, konferans matrisler*

SOME GENERATING METHODS OF HADAMARD MATRICES

ABSTRACT

In this study, we have investigated two methods for generating Hadamard matrices, namely Kronecker method and Conference Matrix method. We proofed that symmetric Hadamard matrices are generated by using Conference Matrices for order 2x2. However, they are not generated for 4x4, 8x8, etc.

Keyword: *Hadamard matrices, Conference matrices*

I.GİRİŞ

n. mertebeden bir Hadamard matris, elemanları -1 ve +1' lerden oluşan ve $H.H^t = nI_n$ olan bir karesel matristir.

Hadamard matrisler başta iletişim (özellikle mobil iletişim) ve kodlar teorisi olmak üzere birçok alanda kullanılmaktadır. Halen mertebesi daha büyük Hadamard matrisler oluşturmak için çalışmalar devam etmektedir[1,2].

Bir Hadamard matrisin mertebesi 1 , 2 ya da 4'ün katı olmak zorundadır. Bu yüzden 3..,5..,7.,…..vs. mertebeden Hadamard matrisler mevcut değildir. 4'ün katı olan her n için, n.mertebeden Hadamard matrislerin varlığı henüz kesinleşmemiştir. Şu ana kadar bulunan en büyük mertebeli Hadamard matrisin mertebesi 428' dir[3].

Tanım (Konferans Matris):

n. mertebeden bir konferans matrisi, köşegen elemanları 0'lardan, diğer tüm elemanları +1 ve -1'lerden oluşan ve $C.C^T = (n-1).I_n$ olan n×n boyutunda bir matristir[3,4].

Tanım (Kronecker Çarpımı):

$A=[a_{ij}]$, mxn ve $B=[b_{ij}]$, pxq matrisleri olmak üzere ,
$A \otimes B=[Ab_{ij}]$ mp x nq matrisine A ve B nin Kronecker Çarpımı denir[3,4].

II. HADAMARD MATRİSİN BAZI OLUŞTURMA TEKNİKLERİ

Hadamard matris oluşturmak için pek çok yöntem vardır. Bu çalışmada bu yöntemlerden, Konferans matris ve Kronecker çarpımı yöntemleri tanıtılıp, Hadamard matrisin nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir.

II.1.Kronecker Çarpımı Yöntemi

Teorem :

H_m ve H_n sırasıyla m. ve n. mertebeden iki Hadamard matris olmak üzere, bu iki matrisin Hadamard çarpımı m.n tipinde yeni bir Hadamard matris oluşturur[5,6].

İspat:

$H_m \otimes H_n$ formunda H_n'in her(+1)ini H_m ile,H_n'in her(-1)ini $-H_m$ ile değiştirilerek oluşturulan matris Hadamard matristir.Bunu doğrudan hesaplayarak kontrol etmek çok kolaydır.

Lemma II. 1.1

Kronecker çarpımı yardımıyla Hadamard matris türetilirken; türetmek için seçilen Hadamard matrisler simetrik ise oluşan Hadamard matris simetrik; seçilenlerden en az birinin simetrik olmaması halinde oluşan Hadamard matris simetrik olmayan bir matris olur.

İspat:

H_m ve H_n simetrik Hadamard matrisler olmak üzere

$H_m \otimes H_n = (H_m.h_{ij})$ olup

$(H_m.h_{ij})^t = (H_m.h_{ij})$ olacağından $H_m \otimes H_n$ matrisinin simetrik olacağı görülür.

Simetrik olmama durumu da benzer şekilde gösterilir.

Örnek :

$H_m = \begin{bmatrix} -+ \\ ++ \end{bmatrix}$ ve $H_n = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \end{bmatrix}$ simetrik Hadamard matrislerini alırsak,

$$H_m \otimes H_n = H = \begin{bmatrix} - & + & - & + \\ + & + & + & + \\ - & + & + & - \\ + & + & - & - \end{bmatrix} \quad \text{olur.}$$

Oluşan H matrisi simetrik Hadamard matristir.

$H_m = \begin{bmatrix} a\,b \\ c\,d \end{bmatrix}$ simetrik olmayan bir Hadamard matris ve $H_n = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \end{bmatrix}$ simetrik Hadamard matrisleri olsun.

$$H_m \otimes H_n = H = \begin{bmatrix} a & b & a & b \\ c & d & c & d \\ a & b & -a & -b \\ c & d & -c & -d \end{bmatrix}$$

Oluşan H matrisinin Hadamard olma koşulları $a=\pm1, b=\pm1, c=\pm1, d=\pm1, a^2+b^2=2, c^2+d^2=2$ ve $c \neq b$ şartlarının sağlanmasıdır. Bu koşullarda H matrisi simetrik olmayan bir Hadamard matristir.

Böylelikle; her ikisinin de simetrik olması halinde oluşan Hadamard matris simetrik, en az birinin simetrik olmaması halinde oluşan Hadamard matrisin simetrik olmadığı görülür.

II.2. Konferans Matris Yöntemi

Lemma II.2.1

Eğer C ters simetrik bir konferans matris ise, $(C^t = -C)$, o zaman I+C, n.mertebeden bir Hadamard matristir.

İspat:

H=I+C olmak üzere, $(I+C).(I+C)^t$ doğrudan hesaplanır.

$(I+C)^t = I + C^t$ ise, $H.H^t = n.I_n$ olduğu gösterilir.

$$\begin{aligned} H.H^t &= (I+C).(I+C)^t \\ &= I + C^t + C + C.C^t \quad (\text{ ters simetriklikten } (C^t = -C)\ ) \\ &= I - C + C + C.C^t \quad (\ C.C^T = (n-1).I_n\ ) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I + (n-1)I \\
&= I + nI - I \\
&= nI_n
\end{aligned}
$$

$H.H^t = n.I_n$ olduğu görülür. İspat tamamlanmış olur.

Lemma II.2.2

Eğer C $n \times n$ tipinde simetrik bir konferans matris ise

$$H=\begin{bmatrix} I+C & -I+C \\ -I+C & -I-C \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan H matrisi $2n \times 2n$ tipinde simetrik Hadamard matris olur [1].

İspat

Tanımlanan H simetrik olduğundan $H^t = H$ dir.
Dolayısıyla;

$$H.H^t = \begin{bmatrix} I+C & -I+C \\ -I+C & -I-C \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I+C & -I+C \\ -I+C & -I-C \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} (I+C).(I+C)+(-I+C).(-I+C) & (I+C).(-I+C)+(-I+C).(-I-C) \\ (-I+C).(I+C)+(-I-C).(-I+C) & (-I+C).(-I+C)+(-I-C).(-I-C) \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 2C^2+2I & 0 \\ 0 & 2C^2+2I \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C=C^t \quad \text{simetrik olduğundan} \\ C^2=C.C^T=(n-1)I \end{pmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 2(n-1)I+2I & 0 \\ 0 & 2(n-1)I+2I \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 2nI_n & 0 \\ 0 & 2nI_n \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = 2n.\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = 2n.I_{2n} \quad \text{bulunur.}$$

Bu genelleştirmenin n=2 için doğru olduğu ancak n=4, 6 ve 8 için doğruluğunun geçerli olmayacağı aşağıdaki incelemelerden görülmektedir.

Lemma II.2.3

4×4 lük, 6x6 lık ve 8x8 lik simetrik konferans matris yazılamaz.

İspat

4x4 lük simetrik konferans matris için ,
b=±1, c=±1, d=±1 elemanlarından oluşmak üzere,

$$C=\begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Simetrik konferans matris olsun. Bu durumda,

$$C.C^t=(n-1)I$$

özelliğini sağlamalıdır. Buna göre;

$$\begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} . \begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} = \begin{bmatrix} b^2+c^2+d^2 & 2dc & 2bd & 2bc \\ 2dc & b^2+c^2+d^2 & 2bc & 2bd \\ 2bd & 2bc & b^2+c^2+d^2 & 2dc \\ 2bc & 2db & 2dc & b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}_{4x4}$$

$$\left.\begin{array}{l} b^2+c^2+d^2=3 \\ dc=0 \\ bc=0 \\ bd=0 \end{array}\right\} \quad \text{olmalıdır.Bu sistemin çözümünde b,c,d elemanları } \pm 1 \text{ olacak şekilde çözümü yoktur.}$$

O halde 4x4 tipinde simetrik konferans matris yazılamaz.

6x6 lık simetrik konferans matris için,

$$a=\pm 1,\ b=\pm 1,\ c=\pm 1,\ d=\pm 1,\ e=\pm 1$$

olmak üzere,

$$C=\begin{bmatrix} 0 & a & b & c & d & e \\ a & 0 & c & d & e & b \\ b & c & 0 & e & a & d \\ c & d & e & 0 & b & a \\ d & e & a & b & 0 & c \\ e & b & d & a & c & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6}$$

olsun.

C, 6.mertebeden simetrik konferans matrisinin genelleştirilmiş hali,

$$C.C^t=(n-1)I$$

şartını sağlamak üzere,

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c & d & e \\ a & 0 & c & d & e & b \\ b & c & 0 & e & a & d \\ c & d & e & 0 & b & a \\ d & e & a & b & 0 & c \\ e & b & d & a & c & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6} . \begin{bmatrix} 0 & a & b & c & d & e \\ a & 0 & c & d & e & b \\ b & c & 0 & e & a & d \\ c & d & e & 0 & b & a \\ d & e & a & b & 0 & c \\ e & b & d & a & c & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6} = 5.I_n$$

olmalıdır.

Bu durumda;

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=5$$
$$a\,c+a\,d+c\,e+d\,e=0$$
$$a\,d+b\,d+a\,e+b\,e=0$$
$$a\,b+b\,c+a\,e+c\,e=0$$
$$a\,b+a\,c+bd+c\,d=0$$
$$a\,b+b\,d+a\,e+d\,e=0$$
$$a\,b+a\,c+b\,e+c\,e=0$$
$$a\,c+b\,c+a\,d+b\,d=0$$
$$a\,d+c\,d+a\,e+c\,e=0$$
$$a\,b+b\,c+a\,d+c\,d=0$$
$$b\,d+c\,d+b\,e+c\,e=0$$

$$a\,c+b\,c+a\,e+b\,e=0$$
$$a\,c+c\,d+a\,e+d\,e=0$$
$$b\,c+b\,d+c\,e+d\,e=0$$
$$a\,b+a\,d+b\,e+d\,e=0$$
$$b\,c+c\,d+b\,e+d\,e=0$$

olacak şekilde

$$a=\pm1\,,\ b=\pm1\,,\ c=\pm1\,,\ d=\pm1\,,\ e=\pm1$$

çözümü bulunmalıdır.

Yukarıdaki denklemlerden ;

$$(a+e)\ (c+e)\ =0$$
$$(d+e)\ (a+b)=0$$
$$(b+e)\ (a+c)=0$$
$$(a+d)\ (b+c)=0$$
$$(b+e)\ (a+d)=0$$
$$(a+e)\ (b+c)=0$$
$$(c+d)\ (a+b)=0$$
$$(d+e)\ (a+c)=0$$
$$(b+d)\ (a+c)=0$$
$$(d+e)\ (b+c)=0$$
$$(c+e)\ (a+b)=0$$
$$(c+e)\ (a+d)=0$$
$$(b+e)\ (c+d)=0$$
$$(a+e)\ (b+d)=0$$
$$(c+e)\ (e+d)=0$$

ve;

$$a+e=0$$
$$c+e=0$$
$$d+e=0$$
$$a+b=0$$
$$a+c=0$$
$$a+d=0$$
$$b+c=0$$
$$b+e=0$$
$$c+d=0$$
$$b+d=0$$

Denklem sistemi elde edilir. Fakat bu 10 tane denklemden; aranılan çözüm bulunamaz. Çünkü bu 10 denklemi oluşturan a, b, c, d, e lerin işaret tablosundan, aranılan şekilde çözümünün olmadığı görülür.

Sonuç olarak ; $a=\pm1$, $b=\pm1$, $c=\pm1$, $d=\pm1$, $e=\pm1$ lerden oluşan 6.mertebeden simetrik konferans matris yazılamaz.

8x8 lik simetrik konferans matris için,

8.mertebeden simetrik konferans matrisi

$a=\pm1$, $b=\pm1$, $c=\pm1$, $d=\pm1$, $e=\pm1$, $f=\pm1$, $g=\pm1$

ve

$$C = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c & d & e & f & g \\ a & 0 & c & d & e & f & g & b \\ b & c & 0 & e & f & g & d & a \\ c & d & e & 0 & g & b & a & f \\ d & e & f & g & 0 & a & b & c \\ e & f & g & b & a & 0 & c & d \\ f & g & d & a & b & c & 0 & e \\ g & b & a & f & c & d & e & 0 \end{bmatrix}_{8x8}$$

şeklinde seçildiğinde;

C simetrik konferans matrisi, $C.C^t=(n-1)I$ şartını sağlamak üzere,

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c & d & e & f & g \\ a & 0 & c & d & e & f & g & b \\ b & c & 0 & e & f & g & d & a \\ c & d & e & 0 & g & b & a & f \\ d & e & f & g & 0 & a & b & c \\ e & f & g & b & a & 0 & c & d \\ f & g & d & a & b & c & 0 & e \\ g & b & a & f & c & d & e & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & a & b & c & d & e & f & g \\ a & 0 & c & d & e & f & g & b \\ b & c & 0 & e & f & g & d & a \\ c & d & e & 0 & g & b & a & f \\ d & e & f & g & 0 & a & b & c \\ e & f & g & b & a & 0 & c & d \\ f & g & d & a & b & c & 0 & e \\ g & b & a & f & c & d & e & 0 \end{bmatrix} = 7.I_7$$

olmalıdır.

Bu durumda;

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2 &= 7\\
bc+cd+de+ef+bg+fg &= 0\\
ac+ce+2df+ag+eg &= 0\\
ad+2be+af+dg+fg &= 0\\
2ae+2bf+2cg &= 0\\
bc+ad+af+cf+bg+dg &= 0\\
ac+2bd+ce+ag+eg &= 0\\
2ab+cd+de+cf+ef &= 0\\
bc+cd+de+ef+bg+fg &= 0\\
2ab+de+ef+dg+fg &= 0\\
ac+ce+2bf+ag+eg &= 0\\
bc+ad+af+cf+bg+dg &= 0\\
2bd+2ae+2cg &= 0\\
ad+cd+2be+af+cf &= 0\\
ac+ce+2df+ag+eg &= 0\\
bc+ad+cd+af+bg+fg &= 0\\
ad+cd+2be+af+cf &= 0\\
bc+de+cf+ef+bg+dg &= 0\\
ad+2be+af+dg+fg &= 0\\
ac+ce+2bf+ag+eg &= 0\\
bc+ad+cd+af+bg+fg &= 0\\
bc+de+cf+ef+bg+dg &= 0\\
bc+ad+af+cf+bg+dg &= 0\\
bc+cd+de+ef+bg+fg &= 0\\
ac+ce+2df+ag+eg &= 0
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Fakat bu denklemlerden $2ae+2bf+2cg=0$, $ae+bf+cg=0$ denklemi yukarıdaki $a=\pm1, b=\pm1, c=\pm1, e=\pm1$, $f=\pm1$, $g=\pm1$ şartlarını sağlamaz. Yani yazılan denklem sisteminin çözümü, aranılan koşullara uygun olarak bulunamaz.

Sonuç olarak; $a=\pm1, b=\pm1, c=\pm1, d=\pm1, e=\pm1$, $f=\pm1$, $g=\pm1$ lerden oluşan 8.mertebeden simetrik konferans matris yazılamaz.

III. SONUÇ

Lemma II.2.2 ye uygun olarak 8x8, 12x12 ve 16x16 tipinde simetrik Hadamard matrisler konferans matris yöntemiyle türetilemeyeceği görülür.

KAYNAKLAR

[1]. Evangelaros H., Koukouvinos C., Seberry J., "Applications of Hadamard matrices", Journal of Telecominications and Information Technology, 2003.

[2]. Kiefer, J., "Construction and optimally of generalized Youden designs", Statistical Design and Linear Models, J. N. Srivastava, Ed. Amsterdam:North-Holland, 1975, pp. 333-353.

[3]. Song, H.Y., "Examples and Constructions of Hadamard Matrices", June, 2002.Department of Electrical and Electronics Engineering Yonsei University, Seoul, 120-749 Korea.

[4]. Fidler, M., Markham, T. L. "An Inequality for the Hadamard Product of an M-matrix and inverse M-matrix", Linear Algebra Appl. 101 (1988) 1-8.

[5]. Babai, L., "Hadamard Matrices", June 14, 2002.

[6]. Horn, R.A., Johnson, C.R., "Matrix Analiysis", Cambridge University Preus, New York, 1985.