

**T. C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SAKARYA VE TÜRKİYE ÖLÇEKLİ ALKOL  
KULLANIM MODELİNİN KARALILIK ANALİZİNİN  
İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Recai TARAKÇI**

**Enstitü Anabilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL**

**Ağustos 2021**

T. C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SAKARYA VE TÜRKİYE ÖLÇEKLİ ALKOL  
KULLANIM MODELİNİN KARALILIK ANALİZİNİN  
İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Recai TARAKÇI**

**Enstitü Anabilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK**

**Bu tez .../.../..... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.**

**Jüri Başkanı**

**Üye**

**Üye**

## **BEYAN**

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Recai TARAKÇI

03/08/2021

## **TEŞEKKÜR**

Bu tez çalıŐmasının seçimi, çalıŐma sűreci ve sonuçlandırılmasında Őahsıma gűstermiŐ olduĐu desteklerinden dolayı danıŐman hocam Sayın Prof. Dr. Őmer Faruk GűZűKIZIL'a teŐekkűrű bir borç bilirim.

Bu sűre boyunca desteklerini esirgemeyen eŐime ve aileme sonsuz teŐekkűr ederim.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	v
TABLOLAR LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY .....	viii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2.	
KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ.....	5
2.1. Otonom Sistemler .....	5
2.1.1. Kararlılık ve kararsızlık .....	6
2.2. Diferansiyel Denklemler ve Kararlılık .....	7
2.2.1. Lineer denklem sistemi ve kararlılık .....	7
2.2.1.1. Reel, aynı işaretli, eşit olmayan özdeğerler .....	8
2.2.1.2. Farklı işaretli, reel özdeğerler .....	9
2.2.1.3. Eşit özdeğerler.....	10
2.2.1.4. Sıfırdan farklı reel kısmı karmaşık özdeğerler.....	11
2.2.1.5. Yalın karmaşık özdeğerler .....	12
2.2.2. Lineer ve homojen olmayan sistemler ve kararlılık .....	14
2.3. Diferansiyel Denklem ile İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler.....	18
2.4. Hastalık Dinamikleri İçin Modeller.....	22
2.4.1. Bulaşıcı hastalıklar için deterministik modeller .....	22

2.4.1.1. SIR model .....	23
2.4.1.2. SI model .....	26
2.4.1.3. SIS model .....	26
2.4.1.4. SEIR model .....	27
BÖLÜM 3.	
MATERYAL VE YÖNTEM .....	28
3.1. Modelin Oluşumu .....	28
3.2. Sistemin Denge Noktaları .....	29
3.2.1. Alkol kullanılmaz denge noktası .....	29
3.2.2. Alkol kullanım denge noktası .....	30
3.3. Modelin Kararlılığı .....	31
3.3.1. Yerel kararlılık .....	31
3.3.2. Küresel istikrar .....	34
BÖLÜM 4.	
TARTIŞMA VE BULGULAR .....	35
4.1. Denge Noktaları .....	35
4.1.1. Türkiye için alkol kullanmama denge noktaları .....	35
4.1.2. Türkiye için alkol kullanma denge noktaları .....	35
4.1.3. Sakarya için alkol kullanmama denge noktaları .....	36
4.1.4. Sakarya için alkol kullanma denge noktaları .....	36
4.2. Modelin Kararlılığı .....	37
4.2.1. Yerel kararlılık .....	37
4.2.2. Küresel kararlılık .....	38
BÖLÜM 5.	
SONUÇ .....	40
KAYNAKÇA .....	41
EKLER .....	44
ÖZGEÇMİŞ .....	62

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\beta_1$	: Duyarlı nüfusun alkol tüketenlere dönüşme oranı
$\beta_2$	: Alkol tüketenlerin düzensiz (az) alkol tüketenlere dönüşme oranı
$d$	: Alkol kullanımına bağlı hastalıklardan ölüm oranı
$\alpha$	: Alkole tekrar başlayan oranı
$\gamma$	: Alkolü bırakma oranı
$\lambda$	: Doğum ve göç oranı
$\mu$	: Doğal ölüm oranı
$\rho$	: Alkol kullanımına bağlı ölüm oranı
$\omega$	: Düzensiz alkol tüketenlerin düzenli alkol tüketenlere dönüşme oranı

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. Alkol Kullanım Modelinin Şematik Diyagramı .....	28
---	----



## TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1. Lineer ve Yerel Olarak Lineer Sistemlerde Kararlılık ve Kararsızlık Özellikleri .....	17
---	----

## ÖZET

Anahtar kelimeler: Alkol kullanım modeli, Diferansiyel denklem sistemi, Kararlılık analizi, Matematiksel modelin denge noktası

Bu çalışma alkol tüketen nüfusun matematiksel modeliyle ilgilidir. Bu amaçla alkol tüketen nüfusu içeren modelin formülasyonu sunulmaktadır; daha sonra alkol kullanmama ve alkol kullanmanın pozitif olmasıyla ilgili denge noktaları tartışılmaktadır. Hurwitz teoremi modelin yerel stabilitesini bulmak için Lyapunov fonksiyon teorisi ise küresel stabilitenin araştırılması için kullanılmıştır. Sakarya ve Türkiye için ayrı ayrı alkol kullanımı ile aynı matematiksel model kullanılıp, ayrı ayrı sayısal sonuçlar sunulup, kararlılık analizleri incelenmiştir. Son olarak sayısal verilerden yararlanılarak Runge-kutta dördüncü dereceden yöntemiyle matlab ta simülasyon yapılmıştır.

# **INVESTIGATION OF THE STABILITY ANALYSIS OF SAKARYA AND TURKEY SCALE ALCOHOL USAGE MODEL**

## **SUMMARY**

Keywords: Alcohol use model, Differential equation system, Stability analysis, equilibrium model of the mathematical model.

This work is with the mathematical model of the alcohol consuming population. For this purpose, the formulation of the model including the alcohol consuming population is presented; then the balance points related to non-alcohol use and positive alcohol use are discussed. Hurwitz theorem is used to find the local stability of the model and Lyapunov function theory is used to investigate the spherical stability. For Sakarya and Turkey, the same mathematical model with alcohol use was used, separate numerical results were presented, and stability analyzes were examined. Finally, using the numerical data, a simulation was made in Matlab with the Runge-kutta fourth order method.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematiksel model, bir sistemin matematiksel kavramlar ve terimler kullanılarak tanımlanmasıdır. Matematiksel modeller doğa, temel, mühendislik ve sosyal bilimlerde kullanılır. Matematiksel biyoloji ise, matematiğin biyoloji, tıp ve biyoteknoloji dallarına uygulandığı disiplinler arası bir daldır. Bu alan günümüzün en hızlı gelişen ve matematiğin uygulandığı verimli ve aydınlatıcı bir dalı olarak görülüyor. Matematiksel biyolojide Daniel Bernoulli , 18. yüzyılda çiçek hastalığının insan nüfusu üzerindeki etkisini tanımlamak için matematiksel araçlar kullanmıştır (Brownlee, 1909).

2. Dünya Savaşı'nın şifre çözücüsü Alan Turing. Turing biyolojik olayların matematik yardımı ile çözümlenebileceğini ve yeni bakış açıları geliştirileceğini iddia ediyordu. Hatta 1952 yılında hayvanların kürklerindeki renkli desenlerin nasıl oluşabileceğini açıklayan bir çift matematik denklemi çıkartmıştı.

Son 50 yılda matematiksel biyologlar kalp fizyolojisi için inanılmaz karmaşıklığındaki modellemelere imza attılar. Bu modellemeler insan kalbini daha iyi kavramak için kullanılıyor. Bilgisayar simülasyonları kalbin kullanılacak ilaç ile ne gibi etkileşimlerde bulunabileceğini yüksek oranda tahmin edebiliyor, böylece riskli ve pahalı operasyonlara gerek kalmıyor.

Aynı şekilde matematiksel biyolojiyi hastalıkları anlamak ve tedavi için yeni bakış açıları geliştirmek içinde kullanıyoruz. Bireysel ölçekte, hastanın bağışıklık sisteminin bir virüse nasıl tepki verebileceği kestirilebiliyor ve böylece tedavi şekli belirlenebiliyor. Daha geniş ölçekte ise, Ebola gibi epidemik hastalıkların kontrolünü sağlamak için yeni yöntemler geliştirilebiliyor.1909'da Brownlee matematiksel biyolojinin gelişmesi için sorumluluk üstlendi (Brownlee, 1909). 1912'de salgın

yayılması için temel yasalar sundu (Brownlee, 1912). 1927’de salgın çalışmalarının ayrıntıları Kermack ve McKendrick tarafından tartışıldı (Kermack ve McKendrick,1927). Daha sonra birçok hastalığın farklı modellerini tartıştı (Song ve ark.,2008; Huo ve Ma, 2010; McCluskey, 2010; Ma ve Xu, 2009; Cheng ve Song, 2005; Guglielmi ve Hairer, 2001; Beretta ve ark., 2010; Van den Driessche ve Watmough, 2008; d’Onofrio ve ark., 2007; Yi ve ark., 2009; Anwar ve Fathalla, 2012; Hethcote, 1976; Alzahrani ve Zeb, 2020).Bütün bu araştırmalardan sonra bulaşıcı bir hastalık olarak dünyaya hızla yayılan sosyal alışkanlıklardan alkol gibi zararlı alışkanlıklardan dolayı insanların sağlığı bozulup hastalanmışlardır.

Alkollü içecek, ya da kısaca içki, etanol içeren bir maddedir. Etanol ilaç ve dezenfektan olarak da kullanılmakta olup, kullanımı ve satışı pek çok ülkede kanunlarla kontrol altına alınmıştır. Alkolün çeşitli türleri vardır. Parfüm, kolonya, boya ,dezenfektan ve diğer birçok maddenin içeriğinde alkol bulunur. Ayrıca, sanayide birçok üretim aşamasında da alkol kullanılır. İçkilerde kullanılan etil alkoldür (etanol). Bu alkolün saf hali renksizdir. Etil alkol, arpa ve üzüm gibi tahıl ve meyvelerin doğal yapısında bulunan şekerlerin fermantasyonundan elde edilir. Geçmişte alkolün “yaşam iksiri” olduğuna ve yaşamı uzattığına inanılırdı. Ancak zaman geçtikçe bu inanın doğru olmadığı kanıtlandı. Alkol merkezi sinir sistemini baskılayarak sakin bir durgunluk hali meydana getirerek, bilinç durumunu da değiştirir. Çok fazla içildiğinde alkol öldürücü bir zehir olabilir. Alkol, bir gram yağın içerdiği kalorigen biraz daha az kalori içerir.

Alkol, günümüzde toplumların mücadele ettikleri bir sorun olmaktadır. BM, 2011 yılını alkolle mücadeleye ayırırken, bir başka konsept daha belirlemektedir ki bu konsept, alkol veya diğer bağımlılık yapan madde kullanmayanları, kullanıcıların tesirlerinden korumaktır. Bu kapsamda Dünya Sağlık Örgütü Avrupa Ofisi alkolün Avrupa ülkelerinde tüketiminin %25 azaltılması için programlar ve kampanyalar düzenlemektedir. Ülkemizde de bu gelişmelere uyumlu olarak TAPDK(Tütün ve Alkol Piyasası Düzenleme Kurumu) tarafından gerekli yasal düzenlemeler yapılmakta, ancak şimdilik alkolün sigara gibi yazılı basında da ilan ve reklamının önlenmesi gerçekleşmemiş bulunmaktadır. Polonya’da alkole karşı 2000 yılından bu yana

yürütülen mücadelelerden en etkili olanının adı, “Alkol Özgürlüğümüzü Çalar” olarak belirlenmiştir. Bağımlılık konusunun biraz da hukuk yanını irdelediğimizde insanların, sağlık yönünden bedenlerini, ikinci sınıf insan oluşturarak onurlarını, kitlesel saldırı şeklindeki üretimleri ile tüm insanlığı hedef alarak kitleselliği ifade eden zararlı ve bağımlılık yapıcı madde üreticiliği, artık bir suç kategorisine sokulma yönünde mesafe almaktadır. Ulusal ve uluslararası hukukta yukarıda tarifini bulan bu suç kategorisi, “İnsanlığa Karşı Suçlar” kategorisidir. Özellikle olası bağımlılar olarak gençlerimizin özgürlüklerinin farkına varmalarında konunun sağlık ve hukuk yönü ve dolayısıyla bilimsel çalışmalar öncelik kazanmaktadır. Türkiye Yeşilay Cemiyeti gönüllüleri değerli akademisyenlerimizin çalışmalarını, hem “sağlıklı nesil, sağlıklı gelecek”, hem de farkındalık oluşturarak onurlarımızı her türlü tehdit ve saldırılardan korumak anlamında insanlık adına önemsiyoruz. Umuyoruz ki, bilimsel çalışmalar, sivil toplum aktivistleri için birer bilgi kaynağı ve yol gösterici olacaktır.

Çok miktarda ve sıklıkla alkol tüketen, bedensel, ruhsal ve toplumsal sağlığının bozulmasına rağmen alkol almak isteyen, tedavi edilmesi gereken kişiye alkolik denir. Dünyada alkol kullanan 2 milyar kişinin 76 milyon kadarı alkol bağımlısıdır. Yılda 1 milyon 800 bin kişi bu nedenle hayatını kaybetmektedir. Ülkemizde ilk tüketim yaşı 11’e kadar inmiştir. İlk kullanım yaşı düştükçe ileriki yaşlarda bağımlı olma riski artmaktadır.

Alkol mide yüzeyinden hücrelere geçiş yapar. Yüzde 20’si mideden, yüzde 80’i ince bağırsaklardan kana karışır. Sonraki durak karaciğerdir. Karaciğerin önceliği yağ asitlerini yakarak enerji üretmektir. Ancak alkol olunca bu öncelik değişir. Normalde parçalayacağı yağ asitleri karaciğerde birikmeye başlar ve karaciğer yağlanır. Alkol, kanla, kalbe, akciğerlere ve bronşlara ulaşır. Akciğerlerden beyne ulaşır ve uyuşma ve sakinleştirme etkisi yapar. Alkol, vücuda alındıktan 3 dakika sonra tüm hücrelere ulaşmış olur. Alınan alkol miktarı, yüksek seviyeyi geçerse solunum yavaşlayarak kişide koma ,karaciğer yetmezliği ve ölüme neden olacak bir takım ciddi sorunlara yol açabilir.

Alkol kullanımı toplum da önemli sağlık sorunlarına yol açmaktadır. Bazı ölümcül hastalıkların temelinde de alkol kullanımı yatmaktadır. Alkol kullanımı toplumların sosyal ve ekonomik hayatlarını olumsuz yönde etkilemektedir. Toplumda şiddet ve bilinç dışı hareketler oluşmasının en önemli sebebi alkoldür. Yapılan araştırmalarda alkol kullanımının genç yaşlarda başlayıp; toplumda bulaşıcı hastalık gibi kullanımın yayıldığı görölmektedir. Bu tez de alkol kullanımının matematiksel modelini salgın hastalıkların SIR modelinden yararlanarak oluşturduk (Okongo, 2015; Bhattacharjee, 2015; Momani ve ark., 2013; Adu ve ark., 2017; Balatif ve ark., 2020; Röst ve Tekeli, 2020; Alzzahrani ve ark., 2021).Toplumunu beş sınıfa ayırdık.  $X(t)$ :Duyarlı hassas nüfus sınıfı,  $H_1(t)$ :Alkol tüketenler sınıfı, $H_2(t)$ :Düzensiz alkol tüketenler sınıfı,  $Y(t)$ :Düzenli alkol tüketenler sınıfı, $Z(t)$ : Alkolü bırakan sınıfı olarak ayırdık. Burada 't' zaman değişimini göstermektedir. Alkol kullanım modelini elde ettiğimiz varsayımlara göre formalize ettik. Oluşturduğumuz modelin daha sonra kararlılık analizini inceledik. Hurwitz teoremini kullanarak modelin yerel stabilitesini inceliyoruz ve Lyapunov fonksiyonunun yardımıyla küresel stabilitesini tartışıyoruz.

## BÖLÜM 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

### 2.1. Otonom Sistemler

#### Tanım 2.1.1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

sistemi verilsin. (2.1) sistemindeki  $F$  ve  $G$  fonksiyonları  $t$  bağımsız değişkenine açıkça bağımlı olmayıp, sadece  $x$  ve  $y$  bağımlı değişkenlerini içersin. Bu özelliğe sahip bir sisteme otonom sistem denir (Boyce ve DiPrima, 2016).

$F$  ve  $G$  fonksiyonları  $xy$ -düzleminin bir bölgesinde sürekli ve sürekli kısmi türevlere sahip olsunlar. Eğer  $(x_0, y_0)$  bu bölgede bir nokta ise, (2.1) sisteminin

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \quad (2.2)$$

başlangıç koşullarını sağlayan tek bir  $x = \phi(t)$ ,  $y = \varphi(t)$  çözümü vardır. Çözüm,  $t_0$  noktasını içeren bir  $I$  aralığında tanımlıdır (Boyce ve DiPrima, 2016);

(2.1) otonom sistemi zamandan bağımsız olan ilişkili bir yönlü alana sahiptir. Sonuç olarak faz düzlemindeki her  $(x_0, y_0)$  noktasından geçen sadece bir yörünge vardır. Diğer bir ifadeyle, (2.2) başlangıç şartını sağlayan tüm çözümler  $(x_0, y_0)$  noktasından geçtikleri  $t_0$  zamanından bağımsız olarak aynı yörünge üzerinde yer alırlar (Boyce ve DiPrima, 2016).



### 2.1.1. Kararlılık ve kararsızlık

$$X' = f(x) \quad (2.3)$$

otonom sistemi için eğer varsa,  $f(x)=0$  denklemini sağlayan noktalara (2.3) otonom sisteminin kritik noktaları denir. Bu noktalarda  $x'=0$  olduğu açıktır, dolayısıyla kritik noktalar diferansiyel denklem sistem çözümlerinin denge (veya sabit) noktasına karşılık gelir (2.3) sisteminin kritik bir noktası  $x^0$  olsun. Eğer verilen her  $\varepsilon > 0$  için (2.1) sisteminin tüm pozitif  $t$ 'lerde tanımlı her  $x=\phi(t)$  çözümü, için

$$\|\phi(0) - x^0\| < \delta \quad (2.4)$$

Eşitsizliğini ve her  $t \geq 0$  için

$$\|\phi(t) - x^0\| < \varepsilon \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı bulunabiliyorsa, bu kritik noktaya kararlıdır denir. Yukarıdaki matematiksel ifadeler  $x^0$ 'a “yeterince yakın” (yani,  $\delta$  komşuluğunda) başlayan her çözümün  $x^0$ 'a “yakın” (yani,  $\varepsilon$  komşuluğunda) kaldığını söyler.

Kararlı olmayan kritik noktaya kararsızdır denir. Bir  $x^0$  kritik noktasına eğer kararlı ise ve eğer bir  $x = \phi(t)$  çözümü için

$$\|\phi(0) - x^0\| < \delta_0 \quad (2.6)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde öyle bir  $0 < \delta_0 < \delta$  bulunabiliyorsa ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x^0 \quad (2.7)$$

oluyorsa asimptotik kararlıdır denir. Böylece  $x^0$ 'a “yeterince yakın” başlayan yörüngeler sadece  $x^0$ 'a “yakın” kalmakla kalmaz  $t \rightarrow \infty$  iken sonunda  $x^0$ 'a yaklaşmak zorundadır. Asimptotik kararlılık, kararlılıktan daha kuvvetli bir özelliktir. Çünkü bir kritik noktanın asimptotik kararlı olabilmesi için öncelikle kararlı olması gerekir.

Eğer  $x = 0$  kritik noktası asimptotik kararlı ise sadece orijine yakın başlayan yörüngeler değil tüm yörüngeler orijine yaklaşır. Bu durumda,  $x = 0$  kritik noktasına küresel olarak asimptotik kararlıdır denir (Boyce ve DiPrima, 2016).

## 2.2. Diferansiyel Denklemler ve Kararlılık

### 2.2.1. Lineer denklem sistemi ve kararlılık

Sabit katsayılı birinci mertebeden homojen iki boyutlu lineer denklem sistem

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

formundadır. Burada  $A$ ,  $2 \times 2$  lik sabit bir matris ve  $x$ ,  $2 \times 1$ 'lik bir vektördür. Böyle sistemler  $x = ke^{rt}$  formundaki çözümler aranarak çözülebilir. (2.8) sisteminde  $x$  yerine yazılarak

$$(A - rI)k = 0 \quad (2.9)$$

bulunur. Böylece  $r$ , bir özdeğer ve  $k$ ,  $A$  katsayı matrisine karşılık gelen özvektör dür. Özdeğerler

$$\det (A - rI) = 0 \quad (2.10)$$

polinom denkleminin kökleridir ve özvektörler, (2.9) eşitliği kullanılarak herhangi bir çarpımsal sabite bağlı olarak belirlenir.

(2.8) denklem sisteminde  $Ax = 0$  koşulunu sağlayan noktalar sistemin denge (sabit)çözümlerine karşılık gelir ve bunlara sistemin kritik noktaları denir.  $A$ 'nın tekil olmadığı yani  $\det(A) \neq 0$  olduğu kabul edilirse  $x = 0$ , (2.8) sisteminin tek kritik noktası olur.

(2.8) denklem sisteminin bir çözümü,  $x = \varphi(t)$  vektör fonksiyonudur. Bu vektör fonksiyonu, bir eğrinin  $x_1x_2$ -düzlemindeki parametrik ifadesidir.  $x_1x_2$  -düzlemine faz düzlemi denir. Yörüngeleri temsil eden bir küme de faz portresi olarak adlandırılır.

$A$ 'nın özdeğerlerinin yapısına bağlı olarak (2.8) denklem sistemi hakkında aşağıda ayrıntılı biçimde açıklanacak şekilde çeşitli farklı durumlar oluşmaktadır(Boyce ve DiPrima, 2016).

### 2.2.1.1. Reel, aynı işaretli, eşit olmayan özdeğerler

Bu durumda (2.8) denklem sisteminin çözümü

$$x = c_1 k^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 k^{(2)} e^{r_2 t} \quad (2.11)$$

şeklinindedir. Burada  $r_1$  ve  $r_2$ 'nin her ikisi de pozitif veya her ikisi de negatiftir. Kabul edelim ki,  $r_1 < r_2 < 0$  ve  $k^{(1)}$  ve  $k^{(2)}$  özvektörler olsun. (2.11) eşitliğinde  $c_1$  ve  $c_2$ 'den bağımsız olarak  $t \rightarrow \infty$  iken  $x \rightarrow 0$  olduğu aşıkardır. Yani, orijindeki tüm çözümler  $t \rightarrow \infty$  iken kritik noktaya yaklaşır. (2.11) eşitliği

$$x = e^{r_2 t} [c_1 k^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t} + c_2 k^{(2)}] \quad (2.12)$$

formunda yazılabilir.  $r_1 - r_2 < 0$  olduğundan  $c_2 \neq 0$  olduğu sürece yeterince büyük  $t$ 'ler için  $c_1 k^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t}$  terimiyle karşılaştırılınca ihmal edilebilir bir büyüklüktür. Böylece,  $t \rightarrow \infty$  iken yörünge sadece orijine yaklaşmaz, aynı zamanda  $k^{(2)}$ 'den geçen doğruya yaklaşır. Dolayısıyla kritik noktadaki tam olarak  $k^{(1)}$ 'den geçen doğrudan

başlayan çözümler dışındakilerin tümü  $k^{(2)}$ 'ye teğettir.  $r_1 < r_2 < 0$  ve  $t \rightarrow -\infty$  iken eğer  $c_1 \neq 0$  ise (2.11) eşitliğindeki baskın terim  $e^{r_1 t}$ 'yi içeren terimdir.

Böylece, büyük negatif  $t$ 'ler için  $k^{(2)}$ 'den geçen doğru boyunca yer alan yörüngeler dışındaki yörüngeler,  $k^{(1)}$  özvektörünün eğimine çok yakın eğimlere sahiptir. Tüm çözümler zamanla üstel sönümlenir. Bu durumda, kritik noktaya bir düğüm veya bir düğümsel çukur denir.

Eğer  $r_1$  ve  $r_2$ 'nin her ikisi de pozitif ve  $0 < r_2 < r_1$  ise yörüngeler aynı örüntüye sahiptir, ancak hareketin yönü orijindeki kritik noktadan uzaklaşır.  $x_1$  ve  $x_2$ ,  $t$ 'ye bağlı fonksiyonlar olarak üstel olarak büyür. Bu durumda, kritik noktaya bir düğüm veya düğümsel kaynak denir (Boyce ve DiPrima, 2016).

### 2.2.1.2. Farklı işaretli, reel özdeğerler

Bu durumda (2.8) denklem sisteminin çözümü

$$x = c_1 k^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 k^{(2)} e^{r_2 t} \quad (2.13)$$

olur. Burada  $r_1 > 0$  ve  $r_2 < 0$ 'dır. Eğer çözüm  $k^{(1)}$ 'den geçen doğru üzerindeki bir başlangıç noktasından başlarsa, çözüm her  $t$  için bu doğru üzerinde kalır ve  $r_1 > 0$  olduğundan  $t \rightarrow \infty$  iken  $\|x\| \rightarrow \infty$  olur. Eğer çözüm  $k^{(2)}$ 'den geçen doğru üzerindeki bir başlangıç noktasından başlarsa, çözüm her zaman bu doğru üzerinde kalır ve  $r_2 < 0$  olduğundan  $t \rightarrow \infty$  iken  $\|x\| \rightarrow 0$  olur. Başka başlangıç noktalarından başlayan çözümler ve pozitif büyük  $t$ 'ler için (2.13) eşitliğindeki baskın terim  $c_1 k^{(1)} e^{r_1 t}$ 'dir. Dolayısıyla, tüm bu çözümler, pozitif  $r_1$  özdeğerine karşılık gelen  $k^{(1)}$  özvektörü tarafından belirlenen doğruya asimptotik olarak sonsuza yaklaşır. Büyük negatif  $t$ 'ler için (2.13) eşitliğindeki baskın terim negatif üsteldir, dolayısıyla, tipik bir çözüm  $t \rightarrow -\infty$  iken  $k^{(2)}$  özvektöründen geçen doğruya asimptotiktir. Orijindeki kritik noktaya yaklaşan çözümler ise  $k^{(2)}$  özvektörü tarafından belirlenen doğru üzerinde başlayanlardır. Oriji bu durumda bir eyer noktası adı verilir (Boyce ve DiPrima, 2016).

### 2.2.1.3. Eşit özdeğerler

$r_1 = r_2 = r < 0$  olsun. Eğer özdeğerler pozitifse yörüngeler benzerdir, fakat hareketinyönü tersinedir (Boyce ve DiPrima, 2016).

İki lineer bağımsız özvektör olduğu durumda (2.8) denklem sisteminin çözümü

$$x = c_1 k^{(1)} e^{rt} + c_2 k^{(2)} e^{rt} \quad (2.14)$$

olur. Burada  $k^{(1)}$  ve  $k^{(2)}$  bağımsız özvektörlerdir.  $\frac{x_1}{x_2}$  oranı  $t$ 'den bağımsızdır, fakat  $k^{(1)}$  ve  $k^{(2)}$ 'nin bileşenlerine ve rastgele  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerine bağlıdır. Böylece, her yörünge orijinden geçen düz bir doğru üzerinde yer alır. Bu durumda, kritik noktaya bir düzgün düğüm veya bir yıldız nokta denir (Boyce ve DiPrima, 2016).

Bir bağımsız özvektör olduğu durumda (2.8) denklem sisteminin çözümü

$$x = c_1 k e^{rt} + c_2 (k t e^{rt} + \eta e^{rt}) \quad (2.15)$$

olur. Burada  $k$  özvektör ve  $\eta$  tekrarlı özdeğerle ilişkili genelleştirilmiş özvektördür. Büyük  $t$ 'ler için (2.15) eşitliğindeki baskın terim  $x = c_1 k e^{rt}$  dir. Böylece,  $t \rightarrow \infty$  iken her yörünge  $k$  özvektöründen geçen doğruya teğet olarak orijine yaklaşır. Bu durum  $c_2 = 0$  olduğunda da sağlanmaktadır, çünkü  $x = c_1 k e^{rt}$  çözümü de bu doğru üzerinde yer alır. Benzer şekilde, büyük negatif  $t$ 'ler için baskın terim  $x = c_2 k t e^{rt}$ , dolayısıyla,  $t \rightarrow -\infty$  iken her bir yörünge'nin eğimi  $k$  özvektörünün eğimine yaklaşır. Yörüngelerin yönelimi  $k$  ve  $\eta$ 'nin göreceli pozisyonlarına bağlıdır.

Eğer  $r_1 = r_2 > 0$  ise yörüngeler dışa doğru yönde çizilirler ve yörüngelerin  $k$  ve  $\eta$ 'ye göre yönelimi de tersinedir.

Bir çift katlı özdeğer sadece bir tek bağımsız özvektöre sahipse, kritik noktaya düzgün olmayan veya dejenere düğüm denir (Boyce ve DiPrima, 2016).

#### 2.2.1.4. Sıfırdan farklı reel kısmılı karmaşık özdeğerler

Özdeğerler  $\lambda \pm i\mu$  olsun, burada  $\lambda$  ve  $\mu$  reel,  $\lambda=0$  ve  $\mu > 0$  dır.

$$X' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} X \quad (2.16)$$

sistemi alınırsa bu sistemin skaler formu

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2 \quad (2.17)$$

dır. Kutupsal koordinatlar  $r$  ve  $\theta$  olmak üzere

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan \theta = \frac{x_2}{x_1},$$

Bu denklemlerin türevi alınarak

$$r r' = x_1 x_1' + x_2 x_2', \quad (\sec^2 \theta) \theta' = \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{x_1^2} \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.17) denklemlerindeki ifadeler (2.18) denklemlerinin birincisinde yerine yazılarak

$$r' = \lambda r, \quad (2.19)$$

$$r = c e^{\lambda t} \quad (2.20)$$

bulunur, burada  $c$  sabittir. (2.17) denklemlerindeki ifadeler (2.18) denklemlerinin ikincisinde yerine yazılarak ve

$$\sec^2 \theta = \frac{r^2}{x_1^2}$$

olduğu kullanılarak,

$$\theta' = -\mu \quad (2.21)$$

$$\theta = -\mu t + \theta_0 \quad (2.22)$$

elde edilir. Burada,  $\theta_0$ ,  $\theta$ 'nın  $t = 0$ 'daki değeridir.

(2.20) ve (2.22) denklemleri, (2.16) sisteminin yörüngelerinin kutupsal koordinatlardaki parametrik denklemleridir.  $\mu > 0$  olduğu için (2.22) denkleminde  $t$  artarken  $\theta$  azalır, dolayısıyla, yörünge üzerindeki hareketin yönü saat yönündedir.  $t \rightarrow \infty$  iken (2.20) denkleminde eğer  $\lambda < 0$  ise  $r \rightarrow 0$  ve eğer  $\lambda > 0$  ise  $r \rightarrow \infty$  olduğu görülür. Böylece, yörüngeler  $\lambda$ 'nın işaretine bağlı olarak orijine yaklaşan veya orijinden uzaklaşan spirallerdir. Bu durumda, kritik noktaya bir spiral nokta denir (Boyce ve DiPrima, 2016).

### 2.2.1.5. Yalın karmaşık özdeğerler

Bu durumda  $\lambda = 0$  dır ve (2.16) sistemi, özdeğerleri  $\pm i\mu$  olan

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} X \quad (2.23)$$

sistemine indirgenir. Bir önceki durumdaki (2.19) ve (2.21) denklemleri kullanılarak

$$r' = 0, \theta' = -\mu \quad (2.24)$$

bulunur ve sonuç olarak  $c$  ve  $\theta_0$  sabit olmak üzere

$$r = c, \theta = -\mu t + \theta_0 \quad (2.25)$$

elde edilir. Böylece yörüngeler merkezi orijinde olan çemberlerdir. Yörünge üzerindeki hareket eğer  $\mu > 0$  ise saat yönünde ve  $\mu < 0$  ise saatin tersi yönündedir. Orijin etrafındaki bir tam dönüş  $\frac{2\pi}{\mu}$  uzunluğundaki bir zaman aralığında gerçekleşir, dolayısıyla, tüm çözümler periyodiktir ve periyotları  $\frac{2\pi}{\mu}$ 'dür. Bu kritik noktaya merkez denir (Boyce ve DiPrima, 2016).

### Sonuç 2.2.1.1.

Eğer özdeğerler  $r_1, r_2$ , gerçel ve negatıflerse ya da negatif reel kısma sahiplerse bütün yörüngeler  $t \rightarrow \infty$  için  $x = 0$  kritik noktaya yaklaşır. Bu durum (2.8) lineer sisteminin  $x = 0$  denge çözümünün asimptotik kararlılık kavramına karşılık gelir.

Eğer  $r_1, r_2$  yalın karmaşık iseler, bütün yörüngeler sınırlı kalır, fakat  $t \rightarrow \infty$ 'da orijine yaklaşmazlar, orijin merkezdir. Bu durum (2.8) lineer sisteminin  $x = 0$  denge çözümünün kararlılık kavramına karşılık gelir.

Eğer  $r_1, r_2$  reel ve pozitif veya pozitif reel kısma sahiplerse bazı yörüngeler ve muhtemelen  $x = 0$  haricindeki bütün yörüngeler  $t \rightarrow \infty$ 'da sınırsız olurlar. Bu durum (2.8) lineer sisteminin  $x = 0$  denge çözümünün kararsızlık kavramına karşılık gelir. (Boyce ve DiPrima, 2016).

Örnek 2.1.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$$

sisteminin kararlılığını inceleyiniz.

Sistemin özdeğerleri;



$$\det (A-rI) =0$$

polinom denkleminin kökleridir. Buna göre,

$$\begin{vmatrix} 5-r & -1 \\ 3 & 1-r \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$(5-r)(1-r)+3=0 ,$$

$$r^2-6r + 8= 0,$$

$$(r - 4)(r -2) =0,$$

$$r_1 =4 , r_2 = 2.$$

Sonuçta  $0 < r_2, < r_1$  olup kritik nokta bir düğüm noktasıdır ve sistem kararsızdır.

### 2.2.2. Lineer ve homojen olmayan sistemler ve kararlılık

Bir lineer olmayan sistem

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) , A= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

şeklinde verilsin. Lineer olmayan sistemin her kritik noktası komşuluğundaki yörüngelerin hareketi, belli bir lineer sistemin yörüngelerine benzer. Bu bize, kritik bir noktanın komşuluğunda (2.26) lineer olmayan sisteme, yörüngeleri daha kolay tanımlanabilen uygun bir lineer sistemle yaklaşılabileceğini ima eder.

Buradaki kritik soru, yörüngeleri kritik noktanın bir komşuluğunda lineer olmayan sistemdekilerle benzer olan bir lineer sistemle yaklaşıp yaklaşılamayacağı ve yaklaşılabiliyorsa bunun nasıl bulunabileceğidir.

Orijini kritik nokta olarak seçmek uygun olacağından  $x = 0$  (2.26) sisteminin bir izole kritik noktası olsun. Bu orijin merkezli, içerisinde başka kritik nokta bulundurmayan

bir çemberin var olduğu anlamına gelir. Ayrıca  $\det(A) \neq 0$ , Kabul edelim ki  $x = 0$  noktası,

$$X' = Ax \quad (2.27)$$

lineer sisteminin de bir izole kritik noktası olsun.

(2.26) lineer olmayan sisteminin  $x' = Ax$  lineer sistemine yaklaşabilmesi için  $g(x)$ 'in bileşenlerinin sürekli birinci kısmi türevlerinin olması ve

$$x \rightarrow 0 \text{ iken } \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad (2.28)$$

limit koşulunu sağlaması gerekir. Bu durumda, (2.26) lineer olmayan sisteme,  $x = 0$  kritik noktası komşuluğunda yerel olarak lineer sistem denir.

Genel olarak iki boyutlu lineer olmayan bir sistem

$$x' = F(x,y), y' = G(x,y) \quad (2.29)$$

şeklinde yazılır. (2.29) sistemi,  $(x_0, y_0)$  kritik noktasının bir komşuluğunda  $F$  ve  $G$  fonksiyonları ikinci dereceye kadar sürekli kısmi türevlere sahip olduğu durumda (2.29) sistemine yerel olarak lineerdir denir. Bunu göstermek için,  $(x_0, y_0)$  komşuluğunda Taylor açılımları kullanılarak  $F(x, y)$  ve  $G(x, y)$  fonksiyonları

$$F(x,y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y),$$

$$G(x,y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y)$$

şeklinde yazılır. Burada  $(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)$  iken  $\eta_1(x,y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \rightarrow 0$  ve  $\eta_2(x,y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \rightarrow 0$  dır. Ayrıca,

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0, \frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x_0)}{dt}, \frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y_0)}{dt}.$$

Buna göre, (2.29) sistemi

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Denklemine indirgenir.

Bu sonuca göre; eğer F ve G fonksiyonları iki defa türevlenebilirse (2.29) sistemi yerel olarak lineerdir ve  $(x_0, y_0)$  komşuluğunda (2.29) lineer olmayan sistemine yaklaşan lineer sistem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

olup burada  $u_1 = x - x_0, u_2 = y - y_0$ 'dır. (2.31) denklemi verilen bir kritik nokta komşuluğunda bir yerel lineer sisteme karşılık gelen lineer sistemi bulmak için basit ve genel bir metot sağlar.

(2.31) sisteminin katsayı matrisi

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

şeklindedir. J matrisine F ve G fonksiyonlarının x ve y'ye göre Jacobi matrisi denir.  $(x_0, y_0)$  noktasının (2.31) lineer sisteminin bir izole kritik noktası olması için  $\det(J)$ 'nin  $(x_0, y_0)$  noktasında sıfırdan farklı olması gerekir (Boyce ve DiPrima, 2016).

Sonuç 2.2.2.1.  $r_1$  ve  $r_2$ , (2.26) yerel olarak lineer sistemine karşılık gelen (2.27) lineer sisteminin özdeğerleri olsun. (2.27) lineer sisteminin ve (2.26) yerel olarak lineer sisteminin  $x=0$  kritik noktasının tipi ve kararlılığı Çizelge 2.1.'de verilmiştir (Boyce ve DiPrima, 2016).

Tablo 2.1. Lineer ve Yerel Olarak Lineer Sistemlerde Kararlılık ve Kararsızlık Özellikleri (Boyce ve DiPrima, 2016)

		Lineer sistem		Yerel Lineer sistem	
$r_1, r_2$	Tip	Kararlılık		Tip	Kararlılık
$r_1 > r_2 > 0$	N	Kararsız		N	Kararsız
$r_1 < r_2 < 0$	N	Asimptotik kararlı		N	Asimptotik kararlı
		Lineer sistem		Yerel Lineer sistem	
$r_1, r_2$	Tip	Kararlılık		Tip	Kararlılık
$r_2 < 0 < r_1$	SP	Kararsız		SP	Kararsız
$r_1 = r_2 > 0$	PN veya IN	Kararsız		N veya SpP	Kararsız
$r_1 = r_2 < 0$	PN veya IN	Asimptotik kararlı		N veya SpP	Asimptotik kararlı
$r_1, r_2 = \lambda > i\mu$					
$\lambda > 0$	SpP	Kararsız		SpP	Kararsız
$\lambda < 0$	SpP	Asimptotik kararlı		SpP	Asimptotik kararlı
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Kararlı		C veya SpP	Belirsiz

N: düğüm, IN: düzensiz düğüm, PN: düzenli düğüm, SP: eyer noktası, SpP: spiral nokta, C: merkez

### Örnek 2.2.

$$\frac{dx}{dt} = x + y^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

sisteminin kararlılığını inceleyiniz.

$F(x, y) = x + y^2$  ve  $G(x, y) = x + y$  fonksiyonları iki defa türevlenebilir olduğundan sistem yerel olarak lineerdir.

Sistemin kritik noktaları  $(0,0)$  ve  $(-1,1)$  dir. Bir  $(x_0, y_0)$  noktasında sisteme yaklaşan lineer sistem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ve  $(0,0)$  kritik noktası yakınında sisteme yaklaşan lineer sistem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Sistemin özdeğerleri,  $\det(A - rI) = 0$  polinom denkleminin kökleridir. Bu denklemden  $r_1 = r_2 = 1$  çıkar. Bu durumda,  $r_1 = r_2 > 0$  olup,  $(0,0)$  kritik noktası sistemin kararsız düğümü veya spiral noktasıdır.

$(-1,1)$  kritik noktası yakınında sisteme yaklaşan lineer sistem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

olur. Sistemin özdeğerleri  $\det(A - rI) = 0$  polinom denkleminin kökleridir. Bu denklemden  $r_1 = 1 + \sqrt{2}$  ve  $r_2 = 1 - \sqrt{2}$  bulunur. Bu durumda,  $r_2 < 0 < r_1$  olup,  $(-1,1)$  kritik noktası sistemin kararsız eyer noktasıdır.

### 2.3. Diferansiyel Denklem ile İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler

#### Tanım 2.3.1.

$F: R^{n+1} \rightarrow R$  olmak üzere

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2(x)}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

Şeklinde denkleme n. Dereceden bir diferansiyel denklem denir.

**Tanım 2.3.2.**

(2.3.1) denkleminde  $x$  değişkeni sadece  $x$ 'e bağlıysa ( $t$  bağımsız değişkeni açıkça görünmüyorsa) yani denklem  $F(x, x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$  şeklinde ise denkleme otonom diferansiyel denklem denir. Aksi takdirde denklem otonom olmayan diferansiyel denklem adını alır.

**Tanım 2.3.3.**

$n$ . Dereceden

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = g(t)$$

Diferansiyel denkleminde ( $i = 1, \dots, n$ )  $a_i$  katsayıları ve  $g$  fonksiyonu sabit ya da  $t$ 'nin bir fonksiyonu ise, (2.3.2) diferansiyel denklemine lineer diferansiyel denklem denir.

Verilen diferansiyel denklem lineer değilse bu denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem adı verilir (2.3.2) ifadesinde  $g(t) = 0$  ise, denkleme homojen diferansiyel denklem denir. Aksi takdirde (2.3.2) denklemini homojen olmayan denklemdir.

**Tanım 2.3.4.**

$g$  sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = g(x)$$

otonom bir diferansiyel denklem olsun.  $G(x)$  ifadesini sıfır yapan ( $g(x)=0$ ) bütün  $x$  değerlerine (2.1.3) diferansiyel denkleminin kritik noktaları denir.

Benzer şekilde  $a_{ij}$  ler reel sayılar ( $i, j=1, \dots, n$ ),  $A = (a_{ij})$  sabit matris olmak üzere,

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

şeklindeki birinci dereceden (2.3.4) diferansiyel denklem sisteminin kritik noktası

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ eşitliğini sağlayan } x \text{ vektörüdür}$$

**Tanım 2.3.5.**

$U$  cümlesi,  $U \subset \mathbb{R}^2$  ve  $(0,0) \in U$  olacak şekilde açık bir cümle olsun.  $V \in C^1(U)$  ve reel değerli bir fonksiyon  $V:U \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise,  $V$  fonksiyonuna  $U$  cümlesi üzerinde pozitif tanımlıdır denir.

- $V(0,0) = 0$ ,
- $(x,y) \neq 0$  olmak üzere bütün  $(x,y) \in U$  için  $V(x,y) > 0$

**Tanım 2.3.6.**

Eğer  $(x,y) \in U - \{(0,0)\}$  için  $\frac{dV(x,y)}{dt} \leq 0$  ise, bu taktirde orijinin açık bir komşuluğunda pozitif tanımlı olan  $V$  fonksiyonuna,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases}$$

otonom diferansiyel denklem sistemi için bir Lyapunov fonksiyonudur denir. Eğer her  $(x,y) \in U - \{(0,0)\}$  için  $\frac{dV(x,y)}{dt} < 0$  ise, bu durumda  $V$  fonksiyonu tam Lyapunov fonksiyonu adını alır.

**Teorem 2.3.1.**

Lyapunov Kararlılık Teoremi.

$V \in C^1$  olmak üzere  $V$  fonksiyonu orijinin bir  $U$  komşuluğunda pozitif tanımlı birfonksiyon ve  $(0,0)$  noktası (2.3.5) diferansiyel denklem sisteminin kritik noktası olsun. Bu takdirde,

- Eğer  $(x, y) \in U - \{(0,0)\}$  için  $\frac{dV(x,y)}{dt} \leq 0$  ise  $(0,0)$  kritik noktası kararlıdır.
- Eğer  $(x, y) \in U - \{(0,0)\}$  için  $\frac{dV(x,y)}{dt} < 0$  ise  $(0,0)$  kritik noktası asimptotik kararlıdır.
- Eğer  $(x, y) \in U - \{(0,0)\}$  için  $\frac{dV(x,y)}{dt} > 0$  ise  $(0,0)$  kritik noktası kararsızdır

### Teorem 2.3.2.

Routh-Hurwitz Kriteri;

$i=1,2,\dots,n$  için  $a_i$  ler reel sabitler olmak üzere

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

polinomu verilsin.  $j > n$  için  $a_j = 0$  olmak üzere  $a_j$  katsayıları kullanılarak oluşturulan  $n$  tane Hurwitz matrisi

$$H_1 = [a_1] \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

tanımlasın.  $P(\lambda)$  polinomunun tüm köklerinin negatif reel kısımlara sahip olması için gerek ve yeter koşul tüm Hurwitz matrislerinin determinantlarının pozitif olmasıdır.



Yani  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $\det H_j > 0$  olmasıdır.

Buna göre,  $n = 2, 3, 4$  ve  $5$ . derecelerine sahip  $P(\lambda)$  polinomları için, Routh-Hurwitz kriteri aşağıdaki şekilde yazılır.

$$n=2: a_1, a_2 > 0$$

$$n=3: a_1, a_3 > 0 \text{ ve } a_1 \cdot a_2 > a_3$$

$$n=4: a_1, a_3, a_4 > 0 \text{ ve } a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 > a_3^2 + a_1^2 \cdot a_4$$

$$n=5: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 > a_3^2 + a_1^2 \cdot a_4 \text{ ve}$$

$$(a_1 \cdot a_4 - a_5)(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 - a_3^2 + a_1^2 \cdot a_4) > a_5(a_1 \cdot a_2 - a_3)^2 + a_1 \cdot a_5^2$$

Routh-Hurwitz Kriteri, bir polinom denkleminin pozitif reel kısmı köklerin bulunup bulunmadığını denklemini çözmeden belirlemeye yarayan ve özellikle yüksek dereceden polinomlarda köklerin incelenmesinde önemli kolaylık sağlayan çok kullanışlı bir kriterdir. Ayrıca, bu kriterin gereklilik şartı; polinom denkleminin köklerinin negatif reel kısımlara sahip olması dolayısıyla denge noktasının kararlı olabilmesi için denklemin tüm katsayılarının pozitif ve sıfırdan farklı olmasıdır (Allen, 2007).

## 2.4. Hastalık Dinamikleri İçin Modeller

### 2.4.1. Bulaşıcı hastalıklar için deterministik modeller

Deterministik modeller, sistemin gelecek durumlarının belirlenmesinde hiçbir rastgelelik olmayan sistemlerdir. Deterministik modelde sistemin herhangi bir zamanda, nasıl davranacağı önceden dinamik modeli üzerinden hesaplanabilir. Belirli bir model bu nedenle her zaman belirli bir başlangıç koşulundan veya başlangıç durumundan aynı çıktıyı üretirler.

Diferansiyel denklemler tarafından tanımlanan fiziksel kanunlar belirli bir noktadaki sistemin durumu açıkça tanımlanmasının zor olmasına rağmen deterministik sistemleri temsil eder.

Bulaşıcı hastalıklar ile ilgili yapılmış çalışmalar göz önüne alındığında, bu modellerde bireyleri sınıflara ayırmışlardır. Örneğin, hassas bireyler, korunmasız bireyler, bulaştırıcı bireyler, iyileşen bireyler gibi sınıflara ayrılırlar.

Hassas bireyler, başlangıçta enfeksiyona duyarlıdır. Bireyde mikrop mevcut değildir. Bireyde sadece düşük seviyeli spesifik olmayan bağışıklık vardır. Korunmasız bireyler, enfeksiyonun erken aşamalarında belirli belirtileri gösterebilir veya göstermeyebilir. Bulaştırıcı bireyler, etkeni hassas ve korunmasız bireylere bulaştıran kişilerdir. Bulaştırıcı kişi, bireyle karşılaşır virüsü yayar. Virüsün miktarı zamanla artar. İyileşen hastalar virüsten tedavi olup, başkalarına artık bulaştıramayan kişilerdir (Haran, 2009).

#### 2.4.1.1. SIR model

SIR model akış diyagramı  $S \rightarrow I \rightarrow R$  şeklindedir. Bireyler hassas sınıf içinde doğarlar. Hassas bireyler hastalık ile asla temas etmez. Hassas bireylerin bulaştırıcı sınıfa geçtikten sonra hastalığa yakalanmaları mümkündür. Virüslü bireylerden hassaslara hastalık yayılır ve geçirenler sınıfına geçmeden önce birey bulaştırıcı sınıfta kalır. Geçirenler sınıfındaki bireyler ömür boyu bağışık olarak kabul edilir (Haran, 2009).

Demografi olmadan SIR model formülasyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

Klasik bir SIR model kapalı bir nüfus için bir sınıftan ayrılan bireylerin başka bir sınıfa girmesinin zorunlu olduğunu kabul eder (Doğum, ölüm, göç yok.). S, I, R sırasıyla hassasların, bulaştırıcıların ve geçirenlerin oranıdır.

$$S + I + R = 1$$

Hassasların herhangi bir zamandaki enfeksiyon hızı, hassaslarla bulaştırıcıların ilişkilerine bağlıdır. Yani,  $SI$  çarpımı ile orantılıdır. Hassas popülasyon azalacağından (bulaştırıcı olacağından) değişim hızı negatif olur.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

Hastalığı geçirenlerin bulaşıcı popülasyondan çıkma hızı, bulaştırıcı sayısı ile doğru orantılıdır ve  $\gamma > 0$  dir. Yani,

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Bulaştırıcı insanların değişim hızı, hassasların bulaştırıcı olma hızından bulaştırıcı insanların geçirenler grubuna geçme hızı arasındaki fark ile elde edilir:

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

Başlangıç koşulları  $S(0) > 0, I(0) > 0, R(0) = 0$  dir.

$R_0$  temel çoğalma sayısı, sağlıklı bir nüfusta bir tipik hastalıklı birey tarafından oluşturulan ikincil enfeksiyonların ortalama sayısıdır.

Enfeksiyon bir hassas nüfusun içine yerleştikten sonra başlangıç aşaması göz önünde bulundurulursa ya bir salgın ortaya çıkacaktır ya da virüsün varlığı ortadan kalkacaktır.

$$\frac{dI}{dt} = I(\beta S - \gamma).$$

Eğer;

$$S(0) < \frac{\gamma}{\beta} \text{ ise } \frac{dI}{dt} < 0.$$

Bu durumda, enfeksiyon ölür. Böylece, enfeksiyonun hassasları işgal etmesi için kritik bir eşik değerini aşması gerekir. Bu eşik değeri temel çoğalma sayısıdır ve

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Kapalı bir nüfus için eğer hassasların oranı  $\frac{1}{R_0}$ 'dan büyük ise bulaşıcı bir hastalık vücudu istila edebilir ve birey virüslü olur.

Aşı politikasında ise eğer hassasların oranı  $\frac{1}{R_0}$ 'ın altına düşürülebilirse aşı hastalığı ortadan kaldırabilir (Haran, 2009).

Demografi ile SIR model ise aşağıdaki gibi formülize edilir:

Her bir sınıftaki bireylerin maruz kaldığı doğal ölüm oranı  $\mu$  olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0, \\ \frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases}$$

diferansiyel sistemi ele alalım. Tüm nüfusun hassas olduğu kabul edilirse

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}$$

Olur.

Modelde iki tür denge söz konusudur. Bunlar hastalısız denge ve hastalıklı dentedir. Hastalısız dengede virüs mevcut değildir ve nüfusta herkes hassastır. Hastalıklı denge ise yeniden giriş olmadan hastalığın her zaman mevcut olduğu dentedir.

$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

$$\beta SI - (\gamma + \mu)I = 0 \text{ ise } I(\beta S - (\gamma + \mu)) = 0$$

Olur.  $I^*=0$  veya  $S^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$  olduğunda yukarıdaki eşitlik sağlanır.

$I^*=0$  hastaliksız dentedir.

$S^* = \frac{\gamma+\mu}{\beta} = \frac{1}{R_0}$  hastalıklı dentedir. Bu nedenle, hastalıklı denge  $R_0$ 'ın tersi olan bir nüfusta hassasların bir kısmı ile karakterize edilir. Bu denge sadece  $R_0 > 1$  olduğunda mümkündür.

$S^* = \frac{1}{R_0}$  olduğunda

$$(S^*, I^*, R^*) = \left( \frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), 1 - \frac{1}{R_0} - \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1) \right)$$

Eğer  $R_0 > 1$  ise hastalıklı denge kararlıdır, aksi takdirde hastaliksız denge kararlıdır(Haran,2009).

Temel çoğalma / üreme sayısı ( $R_0$ ),enfektif bir bireyin tamamen duyarlı bir topluma girdiğinde bulaştırıcılık dönemi boyunca üreteceği yeni bulaşıcı birey sayısıdır. Bu, örneğin ( $R_0$ )=12 olan bir hastalık için, bulaşıcı bir birey o hastalığa tamamen duyarlı bir topluma girdiğinde 12 bireye hastalık bulaştıracaktır( Işık ve Kaya , 2020).

#### 2.4.1.2. SI model

SI model akış diyagramı  $S \rightarrow I$  şeklinindedir. Bulaşıcı hastalığın seviyesi bulaştırıcı sınıfa geçen hassas bireylerin oranını etkiler. Enfeksiyon ölümcüldür. Örneğin; kuş gribi (H5N1) (Haran, 2009).

#### 2.4.1.3. SIS model

SIS model akış diyagramı  $S \rightarrow I \rightarrow S$  şeklinindedir. Bulaşıcı hastalığın seviyesi bulaştırıcı sınıfa geçen hassas bireylerin oranını etkiler. Bir SIS modeli için, enfekte kişiler iyileşme üzerine duyarlı sınıfa geri döner çünkü hastalık yeniden enfeksiyona karşı bağışıklık sağlamaz.. Örneğin; cinsel yolla bulaşan hastalıklar (Haran, 2009).

#### 2.4.1.4. SEIR model

SEIR model akış diyagramı  $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$  şeklindedir. Bulaşıcı hastalığın seviyesi bulaştırıcı sınıfa geçen hassas bireylerin oranını etkiler. Virüs bireylerde mevcut olduğu zaman gizil evre ortaya çıkar, fakat diğer hassaslara iletilemez (Bulaşıcı değildir.) (Haran, 2009).

- S duyarlı bireylerin oranıdır (hastalığa yakalanabilenler),
- E maruz kalan bireylerin oranıdır (enfekte olmuş ancak henüz bulaşıcı olmayanlar),
- I enfekte bireylerin oranıdır (hastalığı bulaştırabilenler),
- R iyileşmiş bireylerin (bağışıklık kazanmış olanların) oranıdır.

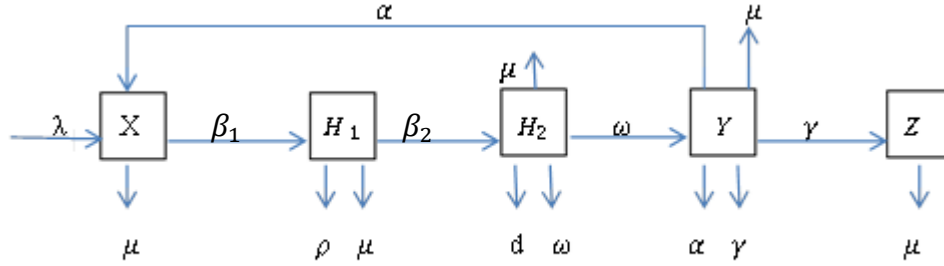
Bireylerin belirli bir bulaşıcı hastalığa karşı bağışıklığı, bu hastalık için geliştirilmiş aşılarla sağlanır. Ayrıca örneğin 6 aylıktan daha küçük bebeklerde annenin plasenta ve kolostrum sütünden geçen IgG antikorları, belirli bir süre yeni doğanların bazı hastalıklara karşı bağışıklık kazanmasını sağlayabilir. Bu şekilde bağışıklığı olmayan yeni doğanlar ise doğrudan S kompartımanına katılmaktadır. Modelde S ve I kompartımanları arasında yeni bir kompartımana yer verilmiştir. Bir patojene maruz kalan birey henüz bulaştırıcılık özelliğine sahip olmaması nedeni ile belirtilen ortalama süre içerisinde bu kompartımanda yer alacaktır. Belirti göstermeme süresi (Latent Period) olarak isimlendirilen bu süre, kuluçka süresine birçok açıdan benzemekle birlikte, bazı bulaşıcı hastalıkların uzun yıllar uyku halinde kalabilmesi nedeni ile farklılık göstermektedir.

## BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tüm bireyler hassas sınıf içine doğar. Daha sonra ergenlik yaşını geçtiklerinde yaşadığı toplumsal çevrenin etkisiyle kötü alışkanlıklardan biri olan alkolü tanıyıp, tüketmeye başlar. Böylece Alkol ile tanışmış olur. Biz bu tezde toplumu 5(beş) sınıfa ayırarak bir matematiksel model oluşturduk. Bunlar: duyarlı hassas nüfus sınıfı  $X(t)$ , alkol tüketenler sınıfı  $H_1(t)$ , düzensiz alkol tüketenler sınıfı  $H_2(t)$ ,düzenli alkol tüketenler sınıfı  $Y(t)$ ,alkolü bırakan sınıfı  $Z(t)$  şeklinde ifade edilmiştir.

### 3.1. Modelin Oluşumu

Toplumunu 5(beş) sınıfa ayırdık.  $X(t)$ ,  $H_1(t)$ ,  $H_2(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  duyarlı hassas nüfus sınıfı, alkol tüketenler sınıfı, düzensiz alkol tüketenler sınıfı, düzenli alkol tüketenler sınıfı, alkolü bırakan sınıfı olarak  $t$  zamanında model oluşturuldu.



Şekil 3.1. Alkol Kullanım Modelinin Şematik Diyagramı

$$\frac{dX}{dt} = \lambda - \beta_1 X H_1 - \mu X + \alpha Y$$

$$\frac{dH_1}{dt} = \beta_1 X H_1 - \beta_2 H_1 H_2 - (\rho + \mu) H_1$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \beta_2 H_1 H_2 - (d + \omega + \mu) H_2$$

$$\frac{dY}{dt} = \omega H_2 - (\alpha + \gamma + \mu) Y$$

$$\frac{dZ}{dt} = \gamma Y - \mu Z \quad (3.1)$$

Bu sistemde ilk dört denklemini alıyoruz.  $Z(t)$  genelliğini etkilemediği için almıyoruz.. Yeni modelimiz aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \lambda - \beta_1 X H_1 - \mu X + \alpha Y \\ \frac{dH_1}{dt} &= \beta_1 X H_1 - \beta_2 H_1 H_2 - (\rho + \mu) H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= \beta_2 H_1 H_2 - (d + \omega + \mu) H_2 \\ \frac{dY}{dt} &= \omega H_2 - (\alpha + \gamma + \mu) Y \end{aligned} \quad (3.2)$$

### 3.2. Sistemin Denge Noktaları

#### 3.2.1. Alkol kullanılmaz denge noktası

$H_1 = H_2 = Y = 0$  alınırsa denge noktası

$$E_0 = \left( \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right) \text{ dir.}$$

Sistem (2)'nin jacobian matrisi

$$J = \begin{bmatrix} -\beta_1 H_1 - \mu & -\beta_1 X & 0 & \alpha \\ \beta_1 H_1 & \beta_1 X - \beta_2 H_2 - \rho + \mu & -\beta_2 H_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 H_2 & \beta_2 H_1 - (d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_1 \lambda}{\mu} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} - (\rho + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

Üreme numarası için aşağıdaki matrisler yazılır.



$$F = \begin{bmatrix} \beta_1 \frac{\lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} (\rho + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & (d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & -\omega & (\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$F.V^{-1}$  Matrisinin özdeğeri  $\frac{\beta_1 \lambda}{\mu(\rho + \mu)}$  yani

$$R_0 = \frac{\beta_1 \lambda}{\mu(\rho + \mu)} \text{ (Van den Driessche ve Watmough,2008)} \quad (3.3)$$

Şeklinde üreme numarası bulunur.

### 3.2.2. Alkol kullanım denge noktası

- Teorem

$R_0 > 1$  ise ,alkol içmenin pozitif denge noktası vardır.

İspat:

Alkol kullanım için denge noktası  $E^*$  bulalım. (2) denklem sisteminin sol tarafı kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

Sistem (2)'nin üçüncü denklemi,

$$H_1^* = \frac{(d + \omega + \mu)}{\beta_2},$$

(2) sisteminin ikinci denkleminde,

$$X^* = \frac{\beta_2 H_2^* + (\rho + \mu)}{\beta_1},$$

Dördüncü denklem şunu ima eder:

$$Y^* = \frac{\omega H_2^*}{(\alpha + \gamma + \mu)},$$

Benzer şekilde ilk denklem

$$X^* = \frac{\lambda - \alpha Y^*}{\beta_1 H_1^* + \mu},$$

$$H_2^* = \frac{(\alpha + \gamma + \mu)(\rho + \mu)[\beta_2 \mu (R_0 - 1) - \beta_1 (d + \omega + \mu)]}{(\gamma + \mu)(\beta_1 \beta_2 \omega) + (\alpha + \gamma + \mu)(\beta_1 \beta_2 (d + \mu) + \beta_2^2 \mu)} \quad \text{elde edilir.}$$

$\beta_2 \mu (R_0 - 1) > \beta_1 (d + \omega + \mu)$  olmas için  $R_0 > 1$  olması gerekir .Böylece  $H_2^*$  değeri pozitif olur. Yani  $R_0 > 1$  ise

Gerekli pozitif denge noktası  $E^*$  dır.

$$E^*(X^*, H_1^*, H_2^*, Y^*) = \left( \frac{\beta_2 H_2^* + (\rho + \mu)}{\beta_1}, \frac{(d + \omega + \mu)}{\beta_2}, \frac{\omega H_2^*}{(\alpha + \gamma + \mu)}, \frac{(\alpha + \gamma + \mu)(\rho + \mu)[\beta_2 \mu (R_0 - 1) - \beta_1 (d + \omega + \mu)]}{(\gamma + \mu)(\beta_1 \beta_2 \omega) + (\alpha + \gamma + \mu)(\beta_1 \beta_2 (d + \mu) + \beta_2^2 \mu)} \right)$$

### 3.3. Modelin Kararlılığı

#### 3.3.1. Yerel kararlılık

- Teorem

$R_0 < 1$  ise sistem(2) yerel olarak kararlıdır .Eğer  $R_0 > 1$  ise sistem (2) yerel olarak kararsızdır.

İspat

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_1 \lambda}{\mu} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} - (\rho + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

Özdeğerleri takip edin.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ve  $\lambda_4$ ,

$$\lambda_1 = -\mu < 0,$$

$$\lambda_3 = -(d + \omega + \mu) < 0,$$

$$\lambda_4 = -(\alpha + \gamma + \mu) < 0,$$

$$\lambda_2 = (\rho + \mu) (R_0 - 1) < 0 \text{ olması için } R_0 < 1 \text{ dir.}$$

- Teorem

Eğer  $J(E^*)$ ,  $R_0 > \frac{\beta_2 \lambda}{(d + \omega + \mu)(\rho + \mu)}$  ise; sistem (2) yerel olarak kararlıdır. Aksi durum da  $J(E^*)$  kararsızdır.

- İspat

Yerel kararlılık için, sistem (2)  $E^*$  jacobian'ı yazalım.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\beta_1 H_1^* - \mu & -\beta_1 X^* & 0 & \alpha \\ \beta_1 H_1^* & \beta_1 X^* - \beta_2 H_2^* - \rho + \mu & -\beta_2 H_1^* & 0 \\ 0 & \beta_2 H_2^* & \beta_2 H_1^* - (d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\beta_1 H_1^* - \mu & -\beta_1 X^* & 0 & \alpha \\ \beta_1 H_1^* & 0 & -\beta_2 H_1^* & 0 \\ 0 & \beta_2 H_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta_1 H_1^* - \mu & -\beta_1 X^* & 0 & \alpha \\ -\mu & -\beta_1 X^* & -\beta_2 H_1^* & \alpha \\ \beta_1 H_1^* & \beta_2 H_2^* & -\beta_2 H_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta_1 H_1^* - \mu & -\beta_1 X^* & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta_1 X^* + \frac{\mu \beta_2 H_2^*}{\beta_1 H_1^*} & -\beta_2 H_1^* - \frac{\mu \beta_2 H_1^*}{\beta_1 H_1^*} & \alpha \\ \beta_1 H_1^* & \beta_2 H_2^* & -\beta_2 H_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\beta_1 H_1^* - \mu & -\beta_1 X^* & \frac{\omega \alpha}{(\alpha + \gamma + \mu)} & 0 \\ 0 & -\beta_1 X^* + \frac{\mu \beta_2 H_2^*}{\beta_1 H_1^*} & -\beta_2 H_1^* - \frac{\mu \beta_2 H_1^*}{\beta_1 H_1^*} + \frac{\omega \alpha}{(\alpha + \gamma + \mu)} & 0 \\ \beta_1 H_1^* & \beta_2 H_2^* & -\beta_2 H_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

Birleştirmek için bu matris şu şekilde yazılabilir.

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

Buraya;

$$A = \begin{pmatrix} -\beta_1 H_1^* - \mu & -\beta_1 X^* \\ 0 & -\beta_1 X^* + \frac{\mu \beta_2 H_2^*}{\beta_1 H_1^*} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\omega \alpha}{(\alpha + \gamma + \mu)} & 0 \\ -\beta_2 H_1^* - \frac{\mu \beta_2 H_1^*}{\beta_1 H_1^*} + \frac{\omega \alpha}{(\alpha + \gamma + \mu)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \beta_1 H_1^* & \beta_2 H_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\beta_2 H_1^* & 0 \\ \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{pmatrix},$$

A ve D Matrislerinin özdeğerleri ile  $J(E^*)$  matrislerinin özdeğerleri aynıdır. A ve D nin özdeğerleri aşağıdaki gibi verilmiştir. A'nın özdeğerleri

$$\lambda_1 = -\beta_1 H_1^* - \mu < 0 \text{ dir.}$$

$$\lambda_2 = -(\rho + \mu) + \frac{\mu \beta_2 H_2^*}{\beta_1 H_1^* \lambda} (\lambda - H_1^* (\rho + \mu) R_0),$$

Eğer  $R_0 > \frac{\beta_2 \lambda}{(d+\omega+\mu)(\rho+\mu)}$  sonra  $\lambda_2 < 0$

şimdi, D'nin özdeğerlerini yazalım;

$$\lambda_3 = -\beta_2 H_1^* < 0,$$

$$\lambda_4 = -(\alpha + \gamma + \mu) < 0, \text{ buda gerekli kanıttır.}$$

### 3.3.2. Küresel istikrar

- Teorem

Eğer  $R_0 < 1$ , sistem (2), küresel olarak stabildir.

- İspat

Bu teoremin ispatı için, öncelikle Lyapunov fonksiyonunu L olarak oluşturalım.

$$L = \ln \frac{X}{X_0} + \ln \frac{H_1}{H_{10}} + H_2 + Y \quad (4)$$

(4)Denklemleri zaman bakımından ifade edilirse; Lyapunov kararlılık kriterine göre ,

$$L' = \frac{\lambda}{X} - \beta_1 H_1 + \frac{\alpha Y}{X} - \mu + \beta_1 X - \beta_2 H_2 - (\rho + \mu) + \beta_1 H_1 H_2 \\ - (d + \omega + \mu) H_2 + \omega H_2 - (\alpha + \gamma + \mu) Y$$

$E_0$  yukardaki denklemde yerine yazarak,

$$L' = \mu - \mu + \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} - (\rho + \mu),$$

$$L' = R_0(\rho + \mu) - (\rho + \mu),$$

$$L' = (\rho + \mu)(R_0 - 1) < 0 \text{ olması için,}$$

$R_0 < 1$  olması gerekir. Bu durumda sistemin (2) küresel olarak kararlıdır.

## BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE BULGULAR

### 4.1. Denge Noktaları

#### 4.1.1. Türkiye için alkol kullanmama denge noktaları

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_1 \lambda}{\mu} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} - (\rho + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$(E_0) = (4,4 ; 0; 0; 0)$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -0,005 & -0,00132 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -0,00668 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0082 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0002 & -0,0912 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0,00132 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0,008 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0082 & 0 \\ 0 & -0,0002 & 0,0912 \end{bmatrix}$$

$R_0 = F.V^{-1} = 0,165$  (2) denklem sisteminin  $R_0 = 0,165$  olarak bulunur.

#### 4.1.2. Türkiye için alkol kullanma denge noktaları

$R_0 > 1$  ise, denge noktası pozitifdir. Türkiye için bulduğumuz  $R_0 < 1$  olduğu için alkol kullanma pozitif denge noktasına sahip değildir. Bunu aşağıda bulduğumuz sayısal sonuçlar desteklemektedir.

$$H_1^* = 20,5, H_2^* = -18,68, X^* = 1,76 \text{ (} H_2^* \text{ yıldızdan hesaplanmıştır.) } Y^* = -0,401$$

$$E^* (X^*, H_1^*, H_2^*, Y^*) = (1,76; 20,5; -18,68; -0,401)$$

$H_2^*$  daki  $\beta_2\mu(R_0 - 1) > \beta_1(d + \omega + \mu)$  olabilmesi için  $R_0 > 1$  olmalıdır. Ancak  $R_0 > 1$  olursa  $H_2^*$  pozitif olur. Buna bağlı olarak  $Y^*$  pozitif olur. Ancak bu sistemde  $R_0 < 1$  olduğundan alkol kullanmanın pozitif denge noktası yoktur. Zamanla alkol kullanımını azalacaktır.

#### 4.1.3. Sakarya için alkol kullanmama denge noktaları

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_1\lambda}{\mu} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\beta_1\lambda}{\mu} - (\rho + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$(E_0) = (3; 0; 0; 0)$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -0,006 & -0,0009 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -0,0081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0092 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0002 & -0,0902 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0,0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0,009 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0092 & 0 \\ 0 & -0,0002 & 0,0902 \end{bmatrix}$$

$R_0 = F.V^{-1} = 0,1$  (2) denklem sisteminin  $R_0 = 0,1$  olarak bulunur.

#### 4.1.4. Sakarya için alkol kullanma denge noktaları

$R_0 > 1$  ise, denge noktası pozitifdir. Bizim Sakarya için bulduğumuz  $R_0 < 1$  olduğu için alkol kullanma pozitif denge noktasına sahip değildir. Bunu aşağıda bulduğumuz sayısal sonuçlar desteklemektedir.

$$H_1^* = 20,75, H_2^* = -21,5, X^* = 1,33 \text{ (} H_2^* \text{ yıldızdan hesaplanmıştır.) } Y^* = -0,46$$

$$E^* (X^*, H_1^*, H_2^*, Y^*) = (1,33; 27,5; -21,5; -0,46)$$

$H_2^*$  daki  $\beta_2\mu(R_0 - 1) > \beta_1(d + \omega + \mu)$  olabilmesi için  $R_0 > 1$  olmalıdır. Ancak  $R_0 > 1$  olursa  $H_2^*$  pozitif olur. Buna bağlı olarak  $Y^*$  pozitif olur. Ancak bu sistemde  $R_0 < 1$  olduğundan alkol kullanmanın pozitif denge noktası yoktur. Zamanla alkol kullanımını azalacaktır.

## 4.2. Modelin Kararlılığı

### 4.2.1. Yerel kararlılık

- Türkiye Alkol Kullanım Modelinin Yerel Kararlılığı

$R_0 < 1$  ise sistem (2) kararlıdır.  $R_0 > 1$  ise sistem kararsızdır.

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_1\lambda}{\mu} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\beta_1\lambda}{\mu} - (\rho + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -0,005 & -0,00132 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -0,00668 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0082 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0002 & -0,0912 \end{bmatrix}$$

Matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_1 = -0,005 < 0$$

$$\lambda_2 = -0,00668 < 0$$

$$\lambda_3 = -0,0082 < 0$$

$$\lambda_4 = -0,0912 < 0$$

$$\lambda_2 = -0,00668 = -0,00668 = (\rho + \mu) \cdot (R_0 - 1)$$



$R_0 = 0,165$  olduğu ispatlanır.

- Sakarya Alkol Kullanım Modelinin Yerel Kararlılığı

$R_0 < 1$  ise sistem (2) kararlıdır.  $R_0 > 1$  ise sistem kararsızdır.

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_1 \lambda}{\mu} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} - (\rho + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(d + \omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\alpha + \gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -0,006 & -0,0009 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -0,0081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0092 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0002 & -0,0902 \end{bmatrix}$$

Matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_1 = -0,006 < 0$$

$$\lambda_2 = -0,0081 < 0$$

$$\lambda_3 = -0,0092 < 0$$

$$\lambda_4 = -0,0902 < 0$$

$$\lambda_2 = -0,0081 = -0,0081 = (\rho + \mu) \cdot (R_0 - 1)$$

$R_0 = 0,1$  olduğu ispatlanır.

#### 4.2.2. Küresel kararlılık

- Türkiye Alkol Kullanım Modelinin Küresel Kararlılığı

$$L = \ln \frac{X}{X_0} + \ln \frac{H_1}{H_{1_0}} + H_2 + Y$$

$$L' = \frac{\lambda}{X} - \beta_1 H_1 + \frac{\alpha Y}{X} - \mu + \beta_1 X - \beta_2 H_2 - (\rho + \mu) + \beta_1 H_1 H_2$$

$$-(d + \omega + \mu) H_2 + \omega H_2 - (\alpha + \gamma + \mu) Y$$

Denkleminde  $E_0$  yerine yazılırsa,  $E_0(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$

$$L' = \mu - \mu + \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} - (\rho + \mu),$$

$$L' = R_0(\rho + \mu) - (\rho + \mu),$$

$$L' = (\rho + \mu)(R_0 - 1) < 0$$

$$L' = 0,008(0,165-1) < 0$$

$$L' = -0,00668 < 0 \text{ olur.}$$

Lyapunov fonksiyonuna göre küresel olarak kararlıdır.

- Sakarya Alkol Kullanım Modelinin Küresel Kararlılığı

$$L = \ln \frac{X}{X_0} + \ln \frac{H_1}{H_{10}} + H_2 + Y$$

$$L' = \frac{\lambda}{X} - \beta_1 H_1 + \frac{\alpha Y}{X} - \mu + \beta_1 X - \beta_2 H_2 - (\rho + \mu) + \beta_1 H_1 H_2 - (d + \omega + \mu) H_2 + \omega H_2 - (\alpha + \gamma + \mu) Y$$

Denkleminde  $E_0$  yerine yazılırsa,  $E_0(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$

$$L' = \mu - \mu + \frac{\beta_1 \lambda}{\mu} - (\rho + \mu),$$

$$L' = R_0(\rho + \mu) - (\rho + \mu),$$

$$L' = (\rho + \mu)(R_0 - 1) < 0$$

$$L' = 0,009(0,1-1) < 0$$

$$L' = -0,0081 < 0 \text{ olur.}$$

Lyapunov fonksiyonuna göre küresel olarak kararlıdır.

## BÖLÜM 5. SONUÇ

Epidemik SIR modellerde yapılan araştırmalarda(Tez, Makale, Akademik Dergi, Kitap) salgının yayılma hızının üreme numarasıyla tamamen ilişkili olduğu görüldü. Salgının yayılma numarası,  $R_0$ 'ın salgınla mücadele ve önleme de önemli bir rol oynadığı ortaya çıkmıştır. Salgın modelleri örnek alınarak diğer sosyal bulaşıcılık modellerinin oluşmasına da yardımcı olmuştur. Bu nedenle Matematiksel salgın modellerinden yararlanılarak sigara içme ,alkol kullanma ,internet kullanma gibi modellemeler oluşturulmuştur. Bir Matematiksel modelin  $R_0$  oranı , salgının veya sosyal bulaşıcılığın artıp azalması hakkında bize bilgi sunmaktadır.  $R_0$  modelin parametrelerinden oluşmaktadır.  $R_0 < 1$  ise salgın ve sosyal bulaşıcılık zamanla bitmeye yakındır.  $R_0 = 1$  ise bulaşıcılık stabildir. Hiçbir zaman yok olmaz.  $R_0 > 1$  ise, bulaşıcılık zaman geçtikçe artmaktadır.  $R_0$  bize modelin kararlılığı hakkında da bilgi sunmaktadır.  $R_0 < 1$  ise sistem kararlıdır.  $R_0 = 1$  ise bulaşıcılık stabildir.  $R_0 > 1$  ise sistem kararsızdır.

Türkiye için bulduğumuz  $R_0=0,165$  oranı, Sakarya için bulduğumuz  $R_0 =0,1$  oranından büyüktür. Sakarya da Alkol kullanımının artış hızı Türkiye ortalamasının altındadır.

Bir sistemin kararlı olup olmadığını ve bulaşıcılığı hakkında bilgi edinmek için modelin  $R_0$  (üreme numarası) analiz edilmelidir.

## KAYNAKÇA

- Adu , I.K. ,Mojeeb Al-Rahman El-Nur, O. , Yang, C. (2017). mathematical model of drinking epidemic , British journal of mathematics & Computer science, 22(5):1-10,ISSN:2231-0851.
- Alzahrani, E. , Zeb,A. (2020). Stability analysis and prevention strategiesaof tobacco smoking model,/doi.org./10.1186/s13661-019-01315-1.
- Alzzahrani, E., Beleanu, D. ,El-Desoky, M.M. (2021).Mathematical modeling and analysis of the novel coronavirus using atangana-Baleanu derivative,Elsevier:Results in physics,25,104240.
- Anwar, M.N., Fathalla, A.R. (2012).Qualitative analysis of delayed SIR epidemic model with saturated incidence rate. Int. J. Differ. Equ. 2012, Article ID 408637.
- Balatif, O., Khajii, B.,Labzai,A., Rachik ,M. (2020).Mathematical modeling and analysis of an alcohol drinking model with the influence of alcohol treatment centers,İnternational journal of Mathematics and Matematical sciences, Volume 2020,ID:4903168,pp.12.
- Beretta, E. , Ma, W. , Takeuchi, Y. (2010). Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 42(6):931–947.
- Bhattacharjee,A. (2015). ATransmission model for HIV/AIDS in the presence of treatment, IOSR journal of Mathematics/ISSN:2319-764X.Volume 11.,pp. 72-80.
- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2016). Elementer Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri(Çev. M. Uğuz & Ç. Ürtiş). Palme Yayıncılık,Ankara: 495-527.
- Brownlee, J. (1909). Certain considerations on the causation and course of epidemics. Proc. R. Soc. Med. 2:243–258.
- Brownlee, J. (1912). The mathematical theory of random migration and epidemic distribution. Proc. R. Soc. Edinb. 31:262–289.
- Cheng, S. , Song, X. (2005). A delay-differential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells. J. Korean Math. Soc. 42(5):1071–1086.

- Demirci, M., Eker,E. (2017). Üniversite öğrencilerinin madde bağımlılığı sıklığı ve madde kullanım özellikleri, Anadolu bil Meslek Yüksekokulu Dergisi,,Cilt:12,s.10.
- Guglielmi, N. , Hairer, E. (2001). Implementing Radau IIA methods for stiff delay differential equations. *J. Comput. Math.* 67(1): 1–12.
- Haran, M. (2009). An introduction to models for disease Dynamics. *SAMSI*: 5-25.
- Hethcote, H.W. (1976). Qualitative analyses of communicable disease models. *Math. Biosci.* 7: 335–356.
- <https://dosyasb.saglik.gov.tr/Eklenti/36134,siy2018trpdf.pdf.>, Erişim Tarihi: 01.02.2021.
- <https://tuikweb.tuik.gov.tr/UstMenu.do.>, Erişim Tarihi:01.02.2021.
- <https://www.milliyet.com.tr/gundem/iste-turkiyenin-alkol-haritasi-1714739.>, Erişim Tarihi:15.01.2021.
- Huo, H.F., Ma, Z.P. (2010). Dynamics of a delayed epidemic model with non-monotonic incidence rate. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 15(2): 459–468.
- Işık , N., Kaya ,A. (2020). İnfeksiyöz hastalıkların yayılması ve kontrolünde matematiksel modeller ve sürü bağışıklığı , Atatürk Üniversitesi Vet.Bil. Derg., 15(3):301-307.
- Kermack, W.O. , McKendrick, A.G. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics, part 1. *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.*, 115: 700–721.
- Ma, Z. ,Xu, R. (2009). Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay. *Nonlinear Anal., Real World Appl.* 10(5):3175–3189.
- Ma, Z. ,Xu, R. (2009). Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate. *Chaos Solitons Fractals* 41(5): 2319–2325.
- Mathematics and Statistics Texas Tech University, Pearson Education., 348 pp.
- McCluskey, C.C. (2010). Complete global stability for an SIR epidemic model with delay distributed or discrete. *Nonlinear Anal., Real World Appl.* 11(1):55–59.
- Momani, S., Zaman, G., Zeb, A. (2013). Square-root Dynamics of a giving up smoking model,Elsevier , *Applied mathematical modelling* ,37.7: 5326-5334.
- Okongo,O.M. (2015). The local and global stability of the disease free equilibrium in a co infection model of HIV7AIDS,Tuberculosis and malaria,*IOSR journal of Mathematics/ISSN:2319-764X.Volume 11.,pp 1-13.*

- Onofrio, A., Manfredi, P., Salinelli, E. (2007). Bifurcation thresholds in an SIR model with information-dependent vaccination. *Math. Model. Nat. Phenom.* 2(1):26–43.
- Röst, G., Tekeli, T. (2020). Stability and oscillations of multistage SIS models depend on the number of stages, Elsevier: *Applied mathematics and computation*, 380, DOI: 10.1016/j.amc.2020.12525.
- Song, S. , Wang, K. , Wang, W. (2008). Dynamics of an HBV model with diffusion and delay. *J. Theor. Biol.* 253(1):36–44.
- Van den Driessche, P., Watmough, J. (2008). Further notes on the basic reproduction number. In: *Mathematical Epidemiology. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1945, pp. 159–178. Springer, Berlin.
- Yi, N., Zhao, Z., Zhang, Q. (2009). Bifurcations of an SEIQS epidemic model. *Int. J. Inf. Syst. Sci.* 5(3–4):296–310.

## EKLER

### EK A: Türkiye ve Sakarya Alkol Kullanım modelinin parametreleri

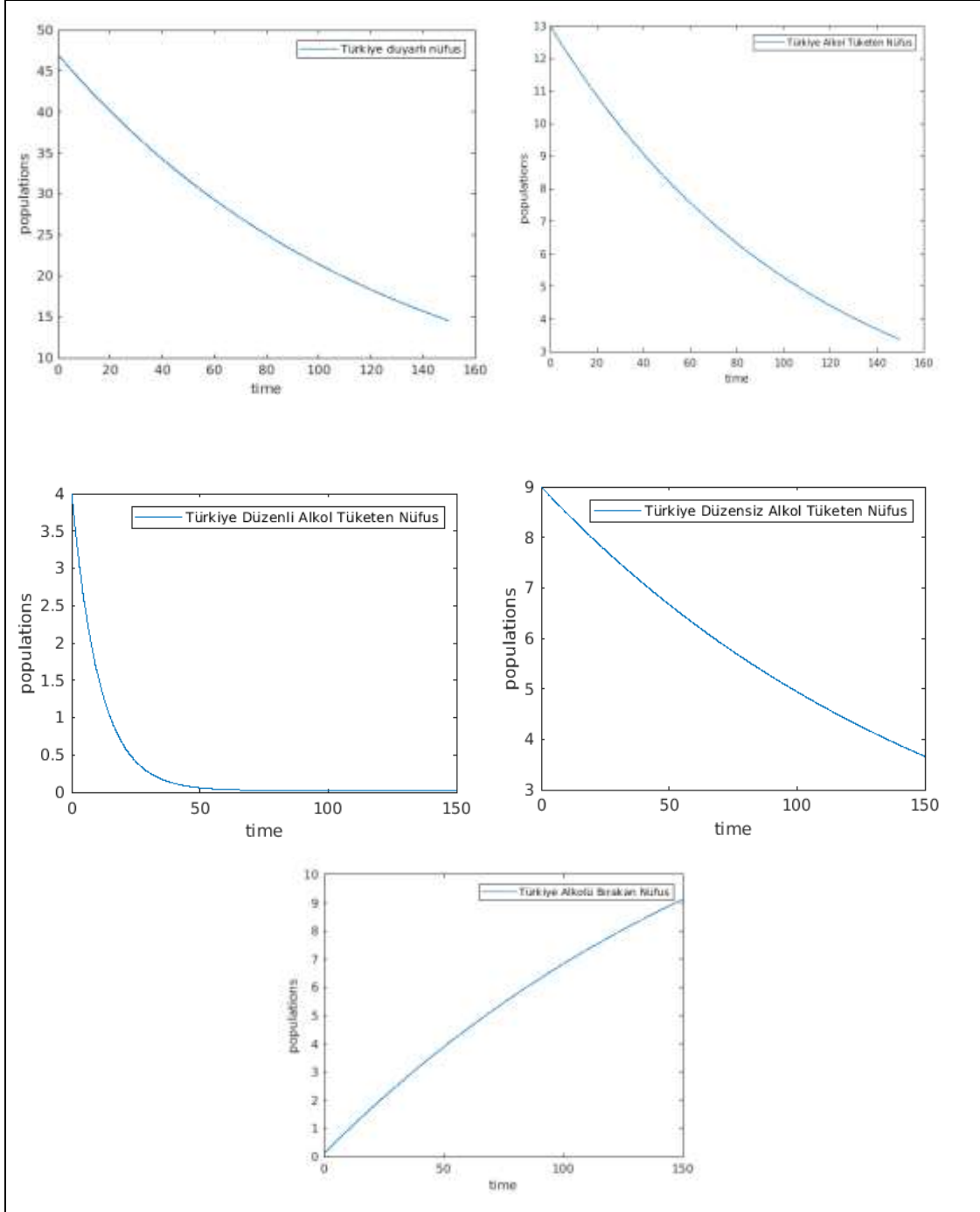
PAREMETRE	TANIMI	TÜRKİYE'DEKİ ORANLARI	SAKARYA'DAKİ ORANLARI
$\lambda$	Doğum ve göç oranı	0,022	0,018
$\beta_1$	Duyarlı Nüfusun Alkol Tüketenlere Dönüşme Oranı	0,0003	0,0003
$\beta_2$	Alkol Tüketenlerin, Düzensiz (az)Alkol Tüketenlere Dönüşme oranı	0,0004	0,0004
$\omega$	Düzensiz Alkol Tüketenlerin, Düzenli Alkol Tüketenlere Dönüşme Oranı	0,0002	0,0002
$\gamma$	Alkolü Bırakma Oranı	0,086	0,084
$\mu$	Doğal Ölüm Oranı	0,005	0,006
$\alpha$	Alkole Tekrar Başlama Oranı	0,0002	0,0002
$\rho$	Alkol Kullanımına Bağlı Ölüm Oranı	0,003	0,003
$d$	Alkol kullanımına Bağlı Hastalıklardan Ölüm Oranı	0,003	0,003

Sınıf	Tanımı	Türkiye Verisi	Sakarya Verisi
$X(t)$	Duyarlı Hassas Nüfus Sınıfı	47.236.000 (%78)	420.550 (%65)
$H_1(t)$	Alkol Tüketenler	13.324.075 (%22)	226.450 (%35)
$H_2(t)$	Düzensiz Alkol Tüketenler	9.145.435 (%15,1)	163.044 (%25,2)
$Y(t)$	Düzenli Alkol Tüketenler	4.178.640 (%6,9)	63.406 (%9,8)
$Z(t)$	Alkolü Bırakanlar	111.914 (%8,4)	19.021 (%8,4)

Türkiye'nin 2019 yılı nüfusu yaklaşık 83 milyon 18 yaş üstü 60 milyon 560 bin 75 dir.

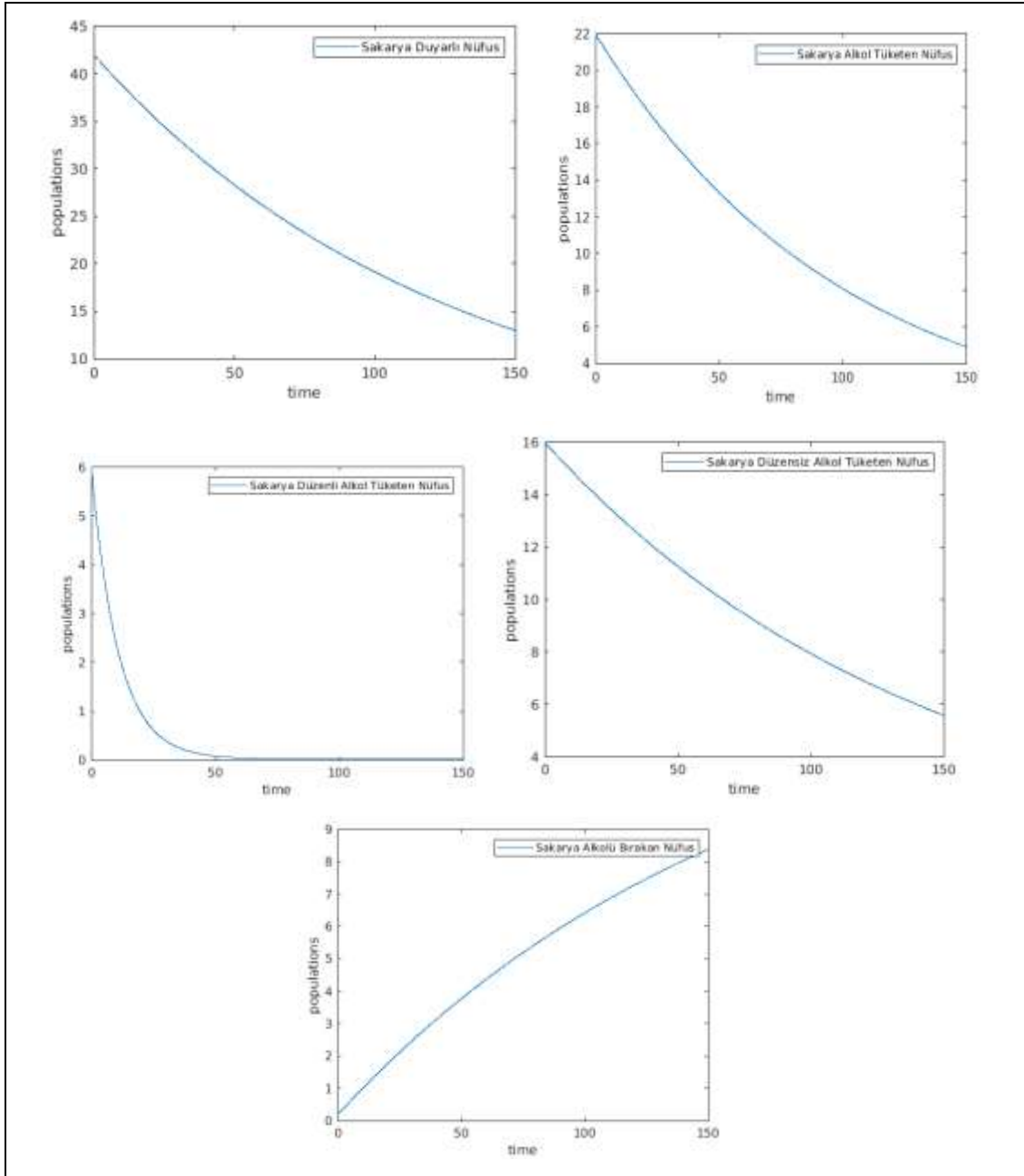
Sakarya'nın 2019 yılı nüfusu yaklaşık 1 milyon 45 bin 18 yaş üstü 647 bin dir( [saglik.gov.tr](http://saglik.gov.tr), 2018; [tuik.gov.tr](http://tuik.gov.tr) , 2018; [milliyet.com.tr](http://milliyet.com.tr), 2013; Demirci ve Eker, 2017).

Sistem (1) in Ek A'daki yaklaşık parametre ve sayısal verilere göre Türkiye Alkol Kullanım modelinin matlab simülasyonudur. 1/1.000.000 oranında ölçeklendirilmiştir.





Sistem (1) in Ek A'daki yaklaşık parametre ve sayısal verilere göre Sakarya Alkol Kullanım modelinin matlab simülasyonudur. 1/10.000 oranında ölçeklendirilmiştir.



**EK B:** Türkiye alkol kullanım modelinin runge-kutta dördüncü dereceden metoduyla matlab simülasyonu

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - \beta_1 X H_1 - \mu X + \alpha Y ; \beta_1 = a \quad \mu = b \text{ alındı.}$$

```

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem
% dx/dt = 0.022- ax- bx + 0.0002 %Türkiye Duyarlı
Nüfus
% Constants
a=0.0003;
b=0.005;
% Define function handles
fx = @(t, x) 0.022- a*x- 0.005*x + 0.0002;
% initial Conditions
t(1) = 0 ;
x(1) = 47;
% step size
h= 0.00001 ;
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution

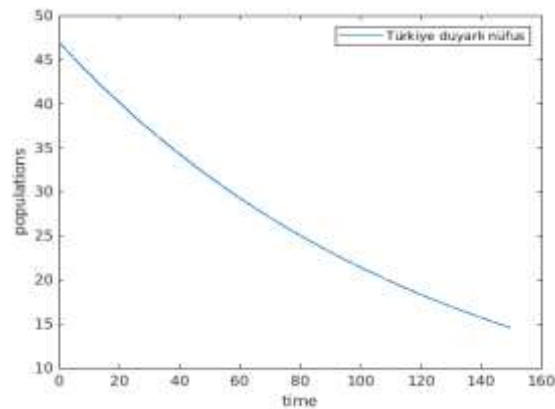
```

```
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Duyarlı Nüfus')
```

```
set(gca,'FontSize')
```

```
0×0 empty cell array
```

```
Published with MATLAB® R2021a
```



$$\frac{dH_1}{dt} = \beta_1 X H_1 - \beta_2 H_1 H_2 - (\rho + \mu) H_1 \quad \beta_1 = a, \beta_2 = b, H_1 = x \text{ alınmıştır.}$$

```
% Runge Kutta code to solve predator-prey problem
```

```
% dx/dt = ax-bx-0.008x %Türkiye Alkol Tüketen Nüfus
```

```
% Constants
```

```
a=0.0003;
```

```
b=0.0004;
```

```
% Define function handles
```

```
fx = @(t, x) a*x-0.0004*x-0.008*x ;
```

```
% initial Conditions
```

```
t(1) = 0 ;
```

```
x(1) = 13;
```

```
% step size
```

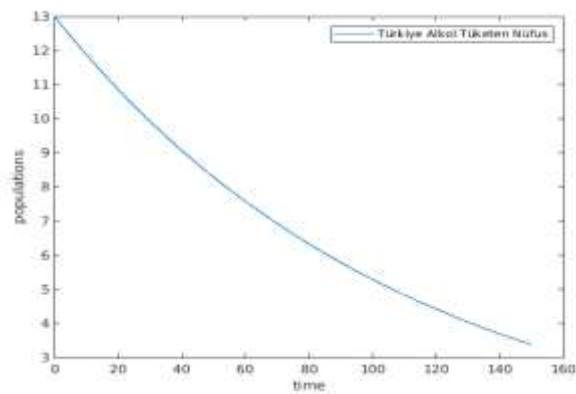
```
h= 0.00001 ;
```

```

tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Alkol Tüketen Nüfus')
set(gca,'FontSize')
0×0 empty cell array

```

Published with MATLAB® R2021a



$$\frac{dY}{dt} = \omega H_2 - (\alpha + \gamma + \mu)Y; \quad \omega = a, \quad -(\alpha + \gamma + \mu) = b, \quad Y = x \text{ olarak alınmıştır.}$$

Runge Kutta code to solve predator-prey problem

% dx/dt = a-bx %Türkiye Düzenli Alkol Tüketen Nüfus

% Constants

a=0.0002;

b=0.0912;

% Define function handles

fx = @(t, x) a-0.0912\*x ;

% initial Conditions

t(1) = 0 ;

x(1) = 4;

% step size

h= 0.00001 ;

tfinal= 150;

N = ceil(tfinal/h);

% update loop

for a=1:N

% update time

t(a+1)= t(a)+h;

% update x

k1x = fx(t(a) , x(a));

k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2\*k1x);

k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2\*k2x);

k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h \*k3x);

x(a+1)= x(a) + h/6 \* (k1x + 2\*k2x + 2\*k3x + k4x);

end

% plot the solution

figure (1); clf (1)

plot(t,x)

hold on

xlabel ('time')

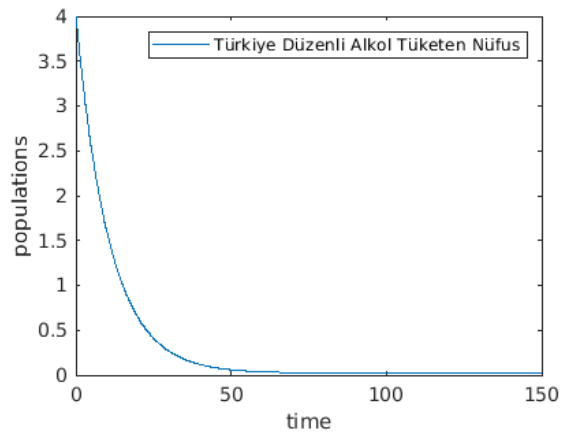
ylabel ('populations')

legend ('Türkiye Düzenli Alkol Tüketen Nüfus')

set(gca,'FontSize')

0×0 empty cell array

Published with MATLAB® R2021a



$\frac{dH_2}{dt} = \beta_1 H_1 H_2 - (d + \omega + \mu) H_2$  ;  $\beta_1 = a$  ,  $(d + \omega + \mu) = b$  ,  $H_2 = x$  olarak alınmıştır.

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem

% dx/dt = ax-bx %Türkiye Düzensiz Alkol Tüketen

Nüfus

% Constants

a=0.0003;

b=0.0082;

% Define function handles

fx = @(t, x) a\*x-0.0082\*x;

% initial Conditions

t(1) = 0 ;

x(1) = 9;

% step size

h= 0.00001 ;

tfinal= 150;

N = ceil(tfinal/h);

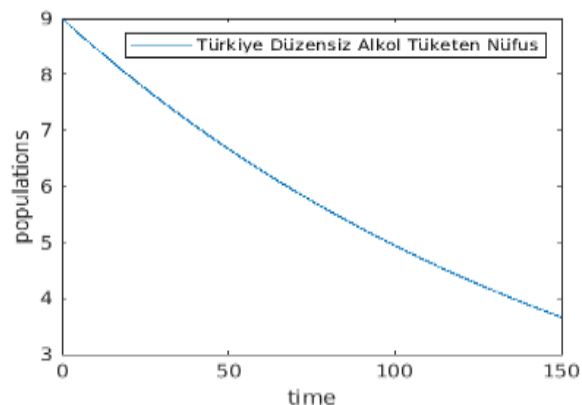
% update loop

```

for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Düzensiz Alkol Tüketen Nüfus')
set(gca,'FontSize')
0×0 empty cell array

```

Published with MATLAB® R2021a



$\frac{dZ}{dt} = \gamma Y - \mu Z$  ;  $\gamma=a$ ,  $\mu=b$ ,  $Z=x$  olarak alınmıştır.

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem

%  $dx/dt = a-bx$  %Türkiye Alkolü Bırakan Nüfus

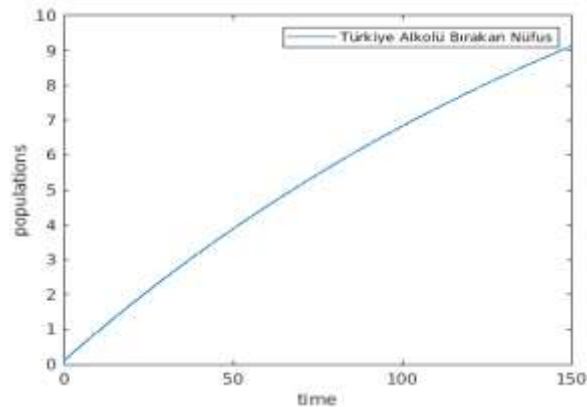
```

% Constants
a=0.086;
b=0.005;
% Define function handles
fx = @(t, x) a-0.005*x ;
% initial Conditions
t(1) = 0 ;
x(1) = 0.1;
% step size
h= 0.00001 ;
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Alkolü Bırakan Nüfus')
set(gca,'FontSize')
0×0 empty cell array

```



Published with MATLAB® R2021a



Ek 2. Sakarya alkol kullanım modelinin runge-kutta dördüncü dereceden metoduyla matlab simülasyonu

$$\frac{dX}{dt} = \lambda - \beta_1 X H_1 - \mu X + \alpha Y ; \beta_1 = a \quad \mu = b \text{ alındı.}$$

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem

% dx/dt = 0.018- ax- bx + 0.0002 %Sakarya Duyarlı

Nüfus

% Constants

a=0.0003;

b=0.006;

% Define function handles

fx = @(t, x) 0.018- a\*x- 0.005\*x + 0.002;

% initial Conditions

t(1) = 0 ;

x(1) = 42;

% step size

h= 0.00001 ;

tfinal= 150;

N = ceil(tfinal/h);

% update loop

for a=1:N

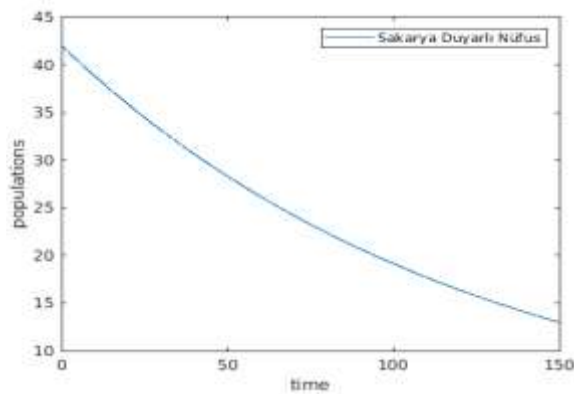
% update time

```

t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Sakarya Duyarlı Nüfus')
set(gca,'FontSize')
0×0 empty cell array

```

Published with MATLAB® R2021a



$$\frac{dH_1}{dt} = \beta_1 X H_1 - \beta_2 H_1 H_2 - (\rho + \mu) H_1 ; \beta_1 = a, \beta_2 = b, H_1 = x \text{ alınmıştır}$$

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem

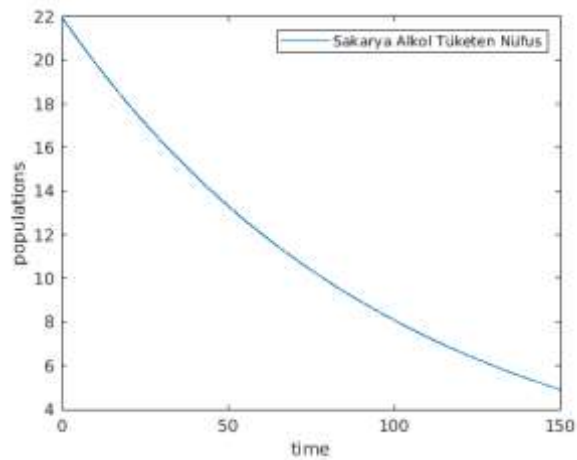
% dx/dt = ax-bx-0.008x %Sakarya Alkol Tüketen Nüfus

```

% Constants
a=0.0003;
b=0.0004;
% Define function handles
fx = @(t, x) a*x-0.004*x-0.009*x ;
% initial Conditions
t(1) = 0 ;
x(1) = 22;
% step size
h= 0.00001 ;
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Sakarya Alkol Tüketen Nüfus')
set(gca,'FontSize')
0×0 empty cell array

```

Published with MATLAB® R2021a



$$\frac{dY}{dt} = \omega H_2 - (\alpha + \gamma + \mu)Y ; \omega = a, -(\alpha + \gamma + \mu) = b, Y = x \text{ olarak alınmıştır.}$$

`% Runge Kutta code to solve predator-prey problem`

`% dx/dt = a-bx %Sakarya Düzenli Alkol Tüketen Nüfus`

`% Constants`

`a=0.0002;`

`b=0.0902;`

`% Define function handles`

`fx = @(t, x) a-0.0902*x ;`

`% initial Conditions`

`t(1) = 0 ;`

`x(1) = 6;`

`% step size`

`h= 0.00001 ;`

`tfinal= 150;`

`N = ceil(tfinal/h);`

`% update loop`

`for a=1:N`

`% update time`

`t(a+1)= t(a)+h;`

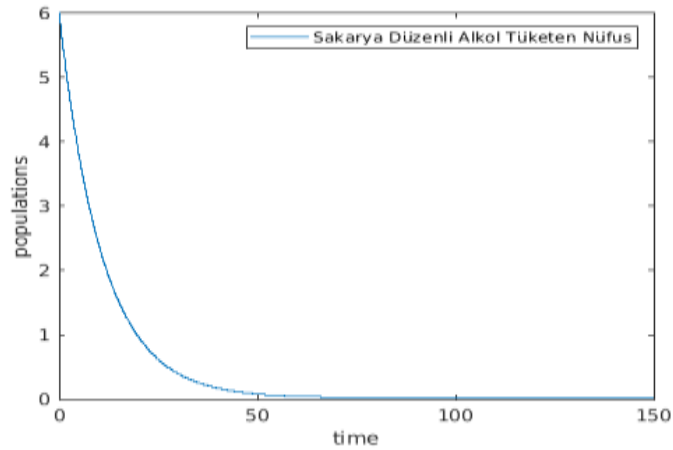
`% update x`

```

k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Sakarya Düzenli Alkol Tüketen Nüfus')
set(gca,'FontSize')
0×0 empty cell array

```

Published with MATLAB® R2021a



$\frac{dH_2}{dt} = \beta_1 H_1 H_2 - (d + \omega + \mu) H_2$  ;  $\beta_1 = a$  ,  $(d + \omega + \mu) = b$ ,  $H_2 = x$  olarak alınmıştır.

```

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem
% dx/dt = ax-bx %Sakarya Düzensiz Alkol Tüketen
Nüfus

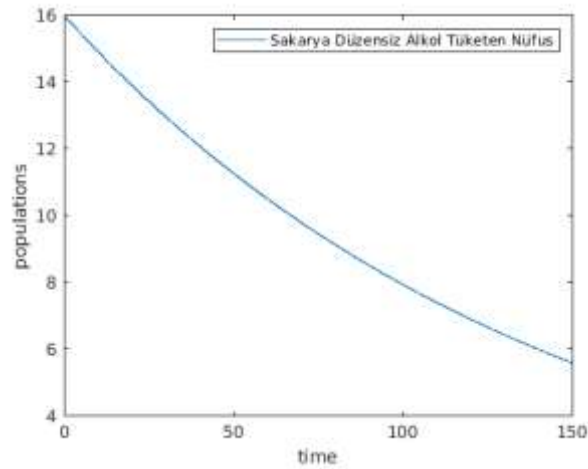
```

```

% Constants
a=0.0003;
b=0.0092;
% Define function handles
fx = @(t, x) a*x-0.0092*x;
% initial Conditions
t(1) = 0 ;
x(1) = 16;
% step size
h= 0.00001 ;
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Sakarya Düzensiz Alkol Tüketen Nüfus')
set(gca,'FontSize')
0×0 empty cell array

```

Published with MATLAB® R2021a



$\frac{dz}{dt} = \gamma Y - \mu Z$  ;  $\gamma=a$ ,  $\mu=b$ ,  $Z=x$  olarak alınmıştır.

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem

%  $dx/dt = a-bx$  %Sakarya Alkolü Bırakan Nüfus

% Constants

a=0.084;

b=0.006;

% Define function handles

fx = @(t, x) a-0.006\*x ;

% initial Conditions

t(1) = 0 ;

x(1) = 0.19;

% step size

h= 0.00001 ;

tfinal= 150;

N = ceil(tfinal/h);

% update loop

for a=1:N

% update time

t(a+1)= t(a)+h;

% update x

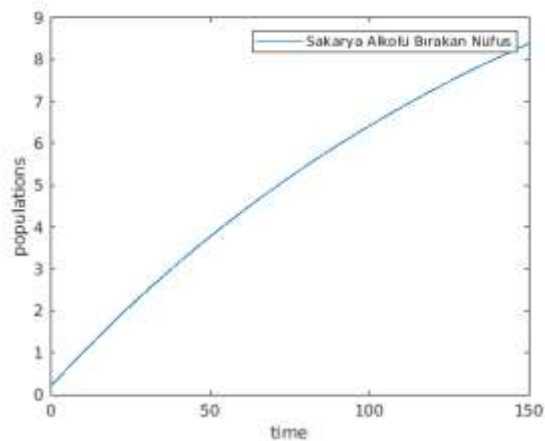
k1x = fx(t(a) , x(a));

```

k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Sakarya Alkolü Brakan Nüfus')
set(gca,'FontSize')
0×0 empty cell array

```

Published with MATLAB® R2021a





## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** :Recai TARAĞCI

### ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik Bölümü	2019
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Eğitim Fakültesi /Matematik Öğretmenliği	1992
Lise	Ordu Lisesi	1987

### İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer	Görev
2010-Halen	Sakarya Adapazarı Cevat Ayhan Fen lisesi	Öğretmen
2001-2010	Sakarya Arife Anadolu Öğretmen Lisesi	Öğretmen

### YABANCI DİL

Fransa  
İngilizce

### ESERLER (makale, bildiri, proje vb.)

1.Yok

### HOBİLER

Sinemaya Gitmek , Bilimsel Makale okumak , Yürüyüş ve Spor yapmak