T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÇİFT DEVİRLİ MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİNİN YERLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hande NEZİROĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Murat SARDUVAN**

Temmuz 2021

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÇİFT DEVİRLİ MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİNİN YERLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hande NEZİROĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**

Bu tez 29 / 07 / 2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

HANDE NEZİROĞLU

29 / 07 / 2021

TEŞEKKÜR

Lisans ve lisansüstü öğretimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, her türlü koşulda bana destek olan Sayın Doç. Dr. Murat SARDUVAN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Özellikle, tüm eğitimim ve öğrenimim süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babam Mestan NEZİROĞLU ve annem Ayşe NEZİROĞLU'na sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\det(A)$	: A matrisin determinantı
A^+	: A matrisinin Moore-Penrose tersi
$i_-(A)$	: A matrisinin özdeğerlerinin reel kısmı negatif olanların sayısı
$i_+(A)$	: A matrisinin özdeğerlerinin reel kısmı pozitif olanların sayısı
$i_0(A)$	: A matrisinin özdeğerlerinin reel kısmı sıfır olanların sayısı
$s(A)$	: A matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$M_n(F)$	: Elemanları F cisminin elemanı olan $n \times n$ boyutlu kare matrisler kümesi
■	: İspat sonu
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$DC(a,b)$	: Köşegen elemanları α ve diğer elemanları β geometrik ortalamalı çift devirli matrisler kümesi
$DC_-(a,b)$	: Negatif determinantlı, köşegen elemanları α ve diğer elemanları β geometrik ortalamalı negatif determinantlı çift devirli matrisler kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
I	: Uygun boyutlu birim matris
P	: (2.1) ile verilen permütasyon matrisi
$\operatorname{Re}(x)$	: x kompleks sayısının reel kısmı

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Z^{+} matris, çift devirli Z^{+} matris, M matris, özdeğerlerin yerleri, bir polinomun sıfırları

Bölüm 1'de, çalışmanın konusu ve kapsamı hakkında bazı bilgiler verilmiştir. Ayrıca, çift devirli Z^{+} matrislerinin ataları olan dairesel matrisler, Z^{+} matrisler ve M matrisler ile ilgili yapılan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir.

Bölüm 2'de, çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve sonuçlar verilmiştir.

Bölüm 3'te, $DC(\alpha,\beta)$ matrislerin özdeğerlerinin yeri ile ilgili literatürde mevcut olan sonuçlar tanıtılmış, Bölüm 4'te verilen sonuçlarla kıyaslama yapılabilmesi için bazı sonuçların ispatlarına değinilmiştir.

Bölüm 4'te, bir önceki bölümde hatırlatılan sonuçlardan esinlenerek ortaya konulmuş olan DCZ^{+} matrislerin özdeğerlerinin yerleri ile ilgili sonuçlar, matrislerin boyutları dört ve daha küçük olduğu durumda, verilmiştir.

Bölüm 5'te, literatürdeki sonuçlar ile bu çalışmada verilen sonuçların genel olarak karşılaştırması yapılmakta ve daha sonra neler yapılabileceği ile ilgili önerilerde bulunulmaktadır.

LOCATION OF EIGENVALUES OF SOME DOUBLE CYCLIC MATRICES

SUMMARY

Keywords: Double cyclic Z^{+} matrix, Z^{+} matrix, M matrix, location of eigenvalues, zeroes of polynomials

In Chapter 1, some information about the subject and scope of the study are given. In addition, some studies on Z^{+} matrices, M matrices and circular matrices which are the ancestors of double cycle matrices are mentioned.

In Chapter 2, some key definitions and conclusions that will be used throughout the study are given.

In Chapter 3, the results available in the literature on the location of the eigenvalues of matrices are introduced, and proofs of some results are also mentioned in order to make comparisons with the results given in Chapter 4.

In Chapter 4, the results regarding the locations of the eigenvalues of the matrices, inspired by the results recalled in the previous chapter, are given when the matrices have sizes 4×4 and smaller.

In Chapter 5, a general comparison of the results in the literature with the results given in this study is made and suggestions are made about what can be done in the next.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{+}$ ve $\mathbb{C}$ sembolleri, sırasıyla reel sayılar kümesini, pozitif reel sayılar kümesini ve kompleks sayılar kümesini göstermektedir. $M_n(F)$ ile elemanları F cisminin elemanları olan $n \times n$ boyutlu kare matrisler kümesi gösterilmektedir. $\det(A)$ ile bir A kare matrisinin determinantına işaret edilecektir. Bu çalışmada dairesel matrisler (bkz. Tanım 2.1.10) kümesinin özel bir alt kümesinin elemanı olan çift devirli Z^{+} matrislerin (bkz. Tanım 2.1.14), yani $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, için α_i, $\beta_i > 0$ olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & & \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ -\beta_n & 0 & & & & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

biçimindeki matrislerin özdeğerleri ile ilgilenilecektir. $\alpha = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)^{\frac{1}{n}}$ ve $\beta = (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n)^{\frac{1}{n}}$ olmak üzere (1.1) tipli matrisler kümesi $DC(a, b)$ ile gösterilecektir. Ayrıca, $DC(a, b)$ kümesindeki matrislerin negatif determinantlı olanlarının da kümesi $DC\_(a, b)$ ile gösterilecektir.

Çalışmadaki çift devirli Z^{+} matrisler ve onların genel hali olan dairesel matrisler literatürde yaygın bir şekilde çalışılmış ve birçok uygulamaya sahip olduğu görülmektedir. Şimdi bu matrisler ile ilgili bizim çalışmamıza motivasyon kaynağı olan bazı çalışmalardan bahsedilecektir.

1.1. Polinomlarda Dairesel Matrisler

Düşük dereceli polinom denklemlerini çözme işlemlerinde dördüncü dereceye kadar denklemlerin köklerini bulmak karmaşık fakat daha kolay iken dördüncü dereceden yüksek dereceli denklemlerin köklerini bulmak çoğu zaman imkansızdır. Yüksek dereceli denklemler için çözümlerle ilgili başarısız denemelerden sonra üçüncü ve dördüncü dereceden denklemler için olan metotların neden başarılı olduğunu açıklayan bir analizi 1770'te Lagrange yaptı. O zamandan bugüne kadar, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin çözümlerini aydınlatmaya yönelik çabalar devam etti (örneğin, [1]). Kalman ve White bu çalışmaları takip edip polinomların sıfır yerlerini daha akılda kalıcı ve daha kolay bir yöntemle bulmak için onların dairesel matrislerle ilişkilerini anlattılar. Şöyle ki; polinomların sıfır yerlerini bulma probleminin aslında dairesel matrislerin özdeğerlerini bulma problemine denk geldiğini görüp bunun üzerinde çalıştılar. Belirli bir polinomun katsayıları ile bir dairesel matris oluşturmakta ve bu polinomun sıfır yerleri, dairesel matrisin özdeğerleriyle çakışmaktadır. Bu yaklaşım üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerinin çözüm yöntemlerini belirlemede hatırlanması kolay güzel bir bütünlük sağlamaktadır. Ayrıca onlar matrisler ve polinomlar arasında bir ilişki de ortaya koymaktadır.

1.2. MDS Matrislerinde Dairesel Matrisler

Günümüzde bilgisayarlar ve benzeri teknolojiler hayatımızda haberleşme için oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Kriptoloji ise, bu noktada iletişimde bilginin güvenli ve tam olarak doğru bir biçimde karşı tarafa iletilmesini sağlayan alandır. Yunanca kryptós ve lógos kelimelerinden oluşan, kısaca gizli bilgi anlamına gelen kriptoloji, verilerin güvenle gizli bir şekilde iletimini, saklanmasını inceleyen bilim dalıdır [2]. Bu bilim dalı içinde iki alt bilim dalını daha barındırır, bunlar kriptografi ve kriptoanalizdir. Kriptografi bilginin gizliliğini sağlarken, kriptoanaliz ise kriptografik algoritmaların zayıflığını bulmayı hedeflemektedir. Bu hedefler doğrultusunda, şifreleme ve şifre çözme işlemleri için yapılan uygulamalar arasında kullanılan MDS (Maximum Distance Separable - Maksimum Uzaklıkla Ayrılabilen) matrislerin tasarımında da dairesel matrisler kullanılır. Yani dairesel matrisler bilgi güvenliği ve doğru, değiştirilmemiş bilginin iletimi için gerekli olan MDS'lerin oluşumu için etkili olmuştur.

1.3. Sayısal İşaret İşlemede Dairesel Matrisler

Dairesel matrislerin bir diğer kullanım alanları ise sayısal işaret işlemedir. Bu ise günümüzde işimizi kolaylaştıran birçok alanda önemli bir yapıdır. İşaret; fiziksel bir durum hakkında bilgi taşıyan değişken veya değişkenlere bağlı olan fonksiyona denir. Radyo dalgaları, konuşma buna örnek olarak gösterilebilir. İşaret üzerine herhangi bir işlem uygulayan cihaza ise sistem denir. İşaret bir sistemden geçirildiği zaman buna işaret işleme denilmektedir. Televizyon yayınlarındaki görüntülemede, otomotiv sektöründe (ABS, GPS gibi), radar ve sonar sistemlerinde hedefi belirlemede, tıp sektöründe (MR, EKG gibi) işaret işleme dolayısıyla dairesel matrisler kullanılmaktadır. Dairesel matrisler ayrıca sayısal işaret işlemenin önemli alanlarından olan Fourier dönüşümü ile olan ilişkilerinde de kullanılmıştır [3].

1.4. Graf Teorisinde Dairesel Matrisler

Dairesel matrislerin kullanıldığı bir başka uygulama ise graf teorisidir. Graf teorisinde grafik çizimleri yapılırken, bilgisayar programları verilen bir grafiğin algoritmalarla belirlenen uçlarının bir kenarla bağlandığını kaydeder. Uzaklık (veya maliyet) matrisleri kenarların uzaklıkları hakkında bilgi verir. Bu kavramlar birbirleri ile ilgili ve birbirlerinden geçiş yapan web sitelerine de uygulanabilmektedir. Dairesel matrislerin farklı tiplerinin rank ve determinantları üzerine çalışmalar yapılıp iki grafik arasındaki izomorfizmi belirlemek için de kullanılmıştır [4].

1.5. Literatür Bilgisi ve Çalışmanın İçeriği

Bu çalışmada üzerinde durulan dairesel matrisler ayrıca onların gelişmesine yardımcı olan Z matrisler (bkz. Tanım 2.1.13) ve M matrisler (bkz. Tanım 2.1.12) matematikte olduğu kadar gerek mühendislik gerekse tıp alanı dahil olmak üzere bir çok uygulamalı alanda kullanılmıştır.

Hershkowitz ve Schneider Z matrisler ve M matrislerin genelleştirilmiş sıfır uzayları üzerine çalışma yapmıştır. Bu çalışmalarında öncelikle bir M matrisin genelleştirilmiş sıfır uzayı için bir sonuç ortaya koymuş ve ispatlamışlardır. Daha sonra bu sonucu Z matrisler için genişletip genelleştirmişlerdir [5]. Yine Hershkowitz ve Schneider bu kez [6] çalışmalarında Z matris denklemlerinin çözümleriyle ilgilenmişlerdir [6]. Şöyle ki; A bir Z matris, b bir negatif olmayan vektör olduğu durumda $Ax = b$ matris denkleminin çözümlerinin varlığı ve doğasını araştırmışlardır.

Kalman ve White düşük dereceli polinomların sıfır yerlerinin dairesel matrisler kullanılarak nasıl bulunabileceğini gösterdi [7]. Daha açık söylemek gerekirse bir polinomun sıfır yerlerini bulma probleminin, ilişkili dairesel matrisin özdeğerlerini bulma problemlerine denk olduğunu göstermişlerdir.

Chandrashekaran ve arkadaşları çalışmalarında güçlü Z matris tanımı yapmışlar, ayrıca tersinir olan güçlü Z matrislerin bir takım özellikleri sağlayıp sağlamadığını belirlemenin bazı yollarını bulmuşlardır [8].

Jeffries ve arkadaşları, çalışmalarında 4×4 boyutlu negatif determinantlı çift devirli matrislerin bir alt kümesinin $(1,3,0)$ eylemsizliğine sahip olduğunu ispat etmişlerdir [9]. Bu ispat ettikleri sonucu bir küçük kanser hücresi modelini analiz etmede kullanmışlardır. Boyut daha büyük olduğunda elde edilebilecek sonuçların da daha büyük modellerin analizinde yararlı olabileceğini belirtilmişlerdir. Dolayısıyla, çift devirli matrislerin tıp ve biyoloji alanında önemini, yaptıkları bu çalışmayla göstermişlerdir.

Bendito ve arkadaşları simetrik ve tersinir olmayan bir Jacobi M matrisinin Moore-Penrose tersinin (bkz. Tanım 2.1.18) ne zaman aynı zamanda bir M matris olduğunu karakterize etme problemini ele almışlardır [10]. Bu problemin çözümünü kare matrislerin boyutu üç ve daha küçük olduğu durumda çözmüşler fakat boyutun dört ve daha yüksek olduğu durumda problemin çözümünün daha karmaşık bir hal aldığını görmüşlerdir. Çalışmalarının sonunda, matrislerin üzerine ekstra olarak üçgensellik koşulunu da ekleyip, herhangi n boyut için bir sonuç verebilmişlerdir.

Johnson ve arkadaşları $DC\_(\alpha,\beta)$ matrislerin sol yarı düzlemde olan özdeğerlerinin sayısını ele almıştır. Özellikle, $n \le 4$ veya $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) < \frac{\alpha}{\beta} < 1$ iken bu matrislerin sol yarı düzlemdeki özdeğerlerinin sayısı ile $\alpha\mathrm{I} - \beta P$ matrisinin özdeğerlerinin sayısının aynı olduğuna dikkat çektiler [11]. Hatta sonlu boyutlu genel durum için $a < b$ ise böyle matrislerin sol yarı düzlemdeki özdeğer sayısının özel bir aralıktaki tek tam sayı olabileceği konjektürünü verdiler. Bu aralık alttan 1 ile ve üstten $\alpha\mathrm{I} - \beta P$ matrisinin sol yarı düzlemdeki özdeğer sayısı ile sınırlıdır. Daha sonra bu konjektür [12]'de Baker ve Mityagin tarafından ispatlanmıştır. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Lu ve diğerleri Markov zincirleriyle alakalı Wiener-Hopf problemlerinin incelenmesinde ortaya çıkan tersinir M matrisli ikinci dereceden matris (yani, $E,F \in M_n(\mathbb{R})$ ve F bir tersinir M matris olmak üzere, $X^2 - EX - F = 0$) denkleminin sayısal çözümünü ele aldılar [13]. Bunu yaparken matris denklemini Riccati denklemine çevirip sabit nokta iterasyonu ile bu denklemi çözdüler.

Amster ve Idels çalışmalarında yüksek dereceli gecikmeli otonom olmayan modellerin parametrelerinden yararlanarak onların kararlılık analizlerinde M matrisleri kullanan bir algoritma tanımlamışlardır [14].

Brandts ve Cihangir çalışmalarında simetrik ters M matris problemini geometrik açıdan araştırmışlardır [15].

Fan ve Liu çift devirli matrisler üzerinde çalışma yapmış, bu matrisleri tanıtıp özelliklerini incelemişlerdir [16].

Guan çalışmasında M matrisli cebirsel Riccati denkleminin sayısal çözümünü ele almıştır. Bu denklemin minumum ve negatif olmayan çözümlerini hesaplamak için değiştirilmiş ve doğrusallaştırılmış kapalı bir iterasyon yöntemi ortaya koymuş ve bu yöntemin etkinliğini göstermiştir [17].

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar ve bazı teoremler verilmektedir.

2.1. Matrisler ve Lineer Denklem Sistemleri ile İlgili Bazı Temel Kavramlar ve Özellikler

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir kümenin her bir sıralı eleman ikilisine o kümenin bir elemanını karşılık tutan bir kurala, verilen küme üzerinde bir ikili işlem veya bir iç işlem denir. Başka bir şekilde söylenecek olursa, A boş olmayan bir küme olmak üzere, $A\times A$'dan A'ya bir $*$ fonksiyonuna A üzerinde bir ikili işlem denir [18].

Tanım 2.1.2. H bir küme $\circ$ ve $*$ H'da iki iç işlem olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(H,\circ,*)$ sistemine bir halka denir.

1) $(H,\circ)$ bir değişmeli gruptur.

2) $*$ işlemi asosyatiftir (birleşme özelliği).

3) Her $a,b,c\in H$ için $a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c)$ sol dağılma ve $(a\circ b)*c=(a*c)\circ(b*c)$ sağ dağılma özelliği geçerlidir [18].

Tanım 2.1.3. K birim elemanlı ve değişmeli bir halka, m ile n pozitif tamsayılar, $1\le i\le m$ ve $i\le j\le n$ için $a_{ij}\in K$ olsun. $m\times n$ tane a_{ij} elemanının oluşturduğu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right]_{m \times n} = \left[a_{ij} \right]$$

tablosuna $m \times n$ boyutlu bir A matrisi denir [18].

Tanım 2.1.4. K birim elemanlı, değişmeli bir halka ve A, K üzerinde $m \times n$ tipinde matris olsun. $A = \left[a_{ij} \right]$ matrisi için $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le m$ ve $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s \le n$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir matrise A matrisinin bir alt matrisi denir [18].

Tanım 2.1.5. Bir $m \times m$ boyutlu A matrisinin bir kare alt matrisinin determinantına A matrisinin bir minörü denir. Özel olarak i inci satır ve j yinci sütunun silinmesiyle elde edilen alt matrisin determinantına a_{ij} minörü denir [19].

Tanım 2.1.6. Bir A kare matris için a_{ij} minörü M_{ij} olmak üzere, A matrisinin a_{ij} kofaktörü (ya da işaretli minörü) $(-1)^{i+j} M_{ij}$ sayısı olarak tanımlanır [19].

Tanım 2.1.7. $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ alt kümesi k elemanlı bir küme ve $i, j \in J$ olmak üzere, $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin yalnızca J indis kümesindeki indis numaralı satır ve sütunlarından oluşan $k \times k$ boyutlu alt matris $A_J = \left[a_{ij} \right]$ olsun. $\det(A_J)$ sayısına A matrisinin esas minörü (principal minörü) denir. Eğer J indis kümesinin elemanları, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin ilk k adet elemanı, yani $\{1, 2, \ldots, k\}$ ise

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

sayısına A matrisinin bir başlıca esas minörü (leading principal minor) denir ve sabitlenmiş bir k değeri için bu sayı A^{k}_{LPM} ile gösterilecektir [19].

Tanım 2.1.8. Bir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi için kompleks özdeğerlerinin reel kısmı; pozitif olanların sayısı $i_+(A)$, negatif olanların sayısı $i_-(A)$ ve sıfır olanların sayısı $i_0(A)$ ile gösterilir. Bu üç sayı ile oluşan $i(A) = (i_+(A), i_-(A), i_0(A))$ sayı üçlüsüne A matrisinin eylemsizliği (inertia) denir. Burada bu sayılar belirlenirken özdeğerler katlı olduğunda katlılık sayısı da hesaba katılır [11].

Tanım 2.1.9. Bir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin tüm (i,i), $i = 1,2,\ldots,n$, ve tüm $(i,i+1)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, indisli elemanlarının bulunduğu köşegenlere, sırasıyla, A matrisinin esas köşegeni ve süper köşegeni denir. Eğer $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin esas köşegendeki ve süper köşegendeki elemanları ile $(n,1)$ indisli eleman haricindeki elemanları sıfır ise, diğer bir ifade ile $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere

$$a_{ij} = \begin{cases} k & , i = j \text{ veya } i+1 = j \text{ veya } (i,j) = (n,1) \\ 0 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

oluyorsa, A matrisine bir çift devirli matris veya kısaca DC matris denir [11].

Tanım 2.1.10. Bir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verildiğinde dairesel matris adını alır. Dikkat edilirse bu matriste herbir satır bir önceki satıra göre bir adım ötelenmiştir [20].

Tanım 2.1.11. Bir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısmı pozitif ise yani $i(A) = (n,0,0)$ ya da $i_+(A) = n$ ise matrise pozitif kararlı matris denir [21].

Tanım 2.1.12. $Z_n \subset M_n(\mathbb{C})$ kümesi,

$$Z_n = \left\{ A = \left[a_{ij}\right] \in M_n(\mathbb{C}) : a_{ij} \le 0; i \ne j; i, j = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer bir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi hem pozitif kararlı olur hem de $A \in Z_n$ koşulunu sağlanıyorsa bu matrise M matris denir [21].

Tanım 2.1.13. $A \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. Eğer $\forall i \ne j$ için $a_{ij} \le 0$ ise, bu matrise Z matris, eğer ek olarak $\forall\, i = j$ için $a_{ij} > 0$ ise, bu matrise Z^+ matris denir [11].

Tanım 2.1.14. Bir matris hem çift devirli hem de Z^+ matris ise ona çift devirli Z^+ matris veya kısaca DCZ^+ matris denir [11].

Teorem 2.1.15. Bir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi pozitif determinantlı $(\det(A) > 0)$ çift devirli Z^+ matris olsun. Bu durumda onun tüm başlıca esas minörleri pozitiftir [11].

İspat. $i = 1,2,\ldots,n$ için $a_i > 0$, $b_i \geq 0$ olsun. Ayrıca A, $k \times k$ boyutlu kare matris olsun. Teoremin hipotezinde A pozitif determinantlı, yani $A_{LPM}^{k} > 0$, kabul edildiği için $1 \leq s < k$ olmak üzere $A_{LPM}^{s} > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $k = 1$ için ispat açıktır.

$k = 2$ için, $A = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ olur. Bu durumda

$s = 1$ için $A_{LPM}^{1} = \det\left[a_1\right] = a_1 > 0$. Yani $k = 2$ için teorem doğrudur.

$k = 3$ için, $A = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$ olur. Bu durumda

$$A_{LPM}^{1} = \det\left[a_1\right] = a_1 > 0$$

$A_{LPM}^{2} = \det\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2$ olup a_1 ve a_2 pozitif olduğundan bu ifade de pozitiftir. Yani $k = 3$ için de teorem doğrudur.

$k = n$ ve $n > 3$ için

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -b_s \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_s \end{bmatrix}$$

olup $s \in \{3, 4, \ldots, n-1\}$ için $A_{LPM}^{s} = a_1 a_2 \ldots a_s$ olduğundan a_i 'ler pozitif olduğu dikkate alınırsa A_{LPM}^{s} 'nin pozitif olduğu görülür.

Yani $k = n$ için de teorem doğrudur. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır. ■

Sonuç 2.1.16. Yukardaki teorem gereği bir pozitif determinantlı DCZ^{+} matrisi pozitif kararlı olma koşulunu da sağlar. Dolayısıyla aynı zamanda böyle bir matris bir M matristir.

Tanım 2.1.17. $P \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. Eğer P matrisinin her satır ve sütununda yalnız ve yalnız bir eleman 1, diğer tüm elemanlar 0 ise, P matrisine bir permütasyon matrisi denir. Örneğin,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

matrisi bir permütasyon matrisi olur ve P'ye temel permütasyon matrisi denir. Bu çalışma boyunca P ile (2.1)'de verilen matris gösterilecektir [20].

Tanım 2.1.18. A bir $m \times n$ boyutlu kompleks matris olsun. Bu durumda, $AXA = A$, $XAX = X$ $(AX)^H = AX$, $(XA)^H = XA$ denklemlerini sağlayan bir tek $n \times m$ boyutlu kompleks X matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi denir ve A^{+} ile gösterilir. Burada $(.)^H$, kompleks bir matrisin eşlenik transpozunu göstermektedir [22].

Tanım 2.1.19. A bir $m \times n$ matris olsun.

$$S(A) = \{y : Ay = 0; y,\ n \times 1 \text{ boyutlu kompleks vektör}\}$$

kümesine A matrisinin sıfır uzayı denir [20].

Tanım 2.1.20. $A \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. Eğer bir λ skaleri ve bir sıfırdan farklı $n \times 1$ boyutlu kompleks x vektörü

$$Ax = \lambda x$$

denklemini sağlarsa λ skalerine A matrisinin bir özdeğeri ve x vektörüne de A matrisinin λ özdeğeri ile ilişkili bir özvektörü denir [20].

Tanım 2.1.21. Bir $A \in M_n(\mathrm{C})$ matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi, A matrisinin spektrumu olarak adlandırılır ve $\sigma(A)$ ile gösterilir [20].

Tanım 2.1.22. Bir $A \in M_n(\mathrm{C})$ matrisinin karakteristik polinomu, $\det(\lambda \mathrm{I} - A)$ şeklinde tanımlanır. $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$ denklemine ise $A \in M_n(\mathrm{C})$ matrisinin karakteristik denklemi denir [20].

Tanım 2.1.23. $A, B \in M_n(\mathrm{C})$ matrisleri verilsin. Bir $S \in M_n(\mathrm{C})$ tersinir matrisi için $B = S^{-1}AS$ eşitliği sağlanıyorsa, B matrisi A matrisine benzerdir denir [20].

Teorem 2.1.24. $A, B \in M_n(\mathrm{C})$ matrisleri verilsin. Eğer bu matrisler benzer ise $\sigma(A) = \sigma(B)$ 'dir [20].

BÖLÜM 3. ÇİFT DEVİRLİ MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİNİN YERLERİ İLE İLGİLİ MEVCUT SONUÇLAR

Bu bölümde, çift devirli matrislerin özdeğerlerinin yerleriyle ilgili literatürdeki sonuçlar hatırlatılacaktır. Bu hatırlatmanın amacı Bölüm 4'te elde edilen sonuçlar ile literatürde mevcut olan sonuçların kıyaslamasını yapabilmektir. Öncelikle [9] çalışmasında mevcut olan bir sonuç ile [11] çalışmasında mevcut olan bir sonuç ve bir konjektür hatırlatılacak daha sonra konjektürün ve daha gelişmiş halinin ispatını veren [12]'deki çalışmaların sunumu ile devam edilecektir.

3.1. $DC\_(a,b)$ Kümesinin Elemanı Olan Bir Matrisin Eylemsizliği

(3.1) biçimli matrisin negatif transpozu olan matris bir küçük kanser hücresi modellerini analiz etmede kritik bir şekilde [9] çalışmasında kullanılmıştır. Bu kullanımı yapabilmek için Jeffries ve diğerleri [9] çalışmasında bir sonuç ortaya koydular. Bu sonuç aşağıdadır.

Teorem 3.1.1.

$$F = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 2R_4 \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

olsun. Pozitif R_1, R_2, R_3, R_4 değerlerinin seçiminden bağımsız olarak $\frac{dX}{dt} = FX$ 'in tüm pozitif başlangıç değerli yörüngeleri, bileşenleri sabit oranlarda olan üstel olarak artan bir yörüngeye asimtotik olarak yaklaşır [9].

Sonuç 3.1.2. Teorem 3.1.1'de verilen sonuç ve onun [9] çalışmasında verilen ispatı inceleniğinde (3.1)'deki matrisin eylemsizliğinin $i(F) = (1,3,0)$ olduğu görülür [11].

Aşağıdaki DCZ^{+} matrisini ele alalım

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ -\beta_n & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Burada $j = 1,2,\ldots,n$ için $\alpha_j, \beta_j > 0$ olduğu Tanım 2.1.12'den açıktır. Bu matrisin determinantı ve elemanlarının geometrik ortalamalarıyla alakalı aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.1.3. (3.2) ile verilen A matrisi için $\det A = \left(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\right) - \left(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\right)$'dır. $A \in DC\left(\alpha,\beta\right)$'nin negatif determinantlı olması için gerek yeter şart $\alpha < \beta$ olmasıdır. Burada

$$a = \left(a_1 \ldots a_n\right)^{1/n}, \; b = \left(b_1 \ldots b_n\right)^{1/n} \tag{3.3}$$

dır.

İspat.

$$\det\left(A\right) = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ -\beta_n & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$
=\alpha_1 \det\begin{bmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} + (-\beta_n)(-1)^{n+1} \det\begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -\beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}
$$

$$
=\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n + (-1)^{n+1}(-1)^n \beta_1\beta_2\dots\beta_n
$$

$$
=\prod_{k=1}^{n}\alpha_k - \prod_{k=1}^{n}\beta_k
$$

olur. O halde $\det(A)=\alpha^n-\beta^n$ şeklinde de yazılabilir. ■

Burada ve çalışmanın bu bölümünün bundan sonraki kısmında a ve b, (3.3) eşitliğinde verildiği gibidir.

Şimdi,

$$
C=\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} & -\beta \\ -\beta & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \tag{3.4}
$$

matrisi tanımlansın (3.2) ve (3.4) matrislerinin özdeğerleri ile ilgili olarak aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.1.4. (3.2) ve (3.4)'de verilen matrislerinin spekturumları aynıdır.

İspat. İspat aşağıdaki hesaplamadan direkt olarak görülür.

$$\det(A-\lambda \mathrm{I}) = \det\begin{bmatrix} \alpha_1-\lambda & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2-\lambda & -\beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1}-\lambda & -\beta_{n-1} \\ -\beta_n & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_1-\lambda)\det\begin{bmatrix} \alpha_2-\lambda & -\beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\beta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+(-\beta_n)(-1)^{n+1}\det\begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2-\lambda & -\beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{n-1}-\lambda & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)\dots(\alpha_n-\lambda)+(-\beta_n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1})$$

$$= \prod_{s=1}^{n}(\alpha_s-\lambda)-\beta^n$$

$$= (\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)\dots(\alpha_n-\lambda)+(-\beta)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\beta^{n-1}$$

$$= (\alpha_1-\lambda)\det\begin{bmatrix} \alpha_2-\lambda & -\beta & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3-\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & -\beta \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+(-\beta)(-1)^{n+1}\det\begin{bmatrix} -\beta & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2-\lambda & -\beta & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_{n-1}-\lambda & -\beta \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \alpha_1-\lambda & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2-\lambda & -\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1}-\lambda & -\beta \\ -\beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \det(C-\lambda \mathrm{I})$$ ■

Dolayısıyla buradan (3.2) ve (3.4) biçimli matrislerinin özdeğerlerinin aynı olduğu görülür. Yukarıdaki lemmaları kullanarak ve (3.2) biçimli bir matrisin pür imajiner özdeğerlerinin mevcut olamayacağını göstermek sureti ile [11] çalışmasında verilen aşağıdaki sonuç ispatlanmıştır. Bu sonucun ispatı burada verilmeyecektir. Bölüm 4'te ortaya koyduğumuz sonuçların ispatında da bu mantık kullanılacaktır.

Teorem 3.1.5. $\alpha,\beta > 0$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $i_{-}(\alpha \mathrm{I} - \beta P) = 1$

(2) $\cos(2\pi / n) < \alpha / \beta < 1$,

(3) Her $A \in DC(\alpha,\beta)$ için $i_{-}(A) = 1$'dir [11].

Teorem 3.1.5'ten esas olarak şu sonuç çıkarılabilir. Belli bir takım $\frac{a}{b}$ oranları için $A \in DC_{-}(\alpha,\beta)$ matrisinin eylemsizliği $\alpha \mathrm{I} - \beta P$ matrisininki ile tam olarak belirlenebilir. Bu durum aslında A matrisinin M matris olması durumunda da yani $\frac{a}{b} > 1$ olması durumunda da doğrudur. Johnson ve diğerleri, [11] çalışmasında bazı sabitlenmiş $\frac{a}{b}$ oranlarına bağlı olarak $DC_{-}(\alpha,\beta)$ kümesindeki matrislerin eylemsizlikleri ile ilgili MATLAB paket programı kullanarak bazı gözlemler yaptılar ve aşağıdaki konjektürü verdiler.

Konjektür 3.1.6. $A \in DC_{-}(\alpha,\beta)$ olması $i_{-}(A) \le i_{-}(\alpha \mathrm{I} - \beta P)$ olmasını sağlar. Ayrıca, $i_{-}(\alpha \mathrm{I} - \beta P)$ ve $i_{-}(A)$ tek sayıdır [11].

Konjektürdeki $i_{-}(\alpha \mathrm{I} - \beta P)$ ve $i_{-}(A)$'nın tek sayı olduğu iddası zaten açıktır. Çünkü hem $\alpha \mathrm{I} - \beta P$ hem de A matrislerinin determinantlarının ikisi de negatiftir ve bu matrisler reel matrisler olduğunda herhangi bir kompleks özdeğer eşleniği ile birlikte var olmak zorunda olduğundan $i_{-}(A)$ ve $i_{-}(a\mathrm{I}- bP)$ tek sayıdır.

Ayrıca, Johnson ve diğerleri rastgele matrislerle yaptıkları denemelerde $A \in DC_{-}(a,b)$ iken $i_{-}(A)$ sayısının $i_{-}(a\mathrm{I}- bP)$ sayısından küçük veya eşit olan herhangi bir tek sayı olarak hesaplandığını, bununla birlikte $i_{-}(a\mathrm{I}- bP)$'den farklı eylemsizliklerin daha az sıklıkla görüldüğünü gözlemlediler.

Yukarıda verilen konjektüre $n = 20$ için $10\,000\,000$ adet sabitlenmiş a/b oranlı $i_{-}(a\mathrm{I}- bP) = 7$ olan rasgele elemanlı matrisler üzerinde hesaplama yaparak ulaştılar. $i_{-}(A)$'nın meydana gelen değerlerini aşağıdaki gibi elde ettiler.

$i_{-}(A)$	Sıklık (oran olarak)
> 9	0
7	0.662806
5	0.33547
3	0.001222
1	0.000002

Dolayısıyla, tüm negatif eylemsizliklerin konjektürlerindeki üst sınırdan daha küçük eşit olduğunu ve her birinin tek sayı olduğunu gözlemlemişlerdir.

3.2. $DC(a,b)$ Kümesinin Elemanı Olan Bir Matrisin Eylemsizliği

Barker ve Mityagin Konjektür 3.1.6'yı aşağıdaki gibi yeniden ifade ederek ispatını ortaya koymuştur.

Teorem 3.2.1. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$ olsun. $A \in DC(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda A'nın negatif reel kısımlı özdeğerlerinin sayısı $\alpha\mathrm{I} - \beta P$ matrisinin negatif reel kısmlı özdeğerlerinin sayısını geçemez ve $A=\alpha\mathrm{I}-\beta P\in DC(\alpha,\beta)$ olarak almak $DC(\alpha,\beta)$ kümesindeki tüm matrislerin negatif reel kısımlı en büyük özdeğer sayısını elde etmeyi sağlar [12].

Bu kısımda bu teoremin [12]'de verilen ispatı ana hatları ile anlatılmaya çalışılacaktır. Bunun için önce

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\beta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\beta_1}\cdot\frac{\beta}{\beta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\beta}{\beta_k} \end{bmatrix}$$

matrisi ele alınsın. Bu durumda,

$$Q^{-1}AQ$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{\beta} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\beta_k}{\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\beta_{n-1} \\ -\beta_n & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{\beta} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\beta}{\beta_k} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2\beta_1}{\beta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_3\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ (-\beta_n)\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\beta_k}{\beta} & 0 & \dots & 0 & \alpha_n\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\beta_k}{\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\beta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\beta_1}\cdot\frac{\beta}{\beta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\beta}{b_k} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1\dfrac{\beta}{\beta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha_2\beta_1\beta}{\beta\beta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\alpha_3\beta_1\beta_2\beta\beta}{\beta_1\beta_2\beta^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \prod_{k=1}^{n}\dfrac{\beta_k}{\beta} & 0 & \dots & 0 & \alpha_n\prod_{k=1}^{n-1}\dfrac{\beta_k}{\beta}\prod_{k=1}^{n-1}\dfrac{\beta}{\beta_k} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\beta & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \alpha_{n-1} & -\beta \\ -\beta & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$=\beta\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_1}{\beta} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha_2}{\beta} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{\alpha_{n-1}}{\beta} & -1 \\ -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan matris eşitliği için kısalık olsun diye $c_k=\dfrac{\alpha_k}{\beta},\ 1\le k\le n$

ve

$$B=\begin{bmatrix} c_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & c_{n-1} & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & c_n \end{bmatrix}$$

gösterimleri kullanılırsa, $Q^{-1}AQ = bB$ yazılabilir. Dolayısıyla Teorem 2.1.24 gereği A ve βB matrislerinin spektrumları aynıdır. Burada $\beta > 0$ çarpanı spektrumu yeniden ölçeklendirir fakat, spektrumdaki noktaların reel kısımlarının işaretlerini değiştirmez. Dolayısıyla A ile B matrisinin özdeğerlerinin reel kısımları aynı işaretlidir. O halde A matrisinin eylemsizliğini bulmak yerine B matrisinin eylemsizliği araştırılabilir. n parametreli $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \left(\square^{+}\right)^n$ vektörlerünü ele alalım onun elemanlarının ortalaması

$$\gamma = \left(\prod_{k=1}^{n} c_k \right)^{1/n} = \left(\frac{\prod_{k=1}^{n} \alpha_k}{\beta^n} \right)^{1/n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

olur. Şimdi B matrisinin özdeğerlerini inceleyelim.

$$\det(B - \lambda I) = (c_1 - \lambda)\det\begin{bmatrix} c_2 - \lambda & -1 & \ldots & 0 \\ & c_3 - \lambda & -1 & \\ 0 & \ldots & c_{n-1} - \lambda & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & c_n - \lambda \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot \det\begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (c_k - \lambda) + (-1)^n (-1)^{n-1}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (c_k - \lambda) - 1$$

bulunur. İspatın geri kalanı için kolaylık sağlamak amacıyla $-\lambda$ yerine z alınsın. Böylece, $P(z) = \prod_{k=1}^{n} (c_k + z)$ olmak üzere problem

$$P(z) = 1 \tag{3.5}$$

cebirsel denkleminin köklerini analiz etmeye döner. Şimdi

$$E^- = \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\xi) < 0\},\ E^0 = \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\xi) = 0\},$$
$$E^+ = \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\xi) > 0\},\ E = \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\xi) \geq 0\} \tag{3.6}$$

kümeleri tanımlansın.

$v_-(c),\ v_0(c),\ v_+(c),\ \bar{v}(c)$ sayıları ise sırasıyla (3.5)'in $E^-,\ E^0, E^+, E$ kümelerindeki çözümlerin sayısını göstersin.

Eğer önceki yapıda $A = \alpha \mathrm{I} - \beta P$ yani,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & \alpha & -\beta \\ -\beta & 0 & \ldots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa bu durumda $B = \gamma \mathrm{I} - P$ olur ve B matrisinin karakteristik polinomu,

$$\det(B - \lambda \mathrm{I}) = \det(z\mathrm{I} + B) = \det(z\mathrm{I} + \gamma \mathrm{I} - P)$$

$$= \det((z+\gamma)\mathrm{I} - P) = \det \begin{bmatrix} z+\gamma & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z+\gamma & & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & z+\gamma \end{bmatrix}$$

$$= (z+\gamma)^n + (-1)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = (\gamma + z)^n - 1$$

olur. $c^* = (\gamma, \gamma, \ldots, \gamma)$ şeklinde tanımlarsak cebirsel denklem, $P^*(z) = (\gamma + z)^n$ olmak üzere,

$$P^*(z) = 1 \tag{3.7}$$

halini alır. $P^*(z) = (z+\gamma)^n = 1$ ifadesinden $z + \gamma = \sqrt[n]{1} = \omega^k,\ 0 \le k < n$ yazılabilir. Böylece, $z = \omega^k - \gamma$ olur. Burada, $\omega^k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$'dir. O halde (3.7)'nin çözüm kümesi $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ olmak üzere $\{-\gamma + \omega^k : 0 \le k < n\}$ şeklinde yazılır ve böylece $\gamma > 0$ için,

$$\left\{k : 0 \le k < n : \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) > \gamma\right\} \tag{3.8}$$

ve

$$\left\{k : 0 \le k < n : \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \ge \gamma\right\} \tag{3.9}$$

yazılabilir. Burada (3.8) ve (3.9) kümelerinin eleman sayıları sırasıyla $v_+(c^*)$ ve $v_-(c^*)$ ile gösterilsin. Biz (3.5) ve (3.7) cebirsel denklemlerinin pozitif reel kısımlı köklerinin sayısıyla ilgilendiğimizde Teorem 3.2.1'i aşağıdaki teoremlere indirgeyebiliriz.

Teorem 3.2.2. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ ise bu durumda

$$v_+(c) \le v_+(c^*) \tag{3.10}$$

$$\bar{v}(c) \leq \bar{v}(c^*) \tag{3.11}$$

olur.

Teorem 3.2.3. $n \in \mathbb{N}$ ve $\gamma \in \mathbb{R}^+$ olsun. γ geometrik ortalamalı $c \in (\mathbb{R}^+)^n$ kümesi için

$$v_+(c) = \begin{cases} \{0\}, \ \gamma \geq 1 \\ \{2k+1\}, \ \gamma < 1 \text{ ve } k \in \{0,1,\ldots,s\} \end{cases}$$

olur. Benzer şekilde

$$\bar{v}(c) = \begin{cases} \{0\}, \ \ \gamma > 1 \\ \{1\}, \ \ \gamma = 1 \\ \{2r+1\}, \ \gamma < 1 \ ve \ r \in \{0,1,\ldots,t\} \end{cases}$$

dir. Burada $s,t \in \mathbb{N}$ 'dir.

Teorem 3.2.4. $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

a) Eğer $\alpha > \beta$ ise, kapalı sol yarı düzlemde bir özdeğeri olan $A \in DC(\alpha, \beta)$ yoktur.

b) Eğer $\alpha = \beta$ ise, her $A \in DC(\alpha, \beta)$ için kapalı sol yarı düzlemdeki tek özdeğer 0'dır.

c) Eğer $\alpha < \beta$ ise, $A \in DC(\alpha, \beta)$ 'nin açık sol yarı düzlemde tek sayıda özdeğeri vardır ancak bu $\alpha \mathrm{I} - \beta P$ 'nin özdeğerlerinin sayısından fazla değildir. Ayrıca, böyle her tek k sayısı için, en az bir $A \in DC(\alpha, \beta)$ açık sol yarı düzlemde tam olarak k tane özdeğere sahiptir. Benzer durum kapalı sol yarı düzlem için de geçerlidir.

[12] çalışmasındaki geri kalan kısımlar Teorem 3.2.1'i dolayısıyla Teorem 3.2.2, Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4'ü ispatlanmaya ayrılmıştır. Fakat ispat yöntemleri Bölüm 4'te bizim ortaya koyduğumuz sonuçlara katkı sağlamayacağı için burada hatırlatılmayacaktır.

BÖLÜM 4. ÇİFT DEVİRLİ MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİNİN YERLERİ $(n \leq 4)$

4.1. Giriş

Bu bölümde $n \leq 4$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere negatif determinantlı $n \times n$ boyutlu çift devirli Z^+ matrislerin özdeğerlerinin yerlerini belirleyen sonuçlar ortaya konulacaktır. Bunu yaparken

$$B = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_3 \\ -2R_4 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix}$$

matrisi ele alınacaktır.

Normalde B matrisinde bulunan esas köşegen ve esas köşegen haricindeki elemanların birbirine paralel olması gerekmez. Bununla birlikte yukarıdaki matriste olduğu gibi elemanların birbirine paralel oluşu ve $(n,1)$ indisli elemanın önündeki katsayı sayesinde bu matrisin determinantının negatif oluşu garanti edilmiştir.

Şimdi ana sonuçlardan önce onları ispatlarken gerekli olan bazı teorem ve lemmalar ortaya konulacaktır.

Teorem 4.1.1 (Gersgorin Teoremi). $B = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. $i = 1,2,\ldots,n$ için

$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$ diskleri tanımlansın. Bu durumda

(1) B matrisinin tüm özdeğerleri $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ birleşim kümesinde bulunur.

(2) Eğer $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ kümesi k tane ayrık bağlantılı $E_1, \ldots, E_k$ bölgelerinin birleşimi ve $D_1, \ldots, D_n$ disklerinin m_r tanesinin birleşimi E_r bölgesi ise, bu durumda E_r bölgesi B matrisinin tam olarak m_r tane özdeğerini içerir. Burada $1 \le r \le k$ için $r \le n$'dir [23].

Lemma 4.1.2. $R_1, R_2, R_3, R_4 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_3 \\ -2R_4 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Teorem 4.1.1'den dolayı,

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_1| \le R_1\},\ D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_2| \le R_2\},$$

$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_3| \le R_3\},\ D_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_4| \le 2R_4\}$$

olur. Bu durumda B matrisinin tüm özdeğerleri $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ kümesinde bulunur.

Lemma 4.1.3. $R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 \\ -2R_3 & 0 & R_3 \end{bmatrix}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Teorem 4.1.1'den dolayı

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_1| \le R_1\},\ D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_2| \le R_2\},\ D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_3| \le 2R_3\}$$

olur. Bu durumda B matrisinin tüm özdeğerleri $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ kümesinde bulunur.

Lemma 4.1.4. $R_1,\ R_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -2R_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Teorem 4.1.1'den dolayı

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_1| \le R_1\}\ D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R_2| \le 2R_2\}$$

olur. Bu durumda B matrisinin tüm özdeğerleri $D = D_1 \cup D_2$ kümesinde bulunur.

Lemma 4.1.5. Bir matrisin özdeğerleri, karakteristik polinomun kökleridir ve bu kökler matris katsayılarının sürekli fonksiyonlarıdır [23].

4.2. Ana Sonuçlar

Yukarıda verilen lemmalar kullanılarak çift devirli Z^+ matrislerin özdeğerlerinin yerleri için oluşturulan esas sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.2.1. $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_3 \\ -2R_4 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Bu durumda $i(A) = (3,1,0)$'dır.

İspat. B matrisinin determinantı,

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_3 \\ -2R_4 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix}$$

$$= (R_1)\det \begin{bmatrix} R_2 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_3 & -R_3 \\ 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} - (-2R_4)\det \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 \\ R_2 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_3 & -R_3 \end{bmatrix}$$

$$= R_1R_2R_3R_4 - 2R_1R_2R_3R_4 = -R_1R_2R_3R_4 \tag{4.2}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, Böylece B matrisinin karakteristik polinomu

$$\det\left(B-x\mathrm{I}\right)=\det\begin{bmatrix} R_1-x & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2-x & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3-x & -R_3 \\ -2R_4 & 0 & 0 & R_4-x \end{bmatrix}$$

$$=\left(R_1-x\right)\det\begin{bmatrix} R_2-x & -R_2 & 0 \\ 0 & R_3-x & -R_3 \\ 0 & 0 & R_4-x \end{bmatrix}+2R_4\det\begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 \\ R_2-x & -R_2 & 0 \\ 0 & R_3-x & -R_3 \end{bmatrix}$$

$$=\left(R_1-x\right)\left(R_2-x\right)\left(R_3-x\right)\left(R_4-x\right)-2R_1R_2R_3R_4$$

$$=\left(R_1R_2-R_1x-R_2x+x^2\right)\left(R_3R_4-R_3x-R_4x+x^2\right)-2R_1R_2R_3R_4$$

$$=R_1R_2R_3R_4-R_1R_2R_3x-R_1R_2R_4x+R_1R_2x^2-R_1R_3R_4x+R_1R_3x^2$$

$$+R_1R_4x^2-R_1x^3-R_2R_3R_4x+R_2R_3x^2+R_2R_4x^2-R_2x^3+R_3R_4x^2-R_3x^3$$

$$-R_4x^3+x^4-2R_1R_2R_3R_4$$

$$=x^4+x^3\left(-R_1-R_2-R_3-R_4\right)+x^2\left(R_3R_4+R_2R_4+R_2R_3+R_1R_4+R_1R_3+R_1R_2\right)$$

$$+x\left(-R_1R_2R_3-R_1R_2R_4-R_1R_3R_4-R_2R_3R_4\right)-R_1R_2R_3R_4 \tag{4.3}$$

şeklinde elde edilir. B matrisinin özdeğerlerinin eylemsizliğini belirlemek için, özdeğerlerin alabileceği değerlere göre olası tüm durumlar üzerinden aşağıdaki gibi inceleme yapılabilir.

1) Özdeğerlerin herhangi biri sıfır olsun. Bu durumda B matrisin özdeğerlerinin çarpımı, dolayısıyla determinantı $'0'$olur. Oysaki (4.2)'den $\det\left(B\right)<0$ olduğunu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin hiçbiri sıfır olamaz.

2) Tüm özdeğerlerin hepsi pür imajiner olsun. Bu durumda $a,\, b\in\mathbb{R}-\{0\}$ ve $x_1=ai,\ x_2=-ai,\ x_3=bi,\ x_4=-bi$ için, $\det\left(B\right)=a^2b^2>0$ olur. Oysa ki (4.2)'den $\det\left(B\right)<0$ olduğunu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde tüm özdeğerler pür imajiner olamaz.

3) Özdeğerlerin iki tanesi pür imajiner iki tanesi pür kompleks olsun. Bu durumda $a,\ b,\ c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x_1 = a + ib$, $x_2 = a - ib$, $x_3 = ic$, $x_4 = -ic$ için, $\det(B) = (a^2 + b^2)c^2 > 0$ olur. Oysaki (4.2)'den $\det(B) < 0$ olduğunu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin iki tanesi pür imajiner iki tanesi pür kompleks olamaz.

4) Özdeğerlerin iki tanesi pür imajiner, iki tanesi pür reel olsun. Bu durumda $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} - \{0\}$, $x_1 = ai,\ x_2 = -ai,\ x_3 = b,\ x_4 = c$ için $\det(B) = a^2bc$ olur. Dolayısıyla (4.2)'den b ve c zıt işaretli olmalıdır. O halde genelliği bozmaksızın $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}^+$ için, özdeğerler $a = 1$ iken, $x_1 = i,\ x_2 = -i,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = -\mu$ olarak alınabilir. Bu durumda karakteristik polinom,

$$\begin{aligned} P(B) &= (x-\lambda)(x+\mu)(x-i)(x+i) \\ &= (x^2 + \mu x - \lambda x - \lambda\mu)(x^2 + xi - xi - i^2) \\ &= x^4 + x^3(-\lambda+\mu) + x^2(1-\lambda\mu) + x(-\lambda+\mu) - \lambda\mu \end{aligned} \tag{4.4}$$

olur. (4.3) ve (4.4) ifadelerinin her ikisi de B matrisinin karakteristik polinomu olduklarından eşit olmalıdır. Buradan, sırasıyla x^3, x^2, x, x^0 içeren terimlerin eşitliğinden,

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \lambda - \mu \tag{4.5}$$

$$R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4 = 1 - \lambda\mu \tag{4.6}$$

$$R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4 = \lambda - \mu \tag{4.7}$$

$$R_1R_2R_3R_4 = \lambda\mu \tag{4.8}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.5) - (4.8) denklemlerinin sol yanları kısalık olsun diye sırasıyla, E, F, G, H ile gösterilsin. (4.6) ve (4.8) denkleminin toplamından;

$$R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4 + R_1R_2R_3R_4 = 1$$

$$F + H = 1$$

olur. Bu ifade ile birlikte (4.5) ve (4.7) denklemlerinin sağ taraflarının eşitliği göz önüne alındığında

$$(F + H)E = G \tag{4.9}$$

yazılabilir. Bu ifadenin sol tarafı

$$\begin{aligned}
&(F + H)E \\
&= (R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4)(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + HE \\
&= R_1^2R_2 + R_1^2R_3 + R_1^2R_4 + R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 \\
&\quad + R_1R_2^2 + R_2^2R_3 + R_2^2R_4 + R_2R_3R_4 + R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 \\
&\quad + R_3^2R_4 + R_3^2R_1 + R_3^2R_2 + R_2R_3R_4 + R_1R_2R_3 + R_1R_3R_4 \\
&\quad + R_4^2R_1 + R_4^2R_2 + R_4^2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4 + HE \\
&= R_1^2(R_2 + R_3 + R_4) + R_2^2(R_1 + R_3 + R_4) + R_3^2(R_4 + R_1 + R_2) + R_4^2(R_1 + R_2 + R_3) \\
&\quad + 3R_1R_2R_3 + 3R_1R_2R_4 + 3R_1R_3R_4 + 3R_2R_3R_4 + HE
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. (4.9)'da bu ifade kullanılırsa

$$HE = -2G - R_1^2(R_2 + R_3 + R_4) - R_2^2(R_1 + R_3 + R_4) - R_3^2(R_4 + R_1 + R_2) - R_4^2(R_1 + R_2 + R_3)$$

bulunur. Burada dikkat edilirse sağ taraf negatiftir. Dolayısıyla, bu bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin iki tanesi pür imajiner, diğer iki tanesi ise pür reel olamaz.

Böylece, geometrik bakış açısıyla özdeğerler hiçbir zaman imajiner eksenin üzerinde olamayacaklardır. Çünkü imajiner eksen üzerinde 4×4 boyutlu matrisin pür imajiner özdeğere sahip olma durumlarının tamamı (dört tane pür imajiner özdeğere sahip olma ya da iki tane pür imajiner özdeğere sahip olma) incelenmiş ve bu durumların olamayacağı görülmüştür. O halde bu matrisin hiçbir zaman pür imajiner özdeğeri olamayacaktır. Diğer taraftan örneğin, $R_i = 1$, $i = 1,2,3,4$, için özdeğerler $-0,1892$, $2,1892$ ve $1,0000 \pm 1,1892i$'dır. Yani bu durum için $i(A) = (3,1,0)$ olur. Özdeğerlerin diğer olası durumlarını incelemeksizin Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.5 göz önüne alınsın. Özdeğerler R_i katsayılarının sürekli fonksiyonları olduğu ve imajiner eksende olamayacakları için R_i sayıları değiştikçe özdeğerlerden imajiner eksenin sağında olanlar sağda solunda olanlar ise eksenin solunda kalmaya devam edecektir. Dolayısıyla $i(B) = (3,1,0)$ olma durumu $R_i \in \mathbb{R}^+$ sayıları ne olursa olsun korunacaktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2. $R_1,\ R_2,\ R_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 \\ -2R_3 & 0 & R_3 \end{bmatrix}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Bu durumda $i(B) = (2,1,0)$'dır.

İspat. B matrisinin determinantı

$$\det(B) = \det\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 \\ -2R_3 & 0 & R_3 \end{bmatrix}$$

$$= R_1 \det\begin{bmatrix} R_2 & -R_2 \\ 0 & R_3 \end{bmatrix}$$

$$+\left(-2R_3\right)\det\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_2 & -R_2 \end{bmatrix}$$

$$= R_1R_2R_3 - 2R_1R_2R_3$$

$$= -R_1R_2R_3 \tag{4.10}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, B matrisinin karakteristik polinomu

$$\det\left(x\mathrm{I}-B\right) = \det\begin{bmatrix} x-R_1 & R_1 & 0 \\ 0 & x-R_2 & R_2 \\ 2R_3 & 0 & x-R_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(x-R_1\right)\det\begin{bmatrix} x-R_2 & R_2 \\ 0 & x-R_3 \end{bmatrix} + \left(2R_3\right)\det\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ x-R_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(x-R_1\right)\left(x-R_2\right)\left(x-R_3\right) + 2R_1R_2R_3$$

$$= x^3 + x^2\left(-R_1-R_2-R_3\right) + x\left(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3\right) + R_1R_2R_3 \tag{4.11}$$

şeklinde elde edilir. B matrisinin özdeğerlerinin eylemsizliğini belirlemek için, özdeğerlerin alabileceği değerlere göre olası tüm durumlar üzerinden aşağıdaki gibi inceleme yapılabilir.

1) Özdeğerlerin herhangi biri sıfır olsun. Bu durumda B matrisinin özdeğerlerinin çarpımı, dolayısıyla determinantı $'0'$ olur. Oysa ki (4.10)'dan $\det\left(B\right) < 0$ olduğu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin hiçbiri sıfır olamaz.

2) Özdeğerlerin bir tanesi pür reel, iki tanesi pür imajiner olsun. Bu durumda, $a,\ b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x_1 = ai,\ x_2 = -ai,\ x_3 = b$ için $\det\left(B\right) = a^2b$ olur. Dolayısıyla (4.10)'dan $b < 0$ olur. O halde genelliği bozmaksızın $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için, özdeğerler $x_1 = ai,\ x_2 = -ai,\ x_3 = -\lambda$ olarak alınabilir. Bu durumda karakteristik polinom

$$P(B) = (x - ai)(x + ai)(x + \lambda)$$
$$= x^3 + x^2\lambda + a^2 x + \lambda a^2 \tag{4.12}$$

olur. (4.11) ve (4.12) ifadelerinin her ikisi de B'nin karakteristik polinomu olduklarından eşit olmalıdır. Burada x^2 içeren terimlerin eşitliğinden

$$R_1 + R_2 + R_3 = -\lambda \tag{4.13}$$

elde edilir. Bu ise $R_1,\ R_2,\ R_3 \in \mathbb{R}^+$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ kabulleri ile çelişir. O halde özdeğerlerin biri pür reel ve ikisi pür imajiner olamaz.

Böylece, geometrik bakış açısıyla özdeğerler hiçbir zaman imajiner eksenin üzerinde olamayacaklardır. Çünkü, imajiner eksen üzerinde 3×3 boyutlu matrisin pür imajiner özdeğere sahip olma durumlarının tamamı (iki tane pür imajiner özdeğere sahip olma) incelenmiş ve bu durumun olamayacağı görülmüştür. O halde bu matrisin hiçbir zaman pür imajiner özdeğeri olamayacaktır. Diğer taraftan, örneğin tüm $R_i = 1,\ i = 1,2,3$, olarak alındığında özdeğerler $-0,2599$ ve $1,6300 \pm 1,0911i$ bulunur. Yani bu durum için $i(B) = (2,1,0)$ olur. Özdeğerlerin diğer olası durumlarını incelemeksizin Lemma 4.1.3 ve Lemma 4.1.5 göz önüne alınsın. Özdeğerler R_i katsayılarının sürekli fonksiyonları oldukları ve imajiner eksen üzerinde olamayacakları için imajiner eksenin sağında olanlar sağda solunda olanlar ise eksenin solunda kalmaya devam edecektir. Dolayısıyla $i(B) = (2,1,0)$ olma durumu $R_i \in \mathbb{R}^+$ sayıları ne olursa olsun korunacaktır.

Teorem 4.2.3. $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -2R_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Bu durumda $i(B) = (1,1,0)$'dır.

İspat. B matrisinin determinantı,

$$\det(B) = \det\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -2R_2 & R_2 \end{bmatrix}$$
$$= R_1R_2 - 2R_1R_2$$
$$= -R_1R_2 \tag{4.14}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, B matrisinin karakteristik polinomu

$$\det(B - x\mathrm{I}) = \det\begin{bmatrix} R_1 - x & -R_1 \\ -2R_2 & R_2 - x \end{bmatrix}$$
$$= (R_1 - x)(R_2 - x) - 2R_1R_2$$
$$= x^2 - R_1x - R_2x - R_1R_2$$
$$= x^2 + x(-R_1 - R_2) - R_1R_2 \tag{4.15}$$

şeklinde elde edilir B matrisinin özdeğerlerinin eylemsizliğini belirlemek için, özdeğerlerin alabileceği değerlere göre olası tüm durumlar üzerinden aşağıdaki gibi inceleme yapılabilir.

1) Özdeğerlerin herhangi biri sıfır olsun. Bu durum B matrisinin özdeğerlerinin çarpımı, dolayısıyla determinantı $'0'$ olur. Oysa ki (4.14)'ten $\det(B) < 0$ olduğu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin hiçbiri sıfır olamaz.

2) Özdeğerlerin ikisi de pür imajiner olsun. Bu durumda, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x_1 = ai,\ x_2 = -ai$ için, $\det(B) = a^2$ olur. Oysa ki (4.14)'den $\det(B) < 0$ olduğu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerler pür imajiner olamaz.

Böylece, geometrik bakış açısıyla özdeğerler hiçbir zaman imajiner eksenin üzerinde olamayacaklardır. Diğer taraftan, örneğin tüm $R_i = 1$, $i = 1,2$, için özdeğerler $2,4142$ ve $-0,4142$ olarak bulunur. Yani bu durum için $i(B) = (1,1,0)$ olur. Özdeğerlerin diğer olası durumlarını incelemeksizin Lemma 4.1.4 ve Lemma 4.1.5'e dikkat edelim. Buradan özdeğerler R_i katsayılarının sürekli fonksiyonları olduğu ve imajiner eksende olamayacakları için imajiner eksenin sağındakiler sağda solundakiler ise eksenin solunda kalmaya devam edecektir. Dolayısıyla $i(B) = (1,1,0)$ olma durumu $R_i \in \mathbb{R}^+$ sayıları ne olursa olsun korunacaktır.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Jeffries ve arkadaşları [9] çalışmalarında 4×4 boyutlu özel bir matrisin özdeğerlerinin koordinat düzlemindeki yerlerini ortaya koyan bir sonuç vermişlerdir. Bu sonuç Bölüm 3'te hatırlatılmaktadır.

Bu çalışmada ise bahsi geçen sonuçtan esinlenerek Teorem 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 ile negatif determinantlı çift döngülü Z^{+} matrislerin özdeğerlerinin koordinat düzlemine dağılımında sol yarı düzlemde yalnızca bir tane özdeğerin varlığı diğer özdeğerlerin ise sağ yarı düzlemde kaldığı, matris boyutunun 4 ve 4'ten küçük olduğu durumda gösterilmiştir.

Negatif determinantlı olmayı garanti etmek için önce (1.1) tipli DCZ^{+} matrisi ele almak yerine onun özel bir hali olan (4.1) tipli matris ela alındı. Dikkat edilirse esas köşegendeki elemanlar ile sıfırdan farklı diğer elemanlar birbirine paraleldir. Ayrıca, $(n,1)$ indisli elemanın önüne "2" katsayısı koyulmuştur. Bu katsayı negatif determinantlı olmayı garanti eder. Hatta istenirse bahsi geçen "2" katsayısı $(n,1)$ indisli elemanın önü yerine süper köşegendeki herhangi bir elemanın önüne de koyulabilirdi. Dahası bu katsayı "2" olmak zorunda olmayıp "1"den büyük herhangi bir reel sayı olabilirdi. Yani negatif determinantlı olmay garanti etmek için "2" katsayısını $(n,1)$ indisli elemanın önüne koymak genelliği bozmaz.

İspatlar yapılırken önce DCZ^{+} matrisinin determinantının değeri bulundu. Ardından karakteristik polinom bir kez klasik yöntemle bulundu. Daha sonra olası özdeğerler kullanılarak "özdeğerlerin karakteristik polinomun kökleri olacağı" mantığı kullanılarak karakteristik polinom yeniden oluşturuldu. Bu ikisinin eşitliği ve bir matrisin özdeğerlerinin çarpımının determinantını vereceği gerçeği de kullanıldı. Son olarak karakteristik denklemin köklerinin matris katsayılarının sürekli fonksiyonları olması ve Gersgorin teoreminden yola çıkarak özdeğerlerin yerleri tespit edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar düşünüldüğünde matrisin boyutu ne olursa olsun, sol yarı düzlemde negatif determinantlı çift döngülü Z^+ matrisler için yalnızca tek sayıda özdeğer vardır şeklinde bir konjektürün varlığı düşünülebilir. Bunu zaten [11]'de Johnson ve arkadaşları da ifade etmiştir. Matris boyutu büyüdüğünde bizim yöntemimizle bu konjektürü ispatlamak oldukça zordur. Farklı bir yöntemle bu ispat zaten [12] çalışmasında yapılmıştır. Bizim sonuçlarımızda dolayısıyla [11] ve [12] ile uyumludur.

Bundan sonra bazı başka özel matris tipleri için de özdeğerlerin yerlerini bulma problemi üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Ungar, A. A., A unified approach for solving quadratic, cubic and quartic equations by radicals. Int. J. Comp. Math. Appl., 9: 33-39, 1990.

[2] Pehlivanoğlu, M., Maksimum uzaklıkta ayrılabilen matrislerin elde edilebilmesi için yeni bir matris formu ve bir hafif sıklet blok şifreye uygulaması. Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı, Doktora Tezi, 2018.

[3] Öteleş, A., Sirkulant matrislerin sayısal işaretlemede kullanımı. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2011.

[4] Hacıoğlu, I., Kaskaloğlu, K., On the rank of the doop graph and its complement. Kuwait J.Sci., 45(3): 1-5, 2007.

[5] Hershkowitz, D., Schneider, H, On the generalized nullspace of M-matrices and Z-matrices. Linear Algebra Appl., 106: 5-23, 1988.

[6] Hershkowitz, D., Schneider, H., Solution of Z-matrix equations. Linear Algebra Appl., 106: 25-38, 1988.

[7] Kalman D., White J. E., Polynomial equation and circulant matricies. The Amer. Math. Monthly, 108(9): 821-840, 2001.

[8] Chandrashekaran, A., Parthasarathy, T., Ravindran, G., On strong Z-matrices. Linear Algebra Appl., 432: 964-969, 2010.

[9] Jeffries, C. D., Johnson, C. R., Zhou, T., Simpson, D.A. and Kaufmann, W.K., A flexible and qualitatively stable model for cell cycle dynamics including DNA damage effect. Gene Regulation and Systems Biology, 1: 55-66, 2012.

[10] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M., Mitjana, M., The M-matrix inverse problem for singular and symmetric Jacobi Matrices. Linear Algebra Appl., 436: 1090-1098, 2012.

[11] Johnson, C. R., Price, Z., Spitkovsky, I. M., The distribution of eigenvalues of doubly cyclic Z^+ - matricies. Linear Algebra Appl., 439: 3576-3580, 2013.

[12] Baker, C. E., Mityagin, B. S., Location of eigenvalues of doubly cyclic matrices. Linear Algebra Appl., 540: 160-202, 2018.

[13] Lu, L., Ahmed, Z., Guan, J., Numerical methods for a quadratic matrix equation with a nonsingular M-matrix. Appl.Math.Lett., 52: 46-52, 2016.

[14] Amster, P., Idels, L., New applications of M-matrix methods to stability of high-order linear delayed equations. Appl. Math. Lett., 54: 1-6, 2016.

[15] Brandts, J., Cihangir, A., Geometric aspects of the symmetric inverse M-matrix problem. Linear Algebra Appl.,506: 33-81, 2016.

[16] Fan, Y., Liu, H., Double dairesel matrices. Linear Multilinear Algebra, 66(10): 2119-2137, 2018.

[17] Guan, J., Modified alternately linearized implicit iteration method for M-matrix algebraic riccati equations. Appl. Math. Comput., 347: 442-448, 2019.

[18] Çiftçi, S., Lineer Cebir, Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd.Şti., Bursa, 2015.

[19] Lütkepohl, H., Handbook of Matrices, John Wiley & Sons Ltd., New York, 1996.

[20] Horn, R. A., Johnson, C. R., Matrix Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[21] Horn, R. A., Johnson, C. R., Topics in Matrix Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[22] Ben-Israel, A., Greville, T. N. E., Generalized inverses. Theory and Applications, Wiley, New York., 1974.

[23] Li, C., Zhang, F., Eigenvalue continuity and Gersgorin’s Theorem. Electron. J. Linear Algebra, 35: 619-625, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Hande NEZİROĞLU

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik Bölümü	2021
Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi / Matematik Bölümü	2016
Lise	İzmit Atılım Anadolu Lisesi	2010

İŞ DENEYİMİ

Yıl	**Yer**	**Görev**
2021-Halen	Türkiye Teknoloji Takımı Vakfı	Yazılım Eğitmeni
2021-Halen	İzmit Evrensel Matematik Köyü Koleji	Öğretmen
2019-2020	Kocaeli Sınav Koleji	Öğretmen
2018-2019	İzmit Birey Temel Lisesi	Öğretmen
2018	Özel Boyut Kişisel Gelişim Kursu	Öğretmen
2017	Sakarya Üniversitesi	Öğrenci Asistanı

YABANCI DİL

İngilizce