T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA MONOTON İTERATİF TEKNİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülsüm TRABZON

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Yalçın YILMAZ**

Temmuz 2021

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA MONOTON İTERATİF TEKNİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülsüm TRABZON

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 02/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı **Üye** **Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Gülsüm TRABZON

…/…/……

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi yazmayı nasip eden Rabbime hamd ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Doç. Dr. Yalçın YILMAZ'a teşekkürü bir borç bilirim.

En büyük zenginliğim, aileme her şey için minnettarım. Annem Emine TRABZON, babam Ali TRABZON'un varlığı hayatta bana daima güç verdi. Kardeşlerim Şeyma TRABZON, Abdullah TRABZON, Mehmet Akif TRABZON ve Mahmut Furkan TRABZON çocukluğumun şahidi, daimi neşe kaynağım oldular.

Son olarak varlığını armağan bildiğim, dostum Selva BAYRAK'a, tez döneminde ve öncesinde, nazımı çektiği için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

C_{rd}	: Sağ-yoğun sürekli (rd-sürekli) fonksiyonların sınıfı
$\int f(t)\Delta t$	: f fonksiyonunun Δ-integrali
f^{Δ}	: f fonksiyonunun Δ-türevi
μ^{*}	: Graininess fonksiyonu
$\circ$	: Bileşke gösterimi
$\in$	: Elemanıdır
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Zaman skalası
ρ	: Geri sıçrama operatörü
σ	: İleri sıçrama operatörü

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: alt ve üst çözüm, ekstremal çözümler, monoton iteratif teknik, karma monoton iteratif teknik, zaman skalası

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde zaman skalasının önem ve işlevselliğinden, tezde yapılan çalışmalardan genel hatlarıyla bahsedilmiştir.

İkinci bölümde öncelikle zaman skalası analizi tanıtılmıştır. Zaman skalasında temel kavramları vererek, ek olarak birkaç örnekle meselenin daha iyi kavranması hedeflenmiştir. Burada verilen temel kavramlar, çalışmada kullanılacaklar ile sınırlı tutulmuştur. Aynı sebeple zaman skalasında sadece türev ve integralin temel teorem ve ispatları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Peano tipi varlık ve Perron tipi teklik kavramları verilerek, çalışmada sıklıkla faydalanılan Arzela-Ascoli teoremine değinilmiştir. Dinamik eşitsizlikler, Lipschitz koşulu ve ekstremal çözümler içeriği de çalışmaya hazırlık niteliğinde verilen bilgilerdir.

Dördüncü bölümde alt ve üst çözüm tanımları verilmiştir. Alt ve üst çözümlerin, Zaman skalasında dinamik denklemlerin çözümleri için kapalı bir aralık oluşturduğu gösterilmiştir. Daha sonra monoton iterasyon tekniğiyle oluşturulan dizilerin, problemin ekstremal çözümlere düzgün ve monoton yakınsadığı saptanmıştır.

Beşinci bölümde ise genelleştirilmiş monoton iteratif teknik tanıtılmıştır. Tekniğe ait gerekli teorem ve ispatları verilmiş, ardından örnekleri gösterilmiştir. Daha sonra karma monoton tekniği tanıtılmıştır.

MONOTONE ITERATIVE TECHNİQUE ON TIME SCALE

SUMMARY

Keywords: upper and lower solutions, extremal solutions, monotone iterative technique, time scale

This thesis consists of 5 chapters. In the first part, the importance and functionality of time scale, the studies made in the thesis are discussed in general.

In the second part, firstly, time scale analysis is introduced. By giving the basic concepts on the time scale, it is aimed to give a better understanding of the isssue with a few additional examples. The basic concepts given here are limited to what will be used in the study. For the same reason, only the fundamental theorems and proofs of the derivative and integral on the time scale have been studied.

In the third chapter, the concepts of Peano's type existence Perron's type uniqueness are given, and Arzela-Ascoli theorem, which is frequently used in the stuy, is mentioned. The content of dynamic inequalities, Lipschitz condition and extremal solutions are also the inormations given as a preparation fort the study.

In the fourth chapter, definitions of lower and upper solutions are given. It has been shown that the lower and upper solutions form a closed interval for the solutions of dynamic equations on the time scale. Later, it is determined that the sequences to created with the monoton iteration technique converged uniformly and monoticially to extremal solutions of the problem.

In the fifth chapter, the generalized monotone iterative technique is introduced. Necessary theorems and proofs of the technique are given, and then ewamples are shown. Later, the mixed monotony technique is introduce.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Zaman skalası ayrık ve sürekli analizi birleştiren bir sistemdir. Oldukça yeni bir konu olmasına rağmen gittikçe daha fazla ilgi çeken bir saha olmuştur. Bu yöneltilen ilginin temel sebeplerinden biri dinamik denklemlerdir. Dinamik denklemler; diferansiyel denklemler ile fark denklemlerin eş zamanlı bir şekilde ele alınmasına olanak verir. Biz de çalışmamızı zaman skalasında dinamik denklemler üzerinde yürüttük. Bu çalışmada öncelikle zaman skalasını tanıtarak, sadece tezde kullanılacak temel türev ve integral özelliklerini vermekle yetindik.

Dinamik denklemlerde alt ve üst çözümler, çözümlerin varlığını araştırmada etkili bir araçtır. Alt ve üst çözümler ile, dinamik denklemlerin çözümlerinin varlığı hakkında fikir sahibi olmakla kalmayız; aynı zamanda herhangi bir çözümünün hangi aralıkta olacağını söyleme imkanımız olur. Çözümleri elde etmeden bulundukları kapalı aralığı belirlemek, dinamik denklem çalışmaları için oldukça fayda sağlamaktadır.

Monoton iteratif teknik ise, bize dinamik denklemin ekstremal çözümlerine düzgün ve monoton yakınsayan diziler vermektedir. Bunun nasıl gerçekleştiğini gösterebilmek için zaman skalasında temel dinamik eşitsizlikleri, Peano ve Perron teoremlerinin varlık ve teklik sonuçlarını incelemek gerekir. Ekstremal çözümlerin varlığı da aynı şekilde ön hazırlık çalışması olarak yürütülmelidir.

Bu çalışmaların akabinde zaman skalasında dinamik denklemlerin lineer başlangıç değer probleminin alt ve üst çözümlerini başlangıç iterasyonu olarak kullanarak diziler elde edilmektedir. Bu dizilerin ekstremal çözümlere düzgün ve monoton yakınsaması yöntemin dikkat çeken noktalarından biridir. f fonksiyonu 3 sağ sürekli ve monoton azalmayan fonksiyon farkından oluşacak şekilde seçildiği zaman ekstremal çözümlere yakınsayan monoton iteratif dizileri elde etmek bu metodu genelleştirilmiştir.

Son olarak ise, aynı şekilde 3 sağ sürekli monoton azalmayan ve artmayan fonksiyon farkı olarak yazılma durumundaki karma monoton iteratif teknik incelenmiş, örneklendirme yapılarak çalışma nihayete erdirilmiştir.

BÖLÜM 2. ZAMAN SKALASI ANALİZİ

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1:

$\mathbb{R}$ nin boş kümeden farklı kapalı herhangi bir $\mathbb{T}$ alt kümesine zaman skalası denir. Örneğin;

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $[1,2]\cup[3,4]$, $[0,2] \cup \mathbb{N}$
$h\mathbb{Z}=\{hk: k \in \mathbb{Z}\}, \quad h>0$
$q^{\mathbb{N}_0} = \{q^k: k \in \mathbb{N}_0\}, \quad q > 1$

Kümeleri birer zaman skalasıdır.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ ve $(0,1)$ kümeleri ise bir zaman skalası değildir.

Tanım 2.1.2:

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörünü

$$\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \quad \sigma(t) := \begin{cases} \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\} \\ t, \qquad t = sup\mathbb{T} \end{cases} \tag{2.1}$$

ve ρ geri sıçrama operatörünü

$$\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T} \ \ \rho(t) := \begin{cases} \sup \ \{s \in \mathbb{T}: s < t\} \\ t, \qquad t = inf\mathbb{T} \end{cases} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlarız.

Tanecikli fonksiyon ise $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$

$$\mu^*(t) = \mu(\sigma(t) - t) := \sigma(t) - t \qquad (2.3)$$

ile tanımlarız.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere

$$\mathbb{T}^k := \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\}, \mathbb{T}\ sol\ saçılmış\ bir\ maksimum\ m\ noktasına\ sahipse \\ \mathbb{T}, \qquad diğer\ durumlarda \end{cases} \qquad (2.4)$$

kümesini $\mathbb{T}$ de türevlenebilme bölgesi olarak adlandırırız.

Ve son olarak $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için , $f^\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ şeklinde tanımlarız.

Tanım 2.1.3:

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere;

$\sigma(t) > t$ ise t ye sağ saçılmış nokta,
$\rho(t) < t$ ise t ye sol saçılmış nokta denir.
t noktası hem sağ saçılmış hem sol saçılmış nokta ise t ye izole nokta denir.
t <sup $\mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t sağ yoğun nokta,
t >inf $\mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t ye sol yoğun nokta denir.
t noktası hem sağ yoğun hem sol yoğun nokta ise t noktası yoğun nokta adını alır [1].

Örnek 2.1.4:

$\mathbb{T} = [3,4] \cup [5,6]$ zaman skalasını ele alalım:

$t_o = 3$ için $\sigma(3) = 3$ olduğundan $t_o = 3$ sağ yoğun nokta,
$t_1 = 4$ için $\rho(4) = 4$ olduğundan $t_1 = 4$ sol yoğun nokta,
$\sigma(4) = 5$ olduğundan $t_1 = 4$ sağ saçılmış nokta,

$t_2 = 5$ için $\sigma(5) = 5$ olduğundan $t_2 = 5$ sağ yoğun nokta,

$\rho(5) = 4$ olduğundan $t_2 = 5$ sol saçılmış nokta,

$t_3 = 6$ için $\sigma(6) = 6$ ve $\rho(6) = 6$ olduğundan hem sağ yoğun hem sol yoğun noktadır. O halde $t_3 = 6$ noktası yoğun nokta olur.

Örnek 2.1.5:

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}: s > t\} = \inf(t, \infty) = t \tag{2.5}$$

ve;

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}: s < t\} = \sup(-\infty, t) \tag{2.6}$$

dir. Böylece her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğun noktadır ve dolayısıyla tanecikli fonksiyonu

$$\mu^*(t) = \sigma(t) - t = 0 \tag{2.7}$$

dır.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alalım. Bu durumda her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\{t + 1, t + 2, t + 3, \dots\} = t + 1 \tag{2.8}$$

ve benzer şekilde;

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup(\dots, t - 3, t - 2, t - 1) = t - 1 \tag{2.9}$$

olur.

Böylece her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole noktadır ve dolayısıyla tanecikli fonksiyonu

$$\mu^*(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1 \tag{2.10}$$

elde edilir [2].

Yukarıda incelediğimiz her iki durumda da tanecikli fonksiyonu sabit fonksiyondur. Aşağıda verdiğimiz tanımlarda tanecikli fonksiyonunun zaman skalası analizinde önemli bir rol oynadığını, pek çok formülün $\mu^*(t)$ içerdiğini göreceğiz. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olması durumunda bu terim vardır ve 1 dir, ancak $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olması durumunda $\mu(t) = 0$ olduğundan bu terim kaybolur. İşte bu durum diskret ile sürekli durumlar arasındaki farklılıkların sebebidir.

Tablo 2.1. Farklı zaman skalalarında operatörler [2].

$\mathbb{T}$	$\mu^*(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$t-h$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)t$	qt	t/q
$2^{\mathbb{N}}$	t	$2t$	$t/2$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

2.2. Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.2.1:

$f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t nin en az bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu, her s $\in U$ için

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \tag{2.11}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde mevcut ise f e t noktasında delta türevlenebilir fonksiyon ve $f^\Delta(t)$ ye f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi veya Hilger türevi denir.

Her $t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t)$ mevcut ise f ye $\mathbb{T}^k$ kümesinde delta türevlenebilirdir denir.

Teorem 2.2.2:

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda

i. Eğer f fonksiyonu t noktasında delta türevlenebilirse t de süreklidir.

ii. Eğer f fonksiyonu t de sürekli ve t sağ saçılmış bir nokta ise f fonksiyonu t de delta türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \tag{2.12}$$

şeklindedir.

iii. Eğer t sağ yoğun nokta ise f nin delta türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart $\lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limitinin var olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \tag{2.13}$$

Olur.

iv. Eğer f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu^*(t) f^{\Delta}(t) \tag{2.14}$$

dir.

Örnek 2.2.3:

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} \to \mathbb{Z}$ olma durumlarını ele alalım:

- Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise teorem 2.2.2(iii) ile $f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(t)$ elde ederiz.
- Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ t noktasında delta türevlenebilir ve teorem 2.2.2(ii) ile

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu^{*}(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t) \tag{2.15}$$

dir.

Örnek 2.2.4:

Her $t\in\mathbb{T}$ için f fonksiyonu $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $f(t)=ct$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f^{\Delta}(t)=c$ olduğunu gösterelim:

Her $\varepsilon>0$ için

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-c[\sigma(t)-s]\right|=|(c\sigma(t)-cs)-(c\sigma(t)-cs)|=|c\sigma(t)-cs-c\sigma(t)+cs|=0\leq\epsilon|\sigma(t)-s| \tag{2.16}$$

tüm s$\in\mathbb{T}$ için sağlandığından $f^{\Delta}(t)=c$ olur.

Teorem 2.2.5:

$f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $t\in\mathbb{T}^{k}$ da türevlenebilir olsunlar. Bu durumda;

i. $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ t noktasında türevlenebilirdir ve türevi

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t) \tag{2.17}$$

eşitliği sağlanır.

ii. Her α sabiti için $\alpha f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) \tag{2.18}$$

eşitliği sağlanır.

iii. $f.g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında türevlenebilir ve

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f\big(\sigma(t)\big)g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g\big(\sigma(t)\big) \tag{2.19}$$

eşitliği sağlanır.

iv. Eğer $f(t)f\big(\sigma(t)\big) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ türevlenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f\big(\sigma(t)\big)} \tag{2.20}$$

v. Eğer $g(t)g\big(\sigma(t)\big) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))} \tag{2.21}$$

eşitliği sağlanır [3].

İspat:

v. (ii) ve (iv) ü kullanarak;

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \left(f.\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) = f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\frac{1}{g\big(\sigma(t)\big)}$$

$$= -f(t).\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g\big(\sigma(t)\big)} + f^{\Delta}(t)\frac{1}{g\big(\sigma(t)\big)} \tag{2.22}$$

$$= \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))} \tag{2.23}$$

2.3. Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.3.1:

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sağ limit var ve $\mathbb{T}$ nin sol yoğun noktalarındaki sol limit değeri var ve ve bu limit değerleri sonlu ise bu f fonksiyonuna düzenli (regulated) denir [2].

Tanım 2.3.2:

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sürekli ve $\mathbb{T}$ nin tüm sol yoğun noktalarındaki sol limit değeri var ve bu limit değeri sonlu ise bu fonksiyona sağ yoğun sürekli denir. Sağ yoğun fonksiyonların kümesi $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir [2].

Düzenli ve sağ yoğun fonksiyonlarının bazı sonuçlarını ele alalım:

Teorem 2.3.3:

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olsun.

- f sürekli ise f sağ yoğun süreklidir.
- f sağ yoğun sürekli ise f düzenlidir.
- İleri sıçrama operatörü $\sigma(t)$ sağ yoğun süreklidir.
- f sağ yoğun sürekli veya düzenli ise f^{σ} da aynı özelliklidir.
- f sürekli olsun. $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli veya sağ yoğun sürekli ise $f \circ g$ de aynı özelliğe sahiptir [2].

Tanım 2.3.4:

$F\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}^k$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ eşitliğini sağlıyorsa F fonksiyonuna $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ nin anti türevi denir. Bu durumda delta integral her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) \tag{2.24}$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.5:

$f, g \in C_{rd}$ olsun. $a, b, c \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

i. $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta \mathrm{t}$ (2.25)

ii. $\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta \mathrm{t} = \alpha \int_a^b f(t)\Delta \mathrm{t})$ (2.26)

iii. $\int_a^b f(t)\Delta \mathrm{t} = -\int_b^a f(t)\Delta \mathrm{t}$ (2.27)

iv. $\int_a^b f(t)\Delta \mathrm{t} = \int_a^c f(t)\Delta \mathrm{t} + \int_c^b f(t)\Delta \mathrm{t}$ (2.28)

v. $\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(\mathrm{t})\Delta \mathrm{t} = (\mathrm{fg})(\mathrm{b}) - (\mathrm{fg})(\mathrm{a}) - \int_a^b f^\Delta(t)\mathrm{g}(t)\Delta \mathrm{t})$ (2.29)

vi. $\int_a^b f(t)g^\Delta(\mathrm{t})\Delta \mathrm{t} = (\mathrm{fg})(\mathrm{b}) - (\mathrm{fg})(\mathrm{a}) - \int_a^b f^\Delta(t)\mathrm{g}(\sigma(t))\Delta \mathrm{t}$ (2.30)

vii. $\int_a^a f(t)\Delta \mathrm{t} = 0$ (2.31)

viii. $f \geq 0$ ise her $a \leq t < b$ için $\int_a^b f(t)\Delta \mathrm{t} \geq 0$ (2.32)

ix. (a, b) aralığında $|f(t)| \leq g(t)$ ise $\left|\int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b g(t)\Delta t\right|$ (2.33)

dir. Burada (v) ve (vi) kısmi integrasyon formülleridir [2].

İspat: i

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) =$$
$$\int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta \mathrm{t} \tag{2.34}$$

ii;

$\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta\mathrm{t} = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha(F(b) - F(a)) = \alpha \int_a^b f(t)\Delta\mathrm{t}$

iii;

$\int_a^b f(t)\Delta\mathrm{t} = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)\Delta\mathrm{t}$

iv;

$\int_a^b f(t)\Delta\mathrm{t} = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \int_a^c f(t)\Delta\mathrm{t} + \int_c^b f(t)\Delta\mathrm{t}$

v;

$f(\sigma(t))g^{\Delta}(\mathrm{t}) + f^{\Delta}(t)\mathrm{g}(t)$ nin antitürevi $f(t).\mathrm{g}(t)$ olduğundan

$\int_a^b [f(\sigma(t))g^{\Delta}(\mathrm{t}) + f^{\Delta}(t)\mathrm{g}(t)]\Delta\mathrm{t} = (\mathrm{fg})(\mathrm{b}) - (\mathrm{fg})(\mathrm{a})$

$\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} + \int_a^b f^{\Delta}(t)\mathrm{g}(t)\Delta\mathrm{t} = (\mathrm{fg})(\mathrm{b}) - (\mathrm{fg})(\mathrm{a})$

$\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} = (\mathrm{fg})(\mathrm{b}) - (\mathrm{fg})(\mathrm{a}) - \int_a^b f^{\Delta}(t)\mathrm{g}(t)\Delta\mathrm{t}$

vi;

$f(t)g^{\Delta}(\mathrm{t}) + f^{\Delta}(t)\mathrm{g}(\sigma(t))$ nin antitürevi $f(t).\mathrm{g}(t)$ olduğundan

$\int_a^b [f(t)g^{\Delta}(\mathrm{t}) + f^{\Delta}(t)\mathrm{g}(\sigma(t))]\Delta\mathrm{t} = (\mathrm{fg})(\mathrm{b}) - (\mathrm{fg})(\mathrm{a})$

$\int_a^b f(t)g^{\Delta}(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} + \int_a^b f^{\Delta}(t)\mathrm{g}(\sigma(t))\Delta\mathrm{t} = (\mathrm{fg})(\mathrm{b}) - (\mathrm{fg})(\mathrm{a})$

$\int_a^b f(t)g^{\Delta}(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} = (\mathrm{fg})(\mathrm{b}) - (\mathrm{fg})(\mathrm{a}) - \int_a^b f^{\Delta}(t)\mathrm{g}(\sigma(t))\Delta\mathrm{t}$

$\int_a^a f(t)\Delta\mathrm{t} = \mathrm{F(a)} - \mathrm{F(a)} = 0$

Teorem 2.3.6:

(Tümevarım İlkesi) $t_0 \in \mathbb{T}$ için $\{S(t): t \in [t_0, \infty)\}$ailesinin aşağıdaki koşulları sağlayan durumların bir ailesi olduğunu kabul edelim:

- $S(t_0)$ ifadesi doğrudur.
- $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ saçılmış nokta ve $S(t)$ ifadesi doğru ise $S(\sigma(t))$ ifadesi de doğrudur.
- $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ yoğun nokta ve $S(t)$ ifadesi doğru ise o zaman t nin bir U komşuluğu vardır öyle ki $\forall s \in U \cap (t, \infty)$ için için $S(s)$ ifadesi de doğrudur.
- $t \in [t_0, \infty)$ noktası sol yoğun nokta ve $\forall s \in [t_0, t)$ için için $S(s)$ ifadesi doğru ise, $S(t)$ ifadesi de doğrudur.

Bu durumda $S(t)$ ifadesi $t \in [t_0, \infty)$ için doğrudur [4].

İspat: $S^* \coloneqq \{t \in [t_0, \infty): S(t)\ doğru\ değil\}$ kümesini ele alalım. $S^* = \emptyset$ olduğunu göstermemiz gerekir.

Kabul edelim ki $S^* \neq \emptyset$ olsun. Fakat S^* kapalı ve boş olmayan bir küme olduğu için $infS^* =: t^* \in \mathbb{T}$ olur.

$S(t^*)$ ın doğru olduğunu varsayalım. Eğer $t^* = t_0$ ise $S(t^*)$ (i) den dolayı doğrudur. Eğer $t^* \neq t_0$ ve $\rho(t^*) = t^*$ ise $S(t^*)$ (iv) den dolayı doğrudur. Son olarak eğer $\rho(t^*) < t^*$ ise bu durumda $S(t^*)$ (ii) den dolayı doğru olacaktır. Böylece her durumda $t^* \notin S^*$ dır. O halde t^* sağ saçılmış olamaz. Öyleyse t^* sağ yoğun noktadır. Burada ispat tamamlanmış olur [4].

BÖLÜM 3. TEMEL TEOREMLER

3.1. Çözümlerin Varlık ve Tekliği

Öncelikle 4.bölümde ispatlarda sıklıkla kullanacağımız Arzela-Ascoli teoremini verelim ve teoremde geçen eşsürekli ve düzgün sınırlı fonksiyon ailesi kavramlarını tanımlayalım:

Tanım 3.1.1:

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $n \in \mathbb{N}$ için $f_n\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|t - s| < \delta$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki

$$|f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Eşitsizliği sağlanırsa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisine $\mathbb{T}$ zaman skalasında eşsüreklidir denir.

Tanım 3.1.2:

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olsun. $|f_n(t)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ varsa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $\mathbb{T}$ zaman skalasında düzgün sınırlıdır denir [5].

Teorem 3.1.3 (Arzela-Ascoli Teoremi):

$f_n(t)$ kapalı bir $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlı, eşsürekli ve düzgün sınırlı fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda $\mathbb{T}$ de düzgün yakınsayan bir $\{f_n\}, n = 1,2, \dots$ alt dizisi vardır [6].

Şimdi bu bölümde öncelikle zaman skalasında dinamik sistemlerde başlangıç değer problemini düşüneceğiz ve Peano ve Perron teoremlerine karşılık gelen varlık ve teklik sonuçlarını ele alacağız.

Tanım 3.1.4:

$f: \mathbb{T}^k x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k x \mathbb{R}^n$ sağ sürekli olmak üzere

$$u^{\Delta} = f(t,u) \qquad t \in \mathbb{T}^k, \qquad u(t_0) = u_0 \tag{3.2}$$

Dinamik başlangıç değer problemini düşünelim.

Eğer $u: \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$, $f(t,u)$ nun bir antitürevi ise $u(t)$ (3.2) denkleminin çözümüdür denir ve $u(t_0) = u_0$ şartını sağlar [7].

Tanım 3.1.5:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $[t_0, t_0 + a]$ $\mathbb{T}^k$da keyfi bir aralık olmak üzere

$f: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}^k} x D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ aralığında $u: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (3.2) nin bir çözümüdür. Her $t \in [t_0, t_0 + a]$ u delta türevlenebilir bir fonksiyondur $u^{\Delta} = f(t, u(t))$ ve $u(t_0) = u_0$ dır.

Lemma 3.1.6:

$f: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}^k} x D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu sağ sürekli olsun. Bu durumda $[t_0, t_0 + a]$ aralığında $u(t)$ (3.2) nin bir çözümüdür ancak ve ancak

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\Delta s, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}} \tag{3.3}$$

delta integralini sağlar [5].

İspat: İspatı için [5] e başvurulabilir.

Teorem 3.1.7:

$\mathbb{R}_0 = [t_0, t_0 + a]xB$, $B = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - u_0| \leq b\}$ olmak üzere $f \in C_{rd}[\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^n]$ olsun. Bu durumda (3.2) dinamik başlangıç değer problemi $[t_0, t_0 + a]$ komşuluğunda en az bir $u(t)$ çözümüne sahiptir öyle ki $\alpha = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ ve M $f(t, u)$ nun $\mathbb{R}_0$ da sınırıdır. Burada $[t_0, t_0 + a] = [t_0, t_0 + a] \cap \mathbb{T}^k$ dır [8].

İspat: İspatı için [8] başvurulabilir.

Şimdi Peano tipi varlık sonucunu göz önüne alalım:

Teorem 3.1.8:

$R^0 = [t_0, t_0 + a]xA$ olmak üzere $f \in C_{rd}[R^0, \mathbb{R}^n]$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $[t_0, t_0 + a] = [t_0, t_0 + a] \cap \mathbb{T}^k$, $A = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - u_0| \leq b\}$ ve R^0da $f(t, u) \leq K$ dır. Bu durumda $\vartheta = min\left(a, \frac{b}{K}\right)$ olmak üzere (3.2) BDP $[t_0, t_0 + \vartheta]$ aralığında en az bir $u(t)$ çözümüne sahiptir [7].

Şimdi Perron tipi teklik sonucunu göz önüne alalım:

Teorem 3.1.9:

Kabul edelim ki;

$G \in C_{rd}[[t_0, t_0 + a]x[0,2b], R^+]$ ve her $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + a$ aralığındaki t_1 için $u(t) \equiv 0$, $u^\Delta = g(t, u), u(t_1) = 0$ denkleminin $[t_1, t_0 + a]$ aralığında bir çözümü olsun.

$f \in C_{rd}[\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^n]$ ve her $t \in [t_0, t_0 + a]$ için bir U_t kapalı komşuluğu vardır öyle ki $f^{t]}$, $U_t xB$ de $|f(t,u) - f(t,v)| \leq g(t, |u - v|)$ $(t,u),(t,v) \in U_t xB$ ifadesini sağlasın.

Bu durumda (3.2) başlangıç değer problemi $[t_0, t_0 + a]$ aralığında tek bir $u(t)$ çözüme sahiptir.

İspat: Bu teoremin ispatını indüksiyon prensibi ile yapacağız.

$$A(r): u^{\Delta} = f^{t]}\,(t,u), t \in [t_0, r] u(t_0) = u_0 \tag{3.4}$$

BDP nin tek bir $u_r(p)$ çözümü vardır.

(1). Gerçekten tek bir $u_{t_0}: \{t_0\} \to \mathbb{R}^n$, $u_{t_0}(t_0) = u_0$ vardır ve $t \in \{t_0\}^k = \emptyset$ için

$$u_{t_0}^{\Delta}(t) = f^{t]}\left(t, u_{t_0}(t)\right) \tag{3.5}$$

dır.

(2). r sağ saçılmış bir nokta olsun. (3.4) BDP indüksiyon şartına göre kesin bir şekilde $u_r(p)$ çözümüne sahiptir.

$$u_{\sigma(r)}: [t_0, \sigma(r)] \to \mathbb{R}^n \tag{3.6}$$

$$u_{\sigma(r)}(t) = \begin{cases} u_r(t), t \in [t_0, r] \\ u_r(r) + f\big(r, u_r(r)\big)\mu^*(r), t = \sigma(r) \end{cases} \tag{3.7}$$

tanımlamasını yapalım. Fonksiyon süreklidir ve $[t_0, r]$de (3.4) ün tek çözümü olduğu için ve $[r, \sigma(r)]$ de $u^{\Delta} = f(t,u)$, $u(r) = u_r(r)$ BDP nin tek çözümü olduğundan dolayı tek çözümdür.

(3). r sağ yoğun bir nokta olsun. İndüksiyon koşuluyla (3.4) ün bir $u_r(p)$ çözümü vardır. $V_r \subseteq U_r$ r nin bir kapalı komşuluğu olsun. Perron teoremiyle her $s \in V_r, s \geq t$ için

$$u^{\Delta} = f^{s]}\ (t,u), t \in [r,s], u(r) = u_r(r) \tag{3.8}$$

BDP nin $v_s(p)$ şeklinde bir çözümü vardır.

$$u_s(t): \begin{cases} u_r(t), & t \in [t_0, r] \\ v_s(t), & t \in [r,s] \end{cases} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanan u_s, (3.8) BDP nin tek çözümüdür. Böylece her $s \in V_r$, $s \geq r$ için $A(s)$ doğrudur.

(4). r sol yoğun nokta olsun ve V_r yi yukarıdaki gibi seçelim. Bu durumda $s \in V_r$, $s < r$ olur. $A(s)$ indüksiyon prensibi yardımı ve Perron teoremiyle (3.4) denkleminin $u_r(p)$ çözümünün varlığı ve tekliği (3) teki gibi gösterilebilir.

Her bir $[t_0, r]$, $r \geq t_0$ aralığında bir çözüm var olduğu için, $[t_0, t_0 + a]$ aralığında da vardır. Burada ispatı tamamlarız [8].

3.2. Dinamik Eşitsizlikler

Tanım 3.2.1:

Bir $f \in C[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ fonksiyonu eğer $u \leq v$ ve bazı $1 \leq i \leq n$ için $u_i = v_i$ iken $f_i(u) \leq f_j(v)$ oluyorsa f e yarı monoton azalmayan fonksiyon denir.

Tanım 3.2.2:

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $[a,b)$ de türevlenebilen fonksiyon olsun. Eğer her $t \in [a,b)$ için; $f^{\Delta}(t) < 0$ ise f $[a,b]$ de azalan ve $f^{\Delta}(t) \leq 0$ ise f $[a,b]$ de artmayan fonksiyon denir.

Tanım 3.2.3:

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $[a,b)$ de türevlenebilen fonksiyon olsun. Eğer her $t \in [a,b)$ için; $f^{\Delta}(t) > 0$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ de artan ve $f^{\Delta}(t) \geq 0$ ise f, $[a,b]$ de azalmayan fonksiyon denir [5].

Teorem 3.2.4:

$\mathbb{T}$ minimal elemanı $t_0 \geq 0$ olan ve maksimal elemanı olmayan bir zaman skalası olsun. Her $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha, \beta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ sağ sürekli, türevlenebilen fonksiyonlar olsun ve $f \in C_{rd}$ $[\mathbb{T}x\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olmak üzere

$$\alpha^{\Delta}(t) \leq f(t,\alpha(t)), \qquad \beta^{\Delta}(t) > f(t,\beta(t)), t \in \mathbb{T} \tag{3.10}$$

şartını sağlasın. Aynı zamanda $f(t,u)$ u ya göre yarı monoton azalmayan ve $1 \leq i \leq n$ için $f_i(t,u)\mu^*(t) + u_i$ fonksiyonu u_i ye göre azalmayan fonksiyon olsun.

Bu durumda $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha(t_0) < \beta(t_0)$ olduğunda $\alpha(t) < \beta(t)$ çıkar.

İspat: $A(t)\colon \alpha(t) < \beta(t), t \in \mathbb{T}$ ifadesine indüksiyon prensibini uygulayalım:

(i). $\alpha(t_0) < \beta(t_0)$ olduğundan $A(t_0)$ sağlandığı aşikardır.

(i). t sağ saçılmış nokta ve $A(t)$ doğru olsun. $A(\sigma(t))$ nin de doğru olduğunu göstermeliyiz. Teorem 2.2.2 (ii) kullanarak

$$\alpha^{\Delta}(t) = \frac{\alpha(\sigma(t)) - \alpha(t)}{\mu^*(t)} \tag{3.11}$$

$$\beta^{\Delta}(t) = \frac{\beta(\sigma(t)) - \beta(t)}{\mu^*(t)} \tag{3.12}$$

Olur. Buradan

$$\alpha^{\Delta}(t) - \beta^{\Delta}(t) = \frac{\alpha(\sigma(t)) - \alpha(t) - \beta(\sigma(t)) + \beta(t)}{\mu^*(t)} \tag{3.13}$$

$$\alpha(\sigma(t)) - \beta((\sigma(t)) = [\alpha^{\Delta}(t) - \beta^{\Delta}(t)]\mu^*(t) + \alpha(t) - \beta(t) \tag{3.14}$$

elde ederiz. $f(t,u)\mu^*(t) + u$, u ya göre azalmayan fonksiyon ve $A(t)$ doğru olduğundan

$$\alpha(\sigma(t)) - \beta((\sigma(t)) = [f(t,\alpha(t)) - f(t,\beta(t))]\mu^*(t) + \alpha(t) - \beta(t) < 0 \tag{3.15}$$

dır. Böylece $A(\sigma(t))$ doğru olur.

(iii). t sağ yoğun nokta ve N t nin bir komşuluğu olsun. $A(t)$ nin doğru olduğunu kabul edelim. $s \geq t, s \in N$ için $A(s)$ nin de doğru olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki doğru olmasın. Bu durumda $s_0 \in N$, $s_0 > t$ vardır öyle ki

$$\alpha(s_0) < \beta(s_0) \; ve \; \alpha^{\Delta}(s_0) \geq \beta^{\Delta}(s_0) \tag{3.16}$$

Olur. $f(t,u)$ u ya göre azalmayan olduğundan dolayı

$$f(s_0, \alpha(s_0)) \leq f(s_0, \beta(s_0)) \tag{3.17}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\alpha^{\Delta}(s_0) - f(s_0, \alpha(s_0)) \geq \beta^{\Delta}(s_0) - f(s_0, \beta(s_0)) \tag{3.18}$$

elde ederiz ve ispat tamamlanmış olur.

(iv). t sol yoğun nokta ve $s < t$ için $A(s)$ doğru olsun. $A(t)$ nin de doğru olduğunu göstermemiz gerekir.

α ve β nın sağ sürekliliği ile

$$\alpha(t) = \lim_{s \to t^-} \alpha(s) \leq \lim_{s \to t^-} \beta(s) = \beta(t) \tag{3.19}$$

Olur. Şimdi $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha(t)$ nin $\beta(t)$ ye eşit olmadığını göstermeliyiz:

Kabul edelim ki $\alpha(t) = \beta(t)$ olsun. Bu durumda

$$\alpha^{\Delta}(t) - \beta^{\Delta}(t) < f(t, \alpha(t) - f\big(t, \beta(t)\big) = 0 \tag{3.20}$$

dır. Türev tanımını kullanarak $1 < i < n$ için

$$\alpha_i^{\Delta}\big(\sigma(t)\big) - \alpha_i(s) - \alpha_i^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t-s)| \tag{3.21}$$

$$\beta_i^{\Delta}\big(\sigma(t)\big) - \beta_i(s) - \beta_i^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \geq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t-s)| \tag{3.22}$$

Elde ederiz. Buradan

$$\alpha_i^{\Delta}\big(\sigma(t)\big) - \alpha_i(s) - \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t-s)| \leq \alpha_i^{\Delta}(t)\big(\sigma(t-s)\big) \tag{3.23}$$

$$-\beta_i^{\Delta}\big(\sigma(t)\big) + \beta_i(s) + \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t-s)| \leq -\beta_i^{\Delta}(t)\big(\sigma(t-s)\big) \tag{3.24}$$

olur ve

$$(\alpha_i^{\Delta}(t) - \beta_i^{\Delta}(t))\big(\sigma(t-s)\big) \geq (\alpha_i^{\Delta}\big(\sigma(t)\big) - \beta_i^{\Delta}\big(\sigma(t)\big)) - \alpha_i(s) - \beta_i(s) \tag{3.25}$$

Dır. $\sigma(t-s) \geq t - s > 0$ olduğundan dolayı $A(s)$ doğrudur ve $\alpha(t) = \beta(t)$ dir. Bu durumda

$$\alpha_i^{\Delta}(t) - \beta_i^{\Delta}(t) > 0 \tag{3.26}$$

İfadesini elde ederiz ki bu (3.19) ile çelişir.

Böylelikle indüksiyon prensibi ile $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha(t) < \beta(t)$ olduğunu göstermiş oluruz [9].

Tanım 3.2.5:
$f: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^{k} xD \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ fonksiyonu sağ sürekli olmak üzere, $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^{k} xD$ bölgesinde, (t, u), $(t, v) \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^{k} xD$ ve $u > v$ için eğer;

$$f(t, u) - f(t, v) \leq K(u - v) \tag{3.27}$$

olacak şekilde bir pozitif K sabiti varsa f tek yönlü Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 3.2.6:

$f: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^{k} xD \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ fonksiyonu olmak üzere, $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^{k} xD$ bölgesinde, (t, u), $(t, v) \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^{k} xD$ için eğer;

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K|u - v| \tag{3.28}$$

olacak şekilde bir pozitif K sabiti varsa f Lipschitz şartını sağlar.

Burada K Lipschitz sabiti olarak adlandırılır [10].

Teorem 3.2.7:

$\mathbb{T}$ minimal elemanı $t_0 \geq 0$ olan ve maksimal elemanı olmayan bir zaman skalası olsun.

Her $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha, \beta \in C_{rd}^{1}[\mathbb{T}, \mathbb{R}^n]$

$$\begin{gathered} \alpha^{\Delta}(t) \leq f(t, \alpha(t)), \alpha \leq u_0 \\ \beta^{\Delta}(t) \geq f(t, \beta(t)), \quad \beta(t_0) \geq u_0 \end{gathered} \tag{3.29}$$

$f \in C_{rd}[\mathbb{T}x\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $f(t,u)$ u ya göre azalmayan yarı monoton

fonksiyon ve her $t \in \mathbb{T}$, $1 \leq i \leq m$ için $f_i(t,u)\mu^*(t) + u_i \quad u_i$ ye göre azalmayan olsun, aynı zamanda $f(t,u)$ aşağıdaki şartı sağlasın:

$$f_i(t,u) - f_i(t,v) \leq K \sum_{i=1}^{n}(u_i - v_i), \quad u \geq v, \;\; K > 0 \tag{3.30}$$

Bu durumda $\alpha(t_0) \leq \beta(t_0)$ olduğunda $\alpha(t) \leq \beta(t)$ dir.

İspat: $A(t): \alpha(t) \leq \beta(t), t \in \mathbb{T}$ ifadesine indüksiyon prensibini uygulayalım:

(i). $\alpha(t_0) \leq \beta(t_0)$ olduğundan $A(t_0)$ sağlandığı aşikardır.

(ii). t sağ saçılmış nokta ve $A(t)$ doğru olsun. $A(\sigma(t))$ nin de doğru olduğunu göstermeliyiz. Teorem 2.2.2 yi kullanarak

$$\alpha^\Delta(t) = \frac{\alpha(\sigma(t)) - \alpha(t)}{\mu^*(t)} \tag{3.31}$$

$$\beta^\Delta(t) = \frac{\beta(\sigma(t)) - \beta(t)}{\mu^*(t)} \tag{3.32}$$

Olur. Buradan

$$\alpha^\Delta(t) - \beta^\Delta(t) = \frac{\alpha(\sigma(t)) - \alpha(t) - \beta(\sigma(t)) + \beta(t)}{\mu^*(t)} \tag{3.33}$$

$$\alpha(\sigma(t)) - \beta((\sigma(t)) = [\alpha^\Delta(t) - \beta^\Delta(t)]\mu^*(t) + \alpha(t) - \beta(t) \tag{3.34}$$

elde ederiz. $f(t,u)\mu^*(t) + u$, u ya göre azalmayan fonksiyon ve $A(t)$ doğru olduğundan

$$\alpha(\sigma(t)) - \beta((\sigma(t)) \leq [f(t,\alpha(t)) - f(t,\beta(t))]\mu^*(t) + \alpha(t) - \beta(t) \leq 0 \tag{3.35}$$

dır. Böylece $A(\sigma(t))$ doğru olur.

(ii). t sağ yoğun nokta ve N t nin bir komşuluğu olsun. $A(t)$ nin doğru olduğunu kabul edelim. $s \geq t, s \in N$ için $A(s)$ nin de doğru olduğunu göstermeliyiz. $\tau > 0$ olmak üzere τ n boyutlu vektör $(\tau, \tau, \ldots \tau)$,

$$\beta_0(t) = \beta(t) + \tau e^{(n+1)K(t-s)} \tag{3.36}$$

denklemini düşünelim. $s \geq t, s \in N$ için $\alpha(s) < \beta_0(s)$ olduğunu göstermemiz gerekir.

Kabul edelim ki doğru olmasın. $s_0 > t, s_0 \in N$ ve $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde i indisi vardır öyle ki; $i \neq j$ için

$$\alpha_i(s_0) = \beta_{0i}(s_0) \tag{3.37}$$

$$\alpha_j(s_0) \leq \beta_{0j}(s_0) \tag{3.38}$$

$$\alpha_j(s) < \beta_{0j}(s), s \in (t, s_0) \tag{3.39}$$

dır.

$$\alpha(s_0 - \mu^*) \leq \beta_{0i}(s_0 - \mu^*) \tag{3.40}$$

olduğundan dolayı

$$\alpha(s_0 - \mu^*) - \alpha(s_0) \leq \beta_{0i}(s_0 - \mu^*) - \beta_{0i}(s_0) \tag{3.41}$$

Elde ederiz. (3.40) eşitsizliğinin her iki tarafını $\frac{1}{\mu^*}$ ile çarparsak

$$\alpha^{\Delta}(s_0) \geq \beta_{0i}^{\Delta}(s_0) \tag{3.42}$$

Buluruz. (3.35) ten dolayı

$$\beta_{0i}^{\Delta}(s_0) \geq f\big(t, \beta_i(s_0)\big) + \tau K(n+1)\tau^{(n+1)K(s-s_0)} \tag{3.43}$$

dır. (3.29) un yarı monoton özelliğini kullanarak

$$f_i\big(s_0, \alpha_1(s_0), \dots, \alpha_i(s_0), \dots, \alpha_n(s_0)\big) \tag{3.44}$$
$$\geq f_i\big(s_0, \beta_1(s_0), \dots, \beta_i(s_0), \dots, \beta_n(s_0)\big) + \tau K(n+1)e^{K(n+1)(s_0-s)}$$
$$\geq f_i\big(s_0, \beta_{01}(s_0), \dots, \beta_{0i}(s_0), \dots, \beta_{0n}(s_0)\big) + \tau K e^{K(n+1)(s_0-s)} \tag{3.45}$$
$$> f_i\big(s_0, \alpha_1(s_0), \dots, \alpha_i(s_0), \dots, \alpha_n(s_0)\big)$$

Bu çelişki $\beta_0(s) > \alpha_0(s)$ olduğunu ispatlar. τ keyfi bir sabit olduğundan $\tau \to 0$ için $s \geq t, s \in N$ $\alpha(s) \leq \beta(s)$dır. O halde $A(s)$ doğrudur.

t sol yoğun nokta ve $s < t$ için $A(s)$ doğru olsun. $A(t)$ nin de doğru olduğunu göstermemiz gerekir.

α ve β nın sağ sürekliliği ile

$$\alpha(t) = \lim_{s \to t^-} \alpha(s) \leq \lim_{s \to t^-} \beta(s) = \beta(t) \tag{3.46}$$

dir. Burada ispatı tamamlarız [8].

Şimdi çalışmamızın devamında faydalanacağımız iki sonuç verelim:

Sonuç 3.2.8:

$p \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}^n]$ için

$$p^{\Delta}(t) \leq 0,\ p(t_0) \leq 0 \tag{3.47}$$

İse $p(t) \leq 0$ dır.

Benzer şekilde eğer

$$p^{\Delta}(t) \geq 0,\ p(t_0) \geq 0 \tag{3.48}$$

ise $p(t) \geq 0$ dır.

Sonuç 3.2.9:

$t \in \mathbb{T}, M > 0$ için $p \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}^n]$ olsun. Eğer

$$p^{\Delta}(t) \leq -Mp(t), \quad p(t_0) \leq 0 \tag{3.49}$$

ise $p(t) \leq 0$ dır.

Benzer şekilde $t \in \mathbb{T}, M > 0$ için eğer

$$p^{\Delta}(t) \geq -Mp(t), \quad p(t_0) \geq 0 \tag{3.50}$$

ise $p(t) \geq 0$ dır [5].

3.3. Ekstremal Çözümler

Bu bölümde dinamik başlangıç değer problemlerinin maksimal ve minimal çözümlerinden bahsetmeden önce $K = [0, T]$ olmak üzere $f \in C[Kx\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ için

$$u' = f(t, u),\ u(0) = u_0 \tag{3.51}$$

Başlangıç değer problemini ele alalım.

Tanım 3.3.1:

$r(t)$ fonksiyonu K da (3.53) in bir çözümü olsun. Eğer her $t \in K$ ve herhangi bir $u: K \to \mathbb{R}$ çözümü için $u(t) \leq r(t)$ sağlanıyorsa r (3.53) denkleminin maksimal çözümüdür denir.

Tanım 3.3.2:

$\rho: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.53) in bir çözümü olsun. Eğer her $t \in K$ ve herhangi bir $u: K \to \mathbb{R}$ çözümü için $u(t) \geq \rho(t)$ sağlanıyorsa r (3.53) denkleminin minimal çözümüdür denir [11].

Maksimal ve minimal çözüm çiftine ekstremal çözümler denir.

Şimdi zaman skalasında dinamik denklemler için ekstremal çözüm tanımlarını verebiliriz:

$$u^{\Delta} = f(t, u), \; u(0) = u_0 \tag{3.52}$$

Denklemini göz önüne alalım:

Tanım 3.3.3:

$t \geq t_0$ $t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ için $\rho(t)$ (3.52) denkleminin bir çözümü olsun. (3.54) ün $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ aralığında herhangi bir $u(t)$ çözümü için $\rho(t) \leq u(t)$ sağlanıyorsa $\rho(t)$ (3.54) ün minimal çözümüdür denir.

Tanım 3.3.4:

$t \geq t_0$ $t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ için $r(t)$ (3.52) denkleminin bir çözümü olsun. (3.54) ün $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ aralığında herhangi bir $u(t)$ çözümü için $u(t) \leq r(t)$ sağlanıyorsa $r(t)$ (3.54) ün maksimal çözümüdür denir [12].

Teorem 3.3.5:

$f \in C_{rd}[R^0, \mathbb{R}]$ ve her $t \in [t_0, t_0 + a]$ için $f(t,u).\mu^*(t)$ u ya göre azalmayan fonksiyon olsun. Bu durumda (3.52) denkleminin $[t_0, t_0 + \alpha_1]$, $\alpha_1 > 0$ aralığında maksimal ve minimal çözümleri vardır [7].

İspat: Burada sadece maksimal çözümün varlığını ele alacağız, minimal çözümün varlığı da benzer şekilde gösterilebilir.

$0 < \varepsilon \leq \frac{b}{2}$ olsun.

$$u^{\Delta} = f(t,u) + \varepsilon, \quad u(t_0) = u_0 + \varepsilon \tag{3.53}$$

başlangıç değer problemini düşünelim. $f_\varepsilon(t,u) = f(t,u) + \varepsilon$ dır ve

$B_\varepsilon = [u \in \mathbb{R}: |u - (u_0 + \varepsilon)| \leq \frac{b}{2}]$ olmak üzere $R_\varepsilon = [t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha x B_\varepsilon]$ aralığında sağ süreklidir. $(R_\varepsilon \subset R^0)$ Teorem 3.1.8 den (3.53) denkleminin $[t_0, t_0 + \beta_1]$ aralığında bir $u(t,\varepsilon)$ çözümü vardır öyle ki $\beta_1 = min\left(\alpha, \frac{b}{2M+b}\right)$ dir.

$0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ için

$$u(t_0, \varepsilon_2) < u(t_0, \varepsilon_1) \tag{3.54}$$

$$u^{\Delta}(t, \varepsilon_2) \leq f\big(t, u(t, \varepsilon_2)\big) + \varepsilon_2 \tag{3.55}$$

olur. Buradan

$$u^{\Delta}(t, \varepsilon_1) > f\big(t, u(t, \varepsilon_1)\big) + \varepsilon_2\,, t \in [t_0, t_0 + \beta_1] \tag{3.56}$$

elde ederiz. Teorem 3.2.4 ü kullanarak

$$u(t, \varepsilon_2) < u(t, \varepsilon_1), \ \ t \in [t_0, t_0 + \beta_1] \tag{3.57}$$

buluruz. $\{u(t,\varepsilon)\}$ fonksiyon ailesi $[t_0, t_0+\beta_1]$ kapalı aralığında eşsürekli ve düzgün sınırlı olduğun için, Arzela-Ascoli teoreminden $\{\varepsilon_n\}$ dizisi vardır öyle ki $n \to \infty$ iken $\varepsilon_n \to 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} u(t,\varepsilon_n) = r(t) \tag{3.58}$$

dir. Böylece $r(t_0) = u_0$ olur.

$f(t,u)$ nun sağ sürekliliğinden dolayı $n \to \infty$ iken $f\big(t,u(t,\varepsilon_n)\big)$ $f(t,r(t))$ ye lokal düzgün yaklaşır. Bu sebepten dolayı $f(t,r(t))$ de $[t_0, t_0+\beta_1]$ aralığında sağ süreklidir. Böylece $r(t)$ nin (3.52) BDP nin bir çözümü olduğunu göstermek için terim terime integral alınabilir.

Şimdi $r(t)$ nin $[t_0, t_0+\beta_1]$ aralığında (3.52) BDP nin maksimal çözümü olduğunu gösterelim:

$u(t)$ (3.52) nin herhangi bir çözümü olsun. Bu durumda $t \in [t_0, t_0+\beta_1]$ ve $0 < \varepsilon < \frac{b}{2}$ için

$$u(t_0) = u_0 < u_0 + \varepsilon = u(t_0,\varepsilon) \tag{3.59}$$

$$u^{\Delta}(t) < f\big(t,u(t)\big) + \varepsilon \tag{3.60}$$

$$u^{\Delta}(t,\varepsilon) \geq f\big(t,u(t,\varepsilon\,)\big) + \varepsilon \tag{3.61}$$

elde ederiz. Teorem (3.2.4) den

$$u(t) < u(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0, t_0+\beta_1] \tag{3.62}$$

Elde ederiz. Buradan $\lim_{\varepsilon\to 0} u(t,\varepsilon) = r(t)$ olduğundan ispat tamamlanmıştır [7].

Şimdi, çalışmamızda da faydalandığımız önemli bir teorem vereceğiz. Karşılaştırma teoremleri dinamik eşitsizlik ile, bir dinamik denklemin minimal ve maksimal çözümlerinin hangi aralıkta bulunabileceğini tahmin etmemize yardımcı olur.

Teorem 3.3.6:

Teorem 3.3.5 in varsayımları geçerli olsun. İlaveten her $t \in [t_0, t_0 + a]$ için $m: [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olsun

$$m^{\Delta}(t) \leq f\big(t, m(t)\big),\ t \in [t_0, t_0 + a] \tag{3.63}$$

ve eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $r(t)$ (3.54) BDP nin $[t_0, t_0 + a]$ aralığında maksimal çözümü olmak üzere $m(t_0) \leq u_0$ eşitsizliği $m(t) \leq r(t)$ olmasını gerektirir [7].

İspat: $a \in \mathbb{T}^k,\ t_0 < \tau < t_0 + a$ olsun. Teorem (3.3.5) den; yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$u^{\Delta}(t) = f\big(t, u(t)\big) + \varepsilon,\ \ u(t_0) = u_0 + \varepsilon \tag{3.64}$$

denkleminin $[t_0, \tau]$ aralığında maksimal çözümü $r(t, \varepsilon)$ vardır. (3.65) ve (3.66) yı kullanarak ve teorem (3.2.4) den dolayı

$$m(t) < r(t, \varepsilon),\ \ t \in [t_0, \tau] \tag{3.65}$$

elde ederiz. Her iki tarafın $\varepsilon \to 0$ iken limiti aldığımızda

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(t, \varepsilon) = r(t) \tag{3.66}$$

olur. Böylece $m(t) \leq r(t)$ dır ki burada ispat tamamlanmış olur [7].

BÖLÜM 4. DİNAMİK BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN MONOTON İTERATİF TEKNİK

Bu bölümde alt ve üst çözümleri, zaman skalasında dinamik denklemlere uygulanan alt ve üst çözüm metodunu inceleyeceğiz. İleride monoton iteratif tekniği başlangıç değer problemlerinin ekstremal çözümlerini elde etmek için kullanacağız. Öncelikle reel analizde alt ve üst çözüm tanımını vererek başlayalım.

4.1. Alt ve Üst Çözümler

$K = [0, T]$ olmak üzere $f \in C[Kx\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ için

$$u' = f(t, u),\ u(0) = u_0 \tag{4.1}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Tanım 4.1.1:

$t \in K$ için

$$v' \leq f(t, u),\ v(0) = u_0 \tag{4.2}$$

Eşitsizliği sağlanıyorsa $v \in C^1[K, \mathbb{R}]$ fonksiyonuna (4.1) denkleminin bir alt çözümü denir.

Tanım 4.1.2:

$t \in K$ için

$$w' \geq f(t, u),\ w(0) = u_0 \tag{4.3}$$

Eşitsizliği sağlanıyorsa $w \in C^1[K, \mathbb{R}]$ fonksiyonuna (4.1) denkleminin bir üst çözümü denir [11].

Teorem 4.1.3:

$v, w \in C^1[K, \mathbb{R}]$ (4.1) in sırasıyla alt ve üst çözümleri olsun. $a \geq b$ için

$$f(t, a) - f(t, b) \leq M(a - b), \quad (M > 0) \tag{4.4}$$

sağlansın. Bu durumda $v(0) \leq w(0)$ ise $t \in K$ için $v(t) \leq w(t)$ dir.

İspat: İspatı için bkz [11].

Teorem 4.1.4:

Teorem 4.1.3 ün kabulleri sağlansın. Bu durumda (4.1) denkleminin

$$v(0) \leq u_0 \leq w(0) \tag{4.5}$$

Olacak şekilde her $u(t)$ çözümü K da

$$v(t) \leq u(t) \leq w(t) \tag{4.6}$$

eşitsizliğini sağlar [11].

Şimdi zaman skalasında dinamik başlangıç değer problemi için alt ve üst çözüm metodunu inceleyeceğiz. Alt ve üst çözümler, çözümler için alt ve üst sınır olarak kullanılırlar ve alt ve üst çözüm metodu monoton iteratif teknikle birleştiğinde, diferansiyel denklemler için kapalı bir kümede oldukça kullanışlı varlık sonuçları üretir. Önce gerekli tanımları verelim.

$f \in C_{rd}[\mathbb{T}x\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ $t = 0$ minimal eleman ve $t = \mathbb{T}$ sol saçılmış olmayan maksimal eleman olmak üzere

$$u^{\Delta}(t) = f(t, u) \quad u(0) = u_0 \tag{4.7}$$

Dinamik başlangıç değer problemini düşünelim.

Tanım 4.1.5:

$\alpha \in C_{rd}^{1}[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ için

$$\alpha^{\Delta} \leq f(t, \alpha), \ \alpha(0) \leq u_0 \tag{4.8}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa (4.7) BDP nin alt çözümüdür.

Tanım 4.1.6:

$\beta \in C_{rd}^{1}[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ için

$$\beta^{\Delta} \geq f(t, \beta), \ \beta(0) \geq u_0 \tag{4.9}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa (4.7) BDP nin üst çözümüdür [13].

$\alpha \leq \beta$ olacak şekilde α, β alt ve üst çözümlerinin varlığını bildiğimizde

$$S = [(t, u) \colon \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \ t \in \mathbb{T}] \tag{4.10}$$

kapalı kümesinde bir çözümün var olduğunu söyleyebiliriz. Böyle bir sonucu ispatlamak için aşağıdaki önermeyi vermeliyiz.

Önerme 4.1.7:

$f \in C_{rd}[\mathbb{T}x\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ve $f(t,u)$ her yerde sınırlı olmak üzere (4.7) sistemini düşünelim. Bu durumda (4.7) nin $\mathbb{T}$ zaman skalasında bir $u(t)$ çözümü vardır [8].

Teorem 4.1.8:

Kabul edelim ki

i. $\alpha, \beta \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ (4.7) nin alt ve üst çözümleri olmak üzere $\alpha(t) \leq \beta(t)$ sağlansın.
ii. $f \in C_{rd}[S, \mathbb{R}]$ fonksiyonu S de sınırlı olsun.

Bu durumda (4.7) nin $\alpha(0) \leq u_0 \leq \beta(0)$ sağlayacak şekilde bir $u(t)$ çözümü vardır öyle ki $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ dır [14].

İspat: $G: \mathbb{T}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$G(t,u) = maks\left[\alpha(t), \min\left(u, \beta(t)\right)\right] \tag{4.11}$$

Fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $f(t, G(t,u))$ S de sınırlı olan (f, S de sınırlı olduğu için) $\mathbb{T}x\mathbb{R}$ ye f nin bir sağ sürekli genişlemesini tanımlar. Önerme (4.1.7) yi kullanarak $\mathbb{T}$ de,

$$u^{\Delta} = f\left(t, G(t,u)\right), \quad u(0) = u_0 \tag{4.12}$$

Denkleminin bir çözümü olduğunu söyleriz.

Şimdi bu çözümün $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. $\tau > 0$ için $\beta_\tau(t) = \beta(t) + \tau(1+t)$, $\alpha_\tau(t) = \alpha(t) - \tau(1+t)$ eşitliklerini göz önüne alalım. Bunu ispatlamak için

$$\{A(t): \alpha_\tau(t) < u(t) < \beta_\tau(t),\ t \in \mathbb{T}\} \tag{4.13}$$

İfadesi için indüksiyon prensibini uygulayalım:

i. $\alpha_\tau(0) < u(0) < \beta_\tau(0)$ olduğu aşikardır. α ve β (4.7) denkleminin alt ve üst çözümleri olduğundan dolayı $\alpha(0) < u(0) < \beta(0)$ dır. Dolayısıyla $\alpha_\tau(0) \leq \alpha(0) < u(0) < \beta(0) \leq \beta_\tau(0)$ olur.

ii. (t) sağ saçılmış ve $A(t)$ doğru olsun. $A(\sigma(t))$ nin de doğru olduğunu göstermemiz gerekir. Kabul edelim ki $\{\alpha_\tau(\sigma(t)) < u(\sigma(t)) < \beta_\tau(\sigma(t))$ doğru olmasın. $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ için $[0, \sigma(t)]$ aralığında $\alpha_\tau(t) < u(t) < \beta_\tau(t)$ ve $u(\sigma(t)) = \beta_\tau(\sigma(t))$ olsun. Öyleyse $u(\sigma(t)) > \beta(\sigma(t))$ dır ve $G(\sigma(t), u((\sigma(t)) = maks[\alpha(\sigma(t), \min(u(\sigma(t)), \beta(\sigma(t)))] = \beta(\sigma(t))$ olur. Aynı zamanda

$$\alpha(\sigma(t) \leq G(\sigma(t)), \quad u(\sigma(t)) \leq \beta(\sigma(t)) \tag{4.14}$$

dır. Böylelikle β üst çözüm olduğu için

$$\beta^\Delta(\sigma(t)) \geq f(\sigma(t), G(\sigma(t), u(\sigma(t)))) = u^\Delta(\sigma(t)) \tag{4.15}$$

ve

$$\beta_\tau^\Delta(\sigma(t)) > \beta^\Delta(\sigma(t)) \tag{4.16}$$

olduğundan dolayı

$$\beta_\tau^\Delta(\sigma(t)) > u^\Delta(\sigma(t)) \tag{4.17}$$

elde ederiz ki $u(\sigma(t)) = \beta_\tau(\sigma(t))$ olduğundan dolayı

$$\frac{\beta_\tau(\sigma(t)) - \beta_\tau(\sigma(t) - \mu^*(t))}{\mu^*(t)} > \frac{u(\sigma(t)) - u(\sigma(t) - \mu^*(t))}{\mu^*(t)}) \tag{4.18}$$

Olur. Buradan

$$\beta_\tau(\sigma(t)-\mu^*(t)) < u(\sigma(t)-\mu^*(t)) \tag{4.19}$$

eşitsizliği buluruz ve bu $u(t)=\beta_\tau(t)$ kabulüyle çelişir. O halde $\alpha_\tau(\sigma(t)) \leq u(\sigma(t)) \leq \beta_\tau(\sigma(t))$ dır. $A(\sigma(t))$ doğrudur.

iii. t sağ yoğun nokta olsun ve t nin sağ U komşuluğundan sağ saçılmış olma durumunda $\sigma(t)$ yerini alacak olan bir t_1 seçelim. Buradan $\alpha_\tau(t) < u(t) < \beta_\tau(t)$ sonucuna varırız. Böylece $s \in U, s \geq t$ için $A(s)$ doğrudur.

iv. t sol yoğun nokta ve her $s \in [0,t)$ için $A(s)$ doğru olsun. α, u, β fonksiyonları sağ sürekli olduğu için sol limit vardır ve

$$\lim_{s\to t^-} \alpha_\tau(s) < \lim_{s\to t^-} u(s) < \lim_{s\to t^-} \beta_\tau(t) \tag{4.20}$$

eşitsizliği $\alpha_\tau(t) \leq u(t) \leq \beta_\tau(t)$ durumunu getirir.

Böylece $A(t)$ doğru olur. $\tau \to 0^+$ iken $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ eşitsizliğini elde ederiz [5].

Şimdi (4.7) denkleminin çözümlerine yakınsayan monoton dizileri veren yöntemden bahsedeceğiz. Bu dizilerin her bir elemanı belirli bir lineer dinamik denklemin çözümlerini meydana getirdiği için önemli ve kullanışlı bir metottur.

Teorem 4.1.9:

$f \in C_{rd}[\mathbb{T}x\mathbb{R},\mathbb{R}]$ ve $\alpha_0, \beta_0 \in C_{rd}^1[\mathbb{T},\mathbb{R}]$ olmak üzere (4.7) nin alt ve üst çözümleri olsun öyle ki $\alpha_0 \leq \beta_0$ dır. İlaveten t sağ yoğun nokta ise $L \geq 0$ ve t sağ saçılmış nokta ise $L \leq 0$ olmak üzere

$$f(t,u) - f(t,v) \geq -L(u-v),\ \alpha_0 \leq v \leq u \leq \beta_0 \tag{4.21}$$

Eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonunu kabul edelim. Bu durumda monoton $\{\alpha_m(t)\}$, $\{\beta_m(t)\}$ dizileri vardır öyle ki $m \to \infty$ iken $\alpha_m \to \rho$ ve $\beta_m \to r$ olacak şekilde lokal düzgün ve monoton yakınsar. Burada ρ, r (4.7) nin minimal ve maksimal çözümleridir[5].

İspat: Her $\gamma \in C_{rd}[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ ve $\alpha_0 \leq \gamma \leq \beta_0$ için

$$u^{\Delta} = f(t,\gamma) - L(u-\gamma), \;\; u(0) = u_0 \tag{4.22}$$

Lineer dinamik denklemini göz önüne alalım. (4.21) de v yerine γ yazdığımızda

$$f(t,u) - f(t,\gamma) \geq -L(u-\gamma) \tag{4.23}$$

Buluruz ve bu da

$$f(t,u) \geq f(t,\gamma) - L(u-\gamma) = u^{\Delta} \tag{4.24}$$

Anlamına gelir. O halde (4.22) nin bir u çözümü vardır.

$u = A\gamma$ olsun. Bu gösterimi $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ dizilerini tanımlamak için kullanacağız.

i. $\alpha_0 \leq A\alpha_0, \; \beta_0 \geq A\beta_0$
ii. $[\alpha_0, \beta_0] = \{u \in C_{rd}[\mathbb{T}, \mathbb{R}] : \alpha_0 \leq u \leq \beta_0\}$ (4.25)

bölgesinde A monoton operatördür.

(i) ve (ii) yi göstermeliyiz. (i) yi göstermek için α_1 (4.22) nin tek çözümü ve $\gamma = \alpha_0$ olmak üzere $A\alpha_0 = \alpha_1$alalım. (4.22) den ,

$$\alpha_1^{\Delta} = f(t,\alpha_0) - L(\alpha_1 - \alpha_0), \;\; \alpha_1(0) = u_0 \tag{4.26}$$

olur. $\varphi = \alpha_1 - \alpha_0$ alalım. α_0 bir alt çözüm olduğu için

$$\varphi^\Delta = \alpha_1^\Delta - \alpha_0^\Delta \geq f(t,\alpha_0) - L(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t,\alpha_0) = -L\varphi \tag{4.27}$$

Elde ederiz. $\varphi(0) \geq 0$ olduğundan (3.2.8) i kullanarak $\varphi(t) \geq 0$ ve dolayısıyla $\alpha_0 \leq A\alpha_0$ buluruz.

Şimdi $\beta_0(t) \geq \beta_1(t)$ göstermeliyiz. Bunun için β_1 (4.22) nin tek çözümü ve $\gamma = \beta_0$ olmak üzere $A\beta_0 = \beta_1$ alalım. $\varphi = \beta_0 - \beta_1$ olsun. β_0 üst çözüm olduğundan dolayı (4.22) yi kullanarak

$$\varphi^\Delta = \beta_0^\Delta - \beta_1^\Delta \geq f(t,\beta_0) - f(t,\beta_0) + L(\beta_1 - \beta_0) = L\varphi \tag{4.28}$$

Elde ederiz. $\varphi(0) \geq 0$ olduğundan sonuç (3.2.9) u kullanarak $\varphi(t) \geq 0$ olur. O halde $\beta_0 \geq A\beta_0$ dır.

(ii) yi göstermek için $\gamma_1 \leq \gamma_2$olacak şekilde $\gamma_1, \gamma_2 \in [\alpha_0, \beta_0]$ seçelim. $u_1 = A\gamma_1$ ve $u_2 = A\gamma_2$ olsun. $\varphi = u_2 - u_1$ alarak $u_1 \leq u_2$ olduğunu gösterelim. (4.22) den

$$u_1 = f(t,\gamma_1) - L(u_1 - \gamma_1), \qquad u_1(0) = u_0 \tag{4.29}$$

$$u_2 = f(t,\gamma_2) - L(u_2 - \gamma_1), \qquad u_2(0) = u_0 \tag{4.30}$$

olur. Bu durumda $\varphi(0) = 0$ ve

$$\begin{aligned}\varphi^\Delta = u_2^\Delta - u_1^\Delta &= f(t,\gamma_2) - L(u_2 - \gamma_2) - f(t,\gamma_1) + L(u_1 - \gamma_1)\\ &\geq -L(\gamma_2 - \gamma_1) - L(u_2 - \gamma_2) + L(u_1 - \gamma_1)\\ &= -L\varphi \end{aligned} \tag{4.31}$$

Dır. Buradan $\varphi(t) \geq 0$ ve $A\gamma_2 \geq A\gamma_1$ elde ederiz.

Şimdi $\alpha_m = A\alpha_{m-1}$, $\beta_m = A\beta_{m-1}$ dizilerini tanımlayalım.

$$\alpha_0 \le \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_m \le \beta_m \le \cdots \le \beta_1 \le \beta_0 \tag{4.32}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu dizilerin düzgün sınırlı, eşsürekli ve düzgün yakınsak olduğunu göstermemiz gerekir. α_0 ve β_0 ın sınırlı olduğu kabulü ile $K_1, K_2 > 0$ vardır öyle ki $t \in \mathbb{T}$ için $|\alpha_0\ (\mathrm{t})| \le K_1$ ve $|\beta_0\ (\mathrm{t})| \le K_2$ dır. Her $m > 0$ için $\alpha_0\ (\mathrm{t}) \le \beta_m\ (\mathrm{t}) \le \beta_0\ (\mathrm{t})$ olduğundan dolayı $\{\beta_m(t)\}$ düzgün sınırlıdır. Benzer şekilde $\{\alpha_m(t)\}$ nin de düzgün sınırlı olduğu gösterilebilir.

$\{\beta_m(t)\}$ nin eşsürekli olduğunu gösterelim. $0 \le t_1 \le t_2$ ve $m > 0$ için

$$\begin{aligned}
&|\beta_m\ (t_1) - \beta_m(t_2)| \\
&\qquad = \left| x_0 + \int_0^{t_1} f\big(s, \beta_{m-1}(s)\big) - L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))\Delta s - (x_0 \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^{t_2} f\big(s, \beta_{m-1}(s)\big) - L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))\Delta s) \right| \\
&\qquad = \left| \int_0^{t_1} f\big(s, \beta_{m-1}(s)\big) - L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))\Delta s \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^{t_2} f\big(s, \beta_{m-1}(s)\big) + L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))\Delta s) \right| \\
&\qquad \le \left|f\big(s, \beta_{m-1}(s)\big)\right| + \left|+L\big(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s)\big)\right|\Delta s \\
&\qquad + \int_0^{t_2} \left|f\big(s, \beta_{m-1}(s)\big)\right| + |+L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))|\,\Delta s
\end{aligned}$$

Olur. $\{\alpha_m(t)\}$, $\{\beta_m(t)\}$ düzgün sınırlı olduğundan m den bağımsız bir $\ddot{K}$ vardır öyle ki

$$|\beta_m\ (t_1) - \beta_m(t_2)| \le \ddot{K}|t_1 - t_2| \tag{4.33}$$

Dır. Buradan $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{\ddot{K}}$ vardır öyle ki $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $|\beta_m\,(t_1) - \beta_m(t_2)| < \varepsilon$ dur. Aynı şekilde $\{\alpha_m(t)\}$ nin de eşsürekli olduğunu gösterebiliriz.

Arzela- Ascoli teoremini kullanarak $\{\alpha_{m_k}(t)\}$ ve $\{\beta_{m_k}(t)\}$ dizileri vardır öyle ki ρ ve r ye düzgün yakınsarlar. O halde $\{\alpha_m(t)\}, \{\beta_m(t)\}$ $\rho(t)$ ve $r(t)$ ye lokal düzgün ve monoton yakınsarlar.

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \alpha_m(t) &= \rho(t) \\ \lim_{m\to\infty} \beta_m(t) &= r(t) \end{aligned} \tag{4.34}$$

olur. Şimdi $\rho(t)$ ve $r(t)$ nin (4.7) nin çözümleri olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha_{m+1}^{\Delta}(t) = f\big(t, \alpha_m(t)\big) - L\big(\alpha_{m+1}(t) - \alpha_m(t)\big), \quad \alpha_{m+1}(0) = u_0 \tag{4.35}$$

$$\beta_{m+1}^{\Delta}(t) = f\big(t, \beta_m(t)\big) - L\big(\beta_{m+1}(t) - \beta_m(t)\big), \quad \beta_{m+1}(0) = u_0 \tag{4.36}$$

Olmak üzere (4.35) ve (4.36) denklemlerin 0 dan t ye delta integralini alalım:

$$\alpha_{m+1}(t) = u_0 + \int_0^t f\big(s, \alpha_m(s)\big) - L\big(\alpha_{m+1}(s) - \alpha_m(s)\big)\Delta s \tag{4.37}$$

$$\beta_{m+1}(t) = u_0 + \int_0^t f\big(s, \beta_m(s)\big) - L\big(\beta_{m+1}(s) - \beta_m(s)\big)\Delta s \tag{4.38}$$

Şimdi $m \to \infty$ iken limit ve daha sonra delta türevini alarak (4.7) denkleminin $\rho(t)$ ve $r(t)$ çözümlerini elde ederiz. Bu durumda

$$\rho^{\Delta}(t) = f\big(t, \rho(t)\big), \quad \rho(0) = u_0\,) \tag{4.39}$$

$$r^{\Delta}(t) = f\big(t, r(t)\big), \quad r(0) = u_0 \tag{4.40}$$

Olur. Son olarak $\rho(t)$ ve $r(t)$ nin (4.7) denkleminin minimal ve maksimal çözümleri olduğunu göstereceğiz. Bunun için eğer $u(t)$ (4.7) nin herhangi bir çözümü ise; $\rho(t) \leq u(t) \leq r(t)$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermemiz gerekir. $\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$ olduğunu biliyoruz. $m > 0$ için $\alpha_m \leq u \leq \beta_m$ olsun. $\varphi = u - \alpha_{m+1}$ alalım. (4.21) den

$$\begin{aligned}\varphi^{\Delta} = u^{\Delta} - \alpha_{m+1}^{\Delta} &= f(t,u) - f(t,\alpha_m) + L(\alpha_{m+1} - \alpha_m)\\ &\geq -L(u - \alpha_m) + L(\alpha_{m+1} - \alpha_m) = -L(u - \alpha_m)\\ &= -L\varphi \qquad (4.41)\end{aligned}$$

Olur. $\varphi(0) = 0$ olduğundan sonuç (3.29) dan $\alpha_{m+1} \leq u$ buluruz. Aynı şekilde $\varphi = \beta_{m+1} - u$ alarak ve (4.21) i kullanarak

$$\begin{aligned}\varphi^{\Delta} = \beta_{m+1}^{\Delta} - u^{\Delta} &= f(t,\beta_m) - L(\beta_{m+1} - \beta_m) - f(t,u)\\ &\geq -L(\beta_m - u) - L(\beta_{m+1} - \beta_m)\\ &= -L\varphi \qquad (4.42)\end{aligned}$$

$(0) = 0$ olduğundan ve sonuç (3.23) den $u \leq \beta_{m+1}$ elde ederiz. Böylece $\alpha_{m+1} \leq u \leq \beta_{m+1}$ dır. $m \to \infty$ iken $\rho(t) \leq u \leq r(t)$ olur ve ispatı tamamlarız [15].

Sonuç 4.1.10:

Teorem 4.1.9 un kabullerine ilave olarak

$$f(t,u) - f(t,v) \leq L(u - v), \;\; \alpha_0 \leq v \leq u \leq \beta_0 \qquad (4.43)$$

Olsun. Bu durumda $\rho(t) = u = r(t)$ (4.7) BDP nin tek çözümüdür [16].
İspat: İspatı için bkz [16].

BÖLÜM 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ MONOTON İTERATİF TEKNİK

Monoton iteratif teknik alt ve üst çözüm metoduyla birleştiğinde, ele alınan denklemin çözümünü elde etmek için esnek bir mekanizma sunar. Biz bu bölümde alt ve üst çözüm çiftlerini kullanarak monoton metodu genelleştirdik. Monoton metodun, problem üç monoton fonksiyonun farkından oluştuğu duruma genişletmenin mümkün olup olmayacağı sorusu ile yola çıktık. Alt ve üst çözüm çiftinin muhtemel 7 versiyonunu da düşünerek iteratif teknik oluşturmayı hedefledik. Bu bölümde [17], [18], [19], [20] çalışmalarından ilham aldık.

5.1. Genelleştirilmiş Monoton İteratif Teknik

$$u^{\Delta}(t) = f_1(t,u) - f_2(t,u) - f_3(t,u),\ u(0) = u_0 \tag{5.1}$$

başlangıç değer problemini düşünerek aşağıdaki tanımları yapalım:

Tanım 5.1.1: α_0 , $\beta_0 \in C^1_{rd}[\mathbb{T},\mathbb{R}]$ olsun. Eğer $t \in \mathbb{T}$ için α_0 , β_0;

$$\begin{aligned} \alpha_0^{\Delta} &\leq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0) \\ \beta_0^{\Delta} &\geq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0) \end{aligned} \tag{5.2}$$

şartlarını sağlarsa α_0 ve β_0 a (5.1) denkleminin doğal alt ve üst çözümleri denir.

(i)

$$\begin{aligned} \alpha_0^{\Delta} &\leq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0) \\ \beta_0^{\Delta} &\geq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0) \end{aligned} \tag{5.3}$$

şartlarını sağlarsa α_0 ve β_0 a (5.1) denkleminin I. tip alt ve üst çözüm çifti denir.

(ii)

$$\begin{aligned}\alpha_0^{\Delta} &\leq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\alpha_0)\\ \beta_0^{\Delta} &\geq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\beta_0)\end{aligned} \tag{5.4}$$

şartlarını sağlarsa α_0 ve β_0 a (5.1) denkleminin II. tip alt ve üst çözüm çifti denir.

(iii)

$$\begin{aligned}\alpha_0^{\Delta} &\leq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\beta_0)\\ \beta_0^{\Delta} &\geq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\alpha_0)\end{aligned} \tag{5.5}$$

şartlarını sağlarsa α_0 ve β_0 a (5.1) denkleminin III. tip alt ve üst çözüm çifti denir.

(iv)

$$\begin{aligned}\alpha_0^{\Delta} &\leq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\alpha_0)\\ \beta_0^{\Delta} &\geq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\beta_0)\end{aligned} \tag{5.6}$$

şartlarını sağlarsa α_0 ve β_0 a (5.1) denkleminin IV. tip alt ve üst çözüm çifti denir.

(v)

$$\begin{aligned}\alpha_0^{\Delta} &\leq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\beta_0)\\ \beta_0^{\Delta} &\geq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\alpha_0)\end{aligned} \tag{5.7}$$

şartlarını sağlarsa α_0 ve β_0 a (5.1) denkleminin V. tip alt ve üst çözüm çifti denir.

(vi)

$$\begin{aligned}\alpha_0^{\Delta} &\leq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0)\\ \beta_0^{\Delta} &\geq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0)\end{aligned} \tag{5.8}$$

şartlarını sağlarsa α_0 ve β_0 a (5.1) denkleminin VI. tip alt ve üst çözüm çifti denir.

(vii)

$$\alpha_0^{\Delta} \leq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0)$$
$$\beta_0^{\Delta} \geq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0) \quad (5.9)$$

şartlarını sağlarsa α_0 ve β_0 a (5.1) denkleminin VII.tip alt ve üst çözüm çifti denir.

Tanım 5.1.2: $v,\ w \in C_{rd}^1[\mathbb{T},\mathbb{R}]$ fonksiyonları eğer;

$$v^{\Delta}(t) = f_1(t,v(t)) - f_2\big(t,v(t)\big) - f_3\big(t,v(t)\big), v(0) = v_0$$
$$w^{\Delta}(t) = f_1(t,w(t)) - f_2\big(t,w(t)\big) - f_3\big(t,w(t)\big), w(0) = w_0 \quad (5.10)$$

İse doğal çözümler denir.

$$v^{\Delta}(t) = f_1(t,w(t)) - f_2\big(t,v(t)\big) - f_3\big(t,v(t)\big), v(0) = v_0$$
$$w^{\Delta}(t) = f_1(t,v(t)) - f_2\big(t,w(t)\big) - f_3\big(t,w(t)\big), w(0) = w_0 \quad (5.11)$$

İse I. tip çözüm çifti denir.

$$v^{\Delta}(t) = f_1(t,v(t)) - f_2\big(t,w(t)\big) - f_3\big(t,v(t)\big), v(0) = v_0$$
$$w^{\Delta}(t) = f_1(t,w(t)) - f_2\big(t,v(t)\big) - f_3\big(t,w(t)\big), w(0) = w_0 \quad (5.12)$$

İse II. tip çözüm çifti denir.

$$v^{\Delta}(t) = f_1(t,v(t)) - f_2\big(t,v(t)\big) - f_3\big(t,w(t)\big), v(0) = v_0$$
$$w^{\Delta}(t) = f_1(t,w(t)) - f_2\big(t,w(t)\big) - f_3\big(t,v(t)\big), w(0) = w_0 \quad (5.13)$$

İse III. tip çözüm çifti denir.

$$v^{\Delta}(t) = f_1(t,w(t)) - f_2\big(t,w(t)\big) - f_3\big(t,v(t)\big), v(0) = v_0$$
$$w^{\Delta}(t) = f_1(t,v(t)) - f_2\big(t,v(t)\big) - f_3\big(t,w(t)\big), w(0) = w_0 \quad (5.14)$$

İse IV. tip çözüm çifti denir.

$$v^{\Delta}(t) = f_1(t,w(t)) - f_2\big(t,v(t)\big) - f_3\big(t,w(t)\big), v(0) = v_0$$
$$w^{\Delta}(t) = f_1(t,v(t)) - f_2\big(t,w(t)\big) - f_3\big(t,v(t)\big), w(0) = w_0 \quad (5.15)$$

İse V. tip çözüm çifti denir.

$$v^{\Delta}(t) = f_1(t, v(t)) - f_2\big(t, w(t)\big) - f_3\big(t, w(t)\big), v(0) = v_0$$
$$w^{\Delta}(t) = f_1(t, w(t)) - f_2\big(t, v(t)\big) - f_3\big(t, v(t)\big), w(0) = w_0 \tag{5.16}$$

İse VI. tip çözüm çifti denir.

$$v^{\Delta}(t) = f_1(t, w(t)) - f_2\big(t, w(t)\big) - f_3\big(t, w(t)\big), v(0) = v_0$$
$$w^{\Delta}(t) = f_1(t, v(t)) - f_2\big(t, v(t)\big) - f_3\big(t, v(t)\big), w(0) = w_0 \tag{5.17}$$

İse VII. tip çözüm çifti denir.

Tanım 5.1.3: Her v, w çözüm çifti için $x \geq \rho, r \geq w$ sağlanıyorsa $\rho, r \in C^1_{rd}[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ çözüm çiftine minimal ve maksimal çözüm çifti denir [5].

İnceleyeceğimiz sıradaki teoremde (5.1) denkleminin VI. tip ekstremal çözümlerine düzgün ve monoton yakınsayan dizileri elde edeceğiz. Bunun için VI. tip alt ve üst çözüm çiftinden faydalanacağız.

Teorem 5.1.4: $\alpha_0\ ve\ \beta_0$ (5.1) denkleminin VI. tip alt ve üst çözüm çifti olsun ve $\alpha_0(t) \leq u \leq \beta_0(t)$ şartını sağlasın.

$f_1,\ f_2\ ve\ f_3\ \in C_{rd}\ [T^k x\mathbb{R}, \mathbb{R}]$; $f_1(t, u),\ f_2(t, u)$ ve $f_3(t, u)$ u ya göre azalmayan fonksiyonlardır. Bu durumda

$\{\alpha_m(t)\}$, $\{\beta_m(t)\}$ monoton alt dizileri vardır öyle ki $\alpha_m(t) \rightarrow$ ρ(t) ve $\beta_m(t) \rightarrow r(t)$ düzgün ve monoton yakınsar.

$\rho(t)$ ve $r(t)$ (5.1) denkleminin VI. tip minimal ve maksimal çözüm çiftidir ve aşağıdaki sistemi sağlar:

$$\rho^{\Delta}(t) = f_1\big(t, \rho(t)\big) - f_2\big(t, r(t)\big) - f_3\big(t, r(t)\big),\ \ \rho(0) = u_0$$
$$r^{\Delta}(t) = f_1\big(t, r(t)\big) - f_2\big(t, \rho(t)\big) - f_3\big(t, \rho(t)\big),\ \ r(0) = u_0 \tag{5.18}$$

İspat: $\forall m \geq 0$

$$\alpha_{m+1=}^{\Delta} f_1(t,\alpha_m) - f_2(t,\beta_m) - f_3(t,\beta_m),\ \ \alpha_{m+1}(0) = u_0$$
$$\beta_{m+1=}^{\Delta} f_1(t,\beta_m) - f_2(t,\alpha_m) - f_3(t,\alpha_m), \beta_{m+1}(0) = u_0 \qquad (5.19)$$

sistemini düşünelim.

$\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$ olduğu aşikardır.

$m = 0$ için (5.19) dan

$$\alpha_{1=}^{\Delta} f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0), \alpha_1(0) = u_0$$
$$\beta_{1=}^{\Delta} f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0), \beta_1(0) = u_0 \qquad (5.20)$$

olur. Öncelikle

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq u \leq \beta_1 \leq \beta_0 \qquad (5.21)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\varphi = \beta_1 - \beta_0$ alalım.

$$\varphi(0) = \beta_1(0) - \beta_0(0) \qquad (5.22)$$
$$= u_0 - \beta_0$$
$$\leq 0$$

dır.

$$\varphi^{\Delta} = \beta_1^{\Delta} - \beta_0^{\Delta}$$
$$\leq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0) - f_1(t,\beta_0) + f_2(t,\alpha_0) + f_3(t,\alpha_0) \qquad (5.23)$$
$$\leq 0$$

dır.

$\varphi(t) \ \leq 0$ olduğundan (3.2.8) den $\beta_1 \leq \beta_0$ olur.

Şimdi $\varphi = \alpha_0 - \alpha_1$ olsun.

$$\varphi(0) = \alpha_0(0) - \alpha_1(0)$$
$$= \alpha_0 - u_0$$

≤ 0

dır.

$$\varphi^{\Delta}=\alpha_0^{\Delta}-\alpha_1^{\Delta}$$
$$\leq f_1(t,\alpha_0)-f_2(t,\beta_0)-f_3(t,\beta_0)-f_1(t,\alpha_0)+f_2(t,\beta_0)+f_3(t,\beta_0) \tag{5.24}$$
$$\leq 0$$

olur.

f_1, f_2 ve f_3 azalmayan fonksiyon olduğundan $\varphi(t) \leq 0$ olur. Bu durumda $\alpha_0 \leq \alpha_1$ gelir.

Şimdi $\varphi = u - \beta_1$ olsun.

$\varphi(0) = u_0 - \beta_1(0) = 0$ dır.

$$\varphi^{\Delta} = u^{\Delta} - \beta_1^{\Delta}$$
$$\leq f_1(t,u)-f_2(t,u)-f_3(t,u)-f_1(t,\beta_0)\ f_2(t,\alpha_0)+f_3(t,\alpha_0) \tag{5.25}$$
$$\leq 0$$

olur.

$\varphi(0) \leq 0$ ve $\varphi^{\Delta} \leq 0$ olduğundan (3.2.8) den $\varphi(t) \leq 0$ olur. O halde $u \leq \beta_1$

$\varphi = \alpha_1 - u$ alırsak $\varphi(0) = 0$ dır.

$$\varphi^{\Delta} = \alpha_1^{\Delta} - u^{\Delta}$$
$$= f_1(t,\alpha_0)-f_2(t,\beta_0)-f_3(t,\beta_0)-f_1(t,u)+f_2(t,u)+f_3(t,u) \tag{5.26}$$

≤ 0 olur.

Bu durumda $\alpha_1 \leq u$ olur.

$\varphi = \alpha_1 - \beta_1$ olsun.

$$\varphi(0) = \alpha_1(0) - \beta_1(0)$$
$$= u_0 - u_0$$
$$= 0$$

dır.

$$\varphi^{\Delta} = \alpha_1^{\Delta} - \beta_1^{\Delta}$$
$$= f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0) - f_1(t,\beta_0) + f_2(t,\alpha_0) + f_3(t,\alpha_0) \qquad (5.27)$$
$$\leq 0$$

olur.

$\varphi(0) \leq 0$ ve $\varphi^{\Delta} \leq 0$ olduğundan (3.2.8) den $\varphi(t) \leq 0$ olur. O halde $\alpha_1 \leq \beta_1$ dir. Böylece $k = 1$ için $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq u \leq \beta_1 \leq \beta_0$ gerçeklenir.

Şimdi $k > 1$ için

$$\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq u \leq \beta_k \leq \beta_{k-1} \qquad (5.28)$$

ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq u \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k \qquad (5.29)$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Bunu ispatlamak için $\varphi = \beta_{k+1} - \beta_k$ alalım.

$\varphi(0) = 0$ dır.

$$\varphi^{\Delta} = \beta_{k+1}^{\Delta} - \beta_k^{\Delta}$$
$$= f_1(t,\beta_k) - f_2(t,\alpha_k) - f_3(t,\alpha_k) - f_1(t,\beta_{k-1}) + f_2(t,\alpha_{k-1}) + f_3(t,\alpha_{k-1}) \qquad (5.30)$$
$$\leq 0$$

dır.

$\varphi(t) \leq 0$ olduğundan $\beta_{k+1} \leq \beta_k$ dır.

Şimdi $\varphi = \alpha_k - \alpha_{k+1}$ olsun. $\varphi(0) = u_0 - u_0 = 0$ dır.

$$\begin{aligned}\varphi^\Delta &= \alpha_k^\Delta - \alpha_{k+1}^\Delta \\ &= f_1(t,\alpha_{k-1}) - f_2(t,\beta_{k-1}) - f_3(t,\beta_{k-1}) - f_1(t,\alpha_k) + f_2(t,\beta_k) + f_3(t,\beta_k) \\ &\leq 0\end{aligned} \tag{5.31}$$

dır.

O halde $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ dir.

$\varphi = u - \beta_{k+1}$ alalım.

$\varphi(0) = 0$ dır.

$$\begin{aligned}\varphi^\Delta &= u^\Delta - \beta_{k+1}^\Delta \\ &= f_1(t,u) - f_2(t,u) - f_3(t,u) - f_1(t,\beta_k) + f_2(t,\alpha_k) + f_3(t,\alpha_k) \\ &\leq 0\end{aligned} \tag{5.32}$$

dır.

Bu durumda $u \leq \beta_{k+1}$ olur.

Şimdi $\varphi = \alpha_{k+1} - u$ alalım. $\varphi(0) \leq 0$ dır.

$$\begin{aligned}\varphi^\Delta &= \alpha_{k+1}^\Delta - u^\Delta \\ &= f_1(t,\alpha_k) - f_2(t,\beta_k) - f_3(t,\beta_k) - f_1(t,u) + f_2(t,u) + f_3(t,u) \\ &\leq 0\end{aligned} \tag{5.33}$$

dır.

$\varphi(t) \leq 0$ olduğundan $\alpha_{k+1} \leq u$ olur.

Böylece indüksiyon prensibi ile

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m \leq u \leq \beta_m \leq \cdots \leq \beta_1 \leq \beta_0 \qquad (5.34)$$

İlişkisini elde ederiz.

Şimdi dizilerin düzgün yakınsaklığını ispatlamak için düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğunu göstermeliyiz.

$\alpha_0(t),\ \beta_0(t)$ nin sınırlı olduğu kabulünden $\forall m \geq 0$ için $\alpha_0(t) \leq \beta_m(t) \leq\ \beta_0(t)$ dir. Öyleyse

0$\leq |\beta_m(t) - \alpha_0(t)| \leq |\beta_0(t) - \alpha_0(t)|$ olur. Böylelikle $\{\ \beta_m(t)\}$ düzgün sınırlıdır. Benzer şekilde

$\alpha_0(t) \leq \alpha_m(t) \leq\ \beta_0(t)$
0$\leq |\alpha_m(t) - \alpha_0(t)| \leq |\beta_0(t) - \alpha_0(t)|$ olduğundan $\{\ \alpha_m(t)\}$ düzgün sınırlıdır.
Şimdi $\{\ \beta_m(t)\}$ nin eşsürekli olduğunu gösterelim.
0$\leq t_1 \leq t_2$ ve m>0 için
$|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| =$

$\Big|u_0 + \int_0^{t_1}[f_1(s,\beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big)]\Delta s - u_0 -$

$\int_0^{t_2}[f_1(s,\beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big)]\Delta s\Big|$

$= \Big|\int_0^{t_1}[f_1(s,\beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big)]\Delta s -$

$\int_0^{t_2}[f_1(s,\beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big)]\Delta s\Big|$

(5.35)

$= \Big|\int_{t_1}^{t_2}[f_1(s,\beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big)]\Delta s\Big|$

$\leq \int_{t_1}^{t_2}\big|f_1(s,\beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s,\alpha_{m-1}(s)\big)\big|\Delta s$

$\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ düzgün sınırlı ve $f_1(t,u_t)$, $f_2(t,u_t)\ ve\ f_3(t,u_t)$ $\mathbb{T}$ de sınırlı olduğundan n den bağımsız bir $L>0$ vardır öyle ki;
$|\beta_m(t_1)-\beta_m(t_2)|\leq L|(t_1)-(t_2)|$ olur. Böylece ε>0 için m den bağımsız $\delta=\frac{\varepsilon}{L}>0$ vardır öyle ki;

$\forall m$ için $|t_1-t_2|\leq\delta$ olduğunda $|\beta_m(t_1)-\beta_m(t_2)|\leq\ \varepsilon$ olur.
Benzer şekilde $\{\alpha_m(t)\}$ nin de eşsürekli olduğunu gösterebiliriz.

Böylece Arzela-Ascoli teoremini kullanarak $\{\alpha_{m_k}(t)\}$ ve $\{\beta_{m_k}(t)\}$ alt dizilerinin $\rho(t)$ ve $r(t)$ ye düzgün yakınsadığını görmüş oluruz.

Şimdi $\rho(t)$ ve $r(t)$ nin (5.1) denkleminin VI. tip çözüm çifti olduğunu gösterelim: (5.19) u kullanarak 0 dan t ye delta integral alırsak

$$\begin{aligned}\alpha_{m+1}&=u_0+\int_0^t[f_1(s,\alpha_m(s))-f_2(s,\beta_m(s))-f_3(s,\beta_m(s))]\Delta s\\ \beta_{m+1}&=u_0+\int_0^t[f_1(s,\beta_m(s))-f_2(s,\alpha_m(s))-f_3(s,\alpha_m(s))]\Delta s\end{aligned}\tag{5.36}$$

elde ederiz.

$m\to\infty$ iken delta türev ile

$$\begin{aligned}\rho^\Delta&=f_1(t,\rho(t))-f_2(t,r(t))-f_3(t,r(t)),\ \rho(t_0)=u_0\\ r^\Delta&=f_1(t,r(t))-f_2(t,\rho(t))-f_3(t,\rho(t)),\ r(t_0)=u_0\end{aligned}\tag{5.37}$$

buluruz.

$\alpha_0\leq\alpha_m\leq u\leq\beta_m\leq\beta_0$ olduğundan $m\to\infty$ iken limit aldığımızda
$\alpha_0\leq\rho\leq u\leq r\leq\beta_0$ sonucunu elde ederiz.

Böylelikle ρ ve r nin (5.1) denkleminin VI. tip minimal ve maksimal çözüm çifti olduğunu göstermiş oluruz.

Sonuç 5.1.5: Teorem 5.1.4 ün kabullerine ek olarak $f_2 \equiv 0,\ f_3 \equiv 0$ alırsak da teorem sağlanır.

Şimdi inceleyeceğimiz teoremde (5.1) denkleminin VI. tip ekstremal çözümlerine düzgün ve monoton yakınsayan dizileri elde edeceğiz. Bunun için I. tip alt ve üst çözüm çiftinden faydalanacağız.

Teorem 5.1.6: α_0 ,β_0 (5.1) denkleminin I. tip çift alt ve üst çözüm çifti olsun ve $\alpha_0 \leq \beta_0$ şartını sağlasın. $f_1,\ f_2, f_3 \in C_{rd}\ [\mathbb{T}^k x\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$; $f_1(t,u)$, $f_2(t,u)$ ve $f_3(t,u)$ u ya göre azalmayan fonksiyon olsun. Bu durumda;

$\{\alpha_m(t)\}$, $\{\beta_m(t)\}$ monoton alt dizileri vardır öyle ki

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m \leq \beta_m \leq \cdots \leq \beta_1 \leq \beta_0 \tag{5.38}$$

İfadesini ve

$$\begin{aligned} \alpha^{\Delta}_{m+1} &= f_1(t,\alpha_m) - f_2(t,\beta_m) - f_3(t,\beta_m)\ ,\alpha_{m+1}(0) = u_0 \\ \beta^{\Delta}_{m+1} &= f_1(t,\beta_m) - f_2(t,\alpha_m) - f_3(t,\alpha_m)\ ,\beta_{m+1}(0) = u_0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Olmak üzere $\alpha_0 \leq \alpha_1$, $\beta_1 \leq \beta_0$ şartlarını sağlar.

Ayrıca $\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ $\rho(t)$ ve $r(t)$ ye düzgün yakınsar. Burada $\rho(t)$ ve $r(t)$ (5.1) denkleminin minimal ve maksimal çözüm çiftidir ve aşağıdaki sistemi sağlar:

$$\begin{aligned} \rho^{\Delta} &= f_1(t,\rho) - f_2(t,r) - f_3(t,r),\ \ \rho(0) = u_0 \\ r^{\Delta} &= f_1(t,r) - f_2(t,\rho) - f_3(t,\rho),\ \ r(0) = u_0 \end{aligned} \tag{5.40}$$

İspat: $\alpha_0 \leq \beta_0$ hipotezden doğrudur. (5.40) dan

$$\alpha_{1=}^{\Delta}f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0), \;\; \alpha_1(0) = u_0$$
$$\beta_{1=}^{\Delta}f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0), \;\; \beta_1(0) = u_0 \qquad (5.41)$$

$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0$ olduğunu gösterelim:

Öncelikle $\varphi = \alpha_1 - \beta_1$ olsun.

$$\varphi(0) = \alpha_1(0) - \beta_1(0)$$
$$= u_0 - u_0$$
$$= 0$$

dır.

$$\varphi^{\Delta} = \alpha_1^{\Delta} - \beta_1^{\Delta}$$
$$= f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0) - f_1(t,\beta_0) + f_2(t,\alpha_0) + f_3(t,\alpha_0) \qquad (5.42)$$
$$\leq 0$$

dır.

$\varphi(0) \leq 0$, $\varphi^{\Delta} \leq 0$ olduğundan $\varphi(t) \leq 0$ olur. O halde $\alpha_1 \leq \beta_1$ dir.

Böylelikle $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0$ $k = 1$ için gerçeklenir.

Şimdi $k > 1$ için $\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_{k-1}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. Öyleyse

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k \qquad (5.43)$$

Olduğunu göstermeliyiz. Bunu göstermek için $\varphi = \beta_{k+1} - \beta_k$ alalım.

$\varphi(0) = 0$ dır.

$$\varphi^{\Delta} = \beta_{k+1}^{\Delta} - \beta_k^{\Delta}$$
$$= f_1(t,\beta_k) - f_2(t,\alpha_k) - f_3(t,\alpha_k) - f_1(t,\beta_{k-1}) + f_2(t,\alpha_{k-1}) + f_3(t,\alpha_{k-1}) \qquad (5.44)$$
$$\leq 0$$

dır.

$\varphi(t) \ \leq 0$ olduğundan $\beta_{k+1} \leq \beta_k$ dır.

Şimdi $\varphi = \alpha_k - \alpha_{k+1}$ olsun. $\varphi(0) = 0$ dır.

$$\varphi^{\Delta}=\alpha_k^{\Delta} - \alpha_{k+1}^{\Delta}$$
$$=f_1(t,\alpha_{k-1}) - f_2(t,\beta_{k-1}) - f_3(t,\beta_{k-1}) - f_1(t,\alpha_k) + f_2(t,\beta_k) + f_3(t,\beta_k) \quad (5.45)$$
$$\leq 0$$

Olur. O halde $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ dir.

Son olarak $\varphi = \alpha_k - \beta_k$ olsun. $\varphi(0) = 0$ ve

$$\varphi^{\Delta}= \alpha_k^{\Delta} - \beta_{k+1}^{\Delta} \quad (5.46)$$

$$= f_1(t,\alpha_{k-1}) - f_2(t,\beta_{k-1}) - f_3(t,\beta_{k-1}) - f_1(t,\beta_{k-1})$$
$$+ f_2(t,\alpha_{k-1}) + f_3(t,\alpha_{k-1}) \quad (5.47)$$

dır ve bu durumda $\alpha_k \leq \beta_k$ dır.

Böylece indüksiyon prensibi ile

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m \leq \beta_m \leq \cdots \leq \beta_1 \leq \beta_0 \quad (5.48)$$

ilişkisini elde ederiz.

Şimdi dizilerin düzgün yakınsaklığını göstermek için düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğunu göstermek gerekir.

$\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ nin sınırlı olduğu kabulünden $\forall m \geq 0$ için $\alpha_0(t) \leq \beta_m(t) \leq \ \beta_0(t)$ dir. Bu durumda,

0≤ $|\beta_m(t) - \alpha_0(t)| \leq |\beta_0(t) - \alpha_0(t)|$ olur. Böylelikle $\{\beta_m(t)\}$ düzgün sınırlıdır. Benzer şekilde

$\{\, \alpha_m(t)\}$ nin de düzgün sınırlı olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

$\{\, \beta_m(t)\}$ nin eşsürekli olduğunu gösterelim.

$0 \leq t_1 \leq t_2$ ve m>0 için

$$|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)|$$

$$= \Bigg| u_0 + \int_0^{t_1} \left[f_1(s, \beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big)\right]\Delta s - u_0 - \int_0^{t_2} \left[f_1(s, \beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big)\right]\Delta s \Bigg|$$

$$= \Bigg| \int_0^{t_1} \left[f_1(s, \beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big)\right]\Delta s - \int_0^{t_2} \left[f_1(s, \beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big)\right]\Delta s \Bigg| \quad (5.49)$$

$$= \Bigg| \int_{t_1}^{t_2} \left[f_1(s, \beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big)\right]\Delta s \Bigg|$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \left|f_1(s, \beta_{m-1}(s)) - f_2\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big) - f_3\big(s, \alpha_{m-1}(s)\big)\right|\Delta s$$

$\{\alpha_m(t)\,\}$ ve $\{\, \beta_m(t)\}$ düzgün sınırlı ve $f_1(t, u)$, $f_2(t, u)\; ve\; f_3(t, u)$ $\mathbb{T}$ de sınırlı olduğundan n den bağımsız bir $L > 0$ vardır öyle ki;

$|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| \leq L|(t_1) - (t_2)|$ olur. Böylece ε>0 için m den bağımsız $\delta = \frac{\varepsilon}{L} >$ 0 vardır öyle ki;

$\forall m$ için $(t_1 - t_2) \leq \delta$ olduğunda $|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| \leq\; \varepsilon$ olur.

Benzer şekilde $\{\alpha_m(t)\}$ nin de eşsürekli olduğu gösterilebilir. Böylece Arzela-Ascoli teoremini kullanarak $\{\alpha_{m_k}(t)\}$ ve $\{\beta_{m_k}(t)\}$ alt dizilerinin $\rho(t)$ ve r(t) ye düzgün yakınsadığını görmüş oluruz.

Şimdi $\rho(t)$ ve $r(t)$ nin (5.1) denkleminin VI. tip minimal ve maksimal çözüm çifti olduğunu gösterelim.

(5.39) u kullanarak 0 dan t ye delta integral alırsak ;

$$\begin{aligned}\alpha_{m+1} &= u_0 + \int_0^t [f_1(s,\alpha_m(s)) - f_2(s,\beta_m(s)) - f_3(s,\beta_m(s))]\Delta s \\ \beta_{m+1} &= u_0 + \int_0^t [f_1(s,\beta_m(s)) - f_2(s,\alpha_m(s)) - f_3(s,\alpha_m(s))]\Delta s\end{aligned} \tag{5.50}$$

$m \to \infty$ iken delta türev ile

$$\begin{aligned}\rho &= u_0 + \int_{t_0}^t [f_1(s,\rho(s)) - f_2(s,r(s)) - f_3(s,r(s))]\,\Delta s \\ r &= u_0 + \int_{t_0}^t [f_1(s,r(s)) - f_2(s,\rho(s)) - f_3(s,r(s))]\,\Delta s\end{aligned} \tag{5.51}$$

olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\rho^{\Delta} &= f_1(t,\rho(t)) - f_2(t,r(t)) - f_3(t,r(t))\,, \rho(t_0) = u_0 \\ r^{\Delta} &= f_1(t,r(t)) - f_2(t,\rho(t)) - f_3(t,\rho(t))\,, r(t_0) = u_0\end{aligned} \tag{5.52}$$

bulunur.

$\alpha_0 \le \alpha_m \le \beta_m \le \beta_0$ olduğundan $m \to \infty$ iken limit alındığında $\alpha_0 \le \rho \le r \le \beta_0$ sonucu elde ederiz.

Böylelikle ρ ve r nin (5.1) denkleminin VII. tip minimal ve maksimal çözüm çifti olduğunu göstermiş olduk.

Örnek 5.1.7:

$$u^{\Delta}(t) = \left(\frac{u}{3}\right)^2 - \frac{u}{2} - \left(\frac{u}{3}\right)^3, \quad u(0) = 1, \quad t \in [0,1] \tag{5.53}$$

dinamik başlangıç değer problemini düşünelim.

$\forall t \in [0,1]$ için $\alpha_0(t) = -1$ ve $\beta_0(t) = 2$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha_0^{\Delta} = 0 &\leq f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{27} = \frac{53}{54} \\ \beta_0^{\Delta} = 0 &\geq f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0) \\ &= \frac{1}{9} - 1 - \frac{8}{27} = -\frac{32}{27} \end{aligned}$$

Böylece α_0 ve β_0 ın I. tip alt ve üst çözümler olduğunu görmüş oluruz.

$\alpha_1(t) = -\frac{32}{27}t + 1$ ve $\beta_1(t) = \frac{53}{54}t + 1$ fonksiyonlarını ele alalım.

Bu durumda $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0$ sıralamasını ve teorem 5.1.6 nın tüm şartlarını sağlamış oluruz.

Teorem 5.1.6 yı uygulayarak ve (5.39) u kullanarak monoton dizi varlığından söz ederiz öyle ki [-1,2] aralığında minimal ve maksimal çözümlere yakınsar.

Teorem 5.1.8: α_0 , β_0 (5.1) denkleminin VI. tip alt ve üst çözüm çifti olsun ve $\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$ şartını sağlasın. $f_1, f_2, f_3 \in C_{rd}$ $[\mathbb{T}^k x\mathbb{R}, \mathbb{R}]$; $f_1(t,u)$, $f_2(t,u)$ ve $f_3(t,u)$ fonksiyonları u ya göre azalmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} &\alpha_{m+1=}^{\Delta} f_1(t,\beta_m) - f_2(t,\alpha_m) - f_3(t,\alpha_m) \ , \alpha_{m+1}(0) = u_0 \\ &\beta_{m+1=}^{\Delta} f_1(t,\alpha_m) - f_2(t,\beta_m) - f_3(t,\beta_m) \ , \beta_{m+1}(0) = u_0 \end{aligned} \tag{5.54}$$

ile tanımlanan diziler; $\{\alpha_{2m}, \beta_{2m+1}\}$ ve $\{\beta_{2m}, \alpha_{2m+1}\}$ monoton alt dizilerini üretir ve bu diziler $\alpha_0 \leq \beta_1 \leq u \leq \alpha_1 \leq \beta_0$ bağıntısını sağlanmak üzere

$$\alpha_0 \leq \beta_1 \leq \cdots \leq \alpha_{2m} \leq \beta_{2m+1} \leq u \leq \alpha_{2m+1} \leq \beta_{2m} \leq \cdots \leq \alpha_1 \leq \beta_0 \qquad (5.55)$$

sıralamasını gerçekler. Ayrıca $\{\alpha_{2m}, \beta_{2m+1}\}$ ve $\{\alpha_{2m+1}, \beta_{2m}\}$ monoton alt dizileri

$$\begin{aligned} \rho^{\Delta} &= f_1(t,\rho) - f_2(t,r) - f_3(t,r)\ , \rho(0) = u_0 \\ r^{\Delta} &= f_1(t,r) - f_2(t,\rho) - f_3(t,\rho)\ , r(0) = u_0 \end{aligned} \qquad (5.56)$$

sistemini sağlayan ve problemin VI. tip ρ ve r minimal ve maksimal çözümlerine yakınsar.

İspat:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\Delta} &= f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0)\ , \alpha_1(0) = u_0 \\ \beta_1^{\Delta} &= f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0)\ , \beta_1(0) = u_0 \end{aligned} \qquad (5.57)$$

Olduğu (5.54) den elde edilir.

$\alpha_0 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_3 \leq u \leq \alpha_3 \leq \beta_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_0$ ifadesinin $k = 1$ için doğru olduğunu gösterelim:

$\varphi = \beta_1 - \alpha_2$ alalım. $\varphi(0) = u_0 - u_0 = 0$

olur.

$$\begin{aligned} \varphi^{\Delta} &= \beta_1^{\Delta} - \alpha_2^{\Delta} \\ &= [f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0)] - [f_1(t,\beta_1) - f_2(t,\alpha_1) - f_3(t,\alpha_1)] \\ &= f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0) - f_1(t,\beta_1) + f_2(t,\alpha_1) + f_3(t,\alpha_1) \\ &= [f_1(t,\alpha_0) - f_1(t,\beta_1) + [f_2(t,\alpha_1) - f_2(t,\beta_0)] + [f_3(t,\alpha_1) - f_3(t,\beta_0)] \end{aligned} \qquad (5.58)$$

≤ 0

olur.

f_1, f_2 ve f_3 azalmayan fonksiyon ve $\varphi(0) \leq 0$, $\varphi^{\Delta} \leq 0$ olduğundan $\varphi(t) \leq 0$ olur. O halde $\beta_1 \leq \alpha_2$ dir.

$\varphi = \alpha_2 - \beta_2$ olsun.

$\varphi(0) = u_0 - u_0 = 0$ dır.

$\varphi^{\Delta} = \alpha_2^{\Delta} - \beta_2^{\Delta}$

$= f_1(t, \beta_1) - f_2(t, \alpha_1) - f_3(t, \alpha_1) - f_1(t, \alpha_1) + f_2(t, \beta_1) + f_3(t, \beta_1)$ (5.59)

≤ 0 olur.

$\varphi(t) \leq 0$ olduğundan $\alpha_2 \leq \beta_2$ dir.

Şimdi $\varphi = \beta_3 - \alpha_3$ olsun.

$\varphi^{\Delta} = \beta_3^{\Delta} - \alpha_3^{\Delta}$

$= f_1(t, \alpha_2) - f_2(t, \beta_2) - f_3(t, \beta_2) - f_1(t, \beta_2) + f_2(t, \alpha_2) + f_3(t, \alpha_2)$ (5.60)

≤ 0 olur.

Buradan $\beta_3 \leq \alpha_3$ gelir.

$\varphi = \beta_2 - \alpha_1$ olsun.

$\varphi(0) = \beta_2(0) - \alpha_1(0)$

$= u_0 - u_0 = 0$ dır.

$\varphi^{\Delta} = \beta_2^{\Delta} - \alpha_1^{\Delta}$

$= f_1(t, \alpha_1) - f_2(t, \beta_1) - f_3(t, \beta_1) - f_1(t, \beta_0) + f_2(t, \alpha_0) + f_3(t, \alpha_0)$ (5.61)

≤ 0

dır.

$\varphi(0) \leq 0$ ve $\varphi^{\Delta} \leq 0$ olduğundan $\varphi(t) \leq 0$ dır.

O halde $\beta_2 \leq \alpha_1$ dir.

Şimdi $\varphi = \alpha_2 - u$ alalım:

$\varphi(0) = \alpha_2(0) - u_0$

$= u_0 - u_0 = 0$ dır.

$\varphi^\Delta = \alpha_2^\Delta - u^\Delta$

$$= f_1(t,\beta_1) - f_2(t,\alpha_1) - f_3(t,\alpha_1) - f_1(t,u) + f_2(t,u) + f_3(t,u) \tag{5.62}$$

≤ 0

dır.

$\varphi(t) \leq 0$ olduğundan $\alpha_2 \leq u$ olur.

$\varphi = u - \beta_2$ olsun. $\varphi(0)=0$ dır.

$\varphi^\Delta = u^\Delta - \beta_2^\Delta$

$$= f_1(t,u) - f_2(t,u) - f_3(t,u) - f_1(t,\alpha_1) + f_2(t,\beta_1) + f_3(t,\beta_1) \tag{5.63}$$

≤ 0

dır.

(3.2.8) den $\varphi(0) \leq 0$ ve $\varphi^\Delta \leq 0$ olduğundan $\varphi(t) \leq 0$ olur.

Böylece $u \leq \beta_2$ dir.

$\varphi = u - \alpha_3$ olsun. $\varphi(0)=0$ dır.

$$\varphi^\Delta = u^\Delta - \alpha_3^\Delta = f_1(t,u) - f_2(t,u) - f_3(t,u) - f_1(t,\beta_2) + f_2(t,\alpha_2) + f_3(t,\alpha_2) \tag{5.64}$$

≤ 0 dır.

Buradan $u \leq \alpha_3$ olur.

Son olarak $\varphi = \beta_3 - u$ olsun.

$\varphi(0)=0$ dır.

$\varphi^\Delta = \beta_3^\Delta - u^\Delta$

$$= f_1(t,\alpha_2) - f_2(t,\beta_2) - f_3(t,\beta_2) - f_1(t,u) + f(t,u) + f_3(t,u) \tag{5.65}$$

≤ 0 dır.

Buradan $\beta_3 \leq u$ elde edilir.

Böylece k=1 için

$\alpha_0 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_3 \leq u \leq \alpha_3 \leq \beta_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_0$ olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi k>1 için

$$\alpha_{2k-2} \leq \beta_{2k-1} \leq \alpha_{2k} \leq \beta_{2k+1} \leq u \leq \alpha_{2k+1} \leq \beta_{2k} \leq \alpha_{2k-1} \leq \beta_{2k-2} \qquad (5.66)$$

ifadesinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$\alpha_{2k} \leq \beta_{2k+1} \leq \alpha_{2k+2} \leq \beta_{2k+3} \leq u \leq \alpha_{2k+3} \leq \beta_{2k+2} \leq \alpha_{2k+1} \leq \beta_{2k} \qquad (5.67)$$

eşitsizliğinin de doğru olduğunu göstermeliyiz:

$\varphi = \alpha_{2k} - \beta_{2k+1}$ olsun. $\varphi(0) = 0$

dır.

$\varphi^{\Delta}=\alpha_{2k}^{\Delta}-\beta_{2k+1}^{\Delta}$

$=f_1(t,\beta_{2k-1}) - f_2(t,\alpha_{2k-1})-f_3(t,\alpha_{2k-1}) - f_1(t,\alpha_{2k}) + f_2(t,\beta_{2k})+f_3(t,\beta_{2k}) \leq 0$ (5.68)

dır.

$f_1, f_{2,} ve\ f_3$ azalmayan fonksiyonlar olduğundan ve (3.2.8) den

$\alpha_{2k} \leq \beta_{2k+1}$ dir.

Şimdi $\varphi = \alpha_{2k+1} - \beta_{2k}$ olsun. $\varphi(0)$=0 dır.

$\varphi^{\Delta}=\alpha_{2k+1}^{\Delta}-\beta_{2k}^{\Delta}$

$=f_1(t,\beta_{2k}) - f_2(t,\alpha_{2k})-f_3(t,\alpha_{2k}) - f_1(t,\alpha_{2k-1}) + f_2(t,\beta_{2k-1})+f_3(t,\beta_{2k-1}) \leq 0$ (5.69)

dır.

$\varphi(t) \leq 0$ olduğundan $\alpha_{2k+1} \leq \beta_{2k}$ dır.

$$\varphi = \beta_{2k+1} - \alpha_{2k+2}$$
$$=f_1(t,\alpha_{2k}) - f_2(t,\beta_{2k}) - f_3(t,\beta_{2k}) - f_1(t,\beta_{2k+1}) + f_2(t,\alpha_{2k+1}) + f_3(t,\alpha_{2k+1})$$
$$\leq 0 \quad (5.70)$$

dır.

$f_1, f_2, ve\ f_3$ azalmayan fonksiyonlar olduğundan $\varphi(t) \leq 0$ ve $\beta_{2k+1} \leq \alpha_{2k+2}$ dir.

$\varphi = \beta_{2k+2} - \alpha_{2k+1}$ olsun.

$\varphi(0) = u_0 - u_0 = 0$

$$\varphi^{\Delta} = \beta^{\Delta}_{2k+2} - \alpha^{\Delta}_{2k+1}$$
$$=f_1(t,\alpha_{2k+1}) - f_2(t,\beta_{2k+1}) - f_3(t,\beta_{2k+1}) - f_1(t,\beta_{2k}) + f_2(t,\alpha_{2k}) + f_3(t,\alpha_{2k})$$
$$\leq 0 \quad (5.71)$$

olur.

$\varphi(0) \leq 0$ ve $\varphi^{\Delta} \leq 0$ olduğundan (3.2.8) den $\varphi(t) \leq 0$ dır.

O halde $\beta_{2k+2} \leq \alpha_{2k+1}$ dir.

Şimdi $\varphi = \beta_{2k+1} - \alpha_{2k+1}$ alalım:

$\varphi(0) = u_0 - u_0 = 0$ dır.

$$\varphi^{\Delta} = \beta^{\Delta}_{2k+1} - \alpha^{\Delta}_{2k+1}$$
$$=f_1(t,\alpha_{2k}) - f_2(t,\beta_{2k}) - f_3(t,\beta_{2k}) - f_1(t,\beta_{2k}) + f_2(t,\alpha_{2k}) + f_3(t,\alpha_{2k}) \quad (5.72)$$
$$\leq 0$$

olur.

$\varphi(t) \leq 0$ olduğundan $\beta_{2k+1} \leq \alpha_{2k+1}$ dir.

$\varphi = \alpha_{2k+2} - \beta_{2k+2}$ olsun. $\varphi(0) = 0$ dır.

$$\varphi^{\Delta} = \alpha^{\Delta}_{2k+2} - \beta^{\Delta}_{2k+2}$$

$$= f_1(t,\beta_{2k+1}) - f_2(t,\alpha_{2k+1}) - f_3(t,\alpha_{2k+1}) - f_1(t,\alpha_{2k+1})$$
$$+ f_2(t,\beta_{2k+1}) + f_3(t,\beta_{2k+1}) \qquad (5.73)$$
$$\leq 0$$

dır.

Buradan $\alpha_{2k+2} \leq \beta_{2k+2}$ elde edilir.

İndüksiyon prensibi ile

$$\alpha_0 \leq \beta_1 \leq \cdots \leq \alpha_{2m} \leq \beta_{2m+1} \leq u \leq \alpha_{2m+1} \leq \beta_{2m} \leq \cdots \leq \alpha_1 \leq \beta_0 \qquad (5.74)$$

ilişkisini ispat etmiş oluruz.

Şimdi $\{\alpha_{2m}(t)\}$ dizisinin düzgün sınırlı olduğunu gösterelim:

$\alpha_0(t)$ ve $\beta_0(t)$ nin $\mathbb{T}$ de sınırlı olduğu kabulü ile (5.74) den dolayı $\{\alpha_{2m}(t)\}$ dizisi düzgün sınırlıdır. Aynı şeklide $\{\beta_{2m+1}(t)\}$, $\{\alpha_{2m+1}(t)\}\ ve\ \{\beta_{2m}(t)\}$ de düzgün sınırlı olur.

$\{\alpha_{2m}(t)\}$ nin eşsürekli olduğunu gösterelim:

$$|\alpha_{2m}(t_1) - \alpha_{2m}(t_2)| =$$
$$\left| u_0 + \int_0^{t_1} \left[f_1(s,\beta_{2m-1}(s)) - f_2\big(s,\alpha_{2m-1}(s)\big) - f_3\big(s,\alpha_{2m-1}(s)\big)\right]\Delta s - u_0 \right.$$
$$\left. - \int_0^{t_2} \left[f_1(s,\beta_{2m-1}(s)) - f_2\big(s,\alpha_{2m-1}(s)\big) - f_3\big(s,\alpha_{2m-1}(s)\big)\right]\Delta s \right|$$

$$= \left| \int_0^{t_1} [f_1(s, \beta_{2m-1}(s)) - f_2(s, \alpha_{2m-1}(s)) - f_3(s, \alpha_{2m-1}(s))] \Delta s - \int_0^{t_2} [f_1(s, \beta_{2m-1}(s)) - f_2(s, \alpha_{2m-1}(s)) - f_3(s, \alpha_{2m-1}(s))] \Delta s \right|$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} [f_1(s, \beta_{2m-1}(s)) - f_2(s, \alpha_{2m-1}(s)) - f_3(s, \alpha_{2m-1}(s))] \Delta s \right|$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| f_1(s, \beta_{2m-1}(s)) - f_2(s, \alpha_{2m-1}(s)) - f_3(s, \alpha_{2m-1}(s)) \right| \Delta s \tag{5.75}$$

$\{\alpha_{2m}(t)\}$ ve $\{\beta_{2m}(t)\}$ düzgün sınırlı olduğu ve $f_1(t,u)$, $f_2(t,u)\ ve\ f_3(t,u)$ $\mathbb{T}$ de sınırlı olduğu için n den bağımsız $L > 0$ vardır öyle ki;

$$|\alpha_{2m}(t_1) - \alpha_{2m}(t_2)| \leq L(t_1 - t_2) \tag{5.76}$$

olur. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için m den bağımsız $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ vardır öyle ki;

$\forall m$ için $|t_1 - t_2| \leq \delta$ olduğunda $|\alpha_{2m}(t_1) - \alpha_{2m}(t_2)| \leq \varepsilon$ olur.

Benzer şekilde $\{\beta_{2m}(t)\}$, $\{\alpha_{2m+1}(t)\}$ ve $\{\beta_{2m+1}(t)\}$ nin de eşsürekli olduğu gösterilebilir.

Böylece Arzela-Ascoli teoremini kullanarak $\{\alpha_{2m_k}(t), \beta_{2m_{k+1}}(t)\}$ ve $\{\alpha_{2m_{k+1}}(t), \beta_{2m_k}(t)\}$ alt dizileri vardır öyle ki ρ ve r ye düzgün yakınsarlar.

Şimdi $\rho\ ve\ r$ nin (5.56) yı sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned} &\alpha^{\Delta}_{2m+1=}f_1(t, \beta_{2m}) - f_2(t, \alpha_{2m}) - f_3(t, \alpha_{2m}), \quad \alpha_{2m+1}(0) = u_0 \\ &\beta^{\Delta}_{2m=}f_1(t, \alpha_{2m-1}) - f_2(t, \beta_{2m-1}) - f_3(t, \beta_{2m-1}), \quad \beta_{2m}(0) = u_0 \end{aligned} \tag{5.77}$$

(5.77) nin 0 dan t ye delta integralini alırsak;

$$\begin{aligned} \alpha_{2m+1} &= u_0 + \int_0^t [f_1(s,\beta_{2m}(s)) - f_2(s,\alpha_{2m}(s)) - f_3(s,\alpha_{2m}(s))]\Delta s \\ \beta_{2m} &= u_0 + \int_0^t [f_1(s,\alpha_{2m-1}(s)) - f_2(s,\beta_{2m-1}(s)) - f_3(s,\beta_{2m-1}(s))]\Delta s \end{aligned} \tag{5.78}$$

elde ederiz.

$m \to \infty$ iken limit aldığımızda

$$\begin{aligned} r &= u_0 + \int_{t_0}^t [f_1(s,r(s)) - f_2(s,\rho(s)) - f_3(s,r(s))]\,\Delta s \\ \rho &= u_0 + \int_{t_0}^t [f_1(s,\rho(s)) - f_2(s,r(s)) - f_3(s,r(s))]\,\Delta s \end{aligned} \tag{5.79}$$

olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned} r^\Delta &= f_1(t,r) - f_2(t,\rho) - f_3(t,\rho),\ r(0) = u_0 \\ \rho^\Delta &= f_1(t,\rho) - f_2(t,r) - f_3(t,r),\ \rho(0) = u_0 \end{aligned} \tag{5.80}$$

İfadesi elde edilir ve bulduğumuz sonuç (5.56) denklem sistemidir.

Son olarak ρ ve r nin (5.1) başlangıç değer probleminin VI. tip minimal ve maksimal çözüm çifti olduğu gösterilmelidir:

Bunu göstermek için;

$\alpha_{2k-2} \leq \beta_{2k-1} \leq \alpha_{2k} \leq u \leq \beta_{2k} \leq \alpha_{2k-1} \leq \beta_{2k-2}$ ifadesinin k>1 için doğru olduğunu kabul edelim:

$$\alpha_{2k} \leq \beta_{2k+1} \leq \alpha_{2k+2} \leq u \leq \beta_{2k+2} \leq \alpha_{2k+1} \leq \beta_{2k} \tag{5.81}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\varphi = \beta_{2k+1} - u$ olsun.

$\varphi(0) = u_0 - u_0 = 0$ dır.

$$\begin{aligned}\varphi^{\Delta} &= \beta_{2k+1}^{\Delta} - u^{\Delta} \\ &= f_1(t, \alpha_{2k}) - f_2(t, \beta_{2k}) - f_3(t, \beta_{2k}) - f_1(t, u) + f_2(t, u) + f_3(t, u) \qquad (5.82) \\ &\leq 0\end{aligned}$$

dır.

$\varphi(0) \leq 0$ ve $\varphi^{\Delta} \leq 0$ olduğundan (3.2.8) den $\varphi(t) \leq 0$ dır. Böylece $\beta_{2k+1} \leq u$ olur. Benzer şekilde

$u \leq \alpha_{2k+1}$, $u \leq \beta_{2k+2}$ ve $\alpha_{2k+2} \leq u$ olduğu gösterilir. Böylelikle

$$\alpha_0 \leq \beta_1 \leq \cdots \leq \alpha_{2m} \leq \beta_{2m+1} \leq u \leq \alpha_{2m+1} \leq \beta_{2m} \leq \cdots \leq \alpha_1 \leq \beta_0 \qquad (5.83)$$

bağıntısını elde ederiz.

$m \to \infty$ iken limit alırsak;

$\alpha_0 \leq \rho \leq u \leq r \leq \beta_0$ buluruz ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 5.1.9:

$$u^{\Delta}(t) = \frac{u^2}{2} - u - \frac{3}{2}, \qquad u(0) = 1 \qquad t \in [0,1] \qquad (5.84)$$

Başlangıç değer problemini ele alalım:

$\forall t \in [0,1]$ için $\alpha_0(t) = -1$ ve $\beta_0(t) = 2$ olsun.

$$\alpha_0^\Delta = 0 \le f_1(t,\alpha_0) - f_2(t,\beta_0) - f_3(t,\beta_0)$$
$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0$$
$$\beta_0^\Delta = 0 \ge f_1(t,\beta_0) - f_2(t,\alpha_0) - f_3(t,\alpha_0)$$
$$= 2 - 2 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

Böylelikle α_0 ve β_0 ın VI. tip alt ve üst çözüm olduklarını göstermiş olduk.

$\alpha_1(t) = \frac{3}{2}t + 1$ ve $\beta_1(t) = -3t + 1$ fonksiyonlarını ele alalım:

$\alpha_0(0) \le \alpha_1(0)$ ve $\alpha_0^\Delta \le \alpha_1^\Delta$ olduğundan $\alpha_0(t) \le \alpha_1(t)$ dir.

$\beta_1(0) \le \beta_0(0)$ ve $\beta_1^\Delta \le \beta_0^\Delta$ olduğundan $\beta_1(t) \le \beta_0(t)$ dir.

$\alpha_1(0) \le \beta_1(0)$ ve $\alpha_1^\Delta \le \beta_1^\Delta$ olduğundan $\alpha_1(t) \le \beta_1(t)$ dir.

Buradan $\alpha_0(t) \le \alpha_1(t) \le \beta_1(t) \le \beta_0(t)$ sıralamasını ve teorem 5.1.8 in tüm şartlarını sağlamış oluruz. Teorem 5.1.8 i kullanarak monoton dizi varlığından söz ederiz öyle ki [-1,2] aralığında minimal ve maksimal çözümlere yakınsar.

5.2. Karma Monotonluk Yöntemi

$g \in C_{rd}[\mathbb{T}^k x \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$u^\Delta = g(t,u), \qquad u(0) = u_0 \tag{5.85}$$

dinamik başlangıç değer problemini ele alalım. Eğer $u(t)$ $g(t,u)$ nun bir antitürevi ise ve $u(t_0) = u_0$ sağlarsa $u\colon \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (5.85) denkleminin bir çözümüdür. Burada $\mathbb{T}^k = [0,J_0] \cap \mathbb{T}, J_0 > 0$ dır.

Tanım 5.2.1: $G \in C_{rd}[\mathbb{T}^k x \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olsun. Eğer $g\colon \mathbb{T}^k x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $G(t,u,u,u) = g(t,u)$,

$G(t,u,v,w)$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ da u ya göre azalmayan, v ye göre artmayan, w ya göre ise azalmayan fonksiyon olacak şekilde g fonksiyonu varsa G ye karma monoton denir.

Teorem 5.2.2:(5.85) denklemini ele alalım.$G(t,u,v,w) \in C_{rd}[\mathbb{T}^k x \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n . \mathbb{R}^n]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:
$G(t,u,v,w)$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ da u ya göre azalmayan, v ye göre artmayan, w ya göre ise azalmayan fonksiyon olsun.

$G(t,u,v,w) = g(t,u),$

${\alpha_0}^{\Delta} \leq G(t,\alpha_0,\beta_0,,\alpha_0)$ ve ${\beta_0}^{\Delta} \geq G(t,\beta_0,\alpha_0,\beta_0)$ eşitsizliklerini sağlayan

α_0, β_0 fonksiyonları $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ olmak üzere $\mathbb{T}^k$ da diferansiyellenebilir olsun. bu durumda monoton ve yakınsak $\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ dizileri vardır öyle ki $\alpha_m \to \rho$, $\beta_m \to r$ dır ve bu ρ, r fonksiyonları

$$\begin{aligned} \rho^{\Delta} &= G(t,\rho,r,\rho), \quad \rho(0) = 0 \\ r^{\Delta} &= G(t,r,\rho,r), \quad r(0) = 0 \end{aligned} \tag{5.86}$$

Sistemini sağlar. Ayrıca,

$\big(G(t,u,v,w) - G(t,v,u,w)\big) \leq K(u-v)$ koşulu sağlanıyorsa $\rho(t) = r(t) = u$ fonksiyonu (5.85) probleminin tek çözümüdür.

İspat:

$$\alpha_{m+1}^{\Delta} = G(t,\alpha_m,\beta_m,,\alpha_m), \qquad \alpha_{m+1}(0) = u_0 \tag{5.87}$$

$$\beta_{m+1}^{\Delta} = G(t,\beta_m,\alpha_m,\beta_m), \qquad \beta_{m+1}(0) = u_0 \tag{5.88}$$

olarak tanımlayalım.

$\alpha_0^\Delta \leq G(t, \alpha_0, \beta_0, , \alpha_0) = \alpha_1^\Delta$ ve $\alpha_0(0) \leq \alpha_1(0)$ olduğundan $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t)$ dir.
$\beta_0^\Delta \geq G(t, \beta_0, \alpha_0, \beta_0) = \beta_1^\Delta$ ve $\beta_1(0) \leq \beta_0(0)$ olduğundan $\beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ olur.
$\alpha_1^\Delta = G(t, \alpha_0, \beta_0, , \alpha_0) \leq G(t, \beta_0, \alpha_0, \beta_0) = \beta_1^\Delta$ ve $\alpha_1(0) = u_0 = \beta_1(0)$ olduğundan $\alpha_1 \leq \beta_1$ dir.

Böylelikle $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ sağlanmış olur.

Şimdi $k > 1$ için $\alpha_{k-1}(t) \leq \alpha_k(t)$ ve $\beta_k(t) \leq \beta_{k-1}(t)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\alpha_k^\Delta(t) = G(t, \alpha_{k-1}, \beta_{k-1}, , \alpha_{k-1}) \leq \alpha_1^\Delta = G(t, \alpha_k, \beta_k, , \alpha_k) = \alpha_{k+1}^\Delta(t) \qquad (5.89)$$

Ve $\alpha_{k+1}(0) = \alpha_k(0)$ olduğundan $\alpha_k(t) \leq \alpha_{k+1}(t)$ olur.

Aynı şekilde

$$\beta_{k+1}^\Delta(t) = G(t, \beta_k, \alpha_k, \beta_k) \leq G(t, \beta_{k-1}, \alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) = \beta_k^\Delta(t) \qquad (5.90)$$

ve $\beta_{k+1}(0) = \beta_k(0)$ olduğundan $\beta_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$ dir.

$$\alpha_k^\Delta(t) = G(t, \alpha_{k-1}, \beta_{k-1}, , \alpha_{k-1}) \leq G(t, \beta_{k-1}, \alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) = \beta_k^\Delta(t) \qquad (5.91)$$

Ve $\alpha_k(0) = u_0 = \beta_k(0)$ olduğundan $\alpha_k(t) \leq \beta_k(t)$ dir.

Böylelikle indüksiyon prensibi ile

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m \leq \beta_m \leq \beta_1 \leq \beta_0 \qquad (5.92)$$

Sıralamasını elde ederiz.

$\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ dizileri düzgün sınırlı ve G sınırlı olduğu için $\left|\alpha_m(t)^\Delta\right|$ ve $\left|\beta_m(t)^\Delta\right|$ de sınırlıdır. Aynı zamanda $\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ dizileri eşsüreklidir.

Arzela-Ascoli teoremini kullanarak $\{\alpha_{m_k}(t)\}$ ve $\{\beta_{m_k}(t)\}$ dizileri vardır öyle ki $\mathbb{T}^k$ da düzgün yakınsaktırlar. $\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ $\mathbb{T}^k$ da lokal düzgün monotondurlar.

Buradan $\lim_{m\to\infty} \alpha_m(t) = \rho(t)$ ve $\lim_{m\to\infty} \beta_m(t) = r(t)$ olur.
Şimdi ρ ve r nin delta türevlerinin

$$\begin{aligned} \rho^{\Delta} &= G(t,\rho,r,\rho), \quad \rho(0) = 0 \\ r^{\Delta} &= G(t,r,\rho,r), \quad r(0) = 0 \end{aligned} \tag{5.93}$$

Eşitliklerini sağladığını gösterelim:

(5.87) ve (5.88) in 0 dan t ye delta integralini alırsak

$$\alpha_{m+1}(t) = \alpha_{m+1}(0) + \int_0^t G(s,\alpha_m(s),\beta_m(s),\alpha_m(s))\Delta s \tag{5.94}$$

$$\beta_{m+1}(t) = \beta_{m+1}(0) + \int_0^t G(s,\beta_m(s),\alpha_m(s),\beta_m(s))\Delta s \tag{5.95}$$

elde ederiz.

$m \to \infty$ iken limit aldığımızda $\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ dizileri düzgün yakınsak olduğundan

$$\rho(t) = u_0 + \int_0^t G(s,\rho(s),r(s),\rho(s))\Delta s \tag{5.96}$$

$$r(t) = u_0 + \int_0^t G(s,r(s),\rho(s),r(s))\Delta s \tag{5.97}$$

dır.

(5.96) ve (5.97) nin delta integralini alırsak

$$\begin{aligned} \rho^{\Delta}(t) &= G\big(t,\rho(t),r(t),\rho(t)\big), \ \ \rho(0)=0 \\ r^{\Delta}(t) &= G\big(t,r(t),\rho(t),r(t)\big), \ \ r(0)=0 \end{aligned} \tag{5.98}$$

buluruz.

Şimdi $q = \ r-\rho$ alalım. Hipotezdeki koşulunu kullanarak

$$q^{\Delta}(t) = r^{\Delta}(t)-\rho^{\Delta}(t) \le G\big(t,r(t),\rho(t),r(t)\big) - G(t,\rho(t),r(t),\rho(t)) \le Kq \tag{5.99}$$

Elde ederiz. $q(0)=0$ olduğundan sonuç (3.2.8) den $q(t)\le 0$ dır.

O halde $r(t)=\rho(t)=u$ olur.

$G(t,u,v,w)=g(t,u)$ olduğundan $r(t)=\rho(t)=u$ tek çözümdür.

Örnek 5.2.3: $u^{\Delta}=\frac{1-u^2}{u}, \qquad u(0)=u_0, \quad u\neq 0$ (5.100)

Dinamik başlangıç değer problemini düşünelim:

$g(t,u)=\frac{1-u^2}{u}$ olur.

$G(t,u,v,w)=u+\frac{1}{v}-2w$ alalım. Bu durumda $G(t,u,u,u)=g(t,u)$ sağlanır.

$\alpha_0=-1,\ \beta_0=1$ olsun.

$\alpha_0^{\Delta}\le G(t,-1,1,-1)=-1+1+2=2$

$\beta_0^{\Delta}\ge G(t,1,-1,1)=1-1-2=-2$

Olur. Öyleyse $\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ monoton dizileri vardır öyle ki ρ ve r ye lokal düzgün ve monoton yakınsar.

KAYNAKLAR

[1] Bohner, M., Peterson, A. (2003). Advances in Dynamic Equations on Time Scales, 1st.Edition, Birkhauser Boston, Inc.

[2] Bohner, M., Peterson, A. (2001). Dynamic Equations on Time Scales. Boston, Birkhäuser, 1st.Edition, Birkhauser Boston, Inc.

[3] Aydemir, Gül. (2017). Zaman Skalasında Birinci ve İkinci Mertebeden Doğrusal Dinamik Denklemler.

[4] Çulhacıoğlu, Ertuğrul. (2019). Zaman Skalasında Dinamik Denklemlerin Kararlılığı.

[5] Nour H.Alsharif, (2019), The Method of Monotone Iterative Techniques and Quasilinearization in Time Scale.

[6] H. Zaıdı, Atıya. (2009), Existence of Solutions and Convergence Results for Dynamic Initial Value Problems Using Lower and Upper Solutions, Electronic Journal of Differential Equations 161, 1-13.

[7] Kaymakçalan, B. (1993), Existence and Comparison Results for Dynamic Systems on a Time Scale, Journal of Mathematical Analysis and Applications 172, 243-255.

[8] Lakshmikantham V., Sivasundram S., Kaymakçalan B., (1996), " Dynamic Systems on Measure Chains", 1st. Edition, Kluwer Academic Publishers.

[9] S. A. Özgün, A. Zafer, ve B. Kaymakçalan. (1997). Gronwall-Bihari type inequalities on time scales. ¨ In Conference Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations.

[10] Aksoy, Y., Özkan, M., (2011), Diferansiyel Denklemler, YTÜ Basın Yayım Merkezi, İstanbul.

[11] Metineren, M. (2009), Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler İçin Monoton İterasyon Tekniği.

[12] Yakar, C., Arslan İ., Çiçek M., (2014), Monotone Iterative Technique by Upper and Lower Solutions With Inıtıal Time Difference, 16 (1), 575-586.

[13] Yakar, C., Yakar, A., (2011), Monotone Iterative Technique With Inıtial Time Difference for Fractional Differential Equations, Hacettepe Journal of Mathematics and Statics, 40 (2), 331-340.

[14] Liz, E., (1998) Upper and Lower Solutions with Jumps, Journal of Mathematical Analysis and Applications 222, 484-493.

[15] Lakshmikantham V., Vatsala A. S., (2008), General Uniqueness and Monotone Iterative Technique for Fractional Differential Equations, Applied Mathematics Letters, 21, 828-834.

[16] McRae F.A., Monotone Iterative Technique and Existence Results for Fractional Differential Equations, Nonlinear Analysis 71,6093-6096.

[17] Kaymakçalan B., Lawrance B.A., (2003), Coupled Solutions and Monotone Iterative Techniques for Some Nonlinear Initial Value Problems on Time Scales, Nonlinear Analysis: Real World Applications 4, 245-259.

[18] West I.H., Vatsala A.S., (2004), Generalized Monotone Iterative Method for Initial Value Problems, Applied Mathematics Letters 17, 1231-1237.

[19] Khavanin M., Lakshmikantham V., The Method of Mixed Monotony and Second Order Boundary Value Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications 120, 737-744 (1986).

[20] Devi J.V., Sreedhar Ch. V., Generalized Monotone Iterative Method for Caputo Fractional Integro-differential Equations, European Journal of Pure and Applied Mathematics 9, 4, (2016), 346-359.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Gülsüm TRABZON

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Uygulamalı Matematik Anabilim dalı	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Gazi Eğitim Fakültesi / Matematik Öğretmenliği	2014
Lise	Arifiye Anadolu Öğretmen Lisesi	2009

İŞ DENEYİMİ

Yıl	**Yer**	**Görev**
2018-Halen	Özel Adabilim Okulları	Matematik Öğretmeni
2016-2017	Adapazarı Halk Eğitim Merkezi	Matematik Öğretmeni
2015-2016	Arif Nihat Asya Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİL

İngilizce, Arapça

HOBİLER

Edebiyat