

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BÉZIER EĞRİLERİNİN İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ  
ÇİFTLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Zehra DUMAN**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**

**Şubat 2021**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BÉZIER EĞRİLERİNİN İNVLÜT-EVOLÜT EĞRİ  
ÇİFTLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Zehra DUMAN**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ**

**Bu tez 08.02.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.**

## **BEYAN**

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Zehra DUMAN  
08/02/2021

## TEŞEKKÜR

Tez çalıőmamın planlanmasında, araőtırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalıőmamı bilimsel temeller ışığında őekillendiren çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e en içten saygı ve teőekkürlerimi sunarım.

Desteęini her zaman yanımda hissettiğim, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan annem Züleyha DUMAN, babam Faik DUMAN ve aileme teőekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR .....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	v
ÖZET .....	vi
SUMMARY .....	vii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....	3
2.2. Bézier Eğrileri.....	14
BÖLÜM 3.	
ÖKLİD UZAYINDA BÉZIER EĞRİLERİNİN İNVOLÜT–EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ.....	33
3.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Bézier Eğrilerinin İnvolut–Evolüt Eğri Çiftleri.....	33
BÖLÜM 4.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	57
KAYNAKLAR .....	58
ÖZGEÇMİŞ .....	59

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$Z_{i,k}(s)$	: Bézier eğrisi için ara kontrol noktaları
$B_{i,n}$	: Bézier eğrileri için Bernstein baz fonksiyonu
$b_i$	: Bézier eğrileri için kontrol noktaları
$b_i^r$	: De Casteljaou algoritmasındaki ara kontrol noktaları
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$B[Z, s]$	: Kontrol çokgeni ile Bézier eğrisini birleştiren lineer operatör
$\Delta$	: Kontrol noktaları için fark operatörü
$Z2(s)$	: Kuadratik Bézier eğrisi
$Z3(s)$	: Kübik Bézier eğrisi
$Z1(s)$	: Lineer Bézier eğrisi
$\mathbb{E}^n$	: $n$ – boyutlu Öklid uzayı
$a, b$	: $\mathbb{E}^n$ , $n$ – boyutlu Öklid uzayında herhangi iki vektör
$A, B, C$	: $\mathbb{E}^n$ , $n$ – boyutlu Öklid uzayında herhangi üç nokta
$\mathbb{R}^n$	: $n$ – boyutlu reel iç çarpım uzayı
$Z(s)$	: $n$ . dereceden Bézier eğrisi
$\kappa, \tau$	: Öklid uzayındaki Frenet eğrilikleri

$t, n, b$	: Öklid uzayındaki Frenet vektörleri
$\ , \ $	: Öklid uzayında norm
$k_i$	: $\mathbb{E}^n$ , Öklid uzayında $i$ – yinci Frenet eğriliği
$Y_i$	: $\mathbb{E}^n$ , Öklid uzayında $i$ – yinci Frenet vektörü
$\mu, \gamma$	: $\mathbb{E}^3$ , Öklid uzayında herhangi iki eğri
$I$	: $\mathbb{R}$ , reel Öklid uzayında bir açık aralık
$\times$	: Vektörel çarpım
$V$	: Vektör uzayı

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. İnvolut–evolüt eğri çiftleri.....	11
Şekil 2.2. $i = 0$ ve $n = 4$ için orta noktalar.....	25



## ÖZET

Anahtar kelimeler: Öklid Uzayı, Bézier Eğrileri, Bernstein Polinomlar, İnvolut–Evolüt Eğri Çifti

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, Öklid uzayı ve Bézier eğrileriyle ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca, bunlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, 3–boyutlu Öklid uzayında Bernstein polinomları kullanılarak elde edilen involüt–evolüt Bézier eğri çiftlerinin Frenet elemanlarının birbiri cinsinden yazımları verilmiştir. Ayrıca elde edilen bu yazımlar neticesinde önemli sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde tüm çalışmanın özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

# **INVOLUTE–EVOLUTE CURVE COUPLES OF BÉZIER CURVE**

## **SUMMARY**

Keywords: Euclidean Space, Bézier Curves, Bernstein Polynomials, Involute–Evolute Curve Couples

This thesis consists of four parts. The first part is devoted to the introduction. In the second part, basic concepts are introduced about Euclidean space and Bézier curves. Also, basic definitions and theorems related to these are given.

The third part is the original part of the thesis. In this section, Bernstein polynomials are used in 3–dimensional Euclidean space and the interrelated software of Frenet elements of involute-evolute Bézier curve couples are given. In addition, important results have been given as a result of these writings.

In the fourth part, the entire summary of this study was made and suggestions for next research.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Polinomlar kolay tanımlandıkları için bilgisayar uygulamalarında çok kullanışlıdır. Bu nedenle matematiksel araç olarak kullanımı yaygındır. Ayrıca polinomlar kolayca diferensiyellenebilir ve integrallenebilir. Bu nedenle polinomlarla işlem yapmak, yapılan çalışmalarda büyük kolaylıklar sağlamaktadır, [1]. Sade bir yapısı ve önemli özelliklere sahip olduğundan Bernstein polinomlarının kullanımları oldukça yaygındır ve bundan dolayı Bernstein polinomlarının olasılık teorisi, sayılar teorisi gibi birçok alanda kullanımı mevcuttur, [2].

Bernstein polinomlarının bulunuşu Sergei Natanovich Bernstein'e dayanır. Kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında en iyi yaklaşan polinomun bulunması ve yaklaşım hızının hesaplanması yaklaşım teorisinde çalışılan önemli problemlerden biridir. Bernstein, 1885 yılında Karl Weierstrass tarafından kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlarla yaklaşılabileceğini göstermesi üzerine buna daha basit bir yolla ispat bulmaya çalışmıştır. Bu ispatı yapmak için kendi adını verdiği Bernstein polinomlarından yararlanmıştır. Bernstein'in yapmış olduğu en önemli çalışmalarından biri Weierstrass teoremine daha basit bir ispat yolu bulmasıdır. Weierstrass teoremi çok önemli bir teorem olup bu teoremde verilen polinomlar her aralıkta sürekli olan, kolay türevlenebilen ve integrallenebilen fonksiyonlardır, [3].

Parametrik kübik eğrileri tanımlamak için kullanılan interpolasyon yöntemleri ilk defa Renault şirketinde mühendis olarak çalışan Pierre Bézier tarafından kullanılmıştır. Ayrıca Pierre Bézier interpolasyon tekniklerini daha fazla geliştirmek için De Casteljau algoritmasını geliştirmiştir, [4].

Yüzey ve eğri tanımlarını kolay bir şekilde yapmak için Paul De Casteljau 1959 yılında çalışma yapmıştır. 1968'de Pierre Bézier'in benzer bir amaçla yaptığı çalışmada, Paul

De Casteljaou'dan bağımsız olarak De Casteljaou ile aynı formülü geliştirmiştir. Bu çalışmanın neticesinde elde edilen Bézier formülleri, kontrol noktaları kullanarak orijinal eğriye yaklaşmayı sağlayan bir yöntem olmuştur, [4].

Bézier eğrilerinin birçok kullanım alanı mevcuttur. Ancak “Bilgisayar Destekli Tasarım” alanında önemli bir yer edinmektedir. Çünkü Bézier eğrilerinin parçalı polinom eğrileri için kullanışlı bir geometrik gösterimi mevcuttur. Ayrıca Bézier eğrilerinin tıp ve mühendislik alanında da kullanımı mevcuttur. Bézier eğrileri özel bir şeklin burulma ve eğrilik gibi birçok özelliklerinin belirlenip şeklin oluşturulmasında kullanışlı bir yapıya sahiptir, [5,6].

Bu çalışmada ise öncelikle Öklid uzayındaki temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca involüt – evolüt eğri çiftlerinin birbiri cinsinden yazımlarının ifadeleri verilmiştir. Daha sonra ise Bézier eğrileri tanımlanarak burada Bézier eğrilerinin farklı şekilde gösterimleri verilip bu gösterimler vasıtasıyla Frenet elemanlarının ifadelerine yer verilmiştir. Son olarak Öklid uzayındaki eğriler Bézier eğrileri seçilerek Bézier involüt – evolüt eğri çifti kavramı verilmiştir. Ayrıca Bézier eğrisi olarak seçilen bu involüt – evolüt eğri çiftinin Frenet elemanlarının birbiri cinsinden yazımlarına yer verilmiştir.

## BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde  $n$  – boyutlu reel Öklid uzayındaki temel kavramlar verilip, involüt–evolüt eğri çiftlerinin birbiri cinsinden yazımı için gerekli olan ve  $n = 3$  özel durumunda çalışmamıza temel olan tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1.1.** Bir reel afin uzayı  $X$  olmak üzere  $X$  ile birleşen vektör uzayı da  $V$  olsun.  $V$  vektör uzayında

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \rightarrow \langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad \begin{cases} a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases}$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa,  $X$  afin uzayına  $n$  – boyutlu Öklid uzayı denir ve  $\mathbb{E}^n$  ile gösterilir, [7].

**Tanım 2.1.2.**  $n$  – boyutlu bir reel iç çarpım uzayı  $V$  olmak üzere  $V$  ile birleşen bir Öklid uzayı  $\mathbb{E}^n$  olsun.  $V$  vektör uzayı üzerindeki norm  $\| , \|$  olmak üzere,

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(A, B) = \|AB\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}, \quad \begin{cases} A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona  $\mathbb{E}^n$ ,  $n$  – boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu denir. Her  $A, B \in \mathbb{E}^n$  için  $d(A, B)$  değerine de  $A$  ile  $B$  noktaları arasındaki uzaklık adı verilir, [7].

**Teorem 2.1.3.**  $\mathbb{E}^n$ , Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir, [7].

**Tanım 2.1.4.**  $\mathbb{E}^n$ , Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna Öklid metriği denir, [7].

**Tanım 2.1.5.**  $\mathbb{E}^n$  uzayında üç nokta  $A, B, C$  olsun.  $AB$  ile  $AC$  vektörleri arasındaki  $\theta \in \mathbb{R}$  açısı,  $0 \leq \theta \leq \pi$  olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{\langle AB, AC \rangle}{\|AB\| \|AC\|}$$

şeklindedir, [8].

**Tanım 2.1.6.**  $\mathbb{E}^n$ , Öklid uzayında, sıralı bir  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $(n+1)$ -lisi için eğer  $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$  vektör sistemi  $\mathbb{R}^n$ , iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  sistemine  $\mathbb{E}^n$  uzayının bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir, [7].

**Tanım 2.1.7.**  $\mathbb{E}^n$  uzayında bir  $A$  noktasının standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$E_0A = \sum_{i=1}^n a_i E_0 E_i$$

şeklindedir. Burada

$$a_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n)$$

fonksiyonlarına  $A$  noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  sıralı  $n$ -lisine Öklid koordinat sistemi denir, [7].

**Tanım 2.1.8.**  $I$ ,  $\mathbb{R}$  uzayında açık bir aralık olmak üzere

$$\begin{aligned}\mu: I &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ s &\rightarrow \mu(s) = (\mu_1(s), \dots, \mu_n(s))\end{aligned}$$

biçiminde düzgün diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $\mu(s)$ ,  $\mathbb{E}^n$  Öklid uzayında bir alt küme olmak üzere  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olarak adlandırılır.  $I \subset \mathbb{R}$  aralığına,  $\mu$  eğrisinin parametre aralığı ve  $s \in I$  değişkenine de  $\mu(s)$  eğrisinin parametresi denir, [7].

**Tanım 2.1.9.**  $n$  – boyutlu Öklid uzayında  $L$  eğrisi  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilsin ve

$$\mu(s) = (\mu_1(s), \mu_2(s), \dots, \mu_n(s))$$

olsun. Böylece

$$\frac{d\mu}{ds}_{\mu(s)} = \mu'(s)_{\mu(s)} = \left( \frac{d\mu_1}{ds}, \frac{d\mu_2}{ds}, \dots, \frac{d\mu_n}{ds} \right)$$

tanjant vektörüne,  $L$  eğrisinin  $\mu(s)$  noktasındaki hız vektörü denir, [7].

**Tanım 2.1.10.**  $L$ ,  $\mathbb{E}^n$  uzayında bir eğri olsun ve  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned}\|\mu'\|: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \|\mu'\|(s) = \|\mu'(s)\|\end{aligned}$$

şeklindeki fonksiyon eğrinin skalar hız fonksiyonu olarak adlandırılır ve  $\|\mu'(s)\|$  reel sayısına da  $L$  eğrisinin  $\mu(s)$  noktasındaki skalar hızı denir. Eğer

$$\|\mu'(s)\| = 1$$

olması durumunda  $L$  eğrisine birim hızlı eğri ve  $s \in I$  parametresine de eğrinin yay parametresi denir, [7].

**Tanım 2.1.11.**  $L$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun ve  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $x, y \in I$  olmak üzere,

$$s = \int_x^y \|\mu'(s)\| ds$$

reel sayısına  $L$  eğrisinin yay uzunluğu denir, [7].

**Tanım 2.1.12.**  $n$ -boyutlu Öklid uzayında  $L$  eğrisi  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilsin ve

$$\phi = \{\mu', \mu'', \dots, \mu^{(r)}\}$$

sistemi lineer bağımsız olsun. Burada

$$\mu^{(k)} \in S_p\{\phi\}, \quad k > r$$

olmak üzere,  $\phi$  lineer bağımsız sisteminden elde edilen  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  ortonormal sistemine  $L$  eğrisinin Serret–Frenet  $r$ -ayaklı alanı,  $l \in L$  için  $\{Y_1(l), Y_2(l), \dots, Y_r(l)\}$  sistemine  $l \in L$  noktasındaki Serret–Frenet  $r$ -ayaklısı ve her bir  $Y_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , vektörüne de Serret–Frenet vektörü denir, [7].



**Tanım 2.1.13.**  $L$ ,  $n$  – boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun ve  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  yay parametresine karşılık gelen  $\mu(s) \in L$  noktasındaki Frenet  $r$  – ayaklısı  $\{Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_r(s)\}$  olsun. Bu takdirde

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle Y'_i(s), Y_{i+1}(s) \rangle \quad (1 \leq i < r)$$

şeklinde olan fonksiyona  $L$  eğrisinin  $i$  – yinci eğrilik fonksiyonu ve  $\forall s \in I$  için  $k_i(s)$  reel sayısına da  $L$  eğrisinin  $\mu(s)$  noktasındaki  $i$  – yinci eğriliği denir, [9].

**Teorem 2.1.14.**  $L \subseteq \mathbb{E}^3$  eğrisi  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ve  $s \in I$  yay parametresi ile verilsin.  $L$  eğrisinin  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  Frenet vektörleri

$$t(s) = \mu'(s),$$

$$n(s) = \frac{\mu''(s)}{\|\mu''(s)\|}, \quad (2.1)$$

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

şeklindedir, [7].

**Teorem 2.1.15.**  $L \subseteq \mathbb{E}^3$  eğrisi  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  herhangi bir parametre olmak üzere,  $L$  eğrisinin  $\mu(s)$  noktasındaki  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
t(s) &= \frac{\mu'(s)}{\|\mu'(s)\|}, \\
b(s) &= \frac{\mu'(s) \times \mu''(s)}{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|}, \\
n(s) &= b(s) \times t(s)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklindedir ve  $L$  eğrisinin  $\mu(s)$  noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla  $\kappa(s)$ ,  $\tau(s)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|}{\|\mu'(s)\|^3}, \\
\tau(s) &= \frac{\langle \mu'(s) \times \mu''(s), \mu'''(s) \rangle}{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|^2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklindedir, [7].

**Teorem 2.1.16.**  $L$ ,  $\mathbb{E}^n$  uzayında bir eğri  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s$  eğrinin yay parametresi olsun.  $L$  eğrisinin  $\mu(s)$  noktasındaki  $i$  – yinci eğriliği  $k_i(s)$  ve Frenet  $r$  – ayaklısı da  $\{Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_r(s)\}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
i) \quad Y_1'(s) &= k_1(s)Y_2(s), \\
ii) \quad Y_i'(s) &= -k_{i-1}(s)Y_{i-1}(s) + k_i(s)Y_{i+1}(s), \quad (1 < i < r) \\
iii) \quad Y_r'(s) &= -k_{r-1}(s)Y_{r-1}(s)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

bağıntıları sağlanır, [7].

**Tanım 2.1.17.**  $L$ ,  $\mathbb{E}^n$  uzayında bir eğri  $(I, \mu)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s$  eğrinin yay parametresi olsun.  $L$  eğrisinin  $\mu(s)$  noktasındaki  $i$ -yinci eğriliği  $k_i(s)$  olmak üzere,  $\{Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_r(s)\}$  Frenet  $r$ -ayaklısının  $Y_i(s)$  Frenet vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikler

$$\begin{bmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ Y_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{r-1}' \\ Y_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{r-1} \\ Y_r \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitliklere Frenet Formülleri denir, [7].

**Teorem 2.1.18.**  $\mu(s): I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ,  $s \in I$  yay parametrelili eğrisi verilsin.  $\mu(s)$  eğrisinin Frenet 3-ayaklısı  $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ;  $\kappa(s)$  eğrinin eğriliği ve  $\tau(s)$  eğrinin burulması olmak üzere Frenet formülleri

$$t'(s) = \kappa(s)n(s),$$

$$n'(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s), \quad (2.5)$$

$$b'(s) = -\tau(s)n(s)$$

şeklindedir. Bu Frenet formüllerinin matrisel ifadesi ise

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir, [8].

**Teorem 2.1.19.**  $\mu(s): I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisinin herhangi bir parametresi  $s \in I$  olmak üzere, Frenet 3 – ayaklısı  $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ; eğrilik ve burulması, sırasıyla  $\kappa(s), \tau(s)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} t'(s) &= \|\mu'(s)\| \kappa(s) n(s), \\ n'(s) &= \|\mu'(s)\| (-\kappa(s) t(s) + \tau(s) b(s)), \\ b'(s) &= -\|\mu'(s)\| \tau(s) n(s) \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde hesaplanır, [8].

**Teorem 2.1.20.**  $\mathbb{E}^3$ , 3 – boyutlu Öklid uzayında  $\kappa = 0 \Leftrightarrow \mu$  eğrisi doğrudur, [9].

**Teorem 2.1.21.**  $\mathbb{E}^3$ , 3 – boyutlu Öklid uzayında  $\tau = 0 \Leftrightarrow \mu$  eğrisi düzlemsel bir eğridir, [9].

**Tanım 2.1.22.**  $\mu: I \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi  $s \in I$  yay parametresi ile verilsin. Eğer  $\mu(s)$  eğrisinin Frenet eğrilikleri sabitse  $\mu(s)$  eğrisine  $w$  – eğrisi denir, [9].

**Tanım 2.1.23.**  $\mu: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  ve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrileri için

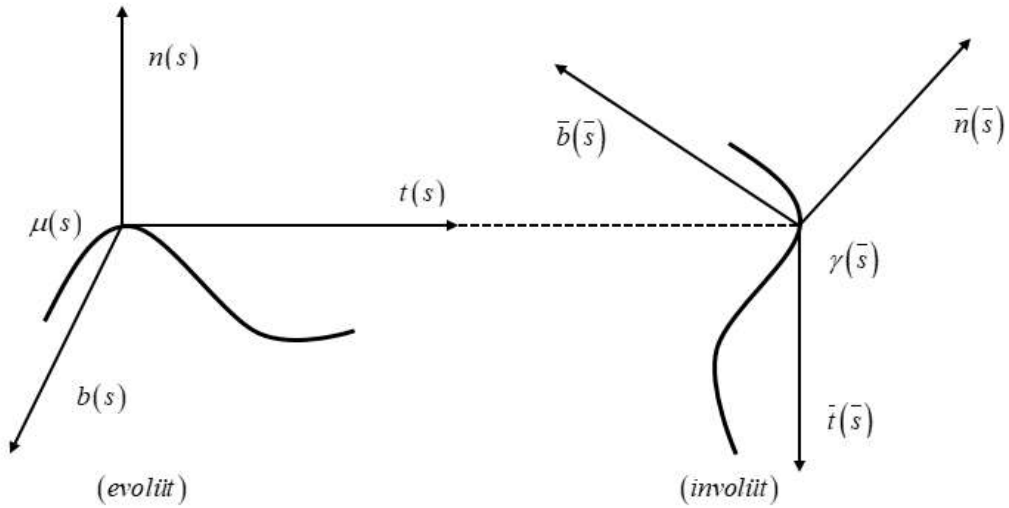
$$g : I \rightarrow I$$

$$s \rightarrow \bar{s} = g(s), \frac{d\bar{s}}{ds} \neq 0$$

bire bir ve örten dönüşümü altında teğet vektör alanlarının iç çarpımlarının sıfır olması durumu, yani

$$\langle t(s), \bar{t}(\bar{s}) \rangle = 0$$

sağlanıyorsa  $\gamma(\bar{s})$  eğrisine,  $\mu(s)$  eğrisinin involütü,  $\mu(s)$  eğrisine de  $\gamma(\bar{s})$  eğrisinin evolütü denir, [8].



Şekil 2.1. İvolüt–evolüt eğri çiftleri

**Teorem 2.1.24.**  $\mu : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi  $s \in I$  yay parametresi ile verilsin.  $\mu(s)$  eğrisinin involütü,  $\bar{s} \in I$  parametrelili  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi olmak üzere,  $\forall s, \bar{s} \in I$  için

$$d(\mu(s), \gamma(\bar{s})) = |c - s| \quad (c \in \mathbb{R})$$

şeklindedir. Böylece

$$\gamma(\bar{s}) = \mu(s) + (c-s)t(s) \quad (2.7)$$

olarak ifade edilebilir, [8].

**Teorem 2.1.25.**  $\mu(s)$  eğrisinin involütü, herhangi bir  $\bar{s} \in I$  parametrelili  $\gamma: I \rightarrow E^3$  eğrisi olmak üzere  $\frac{d\bar{s}}{ds} = sbt$  ise,  $\mu(s)$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  ile  $\gamma(\bar{s})$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{\bar{t}(\bar{s}), \bar{n}(\bar{s}), \bar{b}(\bar{s})\}$  arasında aşağıdaki ilişki

$$\begin{aligned} \bar{t}(\bar{s}) &= n(s), \\ \bar{n}(\bar{s}) &= \frac{-\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} t(s) + \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} b(s), \\ \bar{b}(\bar{s}) &= \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} t(s) + \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} b(s) \end{aligned} \quad (2.8)$$

mevcuttur, [8].

**Teorem 2.1.26.**  $\mu: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi  $s \in I$  yay parametresi ile verilsin.  $\mu(s)$  eğrisinin involütü, herhangi bir  $\bar{s} \in I$  parametrelili  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi olmak üzere,  $\mu(s)$  eğrisinin Frenet eğrilikleri  $\kappa(s), \tau(s)$  ve  $\gamma(\bar{s})$  eğrisinin Frenet eğrilikleri  $\bar{\kappa}(\bar{s}), \bar{\tau}(\bar{s})$  cinsinden aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(\bar{s}) &= \frac{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}}{|(c-s)\kappa(s)|}, \\ \bar{\tau}(\bar{s}) &= \frac{\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s)}{|(c-s)\kappa(s)|(\kappa^2(s) + \tau^2(s))} \end{aligned} \quad (2.9)$$

elde edilir, [8].

**Teorem 2.1.27.**  $\mu : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi  $s \in I$  yay parametresi ile verilsin.  $\mu(s)$  eğrisinin involütü, herhangi bir  $\bar{s} \in I$  parametrelili  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi ise;

$$\phi(\bar{s}) = \int_0^{\bar{s}} \bar{\tau}(a) da$$

olmak üzere

$$\mu(s) = \gamma(\bar{s}) + \rho(\bar{s})\bar{n}(\bar{s}) - \rho(\bar{s})\tan(\phi(\bar{s}) + c)\bar{b}(\bar{s}), \quad c \in R$$

dir. Ayrıca,  $\gamma(\bar{s})$  noktasında ki normal düzlemde birinci kenarı  $\mu(s) - \gamma(\bar{s})$ , ikinci kenarı  $\bar{n}(\bar{s})$  olan yönlü açının ölçüsü  $\phi(\bar{s}) + c$  dir, [8].

**Teorem 2.1.28.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi  $\bar{s} \in I$  yay parametresi ile verilsin.  $\gamma(\bar{s})$  eğrisinin evolütü, herhangi bir  $s \in I$  parametrelili  $\mu : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi olmak üzere,  $\mu(s)$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ,  $\gamma(\bar{s})$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{\bar{t}(\bar{s}), \bar{n}(\bar{s}), \bar{b}(\bar{s})\}$  cinsinden aşağıdaki gibi

$$t(s) = \cos(\phi(\bar{s} + c))\bar{n}(\bar{s}) - \sin(\phi(\bar{s} + c))\bar{b}(\bar{s}),$$

$$n(s) = -\bar{t}(\bar{s}), \quad (2.10)$$

$$b(s) = \sin(\phi(\bar{s} + c))\bar{n}(\bar{s}) + \cos(\phi(\bar{s} + c))\bar{b}(\bar{s})$$

elde edilir, [8].

**Teorem 2.1.29.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi  $\bar{s} \in I$  yay parametresi ile verilsin.  $\gamma(\bar{s})$  eğrisinin evolütü, herhangi bir  $s \in I$  parametrelili  $\mu: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi olmak üzere,  $\mu(s)$  eğrisinin Frenet eğrilikleri  $\kappa(s)$ ,  $\tau(s)$  ile  $\gamma(\bar{s})$  eğrisinin Frenet eğrilikleri  $\bar{\kappa}(\bar{s})$ ,  $\bar{\tau}(\bar{s})$  arasında

$$\kappa(s) = \frac{\bar{\kappa}^3(\bar{s}) \cos(\varphi(\bar{s}) + c)}{\bar{\kappa}(\bar{s}) \sin(\varphi(\bar{s}) + c) - \bar{\kappa}'(\bar{s}) \cos(\varphi(\bar{s}) + c)},$$

$$\tau(s) = \frac{-\bar{\kappa}^3(\bar{s}) \sin(\varphi(\bar{s}) + c) \cos^2(\varphi(\bar{s}) + c)}{\bar{\kappa}(\bar{s}) \bar{\tau}(\bar{s}) \sin(\varphi(\bar{s}) + c) - \bar{\kappa}'(\bar{s}) \cos(\varphi(\bar{s}) + c)}$$
(2.11)

ilişki mevcuttur, [8].

## 2.2. Bézier Eğrileri

Bu bölümde Bézier eğrileri ve Bézier eğrilerinin Serret–Frenet elemanları ile ilgili çalışmamızı ele alan tanım ve teoremler verilecektir.

Bézier eğrileri Bernstein polinomlarına ve  $b_0, b_1, \dots, b_n$  kontrol noktalarına dayandırılmaktadır.

$n$ . dereceden bir Bézier eğrisi  $Z(s)$ ,  $n+1$  kontrol noktası ile

$$Z(s) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(s) b_i \quad 0 \leq s \leq 1$$
(2.12)

şeklinde ifade edilir. Burada  $B_{i,n}(s)$  Bernstein polinomunu ve  $b_i$ 'ler kontrol noktalarını ifade etmektedir. Bernstein polinomları



$$B_{i,n}(s) = \binom{n}{i} s^i (1-s)^{n-i} \quad (2.13)$$

olmak üzere, binom katsayısı

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad i = 0, \dots, n$$

şeklinde ifade edilir, [4].

**Tanım 2.2.1.**  $n$  – boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{E}^n$  olmak üzere  $b_0, b_1, b_2$  lineer olmayan üç noktaya sahip bir Bézier eğrisi

$$\begin{aligned} Z2(s) &= \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(s) b_i \\ &= B_{0,2}(s) b_0 + B_{1,2}(s) b_1 + B_{2,2}(s) b_2 \\ &= (1-s)^2 b_0 + 2(1-s) s b_1 + s^2 b_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilir ve  $\mathbb{E}^n$  uzayında birim hızlı olmayan kuadratik Bézier eğrisi olarak adlandırılmaktadır, [10].

**Tanım 2.2.2.**  $n$  – boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{E}^n$  olmak üzere  $b_0, b_1, b_2, b_3$  lineer olmayan dört noktaya sahip bir Bézier eğrisi

$$\begin{aligned} Z3(s) &= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(s) b_i \\ &= B_{0,3}(s) b_0 + B_{1,3}(s) b_1 + B_{2,3}(s) b_2 + B_{3,3}(s) b_3 \\ &= (1-s)^3 b_0 + 3(1-s)^2 s b_1 + 3(1-s) s^2 b_2 + s^3 b_3 \end{aligned} \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilir ve  $\mathbb{E}^n$  uzayında birim hızlı olmayan kübik Bézier eğrisi olarak adlandırılmaktadır, [10].

**Teorem 2.2.3.**  $n$ . dereceden bir Bézier eğrisinin birinci mertebeden türevi

$$Z'(s) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta b_i \quad (2.16)$$

şeklindedir. Burada  $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$  dir, [10].

**İspat.** Bir Bernstein polinomu

$$B_{i,n}(s) = \binom{n}{i} s^i (1-s)^{n-i}$$

olmak üzere, eşitliğin her iki tarafının türevi alınır

$$B'_{i,n}(s) = \binom{n}{i} (i s^{i-1} (1-s)^{n-i}) - \binom{n}{i} (s^i (n-i) (1-s)^{n-i-1})$$

şeklindedir. Son olarak kombinasyon ifadeleri açılıp sadeleştirmeler yapılırsa Bernstein polinomları kullanılarak ifade tekrar düzenlendiğinde  $B_{i,n}(s)$ 'nin birinci türevi aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} B'_{i,n}(s) &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} s^{i-1} (1-s)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} s^i (1-s)^{n-i-1} \\ &= n [B_{i-1,n-1}(s) - B_{i,n-1}(s)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu Bernstein polinomunun birinci türevi toplam sembolü altında

$$n \sum_{i=0}^n [B_{i-1,n-1}(s) - B_{i,n-1}(s)]$$

yazılabilir. Yazılan bu ifade açılırsa

$$\begin{aligned}
& n \begin{pmatrix} B_{-1,n-1}(s)b_0 - B_{0,n-1}(s)b_0 \\ B_{0,n-1}(s)b_1 - B_{1,n-1}(s)b_1 \\ B_{1,n-1}(s)b_2 - B_{2,n-1}(s)b_2 \\ \vdots \\ B_{n-2,n-1}(s)b_{n-1} - B_{n-1,n-1}(s)b_{n-1} \\ B_{n-1,n-1}(s)b_n - B_{n,n-1}(s)b_n \end{pmatrix} \\
& + \\
& n \begin{pmatrix} B_{-1,n-1}(s)b_0 + B_{0,n-1}(s)(b_1 - b_0) + B_{1,n-1}(s)(b_2 - b_1) \\ + \cdots + B_{n-1,n-1}(s)(b_n - b_{n-1}) - B_{n,n-1}(s)b_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra ifade düzenlenirse

$$n(B_{0,n-1}(s)\Delta b_0 + B_{1,n-1}(s)\Delta b_1 + \cdots + B_{n-1,n-1}(s)\Delta b_{n-1})$$

bulunur. Buradan  $n$ . dereceden bir Bézier eğrisinin birinci türevi

$$Z'(s) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta b_i$$

şeklinde ifade edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Önerme 2.2.4.**  $n$ . dereceden bir Bézier eğrisinin ikinci mertebeden türevi

$$Z''(s) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(s) \Delta^2 b_i \quad (2.17)$$

şeklindedir. Burada  $\Delta^2 b_i = \Delta b_{i+1} - \Delta b_i = b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i$  dir, [10].

**Önerme 2.2.5.**  $n$ . dereceden bir Bézier eğrisinin  $r$ . mertebeden türevi aşağıdaki gibi

$$Z^{(r)}(s) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} B_{i,n-r}(s) \Delta^r b_i \quad (2.18)$$

ifade edilir. Burada  $\Delta^r b_i = \Delta^{r-1} b_{i+1} - \Delta^{r-1} b_i = b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i$  dir, [5,10].

**Önerme 2.2.6.**  $n$ . dereceden bir Bézier eğrisinin  $r$ . mertebeden türev denkleminde başlangıç ve bitiş noktası ele alındığında aşağıdaki gibi

$$Z^{(r)}(s) \Big|_{s=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0, \quad (2.19)$$

$$Z^{(r)}(s) \Big|_{s=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_{n-r}$$

ifade edilir, [5].

**Tanım 2.2.7.**  $\mu: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  birim hızlı olmayan bir eğri olsun. Serret–Frenet çatısı  $\{t, n, b\}$  olmak üzere

$$t(s) = \frac{\mu'(s)}{\|\mu'(s)\|},$$

$$b(s) = \frac{\mu'(s) \times \mu''(s)}{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|}, \quad (2.20)$$

$$n(s) = b(s) \times t(s)$$

şeklindedir ve ayrıca  $\kappa, \tau$  eğrilikleri aşağıdaki gibi

$$\kappa(s) = \frac{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|}{\|\mu'(s)\|^3},$$

$$\tau(s) = \frac{\det(\mu'(s), \mu''(s), \mu'''(s))}{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|^2}$$

tanımlanır, [7].

**Teorem 2.2.8.**  $n$ . dereceden birim hızlı olmayan Bézier eğrisi  $Z(s)$  ve  $b_0, b_1, \dots, b_n$  kontrol noktaları olmak üzere Serret–Frenet çatısı  $\{t, n, b\}$  olmak üzere

$$t(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta^1 b_i}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta^1 b_i \right\|},$$

$$b(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j)}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|},$$

$$n(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) B_{k,n-1}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta^1 b_k}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) B_{k,n-1}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta^1 b_k \right\|}$$

ve  $\kappa, \tau$  eğrilikleri  $\forall s \in \mathbb{R}$  için

$$\kappa(s) = \frac{n-1}{n} \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta^1 b_i \right\|^3},$$

$$\tau(s) = \frac{n-2}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) B_{k,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j, \Delta^3 b_k \rangle}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}$$
(2.23)

şeklindedir, [11].

**İspat.** Tanım 2.2.7 de bulunan denklemler ve (2.18) denklemini göz önüne alınarak gerekli işlemler yapılırsa Serret–Frenet elemanlarından  $t(s)$  vektörü aşağıdaki gibi

$$t(s) = \frac{\mu'(s)}{\|\mu'(s)\|} = \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta^1 b_i}{\left\| n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta^1 b_i \right\|}$$

elde edilir. Benzer şekilde  $b(s)$  vektörü için gerekli işlemler yapılırsa

$$b(s) = \frac{\mu'(s) \times \mu''(s)}{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j)}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}$$

bulunur. Elde edilen  $b(s)$  ve  $t(s)$  vektörleri arasında vektörel çarpım yapılırsa  $n(s)$  vektörü

$$n(s) = b(s) \times t(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) B_{k,n-1}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta^1 b_k}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) B_{k,n-1}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta^1 b_k \right\|}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\kappa, \tau$  eğriliklerini bulmak için (2.18) ve (2.21) denklemleri kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|}{\|\mu'(s)\|^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta^1 b_i \right\|^3}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{\langle \mu'(s) \times \mu''(s), \mu'''(s) \rangle}{\|\mu'(s) \times \mu''(s)\|^2} = \frac{n-2}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) B_{k,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j, \Delta^3 b_k \rangle}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.2.9.**  $n$ . dereceden birim hızlı olmayan Bézier eğrisi  $Z(s)$  ve  $b_0, b_1, \dots, b_n$  kontrol noktaları ile Serret–Frenet çatısı  $\{t, n, b\}$ , başlangıç noktası  $s = 0$  için

$$t(s)|_{s=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|},$$

$$n(s)|_{s=0} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \operatorname{cosec} \theta - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \theta,$$

$$b(s)|_{s=0} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}$$

şeklinde bulunur ve bitiş noktası  $s = 1$  için

$$t(s)\Big|_{s=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|},$$

$$n(s)\Big|_{s=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \varphi - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \operatorname{cosec} \varphi,$$

$$b(s)\Big|_{s=1} = -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\theta$ ,  $\Delta b_0$  ile  $\Delta b_1$  arasındaki açı ve  $\varphi$ ,  $\Delta b_{n-1}$  ile  $\Delta b_{n-2}$  arasındaki açıdır, [11].

**İspat.** Tanım 2.2.7 de bulunan denklemler ve (2.19) denkleminde bulunan ilk denklem kullanılırsa Serret–Frenet elemanlarından  $t(s)$  vektörü için başlangıç noktası olan  $s = 0$  noktasında incelediğimizde

$$t(s)\Big|_{s=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

bulunur. Benzer şekilde işlemler yapılır ve ayrıca burada  $\Delta^2 b_0 = \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0$  olduğu dikkate alınırsa  $b(s)$  vektörü için başlangıç noktası olan  $s = 0$  noktasında incelediğimizde



$$\begin{aligned}
b(s)\Big|_{s=0} &= \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^2 b_0}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^2 b_0\|} = \frac{\Delta^1 b_0 \times (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)}{\|\Delta^1 b_0 \times (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|} \\
&= \frac{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) - (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_0)}{\|(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) - (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_0)\|} \\
&= \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen  $t(s)$  ve  $b(s)$  vektörleri kullanılarak  $n(s)$  vektörü için başlangıç noktası olan  $s = 0$  noktasında incelediğimizde

$$\begin{aligned}
n(s)\Big|_{s=0} = b(s) \times t(s) &= \frac{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\|} \\
&= \frac{\|\Delta^1 b_0\|^2 \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\|} - \frac{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \Delta^1 b_0 \cos \theta}{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\|^2 \sin \theta} \\
&= \frac{\|\Delta^1 b_0\|^2 \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0\| \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \sin \theta} - \frac{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \Delta^1 b_0 \cos \theta}{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\|^2 \sin \theta} \\
&= \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \operatorname{cosec} \theta - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \theta
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi de bitiş noktası olan  $s = 1$  noktası için  $t(s)$  vektörü incelendiğinde

$$t(s)\Big|_{s=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

elde edilir. Benzer şekilde işlemler yapılır ve ayrıca burada  $\Delta^2 b_{n-2} = \Delta^1 b_{n-2} - \Delta^1 b_{n-1}$  olduğu dikkate alınırsa  $b(s)$  vektörü için bitiş noktası olan  $s = 1$  noktasında incelediğimizde

$$\begin{aligned}
b(s)\Big|_{s=1} &= \frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^2 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^2 b_{n-2}\|} \\
&= \frac{(\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}) - (\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-1})}{\|(\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}) - (\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-1})\|} \\
&= -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen  $t(s)$  ve  $b(s)$  vektörleri kullanılarak  $n(s)$  vektörü için bitiş noktası olan  $s=1$  noktasında incelediğimizde

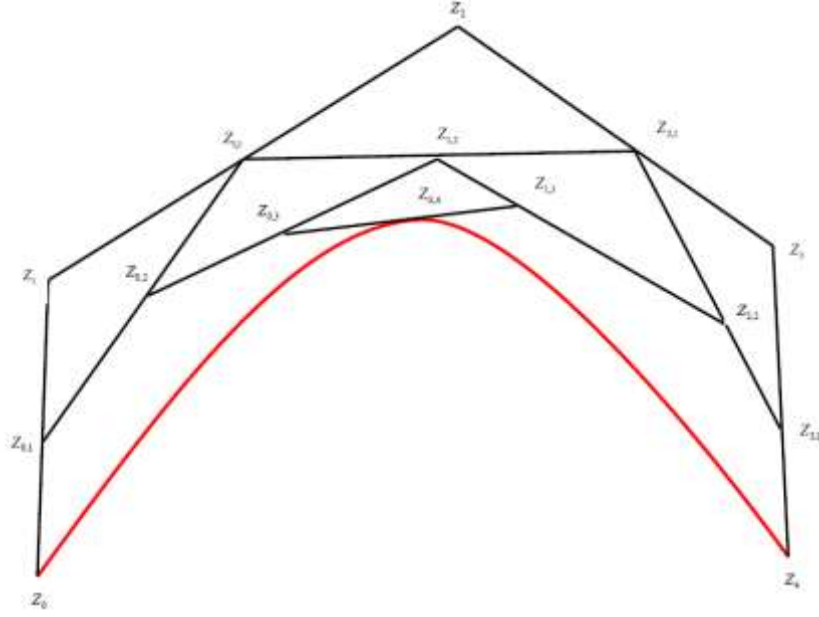
$$\begin{aligned}
n(s)\Big|_{s=1} &= b(s) \times t(s) \\
&= \frac{\langle \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle \Delta^1 b_{n-1} - \langle \Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\|} \\
&= \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\| \Delta^1 b_{n-1} \cos \varphi - \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \sin \varphi} \frac{1}{\|\Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \sin \varphi} \\
&= \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \varphi - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \operatorname{cosec} \varphi,
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Tanım 2.2.10.** Öklid uzayında algoritmik Bézier eğrisinin orta noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  kontrol noktaları ile birlikte

$$Z_{i,k}(s) = \sum_{j=0}^k B_{j,k}(s) b_{i+j} \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilir, [12].



Şekil 2.2.  $i=0$  ve  $n=4$  için orta noktaları

Şekilde de görüldüğü gibi ve (2.24) denklemi göz önüne alınarak  $Z_{i,0}(s) = b_i$  ve

$$Z_{0,n}(s) = Z(s) \quad (2.25)$$

olduğu açıktır.

Ayrıca (2.24) denklemi kullanılarak  $n$ . dereceden algoritmik Bézier eğrisi  $n+1$  kontrol noktaları ile elde edilir.  $Z_{i,k}(s)$  orta noktaları için

$$Z_{i,k}(s) = (1-s)Z_{i,k-1}(s) + sZ_{i+1,k-1}(s) \quad (2.26)$$

denklemini yazılabilir, [12].

**Önerme 2.2.11.**  $Z_{i,k}(s)$  ve  $Z_{i+1,k}(s)$  orta noktaları için aşağıdaki fark denklemi

$$Z_{i+1,k}(s) - Z_{i,k}(s) = \left[ (1-s)(Z_{i+1,k-1}(s) - Z_{i,k-1}(s)) + s(Z_{i+2,k-1}(s) - Z_{i+1,k-1}(s)) \right] \quad (2.27)$$

elde edilir, [12].

**İspat.**  $Z_{i+1,k}(s)$  orta noktası için (2.26) denklemi göz önüne alınırsa

$$Z_{i+1,k}(s) = (1-s)(Z_{i+1,k-1}(s) + sZ_{i+2,k-1}(s)) \quad (2.28)$$

elde edilir ve (2.26), (2.28) denklemlerinin farkı alınırsa aşağıdaki denklem

$$Z_{i+1,k}(s) - Z_{i,k}(s) = (1-s)Z_{i+1,k-1}(s) - sZ_{i+2,k-1}(s) - \left( (1-s)(Z_{i,k-1}(s) + sZ_{i+1,k-1}(s)) \right)$$

elde edilir ve elde edilen bu denklem  $(1-s)$  ve  $s$  parantezlerine alınıp ifade düzenlenirse

$$Z_{i+1,k}(s) - Z_{i,k}(s) = (1-s)(Z_{i+1,k-1}(s) - Z_{i,k-1}(s)) + s(Z_{i+2,k-1}(s) - Z_{i+1,k-1}(s))$$

şeklinde bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.2.12.**  $n$ . dereceden algoritmik Bézier eğrilerinin birinci türevi  $n+1$  kontrol noktaları yardımıyla

$$Z'_{0,n}(s) = Z'(s) = n(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \quad (2.29)$$

eşitliğiyle tanımlanır, [12].

**İspat.**  $Z(s)$  algoritmik Bézier eğrisinin türevini bulmak için (2.16) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
Z'(s) &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) \Delta b_i \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) (b_{i+1} - b_i) \\
&= n \left( \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) b_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(s) b_i \right) \\
&= n (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))
\end{aligned}$$

sonucu bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

**Önerme 2.2.13.**  $Z'_{0,n}(s)$ 'nin birinci türevi için (2.27) ve (2.29) denklemleri kullanılırsa

$$Z'_{0,n}(s) = n \left\{ (1-s)(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) + s(Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\} \quad (2.30)$$

veya

$$Z'_{0,n}(s) = n \left\{ \begin{aligned} &(1-s)^2 (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) + 2(1-s)s (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \\ &+ s^2 (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

olduğu görülür, [12].

**İspat.**  $Z_{0,n}(s)$ 'nin birinci türevini bulmak için (2.27) denklemi kullanılırsa

$$Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s) = (1-s)(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) + s(Z_{0,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))$$

elde edilir. Elde edilen denklem ve (2.29) denklemi göz önüne alınırsa  $Z_{0,n}(s)$ 'nin birinci türevi

$$Z'_{0,n}(s) = n \left\{ (1-s)(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) + s(Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\}$$

şeklinde bulunur. Ardından (2.27) denklemini dikkate alınarak gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki eşitlikler

$$Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s) = (1-s)(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) + s(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s))$$

ve

$$Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s) = (1-s)(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) + s(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s))$$

elde edilir. Son olarak elde edilen bu eşitlikler  $Z'_{0,n}(s)$  için bulunan türev denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Z'_{0,n}(s) = Z'(s) = n & \left[ (1-s)(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) + s(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \right] \\ & + (1-s) \left[ (1-s)(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) + s(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \right] \end{aligned}$$

bulunur ve bulunan bu ifade düzenlenirse

$$Z'_{0,n}(s) = Z'(s) = n \left\{ \begin{aligned} & (1-s)^2 (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) + 2(1-s)s(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \\ & + s^2 (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \end{aligned} \right\}$$

(2.31) denklemini elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Önerme 2.2.14.**  $b_0, b_1, \dots, b_n$  kontrol noktaları ile  $Z'_{i,k}(s)$  Bézier eğrisinin birinci türevi için eş değer denklemi

$$Z'_{i,k}(s) = k(Z_{i+1,k-1}(s) - Z_{i-1}(s)) \quad (2.32)$$

eşitliği ile ifade edilmiştir. Burada  $k \in \{1, \dots, n\}$  ve  $i \in \{0, \dots, n-k\}$  dir, [12].

**Teorem 2.2.15.**  $n$ . dereceden algoritmik Bézier eğrisinin ikinci türevi  $n+1$  kontrol noktaları ile (2.25) denklemi kullanılırsa aşağıdaki gibi

$$Z''_{0,n}(s) = n(n-1) \left[ (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) - (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \right] \quad (2.33)$$

elde edilir, [12].

**İspat.**  $Z_{0,n}(s)$ 'yi göz önüne aldığımızda birinci türevini (2.29) denkleminde elde edip daha sonra elde edilen  $Z'_{0,n}(s)$ 'nin bir daha türevi alınırsa  $Z_{0,n}(s)$ 'nin ikinci türevi

$$(Z'_{0,n}(s))' = (n(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)))' = n(Z'_{1,n-1}(s) - Z'_{0,n-1}(s))$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (2.32) ifadesi dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa  $Z_{0,n}(s)$ 'nin ikinci türevi

$$Z''_{0,n}(s) = n(n-1) \left[ (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) - (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \right]$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Önerme 2.2.16.**  $Z_{0,n}(s)$ 'nin ikinci türevi olan  $Z''_{0,n}(s)$  için (2.27) ve (2.33) denklemleri göz önüne alınırsa aşağıdaki denklem

$$Z''_{0,n}(s) = n(n-1) \left\{ \begin{array}{l} (1-s) \left[ (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) - (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \right] \\ +s \left[ (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) - (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \right] \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

elde edilir, [12].

**Teorem 2.2.17.**  $n$ . dereceden algoritmik Bézier eğrisinin üçüncü türevi  $n+1$  kontrol noktaları ile (2.25) denklemi kullanılırsa aşağıdaki gibi

$$Z'''(s) = a[(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) - 2(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) + (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s))] \quad (2.35)$$

denklemi elde edilir. Burada  $a = n(n-1)(n-2)$  şeklindedir, [12].

**İspat.**  $Z_{0,n}(s)$ 'nin üçüncü türevini almak için (2.33) ifadesinde elde edilen  $Z_{0,n}'(s)$ 'nin ikinci türevi olan  $Z_{0,n}''(s)$ 'nin bir daha türevi alınır

$$\begin{aligned} Z_{0,n}'''(s) &= Z'''(s) = \left\{ n(n-1) \left[ (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) - (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \right] \right\}' \\ &= n(n-1) \left[ (Z'_{2,n-2}(s) - Z'_{1,n-2}(s)) - (Z'_{1,n-2}(s) - Z'_{0,n-2}(s)) \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve (2.32) ifadesi dikkate alınır ve daha sonrasında gerekli işlemler yapılırsa

$$Z'''(s) = n(n-1)((n-2)[(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) - 2(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) + (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s))]$$

şeklinde bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.2.18.**  $Z'(s)$  ve  $Z''(s)$  vektörlerinin vektörel çarpımı

$$Z'(s) \times Z''(s) = n^2(n-1) \left[ (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right] \quad (2.36)$$

şeklinde ifade edilir, [12].

**Önerme 2.2.19.**  $Z'(s) \times Z''(s)$ , vektörel çarpımı başka bir şekilde ifade edilmek istenirse (2.27) denklemi göz önüne alındığında vektörel çarpım



$$Z'(s) \times Z''(s) = n^2(n-1) \left\{ \begin{array}{l} \left[ (1-s)^2 (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \right] + \\ (1-s)s \left[ (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \right] + \\ s^2 \left[ (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \times (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \right] \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

eşitliği ile ifade edilir, [12].

**Önerme 2.2.20.**  $\langle Z'(s) \times Z''(s), Z'''(s) \rangle$  karma çarpımını elde etmek için (2.35) ve (2.37) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \langle Z'(s) \times Z''(s), Z'''(s) \rangle \\ &= M \left\langle \left[ (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \right], (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.38)$$

şeklinde bulunur. Burada  $M = n^3(n-1)^2(n-2)$  şeklindedir, [12].

**Teorem 2.2.21.**  $b_0, b_1, \dots, b_n$  kontrol noktaları ile birim hızlı olmayan  $n$ . dereceden algoritmik Bézier eğrisi olan  $Z_{0,n}(s) = Z(s)$ 'nin Serret–Frenet elemanları olan  $\{t, n, b\}$  için eşitlikler

$$\begin{aligned} t(s) &= \frac{\{(1-s)(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) + s(Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\}}{\left\| \{(1-s)(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) + s(Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\} \right\|}, \\ b(s) &= \frac{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))}{\left\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\|}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$n(s) = \frac{\left( \begin{array}{l} \left\{ (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\} \times \\ \left\{ (1-s)(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times s(Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\} \end{array} \right)}{\left\| \left( \begin{array}{l} \left\{ (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\} \times \\ \left\{ (1-s)(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times s(Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\} \end{array} \right) \right\|}$$

şeklindedir ve ayrıca  $\kappa, \tau$  eğrilikleri aşağıdaki gibi

$$\kappa(s) = \frac{n-1}{n} \frac{\|(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\|}{\| \{ (1-s)(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) + s(Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \} \|^3 },$$

$$\tau(s) = \frac{n-2}{n} \frac{\langle [(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s))], (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \rangle}{\| \left\{ \begin{array}{l} (1-s)(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) + \\ s(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} (1-s)(Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) + \\ s(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \end{array} \right\} \|^2}$$
(2.40)

dir, [12].

## BÖLÜM 3. ÖKLİD UZAYINDA BÉZIER EĞRİLERİNİN İNVOLÜT–EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölüm tezimizin orijinal bölümünü oluşturmaktadır. Burada ilk olarak 3–boyutlu Öklid uzayında involüt–evolüt Bézier eğri çiftleri tanımlanmıştır. Daha sonra 3–boyutlu Öklid uzayında evolüt Bézier eğrisinin Frenet elemanlarının involüt Bézier eğrisinin Frenet elemanları cinsinden yazılabildiği gösterilmiştir.

### 3.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Bézier Eğrilerinin İnvolut–Evolüt Eğri Çiftleri

$\mathbb{E}^3$  uzayında sırasıyla  $s, \bar{s} \in I$  parametrelerine bağlı olarak  $\mu$  ve  $\gamma$  Bézier eğrileri

$$\mu = \mu(s) \text{ ve } \gamma = \gamma(\bar{s})$$

olsun.  $\mu$  Bézier eğrisinin Frenet vektörleri  $\{t, n, b\}$  ve  $\gamma$  Bézier eğrisinin Frenet vektörleri  $\{\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}\}$  olmak üzere burada  $t$  ve  $\bar{t}$  teğet vektör alanlarıdır ve bu Bézier eğrilerinin eğrilikleri  $\kappa, \tau$  ve  $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$  dir.

$\mu(s)$  Bézier eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  ile  $\gamma(\bar{s})$  Bézier eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{\bar{t}(\bar{s}), \bar{n}(\bar{s}), \bar{b}(\bar{s})\}$  olmak üzere (2.20) ifadesinde ki teğet vektör denklemi kullanılırsa Bernstein polinomları yardımıyla  $\bar{t}$  teğet vektörü,

$$\bar{t}(\bar{s}) = \frac{\sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_l}{\left\| \sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_l \right\|}$$

şeklinde elde edilir. Ardından (2.8) denklemlerinde ki  $\bar{t}$  teğet vektörü için verilen eşitlikte (2.22) ifadesinde ki  $n$  vektörü Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $\bar{t}$  teğet vektörü,

$$\bar{t}(\bar{s}) = \frac{\sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-1} B_{e,n-1}(s) B_{f,n-2}(s) B_{g,n-1}(s) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g}{\left\| \sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-1} B_{e,n-1}(s) B_{f,n-2}(s) B_{g,n-1}(s) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g \right\|}$$

elde edilir. Daha sonra benzer şekilde (2.20) ifadesinde ki binormal vektörünün bulunması için verilen denklem kullanılırsa Bernstein polinomları yardımıyla  $\bar{b}$  binormal vektörü aşağıdaki gibi

$$\bar{b}(\bar{s}) = \frac{\sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(\bar{s}) B_{y,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y)}{\left\| \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(\bar{s}) B_{y,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y) \right\|}$$

elde edilir. Ardından (2.8) denklemlerinde ki  $\bar{b}$  binormal vektörü için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa, \tau$  eğriliklerinin ve (2.22) ifadesinde ki  $t, b$  Frenet vektörlerinin Bernstein polinomları kullanılarak  $\bar{b}$  binormal vektörü

$$\bar{b}(\bar{s}) = \frac{n-2}{n^2} \frac{\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^2} \cdot \frac{\sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(s) \Delta^1 b_l}{\left\| \sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(s) \Delta^1 b_l \right\|}$$

$$\bar{b}(\bar{s}) = \sqrt{\frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}{(n-1)^2 \left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^6} + \frac{\left( \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle \right)^2}{(n-2)^2 \left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^4}}{\frac{n-1}{n} \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^3} \cdot \frac{\sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(s) B_{y,n-2}(s) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y)}{\left\| \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(s) B_{y,n-2}(s) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y) \right\|}} + \sqrt{\frac{\left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^6}}{\left( \frac{n-2}{n} \right)^2 \frac{\left( \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle \right)^2}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^4}}}$$

bulunur. Son olarak (2.20) ifadesinde ki asli normal vektörünün bulunması için verilen denklem kullanılırsa Bernstein polinomları yardımıyla  $\bar{n}$  aslinormal vektörü,

$$\bar{n}(\bar{s}) = \frac{\sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-3} B_{e,n-1}(\bar{s}) B_{f,n-2}(\bar{s}) B_{g,n-3}(\bar{s}) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g}{\left\| \sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-3} B_{e,n-1}(\bar{s}) B_{f,n-2}(\bar{s}) B_{g,n-3}(\bar{s}) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g \right\|}$$

şeklinde ifade edilir. Ardından (2.8) denklemlerinde ki  $\bar{n}$  aslinormal vektörü için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa, \tau$  eğriliklerinin ve (2.22) ifadesinde ki  $t, b$  Frenet vektörlerinin Bernstein polinomları kullanılarak  $\bar{n}$  aslinormal vektörü,

$$\begin{aligned}
\bar{n}(\bar{s}) = & \frac{\frac{n-1}{n} \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^3} \cdot \frac{\sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(s) \Delta^1 b_l}{\left\| \sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(s) \Delta^1 b_l \right\|}}{\left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^6} + \left( \frac{n-2}{n} \right)^2 \frac{\left( \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle \right)^2}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^4}} \\
& + \\
& \frac{n-2}{n} \frac{\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle \cdot \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(s) B_{y,n-2}(s) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y)}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^2} \cdot \frac{\left\| \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(s) B_{y,n-2}(s) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y) \right\|}{\left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^6} + \left( \frac{n-2}{n} \right)^2 \frac{\left( \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle \right)^2}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^4}}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Sonuç 3.1.1.** Frenet vektör alanlarından  $\bar{t}$  teğet vektörü için Bernstein polinomları yardımıyla elde edilen denklemde  $\bar{s}=0$  başlangıç noktası olarak alınırsa teğet vektörü,

$$\bar{t}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \theta - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \theta$$

şeklinde elde edilir. Ardından  $\bar{b}$  binormal vektörü için Bernstein polinomları yardımı ile elde edilen denklemde  $\bar{s} = 0$  başlangıç noktası olarak alınırsa aşağıdaki denklem

$$\bar{b}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=0} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} = \frac{(n-2)\langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle \cdot \Delta^1 b_0}{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^6}{\|\Delta^1 b_0\|^4} + (n-2)^2 \|\Delta^1 b_0\|^2 \langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle^2}} + \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \cdot \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}}{\sqrt{(n-1)^2 \|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^4 + (n-2)^2 \frac{\|\Delta^1 b_0\|^6 \langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle^2}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}}}$$

elde edilir. Son olarak  $\bar{n}$  aslinormal vektörü için Bernstein polinomları yardımıyla elde edilen ifadede  $\bar{s} = 0$  başlangıç noktası olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{n}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=0} &= \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \theta - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \theta \\ &= \frac{(1-n)\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \Delta^1 b_0}{\sqrt{(n-1)^2 \|\Delta^1 b_0\|^2 \|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2 + (n-2)^2 \frac{\|\Delta^1 b_0\|^8 \langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle^2}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^4}}} \csc \theta \\ &\quad + \frac{(n-2)\langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle \cdot \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^8}{\|\Delta^1 b_0\|^6} + (n-2)^2 \|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2 \langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle^2}} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki  $\bar{s} = 0$  noktası için yapılan işlemlere benzer şekilde Bernstein polinomları yardımıyla ifade edilen Frenet vektör alanları için sırasıyla denklemlerde  $\bar{s} = 1$  bitiş noktası olarak kabul edilip incelendiğinde  $\bar{t}(\bar{s})$  teğet vektörü,

$$\bar{t}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \theta - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \theta$$

şeklinde elde edilir. Ardından  $\bar{b}$  binormal vektörü için Bernstein polinomları yardımı ile elde edilen denklemde  $\bar{s} = 1$  bitiş noktası olarak alınırsa aşağıdaki denklem

$$\begin{aligned} \bar{b}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=1} &= \frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \\ &\quad \left( \frac{n-2}{n} \right) \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2} \cdot \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \\ &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^6}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^4} + (n-2)^2 \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle^2}}{\sqrt{(n-1)^2 \|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^4 + (n-2)^2 \frac{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^6 \langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle^2}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2}}} \\ &\quad + \frac{\left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} \cdot \frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}}{\sqrt{(n-1)^2 \|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^4 + (n-2)^2 \frac{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^6 \langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle^2}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2}}} \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak  $\bar{n}$  aslinormal vektörü için Bernstein polinomları yardımıyla elde edilen ifadeye  $\bar{s} = 1$  bitiş noktası olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{n}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=1} &= \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \theta - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \theta \\ &= \frac{(1-n) \|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| \cdot \Delta^1 b_{n-1}}{\sqrt{(n-1)^2 \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2 + (n-2)^2 \frac{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^8 \langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle^2}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^4}}} \cot \theta \\ &\quad + \frac{(n-2) \langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle \cdot \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^8}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^6} + (n-2)^2 \|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2 \langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle}} \csc \theta \end{aligned}$$



şeklinde olduğu görülür.

**Sonuç 3.1.2.** Frenet vektör alanlarından  $\bar{t}$  teğet vektörü için Bernstein polinomları ile elde edilen denklem, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilirse  $\bar{t}$  teğet vektörü,

$$\bar{t}(\bar{s}) = \frac{(Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s}))}{\|(Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s}))\|}$$

şeklinde elde edilir. Ardından (2.8) denklemlerinde ki  $\bar{t}$  teğet vektörü için verilen eşitlikte (2.22) ifadesinde ki  $n$  aslinormal vektörü algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa  $\bar{t}$  teğet vektörü,

$$\bar{t}(\bar{s}) = \frac{\{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\} \times \{(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))\}}{\| \{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\} \times \{(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))\} \|}$$

bulunur. Ardından  $\bar{b}$  binormal vektörü için Bernstein polinomları yardımı ile elde edilen denklem, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilirse aşağıdaki denklem

$$\bar{b}(\bar{s}) = \frac{(Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s}))}{\|(Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s}))\|}$$

elde edilir. Daha sonra (2.8) denklemlerinde ki  $\bar{b}$  binormal vektörü için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa$ ,  $\tau$  eğriliklerinin ve (2.22) ifadesinde ki  $t$ ,  $b$  Frenet vektörlerinin algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa,  $\bar{b}$  binormal vektörü

$$\bar{b}(s) = \frac{(n-2) \left[ \left\langle \frac{(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s))}{(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s))} \right\rangle \cdot [(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))] \right]}{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \|^6}{\| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \|^4} + (n-2)^2 \left[ \left\langle \frac{(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s))}{(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s))} \right\rangle^2 \cdot \| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \|^2 \right]}} + \frac{(n-1) \left[ \| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \| \cdot \left[ \frac{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))}{(Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))} \right] \right]}{\sqrt{(n-1)^2 \| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \|^4 + (n-2)^2 \frac{\left[ \left\langle \frac{(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s))}{(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s))} \right\rangle^2 \cdot \| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \|^6 \right]}{\| \{ (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \} \|^2}}$$

elde edilir. Son olarak  $\bar{n}$  aslinormal vektörü için Bernstein polinomları yardımıyla elde edilen ifade, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilirse aşağıdaki denklem

$$\bar{n}(s) = \frac{\left\{ (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \right\} \times \left\{ (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \right\}}{\left\| \left\{ (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \right\} \times \left\{ (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \right\} \right\|}$$

eşitliği bulunur. Ardından (2.8) denklemlerinde ki  $\bar{n}$  aslinormal vektörü için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa, \tau$  eğriliklerinin ve (2.22) ifadesinde ki  $t, b$  Frenet vektörlerinin algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa  $\bar{n}$  aslinormal vektörü,

$$\bar{n}(\bar{s}) = \frac{(1-n) \cdot \|(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\| \cdot [(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))]}{\sqrt{(n-1)^2 \|(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))\|^2 \cdot \|(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\|^2 + (n-2)^2 \frac{\left\langle \begin{matrix} (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \\ (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \end{matrix} \right\rangle^2 \cdot \|(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))\|^8}{\|(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\|^4}}$$

$$+ \frac{(n-2) \left[ \left\langle \begin{matrix} (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \\ (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \end{matrix} \right\rangle \cdot [(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))] \right]}{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\|(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\|^8}{\|(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))\|^6} + (n-2)^2 \left\| \left\langle \begin{matrix} (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \\ (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \end{matrix} \right\rangle \cdot \left\langle \begin{matrix} (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)) \\ (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \end{matrix} \right\rangle \right\|^2}}$$

elde edilir.

$\mu(s)$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa(s)$ ,  $\tau(s)$  ile  $\gamma(\bar{s})$  Bézier eğrisinin eğrilikleri  $\bar{\kappa}(\bar{s})$ ,  $\bar{\tau}(\bar{s})$  arasındaki ilişki (2.9) denklemlerinde verildi.  $\bar{\kappa}(\bar{s})$  eğriliğinin bulunması için verilen (2.3) denklemleri kullanılıp burada Bernstein polinomlarından yararlanılırsa aşağıdaki denklem

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \frac{\left( \frac{n-1}{n} \right) \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(\bar{s}) B_{j,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_k \right\|^3}$$

elde edilir. Ardından (2.9) denklemlerinde ki  $\bar{\kappa}$  eğriliği için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa, \tau$  eğrilikleri Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $\bar{\kappa}$  eğriliği

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{\left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^6} + \left( \frac{n-2}{n} \right)^2 \frac{\left( \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle \right)^2}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^4}}{(c-s) \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^3}}$$

bulunur. Benzer şekilde  $\bar{\tau}(s)$  eğriliğinin bulunması için verilen (2.3) denklemleri kullanılıp burada Bernstein polinomlarından yararlanılırsa aşağıdaki denklem

$$\bar{\tau}(s) = \left( \frac{n-2}{n} \right) \frac{\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^2}$$

denklemini elde edilir. Ardından (2.9) denklemlerinde ki  $\bar{\tau}$  eğriliği için verilen eşitlikte (2.23)ifadesinde ki  $\kappa, \tau$  eğrilikleri Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $\bar{\tau}$  eğriliği,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}(\bar{s}) = & \frac{\left[ \left( \frac{n-1}{n} \right) \left( \frac{n-2}{n} \right) \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{v,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^3} \right]}{\left[ \frac{\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{v,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^2} \right]} \\
& - \frac{\left[ \left( \frac{n-1}{n} \right) \left( \frac{n-2}{n} \right) \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^3} \right]}{\left[ \frac{\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^2} \right]} \\
& \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^3} \\
& \left[ \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^6} \right. \\
& \left. + \left( \frac{n-2}{n} \right)^2 \frac{\left[ \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle \right]^2}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^4} \right]
\end{aligned}$$

eşitliği ile ifade edilir.

**Sonuç 3.1.3.**  $\bar{\kappa}(\bar{s}), \bar{\tau}(\bar{s})$  eğriliklerinin  $\mu(s)$  Bézier eğrisinin Frenet eğrilikleri cinsinden eşiti Bernstein polinomları yardımı ile yazılan denklemlerde  $\bar{s} = 0$  başlangıç noktası olarak alınırsa sırasıyla

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=0} &= \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}{\|\Delta^1 b_0\|^6} + (n-2)^2 \frac{\langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle^2}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}}{|(c-s)| \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3}}\end{aligned}$$

ve

$$\bar{\tau}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=0} = 0$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde  $\bar{s} = 1$  bitiş noktası olarak kabul edilip incelenirse sırasıyla

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=1} &= \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^6} + (n-2)^2 \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle^2}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^4}}{|(c-s)| \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3}}\end{aligned}$$

ve

$$\bar{\tau}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=1} = 0$$

olduğu görülür.

**Sonuç 3.1.4.** Frenet elemanlarından  $\bar{\kappa}(\bar{s})$  eğriliği için Bernstein polinomları ile elde edilen denklem, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile aşağıdaki denklem

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \|}{\| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \|^3}$$

ifade edilir. Ardından (2.9) denklemlerinde ki  $\bar{\kappa}$  eğriliği için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa, \tau$  eğrilikleri Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa  $\bar{\kappa}$  eğriliği,

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \frac{\sqrt{(n-1)^2 \frac{\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \|^2}{\| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \|^6} + (n-2)^2 \frac{\left[ \langle (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)), (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \rangle \right]^2}{\| \{ (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \} \|^4}}}{\left| (c-s)(n-1) \frac{\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \|}{\| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \|^3} \right|}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde  $\bar{\tau}(\bar{s})$  eğriliği için Bernstein polinomları ile elde edilen denklem, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilirse aşağıdaki denklem

$$\bar{\tau}(\bar{s}) = \left( \frac{n-2}{n} \right) \frac{\langle (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)), (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \rangle}{\| \{ (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \} \|^2}$$

elde edilir. Ardından (2.9) denklemlerinde ki  $\bar{\tau}$  eğriliği için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa, \tau$  eğrilikleri Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa  $\bar{\tau}$  eğriliği,

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\left[ \frac{\left\| \frac{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))}{(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))} \right\|^3 \cdot \left\| \frac{\left\langle \frac{(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s))}{(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s))} \right\rangle}{\left\| \{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\} \right\|^2} \right\|^2}{\left[ \frac{\left\| \frac{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))}{(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))} \right\|^3 \cdot \left\| \frac{\left\langle \frac{(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s))}{(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s))} \right\rangle}{\left\| \{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\} \right\|^2} \right\|^2} \right]}{\left[ \frac{(n-1)^2 \frac{\left\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\|^2}{\left\| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \right\|^6} + (n-2)^2 \frac{\left[ \frac{\left\langle \frac{(Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s))}{(Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s))} \right\rangle}{\left\| \{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))\} \right\|^4} \right]^2}{n(n-2)} \right]}{\left| (c-s) \frac{\left\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\|}{\left\| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \right\|^3} \right|}$$

bulunur.



$\mu(s)$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  ile  $\gamma(\bar{s})$  Bézier eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{\bar{t}(\bar{s}), \bar{n}(\bar{s}), \bar{b}(\bar{s})\}$  olmak üzere (2.10) denklemlerinde ki teğet vektör denklemleri kullanılırsa Bernstein polinomları yardımıyla  $t$  teğet vektörü,

$$t(s) = \frac{\sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(s) \Delta^1 b_l}{\left\| \sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(s) \Delta^1 b_l \right\|}$$

şeklinde elde edilir. Ardından (2.10) denklemlerinde ki  $t$  teğet vektörü için verilen eşitlikte (2.22) ifadesinde ki  $\bar{n}, \bar{b}$  vektörleri Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $t$  teğet vektörü,

$$t(s) = \begin{bmatrix} \cos(\phi(\bar{s} + c)) \frac{\sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-1} B_{e,n-1}(\bar{s}) B_{f,n-2}(\bar{s}) B_{g,n-1}(\bar{s}) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g}{\left\| \sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-1} B_{e,n-1}(\bar{s}) B_{f,n-2}(\bar{s}) B_{g,n-1}(\bar{s}) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g \right\|} \\ -\sin(\phi(\bar{s} + c)) \frac{\sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(\bar{s}) B_{y,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y)}{\left\| \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(\bar{s}) B_{y,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y) \right\|} \end{bmatrix}$$

bulunur. Daha sonra benzer şekilde (2.20) ifadesinde ki binormal vektörünün bulunması için verilen denklem kullanılırsa Bernstein polinomları yardımıyla  $b$  binormal vektörü,

$$b(s) = \frac{\sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(s) B_{y,n-2}(s) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y)}{\left\| \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{x,n-1}(s) B_{y,n-2}(s) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y) \right\|}$$

elde edilir. Ardından (2.10) denklemlerinde ki  $b$  vektörü için verilen eşitlikte (2.22) ifadesinde ki  $\bar{n}, \bar{b}$  vektörleri Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $b$  binormal vektörü,

$$b(s) = \left[ \begin{array}{l} \sin(\phi(\bar{s} + c)) \frac{\sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-1} B_{e,n-1}(\bar{s}) B_{f,n-2}(\bar{s}) B_{g,n-1}(\bar{s}) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g}{\left\| \sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-1} B_{e,n-1}(\bar{s}) B_{f,n-2}(\bar{s}) B_{g,n-1}(\bar{s}) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g \right\|} \\ + \cos(\phi(\bar{s} + c)) \frac{\sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{v,n-1}(\bar{s}) B_{y,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y)}{\left\| \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-2} B_{v,n-1}(\bar{s}) B_{y,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_x \times \Delta^2 b_y) \right\|} \end{array} \right]$$

ifade edilir. Son olarak (2.20) ifadesinde ki aslinormal vektörünün bulunması için verilen denklem kullanılırsa Bernstein polinomları yardımıyla  $n$  aslinormal vektörü,

$$n(s) = \frac{\sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-1} B_{e,n-1}(s) B_{f,n-2}(s) B_{g,n-1}(s) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g}{\left\| \sum_{e=0}^{n-1} \sum_{f=0}^{n-2} \sum_{g=0}^{n-1} B_{e,n-1}(s) B_{f,n-2}(s) B_{g,n-1}(s) (\Delta^1 b_e \times \Delta^2 b_f) \times \Delta b_g \right\|}$$

bulunur. Ardından (2.10) denklemlerinde ki  $n$  aslinormal vektörü için verilen eşitlikte (2.22) ifadesinde ki  $\bar{t}$  teğet vektörü Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $n$  aslinormal vektörü,

$$n(s) = - \frac{\sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_l}{\left\| \sum_{l=0}^{n-1} B_{l,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_l \right\|}$$

bulunur.

**Sonuç 3.1.5.** Frenet vektör alanlarından  $t$  teğet vektörü için Bernstein polinomları yardımıyla elde edilen denklemde  $s=0$  başlangıç noktası olarak alınırsa

$$t(s)|_{s=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \cos(\phi(\bar{s}+c)) \left[ \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \theta - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \theta \right] - \sin(\phi(\bar{s}+c)) \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}$$

elde edilir. Ardından  $b$  binormal vektörü için Bernstein polinomları yardımı ile elde edilen denklemde  $s=0$  başlangıç noktası olarak alınırsa

$$\begin{aligned} b(s)|_{s=0} &= \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \\ &= \sin(\phi(\bar{s}+c)) \left[ \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \theta - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \theta \right] + \cos(\phi(\bar{s}+c)) \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Son olarak  $n$  aslinormal vektörü için Bernstein polinomları yardımıyla elde edilen ifadede  $s=0$  başlangıç noktası olarak alınırsa

$$n(s)|_{s=0} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \theta - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \theta = -\frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

bulunur. Yukarıdaki  $s=0$  noktası için yapılan işlemlere benzer şekilde Bernstein polinomları yardımıyla ifade edilen Frenet vektör alanları için sırasıyla denklemlerde  $s=1$  bitiş noktası olarak kabul edilip incelendiğinde  $t(s)$  teğet vektörü,

$$\begin{aligned} t(s)|_{s=1} &= \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \\ &= \cos(\phi(\bar{s}+c)) \left[ \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \theta - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \theta \right] - \sin(\phi(\bar{s}+c)) \frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ardından  $b$  binormal vektörü için Bernstein polinomları yardımı ile elde edilen denklemde  $s = 1$  bitiş noktası olarak alınırsa aşağıdaki denklem

$$\begin{aligned} b(s)\Big|_{s=1} &= \frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \\ &= \sin\left(\phi(\bar{s} + c)\right) \left[ \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \theta - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \theta \right] + \cos\left(\phi(\bar{s} + c)\right) \frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak  $n$  aslinormal vektörü için Bernstein polinomları yardımıyla elde edilen ifadeye  $s = 1$  bitiş noktası olarak alınırsa

$$n(s)\Big|_{s=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \theta - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \theta = -\frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir.

**Sonuç 3.1.6.** Frenet vektör alanlarından  $t$  teğet vektörü için Bernstein polinomları ile elde edilen denklem, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilirse  $t$  teğet vektörü,

$$t(s) = \frac{(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))}{\|(Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s))\|}$$

şeklinde elde edilir. Ardından (2.10) denklemlerinde ki  $t$  vektörü için verilen eşitlikte (2.22) ifadesinde ki  $\bar{n}, \bar{b}$  vektörleri algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa  $t$  teğet vektörü

$$t(s) = \left[ \begin{array}{l} \cos(\phi(\bar{s} + c)) \frac{\left\{ \begin{array}{l} (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times \\ (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \end{array} \right\} \times \left\{ (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \right\}}{\left\| \begin{array}{l} (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times \\ (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \end{array} \right\| \times \left\{ (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \right\}} \\ - \sin(\phi(\bar{s} + c)) \frac{(Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s}))}{\left\| (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \right\|} \end{array} \right]$$

bulunur. Ardından  $b$  binormal vektörü için Bernstein polinomları yardımı ile elde edilen denklem, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilirse aşağıdaki denklem

$$b(s) = \frac{(Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s))}{\left\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right\|}$$

olarak bulunur. Ardından (2.10)'daki denklemlerinde ki  $b$  binormal vektörü için verilen eşitlikte (2.22) ifadesinde ki  $\bar{n}, \bar{b}$  vektörleri algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa  $b$  binormal vektörü,

$$b(s) = \left[ \begin{array}{l} \sin(\phi(\bar{s} + c)) \frac{\left( \left\{ \begin{array}{l} (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times \\ (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \end{array} \right\} \times \left\{ (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \right\} \right)}{\left\| \begin{array}{l} (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times \\ (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \end{array} \right\| \times \left\{ (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \right\}} \\ + \cos(\phi(\bar{s} + c)) \frac{(Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s}))}{\left\| (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \right\|} \end{array} \right]$$

eşitliği ile elde edilir. Son olarak  $n$  aslinormal vektörü için Bernstein polinomları yardımıyla elde edilen ifade, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilirse

$$n(s) = \frac{\left\{ \left( (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right) \times \left\{ (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \right\} \right\}}{\left\| \left\{ \left( (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \right) \times \left\{ (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \right\} \right\} \right\|}$$

denklemini bulunur. Ardından (2.10) denklemlerinde ki  $n$  aslinormal vektörü için verilen eşitlikte (2.22)' ifadesinde ki  $\bar{t}$  teğet vektörü Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $n$  aslinormal vektörü,

$$n(s) = - \frac{\left( Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s}) \right)}{\left\| \left( Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s}) \right) \right\|}$$

olarak bulunur.

$\mu(s)$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa(s)$ ,  $\tau(s)$  ile  $\gamma(\bar{s})$  Bézier eğrisinin eğrilikleri  $\bar{\kappa}(\bar{s})$ ,  $\bar{\tau}(\bar{s})$  arasındaki ilişki (2.11) ifadesinde verildi.  $\kappa(s)$  eğriliğinin bulunması için verilen (2.3) denklemleri kullanılıp, burada Bernstein polinomlarından yararlanılırsa aşağıdaki denklem

$$\kappa(s) = \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(s) B_{j,n-2}(s) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(s) \Delta^1 b_k \right\|^3}$$

elde edilir. Ardından (2.11) denklemlerinde ki  $\kappa$  eğriliği için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\bar{\kappa}$  eğriliği Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $\kappa$  eğriliği,

$$\kappa(s) = \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(\bar{s}) B_{j,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^3}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_k \right\|^9} \cos(\varphi(\bar{s}) + c)}{\left[ \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(\bar{s}) B_{j,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^3}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_k \right\|^3} \frac{1}{\sin(\varphi(\bar{s}) + c)} \right] \left[ \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(\bar{s}) B_{j,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^3}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_k \right\|^3} \frac{1}{\cos(\varphi(\bar{s}) + c)} \right]}$$

eşitliği ile ifade edilir. Benzer şekilde  $\tau(s)$  eğriliğinin bulunması için verilen (2.3) denklemleri kullanılıp, burada Bernstein polinomlarından yararlanılırsa aşağıdaki denklem

$$\tau(s) = \left(\frac{n-2}{n}\right) \frac{\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(s) B_{m,n-2}(s) B_{r,n-3}(s) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(s) B_{t,n-2}(s) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^2}$$

elde edilir. Ardından (2.11) denklemlerinde ki  $\tau$  eğriliği için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$  eğrilikleri Bernstein polinomları kullanılarak yazılırsa  $\tau$  eğriliği,

$$\tau(s) = \frac{-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(\bar{s}) B_{j,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^3}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_k \right\|^9} \sin(\varphi(\bar{s}) + c) \cos^2(\varphi(\bar{s}) + c)}{\left[ \left(\frac{n-2}{n}\right) \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(\bar{s}) B_{j,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^3}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_k \right\|^3} \cdot \frac{\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{r=0}^{n-3} B_{h,n-1}(\bar{s}) B_{m,n-2}(\bar{s}) B_{r,n-3}(\bar{s}) \langle \Delta^1 b_h \times \Delta^2 b_m, \Delta b_r \rangle}{\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} B_{p,n-1}(\bar{s}) B_{t,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_p \times \Delta^2 b_t) \right\|^2} \sin(\varphi(\bar{s}) + c)} \right] \left[ \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(\bar{s}) B_{j,n-2}(\bar{s}) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^3}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(\bar{s}) \Delta^1 b_k \right\|^3} \right] \cos(\varphi(\bar{s}) + c)}$$

olarak bulunur.

**Sonuç 3.1.7.**  $\kappa(s), \tau(s)$  eğriliklerinin  $\gamma(\bar{s})$  Bézier eğrisinin Frenet eğrilikleri cinsinden eşiti Bernstein polinomları yardımı ile yazılan denklemlerde  $s = 0$  başlangıç noktası olarak alınırsa sırasıyla aşağıdaki denklemler

$$\kappa(s)|_{s=0} = \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3} = \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}{\|\Delta^1 b_0\|^6} \cot(\varphi(\bar{s}) + c),$$

ve

$$\tau(s)|_{s=0} = \left( \frac{n-2}{n} \right) \frac{\langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2} = \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^4}{\|\Delta^1 b_0\|^6 \langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle} \cos^2(\varphi(\bar{s}) + c)$$

elde edilir. Benzer şekilde  $s = 1$  bitiş noktası olarak kabul edilip incelenirse sırasıyla

$$\kappa(s)|_{s=1} = \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} = \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^6} \cot(\varphi(\bar{s}) + c)$$

ve

$$\begin{aligned} \tau(s)|_{s=1} &= \left( \frac{n-2}{n} \right) \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2} \\ &= \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^4}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^6 \langle \Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3} \rangle} \cos^2(\varphi(\bar{s}) + c) \end{aligned}$$

olduğu görülür.



**Sonuç 3.1.8.** Frenet elemanlarından  $\kappa(s)$  eğriliği için Bernstein polinomları ile elde edilen denklem, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile aşağıdaki denklem

$$\kappa(s) = \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{\| (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \|}{\| (Z_{1,n-1}(s) - Z_{0,n-1}(s)) \|^3}$$

ifade edilir. Ardından (2.11) denklemlerinde ki  $\kappa$  eğriliği için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa$  eğriliği Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa  $\kappa$  eğriliği,

$$\kappa(s) = \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{\| (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \|^3}{\| (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \|^9} \cos(\varphi(\bar{s}) + c)}{\left[ \frac{\| (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \|^3}{\| (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \|^3} \sin(\varphi(\bar{s}) + c) \right. \\ \left. - \left[ \frac{\| (Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s})) \times (Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s})) \|^3}{\| (Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s})) \|^3} \right] \cos(\varphi(\bar{s}) + c) \right]}$$

elde edilir. Benzer şekilde  $\tau(s)$  eğriliği için Bernstein polinomları ile elde edilen denklem, algoritmik Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilirse aşağıdaki denklem

$$\tau(s) = \left(\frac{n-2}{n}\right) \frac{\langle (Z_{1,n-3}(s) - Z_{0,n-3}(s)) \times (Z_{2,n-3}(s) - Z_{1,n-3}(s)), (Z_{3,n-3}(s) - Z_{2,n-3}(s)) \rangle}{\| \{ (Z_{1,n-2}(s) - Z_{0,n-2}(s)) \times (Z_{2,n-2}(s) - Z_{1,n-2}(s)) \} \|^2}$$

bulunur. Ardından (2.11) denklemlerinde ki  $\tau$  eğriliği için verilen eşitlikte (2.23) ifadesinde ki  $\kappa, \tau$  eğrilikleri Bézier eğrilerinin orta noktaları ile ifade edilip yerine yazılırsa  $\tau$  eğriliği,

$$\tau(s) = \frac{-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{\left\| \left( Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s}) \right) \times \left( Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s}) \right) \right\|^3}{\left\| \left( Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s}) \right) \right\|^9} \sin(\varphi(\bar{s}) + c) \cos^2(\varphi(\bar{s}) + c)}{\left[ \begin{aligned} & \left( \frac{n-2}{n} \right) \frac{\left\langle \left( Z_{1,n-3}(\bar{s}) - Z_{0,n-3}(\bar{s}) \right) \times \left( Z_{2,n-3}(\bar{s}) - Z_{1,n-3}(\bar{s}) \right), \right.}{\left. \left( Z_{3,n-3}(\bar{s}) - Z_{2,n-3}(\bar{s}) \right) \right\rangle}{\left\| \left( Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s}) \right) \right\|^3} \left\| \left\{ \begin{aligned} & \left( Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s}) \right) \times \\ & \left( Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s}) \right) \end{aligned} \right\} \right\|} \sin(\varphi(\bar{s}) + c) \\ & - \left[ \frac{\left\| \left( Z_{1,n-2}(\bar{s}) - Z_{0,n-2}(\bar{s}) \right) \times \left( Z_{2,n-2}(\bar{s}) - Z_{1,n-2}(\bar{s}) \right) \right\|}{\left\| \left( Z_{1,n-1}(\bar{s}) - Z_{0,n-1}(\bar{s}) \right) \right\|^3} \right] \cos(\varphi(\bar{s}) + c) \end{aligned} \right]$$

olarak ifade edilir.

## BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Bézier eğrileri ve Öklid uzayında iyi bilinen involüt–evolüt eğri çiftleri temel alınmıştır. Öncelikle Öklid uzayındaki involüt–evolüt eğri çiftlerinin Frenet elemanlarının birbiri cinsinden  $n=3$  için yazılmış ve daha sonra Bernstein polinomları kullanılıp elde edilen Bézier eğrileri temel alınarak involüt–evolüt eğri çiftlerinin temel özellikleriyle beraber Bézier eğrilerinin involüt–evolüt eğri çiftlerinin denklemleri oluşturulmuştur.

Bu çalışmada elde edilen Öklid uzayındaki reel Bézier eğrilerinin involüt–evolüt eğri çiftlerinin Frenet elemanlarının birbiri cinsinden yazılışlarına benzer olarak Lorentz uzayındaki Bézier eğrilerinin involüt–evolüt eğri çiftlerinin Frenet elemanlarının birbiri cinsinden yazılışları araştırılabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Joy, K.I., Bernstein Polynomials Online Geometric Modeling Notes. University of California, 2000.
- [2] Aydın, D., Bernstein polinomları,  $q$  – Bernstein polinomları ve yakınsaklık özellikleri. Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2017.
- [3] Çiçek, M.M., Bernstein polinomları ve yaklaşım özellikleri. Mersin Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2007.
- [4] Anand, V.B., Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers, First Edition. John Wiley and Sons Inc., New York, 1992.
- [5] Farin, G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide, Fourth Edition. Academic Press, San Diego, 1996.
- [6] Misro, M.Y., Ramli, A., Ali, J.M., Quintic geometric Bézier curve with two shape parameters. Sains Malaysiana, 46(5): 825–831, 2017.
- [7] Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi, Ankara, 1998.
- [8] Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınları, Ankara, 2004.
- [9] Hacısalihoğlu, H.H., Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri. Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1983.
- [10] Marsh, D., Applied Geometry for Computer Graphics and Cad, Second Edition. Springer, Germany, 2004.
- [11] Samancı, H.K., Celik, S., Incesu, M., The bishop frame of Bézier curves. Life Sci. J., 12(6): 175–180, 2015.
- [12] Erkan, E., Yüce, S., Serret–Frenet frame and curvatures of Bézier curves. Mathematics, 6(12): 321–351, 2018.

## ÖZGEÇMİŞ

Zehra DUMAN, 01.06.1996 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlköğrenimini İstanbul'un Sultanbeyli ilçesinde Turgut Reis İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimini Samandıra Lisesi'nde tamamladı. 2014 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2018 yılında tamamladı. 2018 yılında Sakarya Üniversitesi Geometri Bilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. Şu an özel bir kurumda matematik öğretmenliği yapmaktadır.