

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRE YÜZEYİ ÜZERİNDE TEMEL TEOREMLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar KOÇ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ
Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Engin CAN

Ekim 2021

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KÜRE YÜZEYİ ÜZERİNDE TEMEL TEOREMLER VE
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar KOÇ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 25/04/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
.....
Jüri Başkanı

.....
.....
Üye

.....
.....
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Pınar KOÇ
...../...../2021

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan değerli danıőman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Engin CAN' a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bana alıőma motivasyonu veren, her daim maddi manevi destekleriyle yanımda olan, sonsuz fedakârlık gösteren, hayatımın her alanında olduğu gibi tez çalıőmamın her aşamasında gösterdikleri anlayıőla bana büyük destek veren ve beni yüreklendiren sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER LİSTESİ	iv
ÖZET.....	vi
SUMMARY	vii

BÖLÜM 1.

GİRİŞ	1
1.1. Küresel Koordinatlar	1
1.2. Büyük Çember ve Küresel Uzaklık.....	2
1.3. Küresel Açılar	3
1.4. Küre Üzerinde Üçgenler.....	4
1.4.1. Küresel Pisagor bağıntısı.....	5
1.4.2. Küresel üçgen üzerinde hesaplama formülleri	10
1.5. Gnomonik İzdüşüm	14

BÖLÜM 2.

KÜRESEL KESİTLER.....	17
2.1. Küresel Elips	17
2.2. Küresel Hiperbol Çizgileri	19
2.3. Küresel Kesitlerin Analitik İncelenmesi	20
2.4. Koni Kesiti Olarak Küresel Elips.....	25
2.5. Koni Kesitlerin Projektif Tasarımı	29
2.5.1. Öklid düzleminde projektiflikler	29
2.5.2. Küre üzerindeki projektiflikler.....	32
2.5.3. Küre kesitinin projektif tanımı	33

2.5.4. Pascal teoremi	35
2.6. Çember	38
BÖLÜM 3.	
UYGULAMA ÖRNEKLERİ.....	41
3.1. Sinyal Navigasyonu.....	41
3.1.1. Hiperbol yöntemi.....	41
3.2. Küresel Çevre Açılı Teoremi.....	46
3.2.1. Düzlemsel çevre açılı teoremi	46
3.2.2. Küresel çevre açılı	49
3.3. Ivory Teoremi.....	52
3.3.1. Düzlemde Ivory teoremi.....	52
3.3.2. Küre üzerinde Ivory teoremi	53
BÖLÜM 4.	
SONUÇ VE ÖNERİLER	58
KAYNAKÇA.....	59
ÖZGEÇMİŞ	60

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Düzlem ve küre üzerinde bir noktanın koordinatlandırılması	1
Şekil 1.2. R yarıçaplı küre üzerinde A ve B noktaları arasındaki δ ölçüsü ile belirlenen uzaklık	2
Şekil 1.3. AS ve BS büyük çemberlerinin arasındaki α açısı	3
Şekil 1.4. Euler Üçgenleri	4
Şekil 1.5. Küre yüzeyi üzerinde Euler Üçgeni oluşturma	5
Şekil 1.6. $a = b = c = 90^\circ$ için küresel üçgen	6
Şekil 1.7. Dik üçgen	7
Şekil 1.8. (a), (b) Dik kenarı olmayan üçgen örnekleri.....	9
Şekil 1.9. Neperche Kuralı için Komşuluk sırası.....	9
Şekil 1.10. Dar Açılı Euler Üçgeninde Yükseklik	11
Şekil 1.11. Sinüs teoremi	14
Şekil 1.12. (a) (b) Gnomonik İzdüşümü teğet düzlemi	15
Şekil 1.13. Gnomonik izdüşümler.....	16
Şekil 2.1. Elips tasarımı	17
Şekil 2.2. Düzlemsel Elips	18
Şekil 2.3. Küresel elips.....	18
Şekil 2.4. Küresel hiperbol.....	19
Şekil 2.5. Küresel hiperbollerin aynı zamanda küresel elipslerdir.....	20
Şekil 2.6. Küresel hiperbol aynı zamanda küresel elipstir	21
Şekil 2.7. O merkez noktasına göre simetri	24
Şekil 2.8. $a \geq e$ elips, $a < e$ hiperbol $a = e$ halleri	25
Şekil 2.9. Üç boyutlu koordinat sisteminde x-ekseni üzerine oturtulan bir koni.....	26
Şekil 2.10. Küresel Elips.....	28
Şekil 2.11. O merkezli bir küre ve yine O merkezli kuadratik koninin kesişiminden oluşan elips.....	28

Şekil 2.12. Gnomonik izdüşümü ile teğet düzlemdeki elipsin küre üzerine yansıması.....	29
Şekil 2.13. Px ve $p(X)$ kümeleri.....	30
Şekil 2.14. a, b, ve c tipi perspektiflikler	31
Şekil 2.15. $S1(X1)$ ve $S4(X4)$ doğru demetinin arasındaki bir projektiflik.....	31
Şekil 2.16. Küre üzerinde $P(x)$ doğru demeti ve $p(X)$ nokta dizisi	32
Şekil 2.17. Küre üzerinde a, b, ve c tipi perspektiflikler.....	33
Şekil 2.18. İki nokta ve perspektifliklerle belirlenebilen düzlemsel koni kesiti	34
Şekil 2.19. İki nokta ve perspektifliklerle belirlenebilen küresel koni kesiti.....	35
Şekil 2.20. Düzlemsel Pascal Teoremi 1	36
Şekil 2.21. Düzlemsel Pascal Teoremi 2.....	37
Şekil 2.22. Küre üzerinde Pascal Teoremi	38
Şekil 2.23. (a) Düzlemde ve (b) küre üzerinde çember.....	38
Şekil 2.24. (a) (b) (c) Düzlemde elips örnekleri.....	39
Şekil 2.25. (a), (b), (c) Küresel elips örnekleri.....	39
Şekil 2.26. Sonuç a ve b küresel elipsleri.....	40
Şekil 3.1. Omega Navigasyon Sistemi geometrik tasarımı.....	42
Şekil 3.2. Omega Navigasyonu için küresel hiperbolün odak noktaları	43
Şekil 3.3. $S1$ ve $S2$ den gönderilen sinyallerle konum belirleme	43
Şekil 3.4. S den gönderilen sinyallerle konum belirleme	44
Şekil 3.5. $S1S2$ ve $S3S4$ ikililerinin oluşturduğu hiperbol çizgileriyle konum belirleme	45
Şekil 3.6. $A \neq B$ olmak üzere A ve B sabit noktaları ve φ açısı ile çevre açısı oluşturma	46
Şekil 3.7. $M1(0, e, \cot(\varphi))$ ve $M2(0, -e, \cot(\varphi))$ merkezli çemberler.....	48
Şekil 3.8. Küresel çevre açısı.....	49
Şekil 3.9. Küre kesitlerinin oluşturduğu bir ağ örneği	53
Şekil 3.10. Konfokal küre kesiti.....	54
Şekil 3.11. Konfokal küresel koni kesitlerinin oluşturduğu dörtgen ağları	57

ÖZET

Anahtar kelimeler: Hiperbolik koni kesitleri, Küresel üçgen, De La Hire tasarımı, Omega Navigasyon Sistemi

Bu çalışmada, düzlemsel elips ve hiperbolik koni kesitleri teorisinin küre yüzeyi üzerindeki halleri üzerinde durulmuştur. Konu ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş, projektif geometri kurallarından yararlanarak izdüşüm ve projektiflikler yardımıyla konu pekiştirilmiştir. Çalışma içerisindeki şekiller, geometrik içerik ve problemlerin mümkün oldukça anlaşılır olması için tasarlanmıştır. Çalışma 3 bölümden oluşup her bir bölümde düzlem ve küre üzerindeki koni kesitleri arasındaki geometrik ilişki, trigonometrik bağıntılarla verilmiştir.

Birinci bölümde, küresel geometrinin temelleri verilmiş, özellikle küresel üçgen incelenmiştir. Daha sonra projektif izdüşümler üzerinden düzlemsel ve küresel koni kesitlerinin arasındaki ilişki gösterilmiştir.

İkinci bölümde, küre ile koni kesit arasındaki kesişim eğrisinin küresel koni kesitinin odak noktası olmasından bahsedilmiştir. De La Hire tasarımı yardımıyla küre kesitinin projektif tasarımı yapılmıştır.

Son bölümde küresel koni kesitlerinin pratikteki uygulamaları ele alınmıştır. Örnek olarak çemberde çevre açısı teoreminin küre yüzeyi üzerindeki bilinen en önemli kullanım alanlarından biri olan Omega Navigasyon sistemi tanıtılmış ve geometrik tasarımları ile açıklanmıştır. Ayrıca, koni kesitlerini içeren problemleri çözümüne yönelik Ivory Teoremi de tanıtılmıştır.

Bu çalışmada ki tüm şekiller Open Geometri (Glaeser & Stachel, 1999) ile oluşturulmuş ve Corel Photo Paint ile isimlendirilmiştir.

FUNDAMENTAL THEOREMS ON THE SPHERE SURFACE AND THEIR APPLICATIONS

SUMMARY

Keywords: Hyperbolic cone sections, Spherical triangles, De La Hire construction, Omega Navigation System

In this study, the theory of plane elliptical and hyperbolic conic sections is emphasized on the spherical surface. The basic functions and theorems on the topic were given and the topic was deepened with the help of projection and projectivities using the rules of projective geometry. The figures are designed to make the geometric content and problems as understandable as possible. The study consists of 3 parts, and in each part, the geometric relationship between the plane and the conic sections on the sphere is given with trigonometric relations.

In the first chapter, the basics of spherical geometry are given, especially the spherical triangle is examined. Then, the relationship between planar and spherical conic sections is shown on projective projections.

In the second section, it is mentioned that the intersection curve between the sphere and the conic section is the focal point of the spherical cone section. (Glaeser & Stachel, 1999) Projective design of the spherical section was made with the help of De La Hire design.

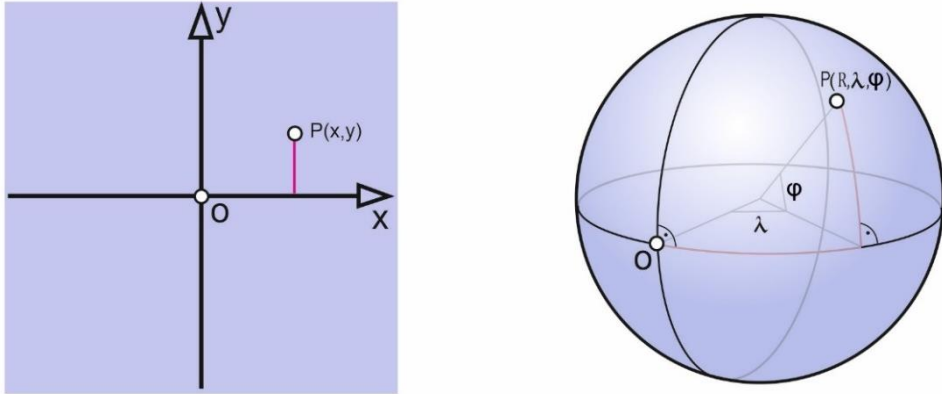
In the last section, practical applications of spherical conic sections are discussed. As an example, Omega Navigation system, which is one of the most important known usage areas of the peripheral angle theorem on the sphere surface, is introduced and explained with its geometric designs. In addition, Ivory's Theorem for solving problems involving conic sections is also introduced.

All figures in this study were created with Open Geometry (Glaeser & Stachel, 1999) and named with Corel Photo Paint.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Küresel Koordinatlar

Düzlemde herhangi bir P noktası (x, y) kartezyen koordinatlarıyla işaretlidir ve bu koordinatlar yardımıyla düzlemdeki doğrular ve eğriler de belirlenebilir. Örneğin; eğer $P = (x, y)$ noktası düzlemde bir doğru üzerindeyse o zaman $k, d \in R$ olmak üzere $y = kx + d$ dir.



Şekil 1.1. Düzlem ve küre üzerinde bir noktanın koordinatlandırılması

Düzlemdeki koordinat sistemi gibi, R yarıçapıyla küre üzerinde bir koordinat sistemini x -eksenin rolünü küre yüzeyi üzerinde ekvator, y -eksenin rolünü küre yüzeyi üzerinde yarı boylamların üstlendiği koordinat eksenleri olacak şekilde oluşturalım (Şekil 1.1.).

Küre üzerindeki her bir P noktası, R yarıçapı, λ boylamı ve ϕ enlemiyle gösterilir. Bir noktanın düzlemdeki kartezyen koordinatları sonsuz olabilirken, küre üzerinde bir noktanın boylamı $0^\circ - 360^\circ$ arasında ve enlemi kuzey kutbuna $0^\circ - 90^\circ$ arasında, güney kutbuna enlemi $0^\circ - (-90^\circ)$ arasında olur. Böylece, λ, ϕ den oluşturulan bir fonksiyonla, küre yüzeyindeki bir noktayı $P(R, \lambda, \phi)$ olarak tanımlayabiliriz.

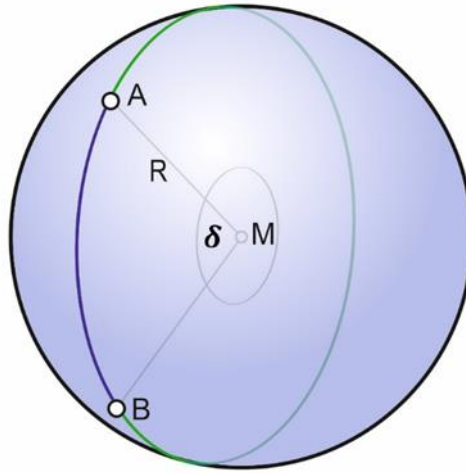
1.2. Büyük Çember ve Küresel Uzaklık

Öklid düzleminde farklı iki A ve B noktaları arasındaki uzaklığın

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1.1)$$

olduğunu biliyoruz. Küre yüzeyinde A ve B noktalarının arasındaki uzaklık da, iki nokta arasındaki en kısa bağlantı çizgisidir ve bu uzaklık A ve B den geçen AB büyük çember yayındaki en kısa mesafedir ve $|AB|$ ile gösterilir. Büyük çember yayı, küre üzerinde uzaklık fonksiyon rolünü üstlenir. Bu da R yarıçapı ve küre merkezi ile oluşturulan açı $\delta = \widehat{AMB}$ ile belirlenir. Verilen A ve B noktaları ile $|AB| = \delta$ ve $|AB| = 360^\circ - \delta$ büyük çember yayları oluşur.

NOT: Bundan sonra, metin içerisinde aksi belirtilmedikçe, birim küre ve küresel uzaklık olarak kürenin merkeziyle oluşturulan δ ölçüsünü alacağız.



Şekil 1.2. R yarıçaplı küre üzerinde A ve B noktaları arasındaki δ ölçüsü ile belirlenen uzaklık

Tanım 1.2. Bir AB büyük çemberinin M merkez noktasından geçen kesitine M noktasından çizilen dikmelerin küre yüzeyi ile kesişim noktaları P, P' olsun. Bu noktalara AB 'nin *kutup noktaları* denir. Dolayısıyla, AB büyük çember üzerindeki tüm noktalar için $|PX| = |P'X| = 90^\circ$ dir.

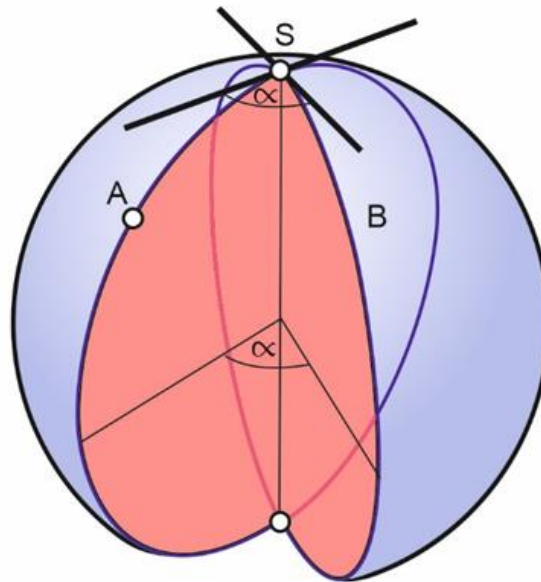
1.3. Küresel Açılar

AS ve BS büyük çemberlerinin arasındaki açı, S 'den geçen teğet doğrularının arasındaki Şekil 1.3.'te gösterilen α açısıdır.

ve burada, eğer;

- i) $AS \neq BS \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 180^\circ$,
- ii) $AS = BS \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ$ ya da $\alpha = 180^\circ$

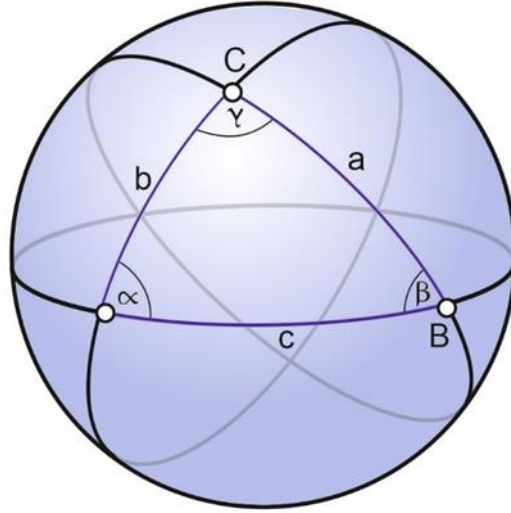
dir. (H.-G. Bigalke, 1984)



Şekil 1.3. AS ve BS büyük çemberlerinin arasındaki α açısı

Eğer iki büyük çember arasındaki açı α ise kesit düzlemler arasındaki açı da α' dır. S 'de kesişen iki farklı büyük çember 4 farklı açı oluşturur. Aynı düzlemdeki gibi, karşılıklı açılar birbirinin aynı, yan yana olan açılar da 180° 'yi tamamlar.

1.4. Küre Üzerinde Üçgenler



Şekil 1.4. Euler Üçgenleri

Tanım 1.4. A, B ve C küre yüzeyi üzerinde üçü aynı büyük çember üzerinde olmayan noktalar olsunlar. Dolayısıyla $AB = c, BC = a, AC = b$ ile küre yüzeyi 8 parçaya bölünür. Her bir bölge üç büyük çemberden oluşur, bunlar da çember üçgenlerini oluştururlar. Böylece küresel üçgenler için büyük çemberler arasında bulunan açılar α, β ve γ olmak üzere;

$$\alpha, \beta \text{ ve } \gamma < 180^\circ$$

ve kenar uzunlukları da

$$a, b, c < 180^\circ$$

dir. Böylece oluşan üçgenlere *Euler Üçgeni* denir (Şekil 1.4.).

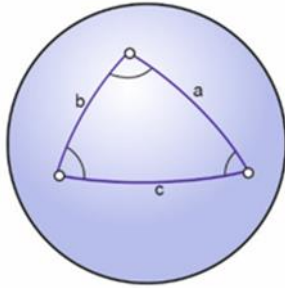
Bir Euler Üçgeni oluşturabilmek için, düzlemde üçgen oluşturma şartları olarak bilinen

1. Üç kenar a, b, c
2. İki kenar bir açı a, b, α ve a, b, γ
3. Bir kenar iki açı a, α, β ve c, α, β

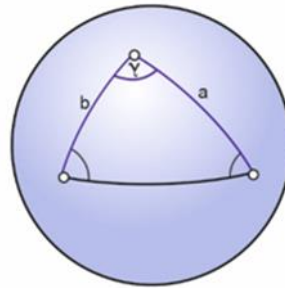
üçgen oluşturma özelliklerine ek olarak, küre yüzeyi üzerinde

4. Üç açı α, β, γ

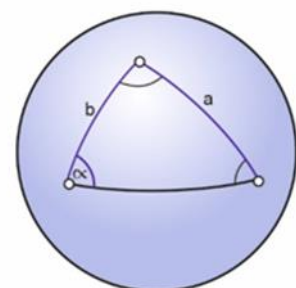
özelligi de mevcuttur.



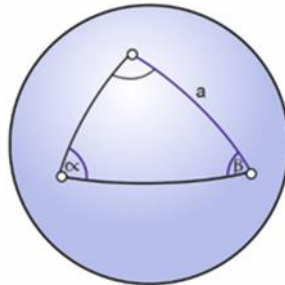
(a) a, b, c



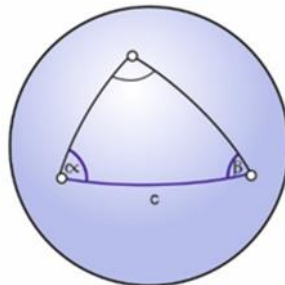
(b) a, b, γ



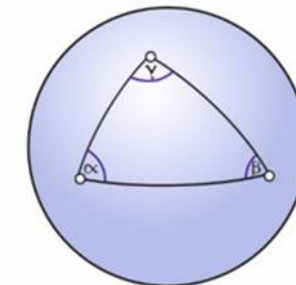
(c) a, b, α



(d) a, α, β



(e) c, α, β



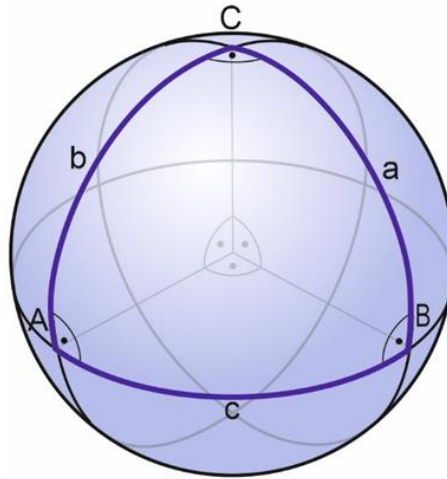
(f) α, β, γ

Şekil 1.5. Küre yüzeyi üzerinde Euler Üçgeni oluşturma

1.4.1. Küresel Pisagor bağıntısı

Bu bölümde, Pisagor bağıntısının küre yüzeyi üzerinde geçerli olup olmadığını inceleyelim:

Bir ABC küre üçgenini alalım; Şayet Şekil 1.6.'daki gibi $a = b = c = 90^\circ$ için düzlemdeki $a^2 + b^2 = c^2$ bağıntısının geçerli olmadığı açıktır.



Şekil 1.6. $a = b = c = 90^\circ$ için küresel üçgen

Dolayısıyla küre üzerinde Pisagor teoremini aşağıdaki teorem ile ifade edebiliriz. (Schupp, 1988)

Teorem 1.1. (Küresel Pisagor Teoremi)

$c = 90^\circ$ olmak üzere Euler üçgeni için;

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) \quad (1.2)$$

dir.

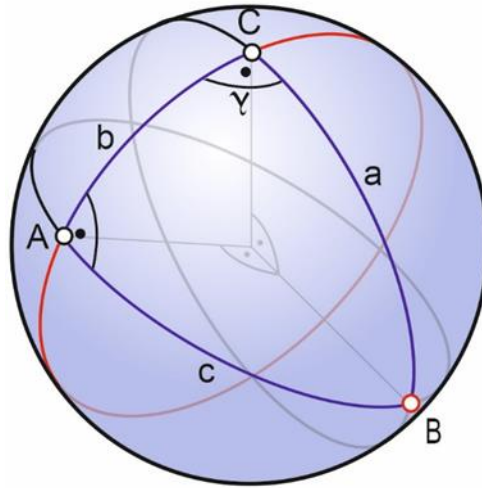
İspat:

1. Hal (Şekil 1.7.): Dik üçgen ($a = 90^\circ$ ya da $b = 90^\circ$ ya da $c = 90^\circ$)

$a = |BC| = 90^\circ$ olsun. $\gamma = 90^\circ$ için B, AC' 'nin büyük çemberinin kutbudur. (Tanım 1.1'den) Dolayısıyla $c = BA = BC = 90^\circ$ dır. Buradan da $a = 90^\circ$ ve $b = 90^\circ$ ise;

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) \quad (1.3)$$

sağlanır.



Şekil 1.7. Dik üçgen

2. Hal (Şekil 1.8.): Dik kenarı olmayan üçgen ($a \neq 90^\circ$, $b \neq 90^\circ$ ve $c \neq 90^\circ$)

Dik açılı fakat dik kenarlı olmayan Euler üçgenleri için şu haller geçerlidir:

i) Üç kenar da $< 90^\circ$ ise:

Şekil 1.8. (a) $MABC$ küre parçasını düşünelim. A 'dan MC 'ye AD ve D 'den MB 'ye DE kesitlerini alalım. AD , MBC düzlemine dik olur. Aynı zamanda AD ve DE düzlemine de diktir. Böylece AEM açısı da 90° 'dir. $|ME| = x$, $|MD| = y$ olmak üzere

$$\cos(c) = \frac{|ME|}{|MA|} = \frac{x}{1} \quad \cos(b) = \frac{|MD|}{|MA|} = \frac{y}{1} \quad (1.4)$$

Buradan

$$\cos(a) = \frac{x}{y} = \frac{\cos(c)}{\cos(b)} \quad (1.5)$$

dir.

ii) Sadece bir dar açı varsa:

Örneğin, ($b < 90^\circ$) alalım. Şekil 1.8. (b)'yi yukarıdaki gibi düşünersek;

$$\cos(180 - c) = \frac{|ME|}{|MA|} = \frac{x}{1} \quad \cos(b) = \frac{|MD|}{|MA|} = \frac{y}{1} \quad (1.6)$$

Buradan da

$$\cos(180 - a) = \frac{x}{y} = \frac{\cos(180 - c)}{\cos(b)} \quad (1.7)$$

elde edilir.

$$\cos(180 - a) = -\cos(a) \quad \text{ve} \quad \cos(180 - c) = -\cos(c) \quad (1.8)$$

olduğundan yukarıdaki kabulümüz geçerlidir (Rixecker, 1984).

iii) Eğer üçgende iki kenar dar açılı ise diğer üçüncü kenar da dar açılıdır. Ayrıca Şekil 1.8. (a)'dan

$$|ED| = \cos(\beta) \cdot \sin(c) \quad \text{ve} \quad x = \cos(c) \quad (1.9)$$

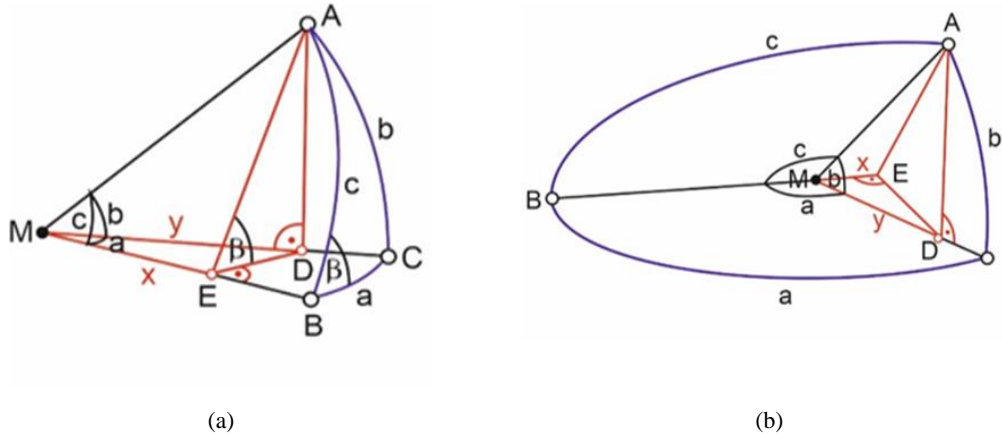
dir. Böylece MED üçgeninden

$$\tan(\alpha) = \frac{|ED|}{x} = \frac{\cos(\beta) \cdot \sin(c)}{\cos(c)} \quad (1.10)$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{\tan(\alpha)}{\tan(c)} \\ &= \cot(90 - \alpha) \cdot \cot(c) \end{aligned} \quad (1.11)$$

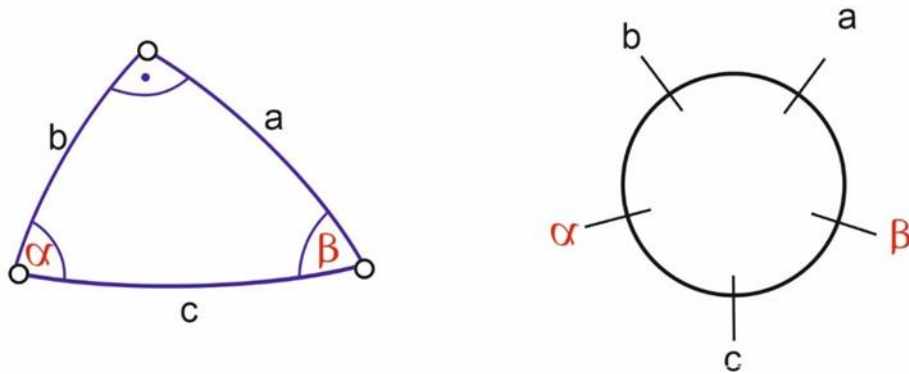
elde edilir.



Şekil 1.8. (a), (b) Dik kenarı olmayan üçgen örnekleri

Bütün bunlar aşağıdaki teoremdede ifade edeceğimiz Neperche Kuralı' nı verir.

Teorem 1.2. (Neperche Kuralı): Küresel yüzeydeki bir Euler üçgeninde C kenarı dik açılı olsun. Bu durumda a ve b açıları için, her parçanın kosinüsü komşuluk sırası: a, b, α, c, β olmak üzere komşu parçalarının kotanjant değerlerinin çarpımına ve komşu olmayan parçalarının sinüs değerlerinin çarpımına eşittir. (Rixecker, 1984).



Şekil 1.9. Neperche Kuralı için Komşuluk sırası

Böylece aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\cos(90 - b) = \cot(\alpha) \cdot \cot(90 - a) = \sin(c) \cdot \sin(\beta) \quad (1.12)$$

$$\cos(\alpha) = \cot(c) \cdot \cot(90 - b) = \sin(\beta) \cdot \sin(90 - a) \quad (1.13)$$

$$\cos(c) = \cot(\alpha) \cdot \cot(\beta) = \sin(90 - a) \cdot \sin(90 - b) \quad (1.14)$$

$$\cos(\beta) = \cot(c) \cdot \cot(90 - a) = \sin(\alpha) \cdot \sin(90 - b) \quad (1.15)$$

$$\cos(90 - a) = \cot(90 - b) \cdot \cot(\beta) = \sin(\alpha) \cdot \sin(c) \quad (1.16)$$

NOT: $\sin(90 - a) = \cos(a)$ ve $\sin(90 - b) = \cos(b)$ Pisagor bağıntısındaki (iii) den elde edilir.

1.4.2. Küresel üçgen üzerinde hesaplama formülleri

Teorem 1.3. (Kosinüs Teoremi)

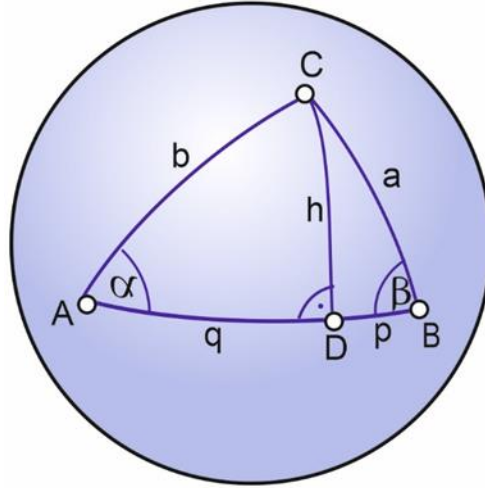
Küre yüzeyi üzerindeki üçgenler için $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ açıları için kosinüs teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cos(\alpha) \quad (1.17)$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cos(\beta) \quad (1.18)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cos(\gamma) \quad (1.19)$$

İspat: Şekil 1.10.'daki h yüksekliğinin iki dik üçgene bölündüğü dar açılı bir küre üçgenini düşünelim.



Şekil 1.10. Dar Açılı Euler Üçgeninde Yükseklik

Teorem 1.1. den

$$\cos(a) = \cos(h) \cdot \cos(p) \quad (1.19)$$

$$\cos(b) = \cos(h) \cdot \cos(q) \quad (1.20)$$

dir. Ayrıca

$$a < 90^\circ, b < 90^\circ \quad p + q = c < 90^\circ \quad (1.21)$$

dar açıları ve

$$\cos(q) \neq 0, \cos(p) \neq 0, \tan(b) \neq \infty \quad (1.22)$$

şartları altında $\cos(h)$ yok edilerek

$$\frac{\cos(a)}{\cos(p)} = \frac{\cos(b)}{\cos(q)} \quad (1.22)$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\cos(a) = \frac{\cos(p)}{\cos(q)} \cdot \cos(c - q), \quad (c - q = p) \quad (1.22)$$

ve

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad (1.23)$$

toplam teoreminden

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \frac{\cos(b)}{\cos(q)} \cdot (\cos(c) \cdot \cos(q) + \sin(c) \cdot \sin(q)) \\ &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \cos(b) \cdot \sin(c) \cdot \tan(q) \end{aligned} \quad (1.24)$$

bulunur.

Teorem 1.2 den

$$\cos(\alpha) = \cot(90 - q) \cdot \cot(b) = \tan(q) \cdot \cot(b) \quad (1.25)$$

ve

$$\tan(q) = \tan(b) \cdot \cos(\alpha) \quad (1.27)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \cos(b) \cdot \sin(c) \cdot \tan(b) \cdot \cos(\alpha) \\ &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (1.28)$$

elde edilir.

Yukarıdaki işlemler, aynı düşüncelerle tekrar edilerek sırasıyla $\cos(b)$ ve $\cos(c)$ için de uygulanabilir. Geniş açı bulunduran Euler üçgenleri için de bu ispat geçerlidir.

Teorem 1.4. (Sinüs Teoremi)

Euler üçgeninde,

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} \quad (1.29)$$

dir.

İspat: Şekil 1.10. ve teorem 1.2 den

$$\cos(90 - h) = \sin(\alpha) \cdot \sin(b), \quad \cos(90 - h) = \sin(\beta) \sin(\alpha) \quad (1.30)$$

dir.

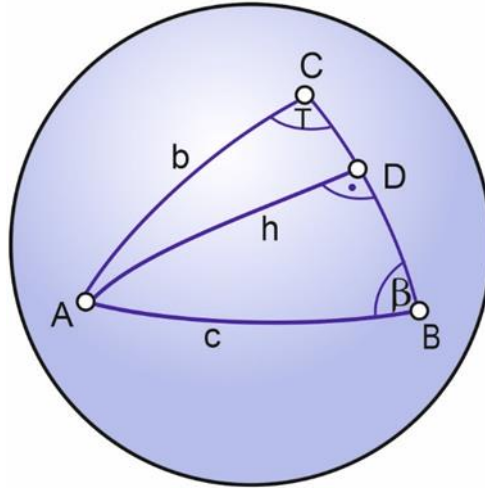
$\cos(90 - h)$ yok edilerek,

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(b) = \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \quad (1.31)$$

ve dolayısıyla

$$\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} \quad (1.32)$$

elde edilir.



Şekil 1.11. Sinüs teoremi

Yine Şekil 1.11. ve teorem 1.2 den

$$\cos(90 - h) = \sin(\gamma) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(90 - h) = \sin(\beta) \cdot \sin(c)$$

$\cos(90 - h)$ yok edilerek

$$\sin(\gamma) \cdot \sin(b) = \sin(\beta) \cdot \sin(c)$$

Buradan da,

$$\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} \quad (1.33)$$

Böylece (1.32) ve (1.33) aynı sonucu verdiğiinden ispat sağlanmış olur.

1.5. Gnomanik İzdüşüm

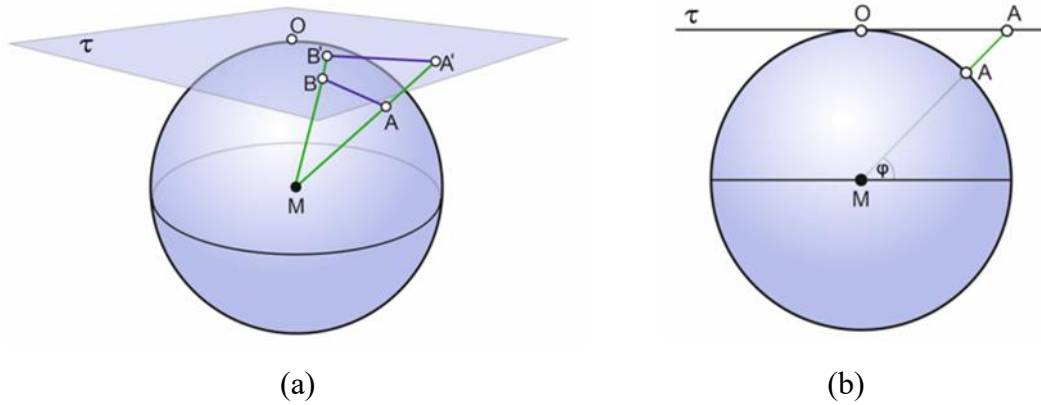
Tanım 1.5.1. Merkezi M olan bir kürenin küre yüzeyi üzerindeki herhangi bir O noktasından geçen β teğet düzleme yansıtılmasına *Gnomanik İzdüşüm* denir (Şekil 1.12. (a)).

Tanım 1.5.2. Gnomanik İzdüşüm ile elde edilen teğet düzlemindeki görüntü kümesine *Büyük Çember Haritası* denir (Kollars & Müllner, 1990).

Şekil 1.12. (b) de görüleceği gibi kürenin büyük çemberleri ve açıları teğet düzlemde doğrulara dönüşür.

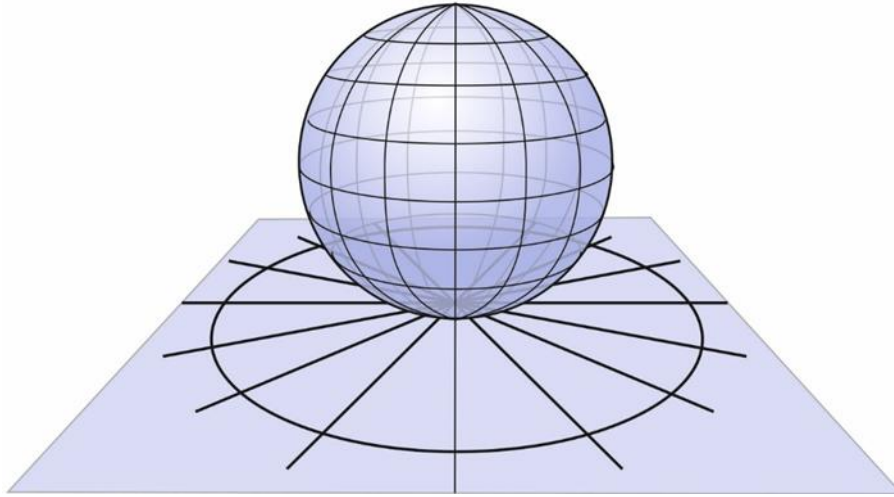
Bu izdüşüm teorisinin Navigasyon sistemlerinin kullanılmasında çok önemli bir anlamı vardır, öyle ki:

Büyük Çember Haritası üzerindeki herhangi A' ve B' noktalarının belirlediği doğru, aslında \widehat{AB} büyük çember yayının görüntüsü AB yayıdır ve küre üzerindeki A ve B noktalarının en kısa yoludur.



Şekil 1.12. (a) (b) Gnomanik İzdüşümü teğet düzlemi

Tanım 1.5.3. Kürenin üzerinde seçilen O noktası dünyanın kutup noktasına denk gelirse bu şekilde oluşan görüntü haritasına Kutup konumlu, eğer ekvator üzerindeyse Ekvator konumludur denir.



Şekil 1.13. Gnomonik izdüşümler

Dolayısıyla, bir kutup konumlu büyük çember haritası üzerindeki enlemler çemberlere, boylamlar doğrulara dönüşür (Şekil 1.13.).

Gnomonik iz düşümlerde açılar ve alanlar korunmaz. Dolayısıyla uzunluklar da korunmaz. φ açısındaki küçük bir değişiklik izdüşüm haritasında büyük bir değişikliğe sebep olur.

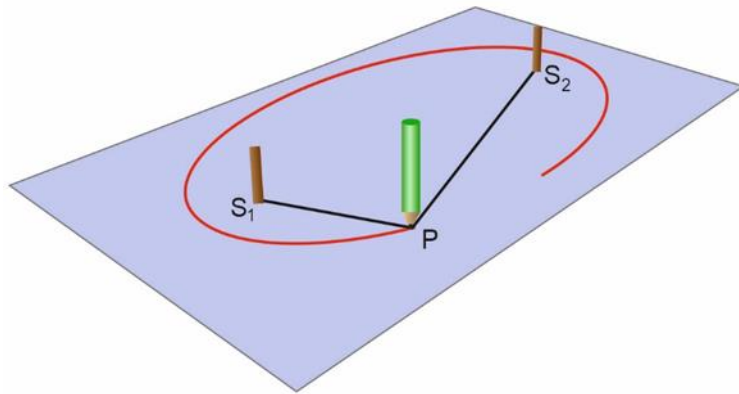
BÖLÜM 2. KÜRESEL KESİTLER

2.1. Küresel Elips

Öncelikle Öklid düzleminde elipsi tanımlayalım ve odak noktasının tanımını verelim.

Tanım 2.1: k küresel elipsi, \mathfrak{N} küre üzerindeki bir P noktasından sabit $S_1 \in \mathfrak{N}$ ve $S_2 \in \mathfrak{N}$ odak noktalarından $2a$ uzunluğundaki noktaların kümesidir (Şekil 2.1.).

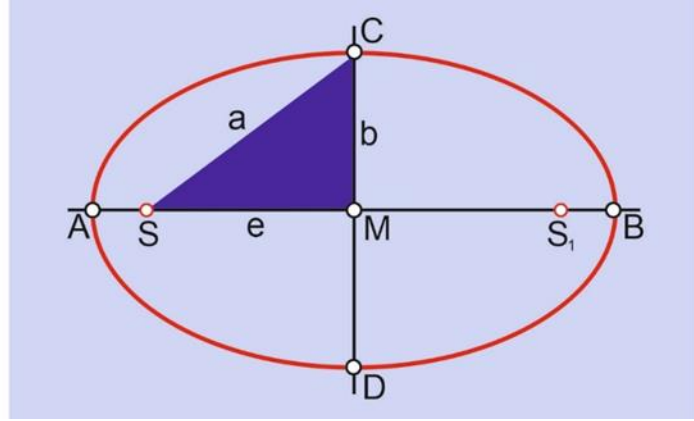
$$k = \{P \in \mathfrak{N} \mid |\widehat{PS_1}| + |\widehat{PS_2}| = 2a\} \quad (2.1)$$



Şekil 2.1. Elips tasarımı

Şekil 2.2.'deki gibi M , elipsin merkez noktası ve $e = |\overline{MS_1}| = |\overline{MS_2}|$ lineer dış merkezlik ve $a = |\overline{MA}| = |\overline{MB}|$, $b = |\overline{MC}| = |\overline{MD}|$ uzunluklar olmak üzere yukarıdaki tanımdan düzlemdeki elips için geçerli olan ifade küre üzerindeki elips için de geçerlidir.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2.2)$$



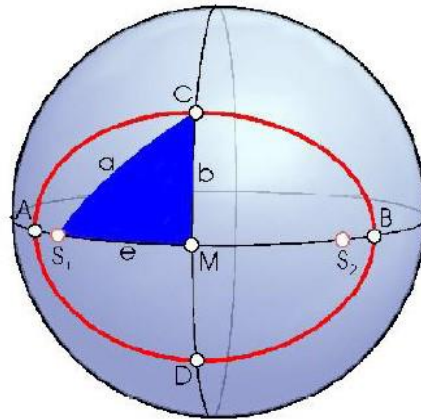
Şekil 2.2. Düzlemsel Elips

Tanım 2.2: k küresel elipsi, \mathfrak{N} küre üzerindeki bir P noktasından sabit $S_1 \in \mathfrak{N}$ ve $S_2 \in \mathfrak{N}$ odak noktalarından $2a$ uzunluğundaki noktaların kümesidir (Şekil 2.3.).

$$k = \{P \in \mathfrak{N} \mid |\widehat{PS_1}| + |\widehat{PS_2}| = 2a\} \quad (2.3)$$

M , küresel elipsin merkez noktası ve $e = |\overline{MS_1}| = |\overline{MS_2}|$ ayrıca $a = |\overline{MA}| = |\overline{MB}|$
 $b = |\overline{MC}| = |\overline{MD}|$ tanım 2.2 ve teorem 1.1'den

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(e) \quad (2.4)$$



Şekil 2.3. Küresel elips

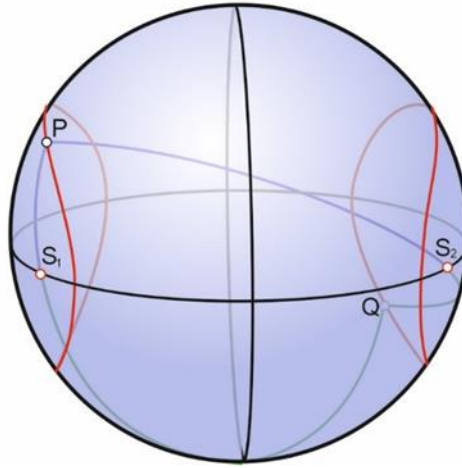
2.2. Küresel Hiperbol Çizgileri

Küre yüzeyi üzerinde Hiperbol aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.1: k küresel hiperbolü, \mathfrak{N} küresi üzerindeki sabit $S_1 \in \mathfrak{N}$ ve $S_2 \in \mathfrak{N}$ odak noktalarından aynı küresel uzaklık farkı $2a$ olan tüm P noktalarının kümesidir.

$$k = \{P \in \mathfrak{N} \mid |\widehat{PS_1}| - |\widehat{PS_2}| = 2a\} \quad (2.5)$$

Küresel hiperbol iki farklı daldan oluştuğundan Şekil 2.4.'den;



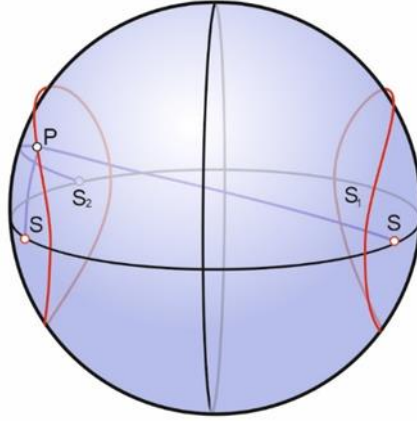
Şekil 2.4. Küresel hiperbol

$$|\widehat{S_1Q}| = 180^\circ - |\widehat{S_1P}| \quad \text{ve} \quad |\widehat{S_2Q}| = 180^\circ - |\widehat{S_2P}|$$

olduğundan,

$$|\widehat{S_1Q}| - |\widehat{S_2Q}| = 180^\circ - |\widehat{S_1P}| - (180^\circ - |\widehat{S_2P}|) = -|\widehat{S_1P}| + |\widehat{S_2P}| = 2a \quad (2.6)$$

elde edilir. Böylece, Şekil 2.5.'e göre küresel hiperbollerin aynı zamanda küresel elipsler olabileceği yorumu yapılabilir.



Şekil 2.5. Küresel hiperbollerin aynı zamanda küresel elipslerdir

Teorem 2.2.1: S_1 ve S_2 odak noktalarına $2a$ uzaklık farkı ile oluşan küresel hiperbol aynı zamanda S_1 ve $\overline{S_2}$ odak noktalarına $180 - 2a$ ya da $180 + 2a$ uzaklık toplamları olan küresel elipstir. Öyle ki $\overline{S_2}$, S_2 'nin küre merkezine göre simetriğidir.

İspat: S_1 ve S_2 odak noktalarıyla oluşan küresel hiperbolün bir noktası ise uzaklık farkı $2a$ 'dır. P ' den S_1 ve $\overline{S_2}$ noktalarına olan uzaklıklar toplamı (Şekil 2.5.).

$$\begin{aligned} |\widehat{S_1P}| + |\widehat{\overline{S_2}P}| &= |\widehat{S_1P}| + (180 - |\widehat{S_2P}|) = 180 + |\widehat{S_1P}| - |\widehat{S_2P}| = 180 + \\ &2a \end{aligned} \quad (2.7)$$

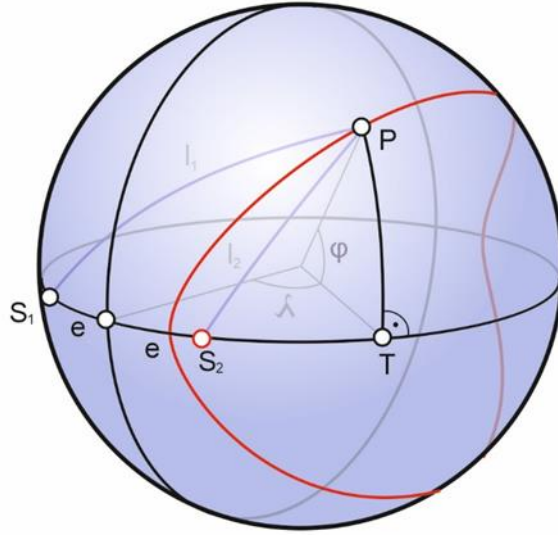
veya $180 - 2a$

$$(|\widehat{\overline{S_2}P}| = (180 - |\widehat{S_2P}|) \text{ ve } |2a| = |\widehat{S_1P}| - |\widehat{S_2P}|) \quad (2.8)$$

Sonuç 2.2.1: Küre üzerinde elips ile hiperbol arasında bir fark yoktur.

2.3. Küresel Kesitlerin Analitik İncelenmesi

Bu bölümde küresel hiperbol ve küresel elipslerin fonksiyonları ve oluşturdukları eğrileri tartışacağız. Tanım 2.2.1'den uzaklık farkı $2a$ olan küresel hiperbolün üzerindeki belirli bir $P(\lambda, \varphi)$ noktası için



Şekil 2.6. Küresel hiperbol aynı zamanda küresel elipstir

$$|\widehat{S_1P}| - |\widehat{S_2P}| = 2a \quad (2.9)$$

ve

$$|\widehat{S_1P}| = l_1, \quad |\widehat{S_2P}| = l_2 \quad (2.10)$$

diyelim. Teorem 1.1 den

$$\Delta S_1TP : \cos(l_1) = \cos(\lambda + e) \cdot \cos(\varphi) \quad (2.11)$$

ve

$$\Delta S_2TP : \cos(l_2) = \cos(\lambda - e) \cdot \cos(\varphi) \quad (2.12)$$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ toplam açı teoremi dikkate alınır;

$$\begin{aligned} \cos(l_1) + \cos(l_2) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{l_1-l_2}{2}\right) = \cos(\varphi) \cdot [\cos(\lambda + e) + \cos(\lambda - e)] \\ \cos(\alpha \mp \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

toplam açı teoremi dikkate alınırsa;

$$\frac{l_1 + l_2}{2} = a + l_2 \quad \text{ve} \quad \frac{l_1 - l_2}{2} = a \quad (2.14)$$

olmak üzere

$$\cos\left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(e) \quad (2.15)$$

Yani; $l_1 \geq l_2$ kabul edilirse ve aynı zamanda $l_1 = 2a + l_2$ dolayısıyla yukarıdaki toplam açı teoreminden

$$[\cos(a) \cdot \cos(l_2) - \sin(a) \cdot \sin(l_2)] \cdot \cos(a) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(e) \quad (2.16)$$

ya da

$$-\sin(l_1) = \frac{\cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(e)}{\cos(a) \cdot \sin(a)} - \frac{\cos(\varphi) \cdot \cos(l_2)}{\sin(a)} \quad (2.17)$$

Karesini alırsak $\sin^2(l_2) = 1 - \cos^2(l_2)$ olduğundan

$$1 = \frac{\cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\lambda) \cdot \cos^2(e)}{\cos^2(a) \cdot \sin^2(a)} - \frac{2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(e) \cdot \cos(a) \cdot \cos(l_2)}{\cos(a) \cdot \sin^2(a)} + \frac{\cos^2(l_2)}{\sin^2(a)} \quad (2.18)$$

dir.

$$\cos(l_2) = \cos(\lambda - e) \cdot \cos(\varphi) \quad (2.19)$$

ifadesini yerine yazarsak aşağıda denklemini elde edilir.

$$1 = \frac{\cos^2(\varphi).\cos^2(\lambda).\cos^2(e) - \cos^2(\varphi).\cos^2(\lambda).\cos^2(a) + \cos^2(\varphi).\cos^2(\lambda).\sin^2(\lambda).\sin^2(e)}{\cos^2(a).\sin^2(a)} \quad (2.20)$$

ve sonuç olarak, $a \leq e \leq 90^\circ$ için

$$1 = \frac{\cos^2(\varphi).\cos^2(\lambda)}{\frac{\cos^2(a)}{\cos^2(e)}} + \frac{\sin^2(\lambda).\cos^2(\varphi)}{\frac{\sin^2(a)}{\sin^2(e)}} \quad \text{dir.} \quad (2.21)$$

$$\frac{\sin(a)}{\sin(e)} = p \quad \text{ve} \quad \frac{\cos(a)}{\cos(e)} = q \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlayıp yukarıdaki denklemde yerine yazarsak küresel hiperbolün fonksiyon denklemi

$$1 = \frac{\sin^2(\lambda).\cos^2(\varphi)}{p^2} + \frac{\cos^2(\lambda).\cos^2(\varphi)}{q^2} \quad (2.23)$$

formunda elde edilir.

Her $p \leq 1$ ve $q \geq 1$ için φ 'ye göre çözüm yapılırsa

$$\cos^2(\varphi) = \frac{p^2.q^2}{q^2 + (p^2 - q^2).\cos^2(\lambda)} \quad (2.24)$$

olur.

$p \leq 1$ ve $q \geq 1$ olduğundan (2.24) eşitliğinin payı ve paydası daima pozitiftir. Öyle ki eşitliğin sağ tarafının karekökü alınabilir (2.24) den aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz.

1. (λ, φ) bir çözümse $(\lambda, -\varphi)$ de bir çözümdür. Yani küresel hiperbol $S_1 S_2$ büyük çember üzerinde simetriktir.
2. (λ, φ) bir çözümse $(\lambda, -\varphi)$, $(180^\circ - \lambda, \varphi)$ ve $(\lambda - 180^\circ, \varphi)$ noktaları da çözümdür.

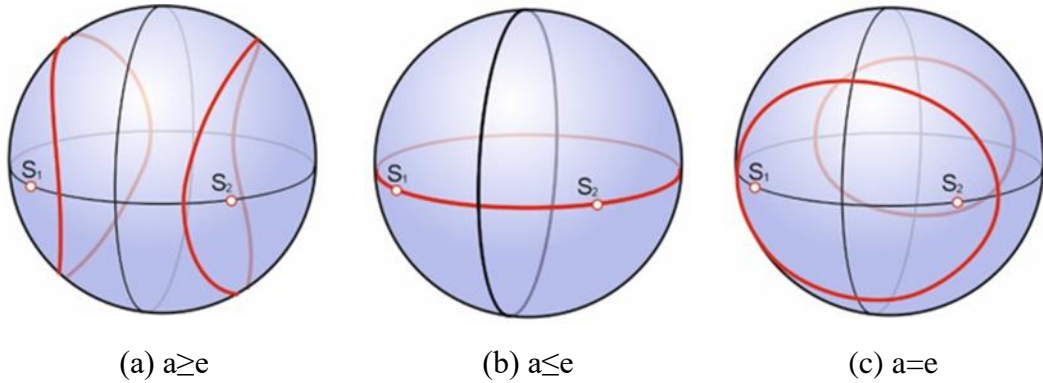
Böylece herhangi bir λ için $\varphi = 0$ dır. Bu denklem küresel elipsin ve küresel hiperbolün bozuk hali gibi gözükebilecek ekvator çizgisini verir. Bütün bu sonuçları aşağıdaki teoremden ifade edilebilir.

Teorem 2.2: $S_1(-e, 0)$ ve $S_2(e, 0)$ odaklarıyla a ana eksen uzunluğu ile bir küre kesitinin denklemi

$$1 = \frac{\cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\lambda)}{\frac{\cos^2(a)}{\cos^2(e)}} + \frac{\sin^2(\lambda) \cdot \cos^2(\varphi)}{\frac{\sin^2(a)}{\sin^2(e)}} \quad (2.27)$$

için

1. Eğer $a \geq e$ ise elips, $a \leq e$ ise hiperbol elde edilir.
2. $a = e$ ise ekvator çizgisidir.

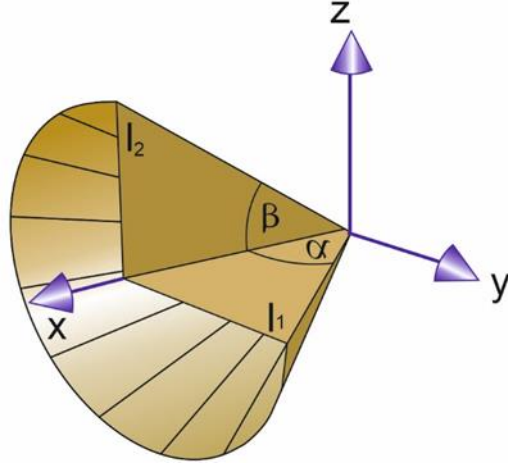


Şekil 2.8. $a \geq e$ elips, $a \leq e$ hiperbol $a = e$ halleri

2.4. Koni Kesiti Olarak Küresel Elips

2.1 ve 2.2 bölümlerinde, düzlemde ve koni üzerindeki kesitler tanımlanmıştı. Bir koni kesiti aynı zamanda kesişim eğrisi ve bir düzlemden oluşturulabileceği için bu bölüme küresel koni kesitleri ve özellikle bir kuadratik koninin ve kürenin kesişimi olarak ifade edilebilen küresel elipslerin oluşumundan bahsedilecektir. Aşağıda bir kuadratik koninin birim küreyle nasıl oluşturulabileceğini göstereceğiz.

Öncelikle, koni simetri eksenine üç boyutlu koordinat sisteminde x-ekseni üzerine koninin tepe noktası O olacak şekilde oturtulur.



Şekil 2.9. Üç boyutlu koordinat sisteminde x-ekseni üzerine oturtulan bir koni

Bu koninin denklemi

$$p \cdot y^2 + q \cdot z^2 - x^2 = 0 \quad (2.28)$$

dir.

Koni $x = 1$ düzlemiyle dik kesilirse

$$\frac{y^2}{\frac{1}{p}} + \frac{z^2}{\frac{1}{q}} = 1 \quad (2.29)$$

denklemini bulunur. Buna göre

$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{p}} = \tan(\alpha), \quad l_1 = \frac{1}{\sqrt{q}} = \tan(\beta) \quad (2.30)$$

elde edilebilir.

$$\frac{1}{p} = \tan^2(\alpha) \text{ ve } \frac{1}{q} = \tan^2(\beta) \quad (2.31)$$

değerlerini koni denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{y^2}{\tan^2(\alpha)} + \frac{z^2}{\tan^2(\beta)} - x^2 = 0. \quad (2.32)$$

Koninin $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresiyle kesiştirilmesi için x 'in yok edilmesiyle

$$\frac{y^2}{\sin^2(\alpha)} + \frac{z^2}{\sin^2(\beta)} = 1 \quad (2.33)$$

elde edilir.

Bu eşitlik ile x -eksenine paralel silindir denklemi bulunmuş olur. Tüm kesişim noktaları aynı anda birim küre üzerinde bulunduğundan $y = \cos(\varphi)$, $\sin(\lambda)$, $z = \sin(\varphi)$ için bu kesişim eğrisinin denklemi

$$\frac{\sin^2(\lambda).\cos^2(\varphi)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\sin^2(\beta)} = 1 \quad (2.34)$$

dir.

$$\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi).(\sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda)) \quad (2.35)$$

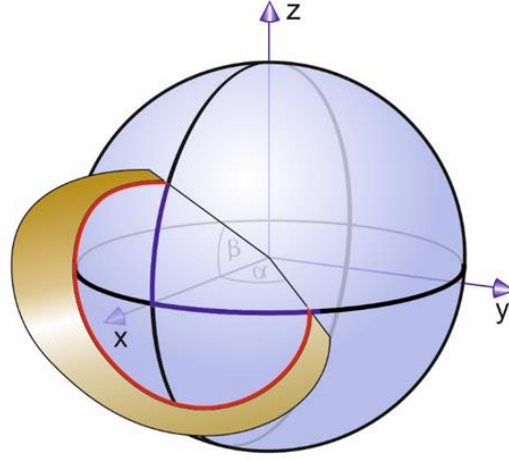
yazılabileceğinden sonuç olarak

$$1 = \frac{\cos^2(\lambda).\cos^2(\varphi)}{\cos^2(\beta)} + \frac{\sin^2(\lambda).\cos^2(\varphi)}{\frac{\sin^2(\alpha).\cos^2(\beta)}{\cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)}} \quad (2.36)$$

ve dolayısıyla

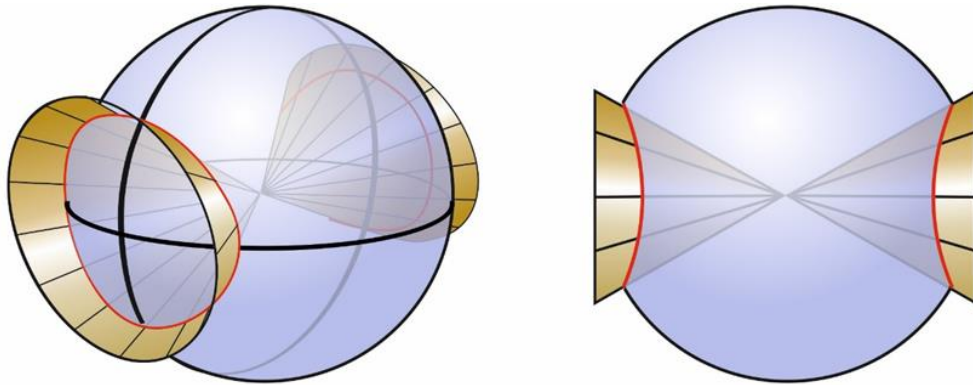
$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \cdot \cos(e) \quad (2.37)$$

dikkate alınrsa, $\alpha \geq e$ için teorem 2.2 den ana eksenleri α ve β olan küresel elips elde edilir (Şekil 2.10.).



Şekil 2.10. Küresel Elips

Teorem 2.3: Tepe noktaları kürenin merkezinde ve $\alpha \neq \beta$ için α ve β ana eksenleriyle oluşan küresel elips, O merkezli bir küre ve yine O merkezli kuadratik koninin kesişimidir.

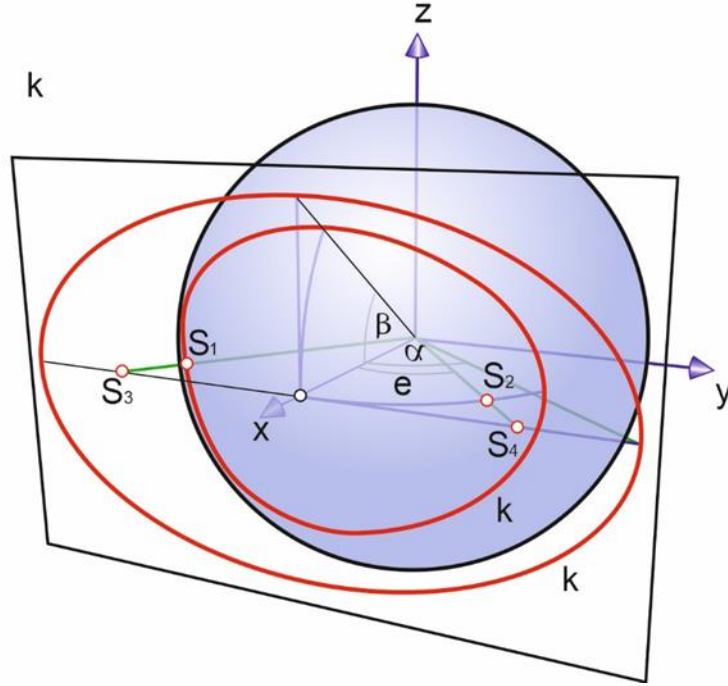


Şekil 2.11. O merkezli bir küre ve yine O merkezli kuadratik koninin kesişiminden oluşan elips

Sonuç olarak, Teorem 2.3 ten aşağıdakiler elde edilir:

O merkezli bir küre ve kürenin bir teğet düzlemi üzerinde bir elips verilmiş olsun. Bu elipsin tüm noktalarına kürenin merkezinden yapılan izdüşümler küre yüzeyi üzerinde bir küresel elips oluşturur. Böylece teğet düzlem üzerindeki noktaları küre yüzeyine yansıtan Gnomonik izdüşümü, küre ile düzlem arasındaki ilişkiyi göstermeye yardımcı olur.

Teorem 2.4: S_1 ve S_2 odak noktalarıyla bir \bar{k} küresel koni kesiti Gnomonik yansıtılırsa \bar{k} 'nın k resmi için; S_1 ve S_2 'nin izdüşümleri k 'nın odak noktaları değildir.



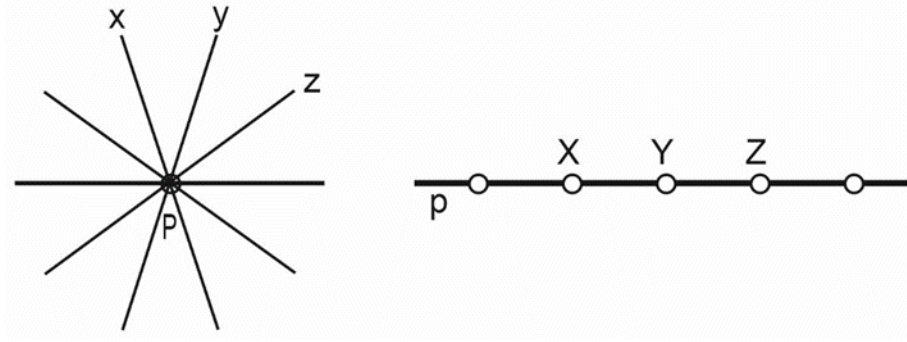
Şekil 2.12. Gnomonik izdüşümü ile teğet düzlemdeki elipsin küre üzerine yansımaları

2.5. Koni Kesitlerin Projektif Tasarımı

2.1 ve 2.2 bölümlerinde küresel koni kesitlerinin a uzunluk birimine ihtiyaç vardır. Tamamen uzunluk ilişkilerinden bağımsız olarak koni kesitlerinin tasarımını elde etmek için projektif tasarımdan yararlanılabilir. Bu çalışmayı daha önce Steiner ve Chasles yapmış ama ilk olarak Christian Von Staudt kullanmıştır (1798-1868), (Lang, 1998).

2.5.1. Öklid düzleminde projektiflikler

Bir noktadan geçen doğruları (doğru demeti) ya da doğru üzerindeki noktaları (nokta dizilerini) düşünelim. P noktasından geçen tüm x doğruları kümesini $P(x)$, p doğrusu üzerindeki tüm X noktaları kümesini $p(X)$ ile gösterelim.

Şekil 2.13. $P(x)$ ve $p(X)$ kümeleri

Doğru demetleri ve nokta dizileri arasındaki bağıntıya perspektiflik denir. Perspektifliklerin üç farklı çeşidi vardır.

a) Doğru demetiyle nokta dizisi arasındaki perspektifliktir ve

$$P(x) \bar{\bar{p}}(X) \quad (2.38)$$

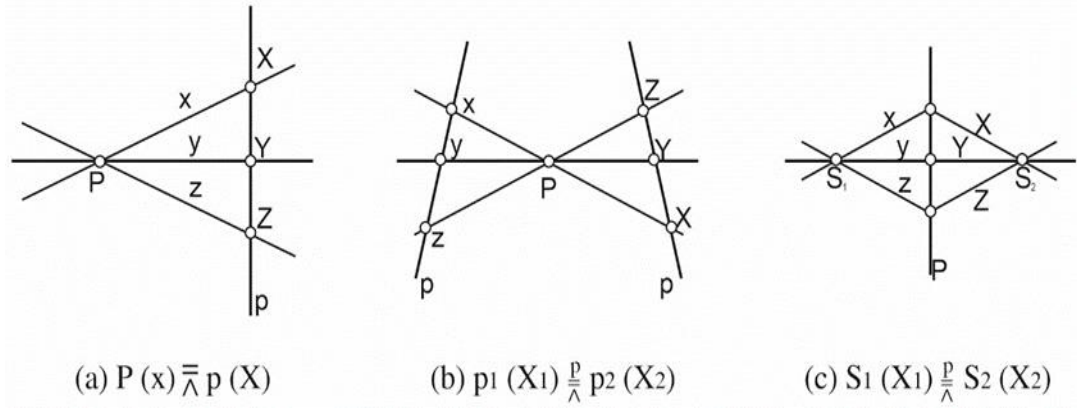
ile gösterilir.

b) İki nokta dizisi arasındaki perspektiflik için X_1 ve X_2 'den geçen doğru P 'den de geçer. (X_1 ve X_2 , P ile aynı doğru üzerindedir)

c) $S_1(X_1)$ ve $S_2(X_2)$ iki doğru demeti arasındaki perspektifliktir ve

$$S_1(X_1) \bar{\bar{S}}_2(X_2) \quad (2.39)$$

ile gösterilir, öyle ki X_1 ve X_2 noktalarının kesişim noktası p doğrusu üzerindedir.



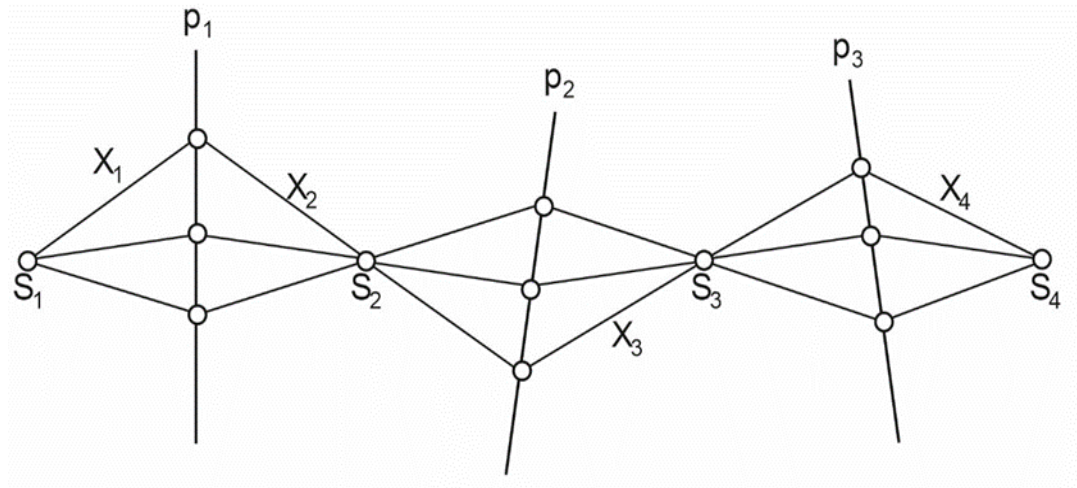
Şekil 2.14. a, b, ve c tipi perspektiflikler

Tanım 2.4: Birden çok perspektifliğin bileşkesine *Projektiflik* denir.

Eğer $p_1(X_1)$ ve $p_2(X_2)$ nokta dizileri bir projektiflik ile ilişkilendirilmişse, projektif olarak bağlandırılmıştır denir ve $p_1(X_1) \bar{\bar{p}}_2(X_2)$ dir.

Aynı ifade doğru demetleri için de geçerlidir. $S_1(X_1)$ ve $S_2(X_2)$: $S_1(X_1) \bar{\bar{p}} S_2(X_2)$.

Örnek : $S_1(X_1)$ ve $S_4(X_4)$ doğru demetinin arasındaki bir projektiflik aşağıdaki gibi verilmiş olabilir (Şekil 2.15.'e bakınız).

Şekil 2.15. $S_1(X_1)$ ve $S_4(X_4)$ doğru demetinin arasındaki bir projektiflik

Hatırlatmalar:

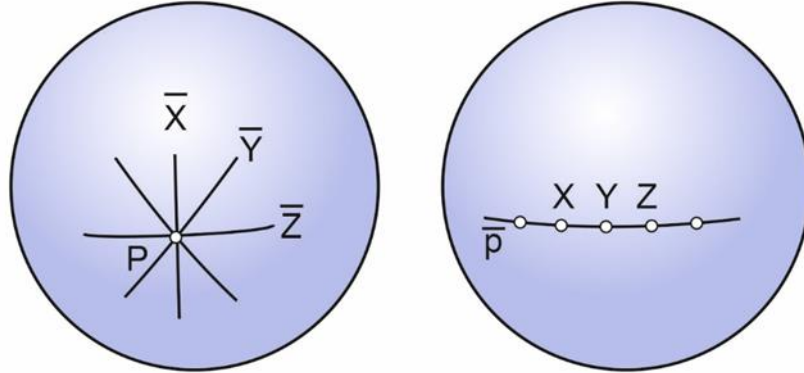
Her perspektiflik bir projektifliktir.

Birden çok perspektifliğin bileşkesi, iki perspektifliğin bileşkesi olarak ifade edilebilir.

Eğer bir nokta dizisindeki üç noktaya karşılık diğer tarafta karşılık gelen üç nokta varsa projektiflik tek türlü belirlenebilir.

2.5.2. Küre üzerindeki projektiflikler

Öklid düzleminde olduğu gibi P noktasından geçen \hat{x} büyük çemberlerin kümesi $P(\hat{x})$ doğru demeti, bir \hat{p} büyük çemberinin üzerindeki tüm X nokta kümesi ise $\hat{p}(X)$ nokta dizisi olarak tanımlanır.



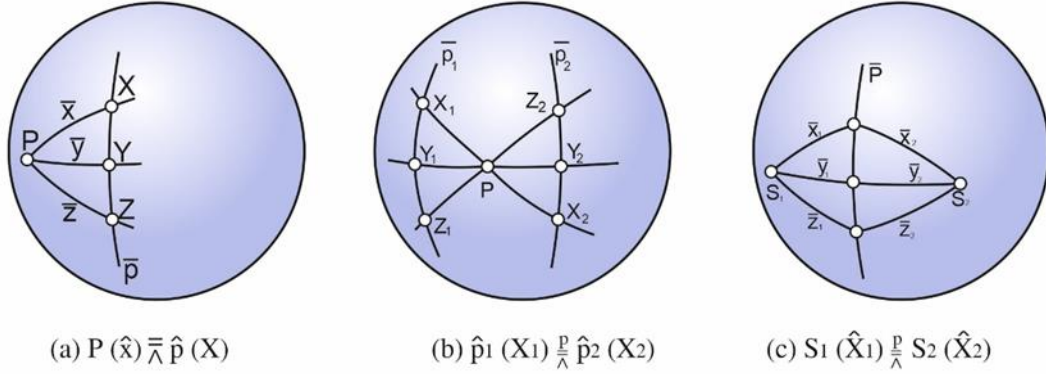
Şekil 2.16. Küre üzerinde $P(\hat{x})$ doğru demeti ve $\hat{p}(X)$ nokta dizisi

Küresel perspektifliğin 3 farklı tipinden bahsedilebilir. Bunlar,

a) $P(\hat{x})$ doğru demeti $\hat{p}(X)$ nokta dizisi arasındaki perspektifliktir ve $P(\hat{x}) \bar{\bar{\lambda}} \hat{p}(X)$ ile gösterilir.

b) İki farklı $\hat{p}_1(X_1)$ ve $\hat{p}_2(X_2)$ nokta dizisi arasındaki perspektifliktir ve $\hat{p}_1(X_1) \bar{\bar{\lambda}} \hat{p}_2(X_2)$ ile gösterilir, öyle ki X_1 ve X_2 noktalarından geçen büyük çemberler aynı zamanda P noktasından da geçer.

c) İki doğru demeti $S_1(\hat{x}_1)$ ve $S_2(\hat{x}_2)$ arasındaki perspektiflik ve $S_1(\hat{x}_1) \stackrel{p}{\bar{\wedge}} S_2(\hat{x}_2)$ ile gösterilir, öyle ki \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 büyük çemberlerin kesişim noktası \hat{p} büyük çemberlerinin de üzerindedir.



Şekil 2.17. Küre üzerinde a, b, ve c tipi perspektiflikler

Tanım 2.5: Birden çok küresel perspektifliğin bileşkesine küresel projektiflik denir.

Hatırlatma:

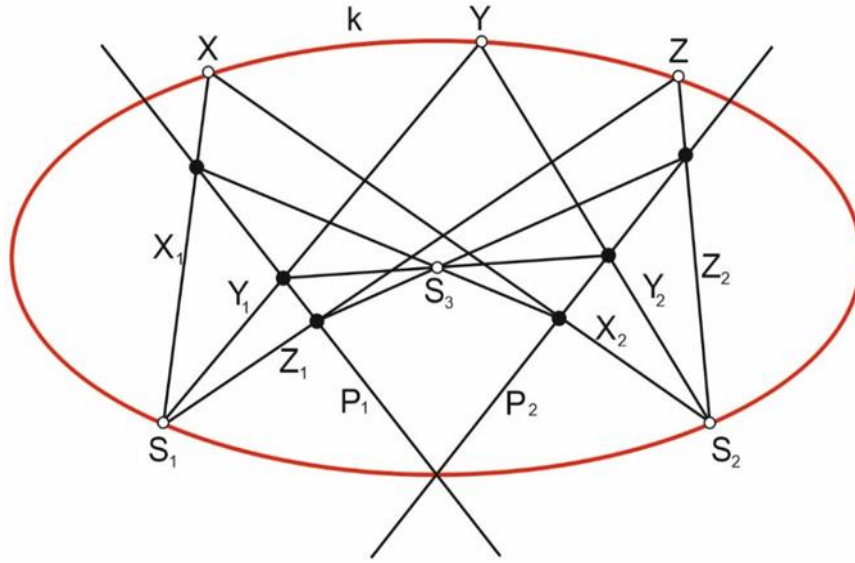
Bir düzlemdeki projektiflik, gnomonik iz düşümle küresel projektifliğe yansıtılabilir.

2.5.3. Küre kesitinin projektif tanımı

Tanım 2.6: $\pi : S_1(x_1) \bar{\wedge} S_2(x_2)$ perspektifliği verilmiş olsun. π perspektiflik değil ve $S_1 \neq S_2$ ise bu durumda

$$k = \{X | X \in x_1, \text{ öyle ki } x_2 = \pi(x_1)\} \quad (2.40)$$

kümesine *Küre Kesiti Noktası* denir (Gfrerrer, 2000).



Şekil 2.18. İki nokta ve perspektifliklerle belirlenebilen düzlemsel koni kesiti

Hatırlatma:

Elementer Geometriden bilinen odak nokta tanımına istinaden tüm küme kesitlerinin kümesi K_E ve projektif tanıma göre tüm küre kesiti noktalarının cümlesi K_P ise;

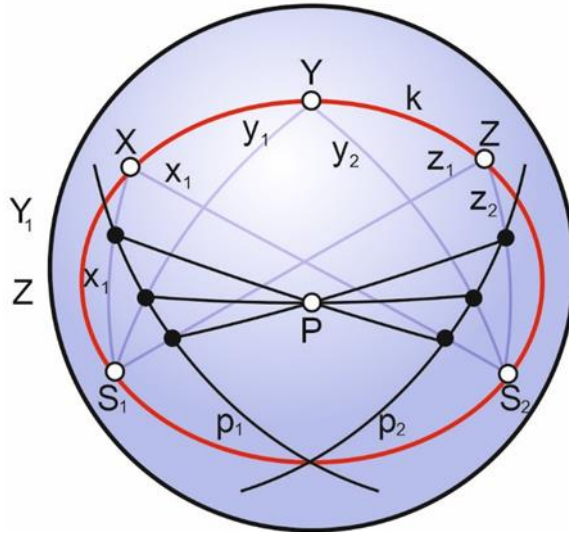
$$K_E = K_P \quad (2.41)$$

dir.

Teorem 2.6: Herhangi üçü doğrusal olmayan beş farklı noktadan bir tek küre kesiti noktası geçer.

Düzlemdeki küre kesit noktasına karşılık olarak küresel koni kesitleri üzerinde aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 2.7: $\pi : S_1(x_1) \bar{\wedge} S_2(x_2)$ küresel projektifliği verilmiş olsun. π Perspektiflik değil ve $S_1 \neq S_2$ ise bu durumda $k = \{X | X I \hat{x}_1, \text{ öyle ki } \hat{x}_2 = \pi(\hat{x}_1)\}$ kümesine “Küresel Koni Kesit Noktası” denir.



Şekil 2.19. İki nokta ve perspektifliklerle belirlenebilen küresel koni kesiti

Teorem 2.27: Herhangi 3'ü doğrusal olmayan 5 noktadan bir tek küresel koni geçer.

Hatırlatma:

1. Bir düzlemsel koni kesiti t_A tanjantı ve bu tanjantın doğru noktası A ile belirli (A, t_A) “Doğru Ekseni” ile belirli iken küresel koni kesitinde de \hat{t}_A büyük çemberi ve değme noktası A ile belirli (A, \hat{t}_A) doğru elemanı ifade edilebilir.
2. Gösterdik ki farklı 5 noktadan bir tek koni kesit noktası elde edilir. Düzlemsel ve küresel koni kesitleri de

- 3 nokta ve 1 doğru elemanları
- 1 nokta ve 2 doğru elemanları

tarafından tek olarak belirlenebilir.

2.5.4. Pascal teoremi

Şimdi Öklid düzleminde Pascal teoremini verelim.

Teorem 2.8 (Pascal Teoremi): $1 \dots 6$ noktaları bir koni kesiti noktalarının seçilmiş 6 noktası olsun.

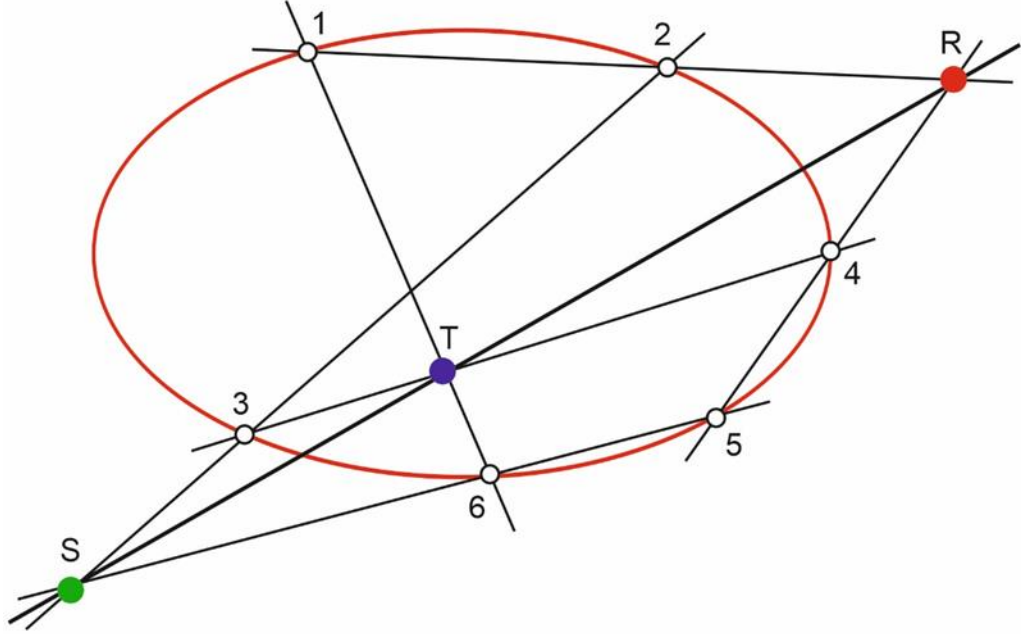
$$\overline{12} \cap \overline{45} = R$$

$$\overline{23} \cap \overline{56} = S$$

$$\overline{34} \cap \overline{61} = T$$

(2.42)

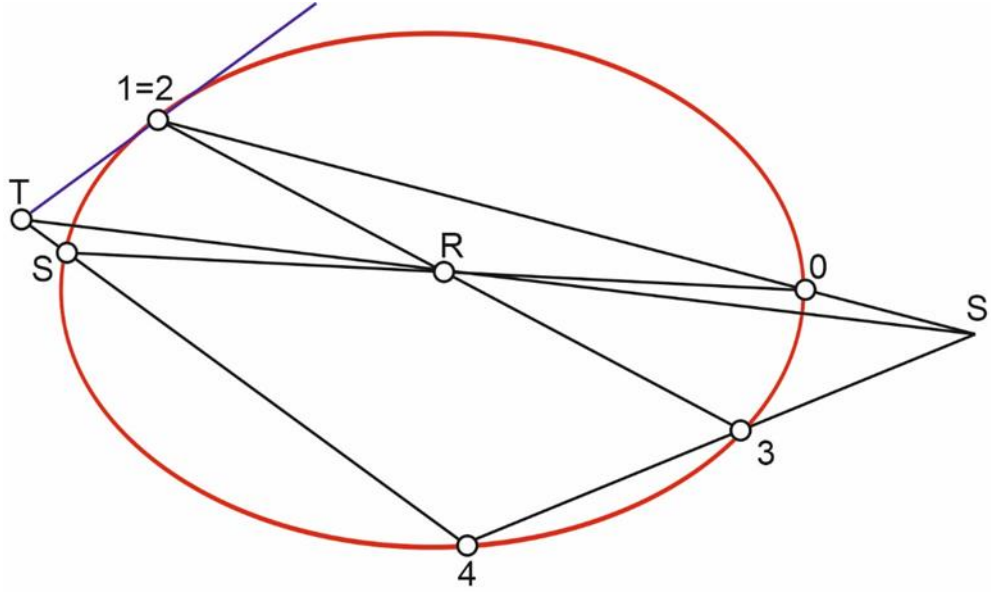
ise R, S ve T doğrusaldır.



Şekil 2.20. Düzlemsel Pascal Teoremi 1

Hatırlatma:

1. Pascal Teoremi aşağıdaki şartlarda da geçerlidir. Eğer,
 - İki nokta mesela 1 ve 2 noktası çakışık olursa ve 1 ve 2 noktasını birleştiren doğruların yerine $1 = 2$ deki koni kesitinin tanjantı alınırsa



Şekil 2.21. Düzlemsel Pascal Teoremi 2

- (1,2) ve (3,4) sıralı ikililer çakışır ve aynı şekilde bu iki noktayı birleştiren doğrunun yerine yukarıda bahsedilen tanjantı alınır,
- (1,2), (3,4) ve (5,6) sıralı ikilileri çakışık ise öyle ki bunları birleştiren doğruların yerine yukarıda bahsedilen doğruların tanjantları alınır

2. Eğer R , S ve T noktaları teorem 2.8'deki gibi doğrusalsa $1 \dots 6$ noktalar sırası koni kesit noktaları üzerindedir.

Küre Üzerinde Pascal Teoremi

Teorem 2.9: Bir küresel koni kesitinin herhangi noktaları $1 \dots 6$ olsun.

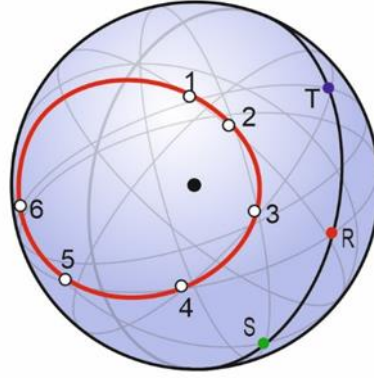
$$\overline{12} \cap \overline{45} = R \text{ ve } R_1$$

$$\overline{23} \cap \overline{56} = S \text{ ve } S_1$$

$$\overline{34} \cap \overline{61} = T \text{ ve } T_1$$

(2.43)

ise R , S , T ve R_1 , S_1 , T_1 aynı büyük çember üzerindedirler.



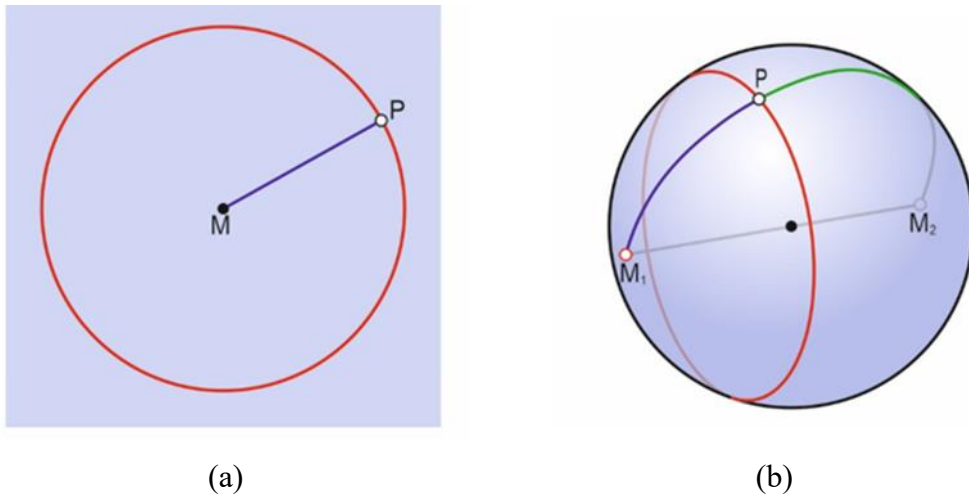
Şekil 2.22. Küre üzerinde Pascal Teoremi

İspat: Gnomonik projeksiyonu Pascal Teoremi' nin küresel versiyonunu düzlem versiyonuna dönüştürür. (R, R_1) , (S, S_1) ve (T, T_1) nokta çiftlerinin her biri kürenin merkez noktasına göre simetriktir ve böylece bu altı nokta aynı büyük çember üzerinde bulunur.

2.6. Çember

Tanım 2.6.1: Bir düzlemde sabit bir M merkez noktasından eşit uzaklıktaki tüm P noktalarının kümesine çember denir.

Hatırlatma: Bir küre üzerindeki her çember M_1 ve M_2 şeklinde iki merkez noktası ihtiva eder. Öyle ki $\alpha = |\widehat{M_1P}|$ ve $180 - \alpha = |\widehat{M_2P}|$ dir.

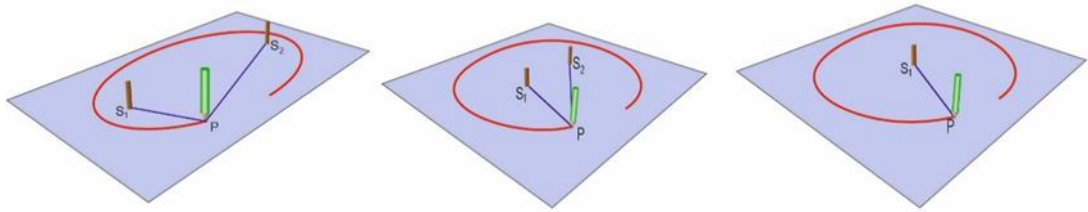


Şekil 2.23. (a) Düzlemde ve (b) küre üzerinde çember

Bölüm 2.1’de elipsin odak noktası tanımıyla ifade ettik özel olarak tanım 2.1 ilave edilerek:

$$S_1 = S_2 = M :=> \overline{S_1P} + \overline{S_2P} = 2 \cdot \overline{MP} = 2 \cdot \alpha => \overline{MP} = \alpha \quad (2.44)$$

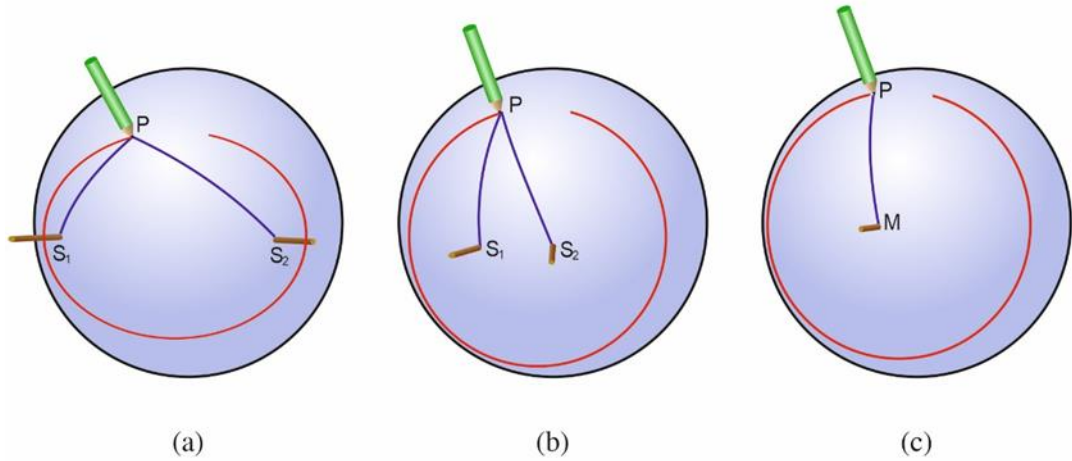
Böylece tüm P noktalarının sabit M noktasına uzaklığı *sabit* $= \alpha$ ve 2.6.1 tanımıyla bir çember elde edilir.



Şekil 2.24. (a) (b) (c) Düzlemde elips örnekleri

Benzer şekilde küresel elips için:

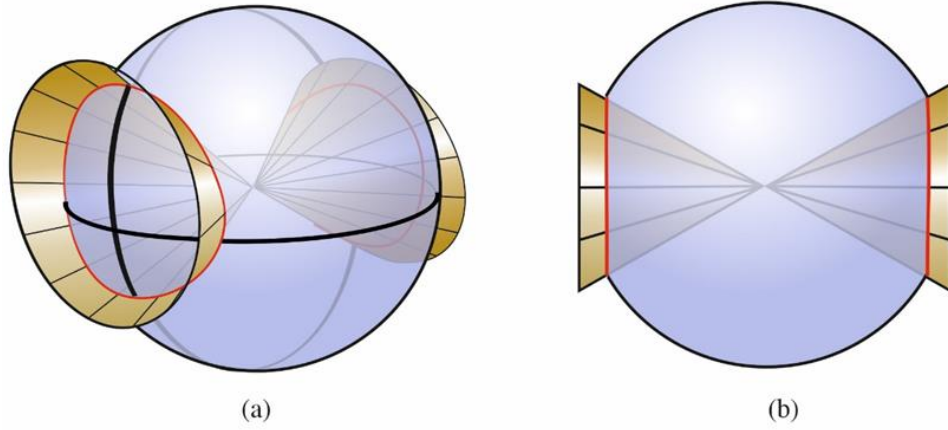
Tanım 2.6.1’e göre $S_1 = S_2 = M$ ve $\widehat{MP} = \alpha$ olmak üzere bir çember elde edilir.



Şekil 2.25. (a), (b), (c) Küresel elips örnekleri

Sonuç:

- a) Bölüm 2.4'te küresel elipsi $py^2 + qz^2 + x^2 = 0$ quadratik konilerin kesişim eğrileri olarak tanımlanmış, Teorem 2.3 ile de $\alpha \neq \beta$ olmak üzere bu kesişim eğrisinin bir küresel elips olduğunu göstermiştik.
- b) Koni denklemlerinin katsayıları p ve q için eğer $p = q$ ise bu durumda α ve β açıları eşittir ve quadratik koni aynı zamanda bir dönele konidir. Kesişim eğrisi olarak da bir çember elde edilir.



Şekil 2.26. Sonuç a ve b küresel elipsleri

BÖLÜM 3. UYGULAMA ÖRNEKLERİ

3.1. Sinyal Navigasyonu

Bu bölümde, çemberde çevre açısı teoreminin küre yüzeyi üzerindeki bilinen en önemli kullanım alanlarından biri olan Omega Navigasyon Sistemi tanıtılacak ve geometrik tasarımları ile açıklanacaktır.

Radyo sinyalleriyle konum belirlemede kullanılan yöntemlerin tümü sinyal navigasyonu olarak adlandırılır. Sinyal Navigasyonu, sabit gönderi istasyonlarından gönderilen sinyallerle alıcının konumunu belirleme temeline dayanır. Bu çalışmada hiperbol yöntemi ve dolayısıyla bunun sonucu olan Omega Navigasyon Sistemi'nden bahsedeceğiz (H. Bigalke, 1984).

3.1.1. Hiperbol yöntemi

Hiperbol yönteminde en az üç farklı istasyondan aynı anda sinyal gönderilir. Bu sinyallerin alıcıya ulaşma zamanına bakılır. Sinyallerin alıcıya geliş anına göre alıcı gönderici istasyonuna pozisyonu belirletir. Böylece, sinyal gönderen istasyonun pozisyonu belirli olduğu için alıcının coğrafi pozisyonunun da hesaplanmasına yardımcı olur. Dolayısıyla hiperbol yöntemi yön belirleme yönteminden ziyade, uzaklık belirleme yöntemi temeline dayanır.

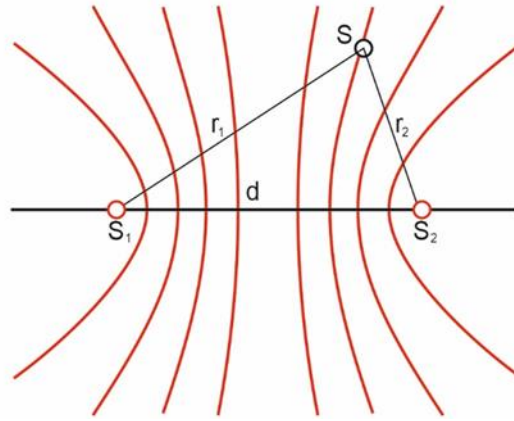
İki farklı sinyal gönderim istasyonunda gönderilen sinyallerin belirlediği bir hiperbol üzerinde tasarlanabilen alıcı pozisyonu için en az üç istasyona ihtiyaç vardır.

Bahsettiğimiz bu hiperbol yöntemi Loran-C, Decca ve Omega Navigasyon sistemlerinde kullanılır.

Omega Navigasyon Sistemi

Omega özel bir isimdir ve navigasyon sistemlerinin temellerindedir. Bu sistem ilk olarak 1968'de Amerika'da askeri amaçla kullanılmak için ortaya çıkmıştır.

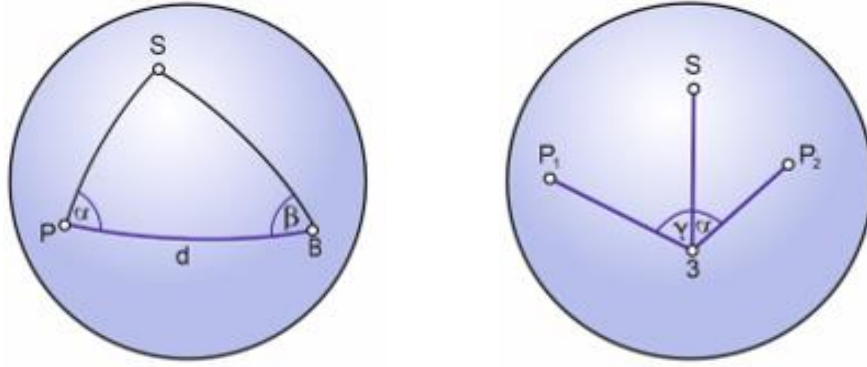
Günümüzde kullanılan uydu tabanlı GPS teknolojisine kadar, Omega Navigasyon Sistemi tüm dünyada yaygın olarak kullanılmıştır.



Şekil 3.1. Omega Navigasyon Sistemi geometrik tasarımı

Matematiksel olarak Omega Navigasyon sistemini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

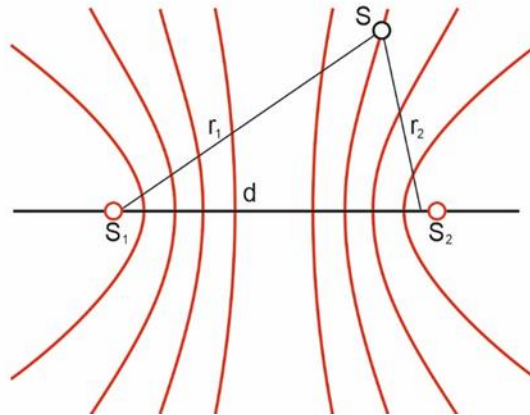
Kürenin büyük çemberleri gibi düşünülebilecek, S_1 ve S_2 sinyal göndericilerinden aynı frekansta ve aynı dalga boyunda elektromanyetik dalgalar yayılır. Bu dalgaların hareketi belirli noktalarda kesişir. Dünya küresi üzerindeki S_1 ve S_2 uzaklığının sabit olduğu tüm noktalarda dalga boyu farkları, gelen dalgalar aracılığıyla gözlenir. Bu noktalar Tanım 2.3'te verdiğimiz küresel hiperbolün odak noktalarıdır. Şekil 3.2. bu noktaların küresel bir tasarımı olarak verilmiştir.



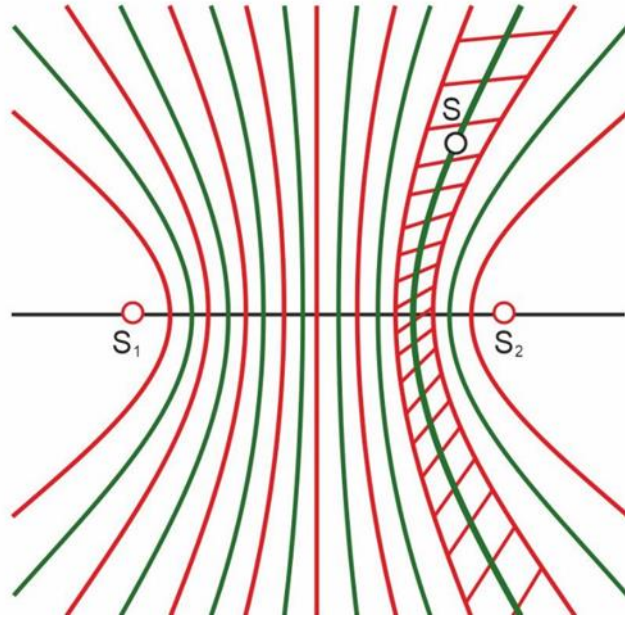
Şekil 3.2. Omega Navigasyonu için küresel hiperbolün odak noktaları

Dalga boyu farkı sıfır her yerde sabitlenip S_1 ve S_2 'den uzaklıkları $|r_1 - r_2| = n \cdot \lambda$ öyle ki $r_1 = |\widehat{S_1S}|$, $r_2 = |\widehat{S_2S}|$ dalga boyu ve $n = 0,1,2,3 \dots$ olmak üzere $n \neq 0$ için iki simetri hiperbol çizgileri vardır. Aradığımız yer bu çizgiler üzerindedir. $n = 0$ için aradığımız yer S_1 ve S_2 'nin tam orta noktalarından geçen dikme üzerindedir. Bunun dışındaki durumlar için $(0, 2\pi)$ değerler arasındaki aradığımız yer yine hiperbol çizgileri üzerindedir. Öyle ki bu hiperbol çizgileri arasındaki dalgaların ulaşım zamanı aynıdır. Aksi takdirde $\widehat{S_1S}$ tabanlı sinyal ulaşma zaman farkı λ dalgaboyunun hiperbol kolları arasındaki uzaklığa bağlıdır. Örneğin birbirine yakın hiperbol kolları arasındaki uzaklığı $d = \frac{\lambda}{2}$ alalım. S_1 ve S_2 arasındaki uzaklığı da $\lambda = 2d$ ' dir.

Omega Navigasyon yönteminde yayın frekansı (10,4 kHz) çok düşük ve dalga boyu ($\lambda = 29,4 \text{ km}$) çok yüksek olduğu için hiperbol kollarının arasındaki ulaşımın zaman farkı $\frac{\lambda}{2} = 15 \text{ km}$ ' dir.

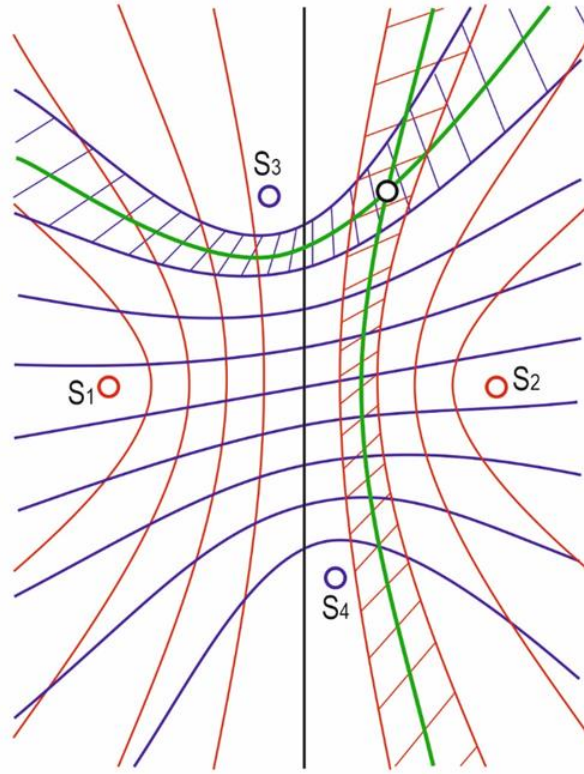


Şekil 3.3. S_1 ve S_2 den gönderilen sinyallerle konum belirleme



Şekil 3.4. S den gönderilen sinyallerle konum belirleme

Tersine herhangi bir S yeri verildiğinde S_1 ve S_2 gönderi istasyonunun yerini bulmaya çalışalım. Bunun için ilgili hiperbol kolu belli olmadığından karar verebilmek için; daha fazla ölçümler ve bilgilere ulaşmak gerekir. Örneğin, belli bir noktada bulunan geminin o anki konumunun ulaşım zamanı farkı sıfır alıp başlangıç noktası olarak kabul edelim. Bir harita üzerinde Omega Navigasyonu yayın istasyonlarının oluşturduğu dalgalar ve hiperbol kolları Şekil 3.3.'deki gibi tasarlanabilir. Eğer S_3 ve S_4 ün gönderim istasyonu olduğunu kabul edersek, bir düzlemde çakışan iki farklı hiperbol dalgası oluşur. Böylece S , S_1S_2 ve S_3S_4 ikililerinin oluşturduğu hiperbol çizgilerinin kesiştiği noktalardan herhangi birindedir (Şekil 3.5.).



Şekil 3.5. S_1S_2 ve S_3S_4 ikililerinin oluşturduğu hiperbol çizgileriyle konum belirleme

Herhangi bir konumu belirleyebilmek için Omega Navigasyon sisteminden bahsedilen sinyal gönderi istasyonları dünya üzerinde

- | | |
|---------------------------|---------------|
| 1. Omega - Norveç | (13°E; 66°N) |
| 2. Omega - Liberya | (11°W; 6°N) |
| 3. Omega – Havai | (156°W; 21°N) |
| 4. Omega - Kuzey Dakota | (98°W; 46°N) |
| 5. Omega – Runion, Fransa | (55°E; 21°S) |
| 6. Omega - Arjantin | (65°W; 43°S) |
| 7. Omega - Avustralya | (147°E; 38°S) |
| 8. Omega – Japonya | (129°E; 35°N) |

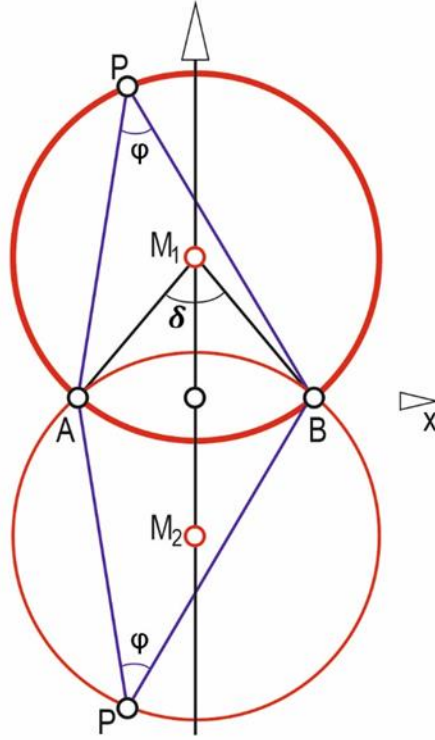
olmak üzere sekiz farklı yerde konumlandırılmıştır.

3.2. Küresel Çevre Açılı Teoremi

3.2.1. Düzlemsel çevre açılı teoremi

$A \neq B$ olmak üzere A ve B sabit noktaları ve φ açısı verilmiş olsun. $\widehat{APB} = \varphi = \text{sabit}$ olacak şekildeki tüm P noktalarını bulalım. Bunun için,

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ koordinat sistemini de x -ekseni \overline{AB} üzerinde olacak şekilde seçelim.



Şekil 3.6. $A \neq B$ olmak üzere A ve B sabit noktaları ve φ açısı ile çevre açılı oluşturma

\vec{u} ve \vec{v} iki vektör olmak üzere

$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ kuralı ve Şekil 3.6.'dan P noktası için

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = \cos(\varphi) \cdot |\vec{p} - \vec{a}| \cdot |\vec{p} - \vec{b}| = \cos(\varphi) \sqrt{(\vec{p} - \vec{a})^2 (\vec{p} - \vec{b})^2}. \quad (3.1)$$

eşitliği yeterlidir. Her iki tarafın karesi alınarak

$$[(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b})]^2 = \cos^2(\varphi) \cdot (\vec{p} - \vec{a})^2 (\vec{p} - \vec{b})^2 \quad (3.2)$$

elde edilir.

$$0 < \varphi < \pi \quad (3.3)$$

kabul edelim ve \vec{u} ve \vec{v} iki vektör olmak üzere

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

kartezyen çarpımı

$$\begin{aligned} \vec{q} &= (\vec{u} \times \vec{v}) \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Olduğundan

$$[(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b})]^2 = \cos^2(\varphi) \cdot \left[[(\vec{p} - \vec{a}) \times (\vec{p} - \vec{b})]^2 + [(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b})]^2 \right] \quad (3.6)$$

ve

$$[(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b})]^2 (1 - \cos^2(\varphi)) = \cos^2(\varphi) [(\vec{p} - \vec{a}) \times (\vec{p} - \vec{b})]^2 \quad (3.7)$$

sonuç olarak

$$[(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b})] \sin(\varphi) = \pm \cos(\varphi) [(\vec{p} - \vec{a}) \times (\vec{p} - \vec{b})] \quad (3.8)$$

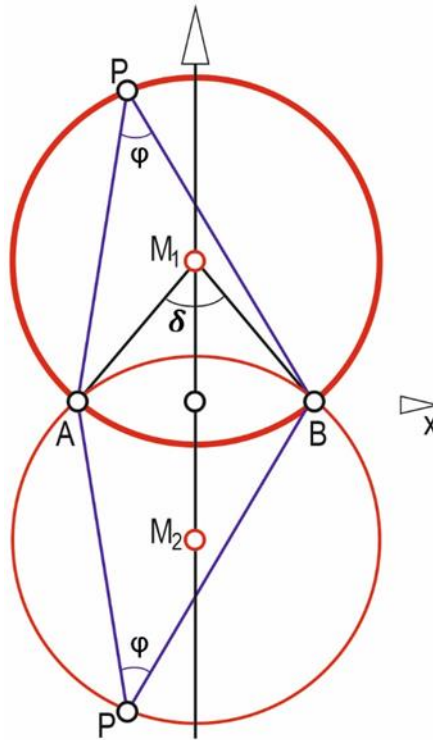
elde edilir.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} x+e \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{p} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} x-e \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

seçilerek (3.8) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} (x^2 - e^2 + y^2) \sin(\varphi) &= \pm y(x + e - x + e) \cos(\varphi) = \pm 2ey \cos(\varphi), \\ x^2 + y^2 \mp 2ey \cot(\varphi) &= e^2, \\ x^2 + (y \mp e \cot(\varphi))^2 &= e^2 + e^2 \cot^2(\varphi) \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir ki bu $M_1(0, e, \cot(\varphi))$ ve $M_2(0, -e, \cot(\varphi))$ merkezli iki çemberin denklemdir (H Stachel, 1998).



Şekil 3.7. $M_1(0, e, \cot(\varphi))$ ve $M_2(0, -e, \cot(\varphi))$ merkezli çemberler

Not: $A \neq B$ ve A, B noktaları verilmiş olsun. $\widehat{APB} = \varphi = \text{sabit}$ ile oluşan tüm P noktalarının kümesine φ açısının İzotopik Eğrisi denir. Ayrıca,

$$\delta = \widehat{AM_1B} \text{ için;}$$

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{e}{\cot(\varphi)} = \frac{1}{\cot(\varphi)} = \tan(\varphi), \quad \frac{\delta}{2} = \varphi \quad (3.11)$$

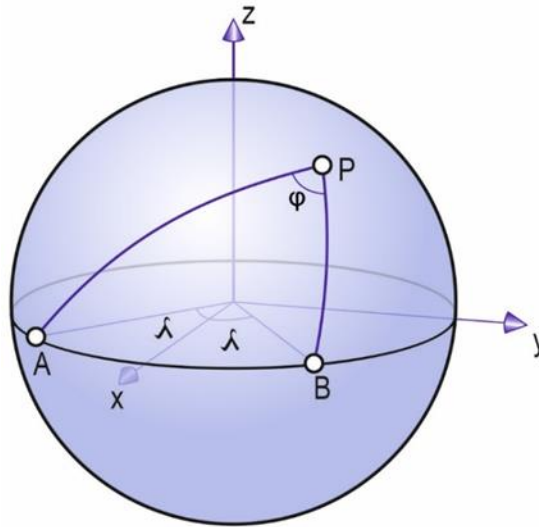
$\varphi = 90^\circ$ ise $M_1 = M_2 = M(0,0)$ dır. Böylece \overline{AB} çemberin çapı olur. Dolayısıyla; çapı gören çevre açısı 90° dir (Thales Teoremi).

3.2.2. Küresel çevre açısı

O merkezli bir küre üzerindeki sabit A, B noktaları ve φ açısı verilmiş olsun. $\widehat{APB} = \varphi = \text{sabit}$ olacak şekilde küre üzerindeki tüm P noktalarını bulalım. Ayrıca, ekvator üzerinde,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{p} = \overrightarrow{OP} \quad (3.12)$$

olsun (Şekil 3.8.).



Şekil 3.8. Küresel çevre açısı

\vec{p} ve \vec{a} vektörleri tarafından gerilen düzlem sabit φ açısı, \vec{p} ve \vec{b} vektörleriyle oluşan düzlem ile çakıştırılırsa \vec{u} ve \vec{v} iki vektör olmak üzere;

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \text{ kuralından } \{\vec{p}, \vec{a}\} \text{ ve } \{\vec{p}, \vec{b}\} \text{ nin lineer bağımsızlık şartı gereği;}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b}) &= \cos(\varphi) \cdot |\vec{p} \times \vec{a}| \cdot |\vec{p} \times \vec{b}| \\
&= \cos(\varphi) \sqrt{(\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{a})^2}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

yazılabilir. Her iki tarafın karesi alınarak;

$$[(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b})]^2 = \cos^2(\varphi) \cdot (\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{a})^2 \tag{3.14}$$

elde edilir. \vec{u} ve \vec{v} iki vektör olmak üzere;

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

kartezyen çarpımı;

$$\begin{aligned}
\vec{q} &= (\vec{u} \times \vec{v}) \\
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

olduğundan

$$(\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{a})^2 = [(\vec{p} \times \vec{a}) \times (\vec{p} \times \vec{b})]^2 + [(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b})]^2 \tag{3.17}$$

ve ayrıca bu;

$$[(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b})]^2 (1 - \cos^2(\varphi)) = \cos^2(\varphi) [(\vec{p} \times \vec{a}) \times (\vec{p} \times \vec{b})]^2 \tag{3.18}$$

\vec{u} ve \vec{v} iki vektör olmak üzere;

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

kartezyen çarpımı;

$$\begin{aligned}\vec{q} &= (\vec{u} \times \vec{v}) \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2\end{aligned}\quad (3.20)$$

olduğundan ve;

$$(\vec{r} \times \vec{s}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{s} \det(\vec{r} \vec{u} \vec{v}) - \vec{r} \det(\vec{s} \vec{u} \vec{v}) \quad (3.21)$$

gereği;

$$[(\vec{p} \cdot \vec{p}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{p} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{p} \cdot \vec{b})]^2 = \cot^2 \varphi [\vec{a} \det(\vec{p} \vec{p} \vec{b}) - \vec{p} \det(\vec{a} \vec{r} \vec{b})]^2 \quad (3.22)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$[(\vec{p} \cdot \vec{p}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{p} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{p} \cdot \vec{b})]^2 = \cot^2 \varphi (\vec{p} \cdot \vec{p}) [\det(\vec{a} \vec{b} \vec{p})]^2 \quad (3.23)$$

bulunur ve koordinatları

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ -\sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

şeklinde seçersek

$$\begin{aligned} & [(x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2(\lambda) \\ & \quad - \sin^2(\lambda)) \\ & \quad - (x \cos(\lambda) - y \sin(\lambda))(x \cos(\lambda) + y \sin(\lambda))]^2 \\ & = \cot^2(\varphi) (x^2 + y^2 + z^2)(2z \sin(\lambda) \cos(\lambda))^2\end{aligned}\quad (3.25)$$

ve devam edersek

$$\begin{aligned} \phi : [-x^2 \sin^2(\lambda) + y^2 \cos^2(\lambda) + z^2 (\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda))]^2 \\ -(2z \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cot(\varphi))^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir.

Böylece, bu eğriyi kürenin merkezinden yansıtılırsa,

$$\text{i) } \cot(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (3.27)$$

için

$$-x^2 \sin^2(\lambda) + y^2 \cos^2(\lambda) + z^2 (\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)) = 0 \quad (3.28)$$

eşitliği ile bir kuadratik küre kesiti,

$$\text{ii) } \cot(\varphi) \neq 0 \Rightarrow 4. \text{ dereceden bir küre kesiti elde edilir.} \quad (3.29)$$

3.3. Ivory Teoremi

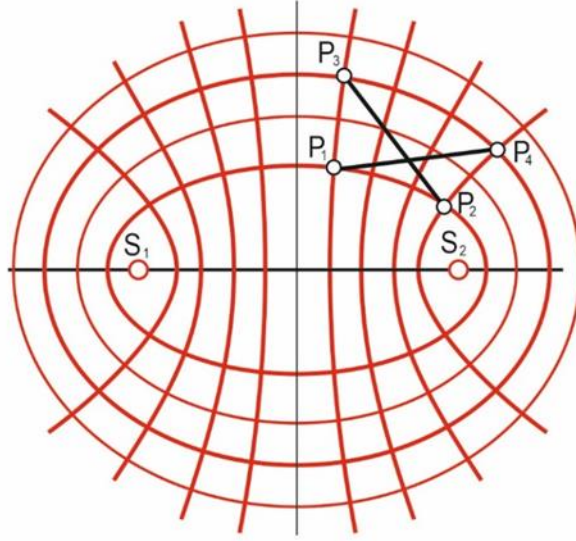
3.3.1. Düzlemde Ivory teoremi

Tanım 3.1: Aynı odak noktaları ile belirli (elips ve hiperbol) küre kesitleri *konfokal* olarak adlandırılır.

Notlar:

1. Merkez noktalı küme kesitlerinin iki odak noktaları vardır. (Çember hariç)
2. Bir elips (hiperbol) bir konfokal hiperbolü (elipsi) dik keser.

Teorem 3.1 (Ivory Teoremi): Konfokal küre kesitlerinin oluşturduğu ağdaki her dörtgen, iki eşit uzunlukta köşegenlere sahiptir (Şekil 3.9.).



Şekil 3.9. Küre kesitlerinin oluşturduğu bir ağ örneği

Örnek olarak Şekil 3.2.'deki P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarından oluşan dikdörtgeni seçelim. O halde, Ivory Teoremine göre

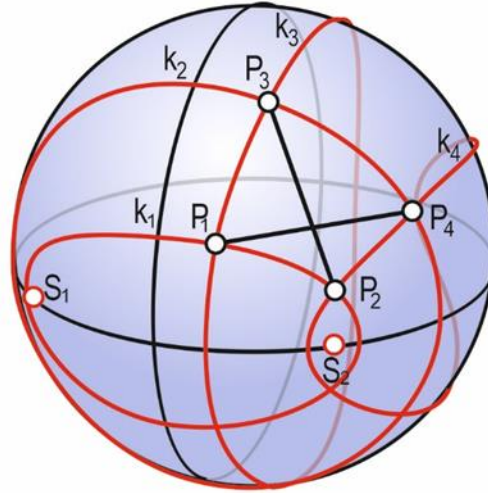
$$|\overline{P_1P_4}| = |\overline{P_2P_3}| \quad (3.30)$$

dir (Hellmuth Stachel & Wallner, 2004).

3.3.2. Küre üzerinde Ivory teoremi

Bu kısımda Ivory Teoreminin küre yüzeyi üzerindeki durumu araştırılacaktır.

k_1, k_2, k, k_4 , 4 ana eksenli, uzunlukları sırasıyla $a_1 = 40$, $a_2 = 60$, $a_3 = 10$, $a_4 = 30$ ve odak noktaları koordinatları $S_1(-35/0)$ ve $S_2(35/0)$ olan 4 konfokal küre kesiti olsun.



Şekil 3.10. Konfokal küre kesiti

Şekil 3.10.'daki küresel uzaklıklar

$$d_1 = |\widehat{P_1P_4}| \text{ ve } d_2 = |\widehat{P_2P_3}| \quad (3.31)$$

için $d_1 = d_2$ olup olmadığını inceleyelim:

1. Teorem 2.2'den $e < a_1 < a_2$ olduğundan, k_1 ve k_2 bir küresel elips; $e < a_4 < a_3$ olduğundan k_3 ve k_4 de birer hiperboller. Böylece $P_1P_2P_3P_4$ eğrisi oluşur.
2. Şimdi P_1 'in küresel koordinatlarını elde etmeye çalışalım. P_1 , k_1 küresel elipsi ile k_3 küresel hiperbolünün kesişimidir. (2.4) deki k_1 fonksiyon denklemi,

$$\cos^2(\varphi) = \frac{p^2 \cdot q^2}{q^2 + (p^2 - q^2) \cdot \cos^2(\lambda)} \quad (3.32)$$

için ;

$$p = \frac{\sin(a_1)}{\sin(e)}, \quad q = \frac{\cos(a_1)}{\cos(e)}, \quad e = 35 \text{ ve } a_1 = 40 \quad (3.33)$$

değerlerini yerine yazarsak;

$$i: \cos^2(\varphi) = \frac{\left(\frac{\sin(40)}{\sin(35)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\cos(40)}{\cos(35)}\right)^2}{\left(\frac{\cos(40)}{\cos(35)}\right)^2 + \left(\left(\frac{\sin(40)}{\sin(35)}\right)^2 - \left(\frac{\cos(40)}{\cos(35)}\right)^2\right) \cdot \cos^2(\lambda)} \quad (3.34)$$

elde edilir.

Aynı işlemler k_3 için yapalım,

k_3 için $a_3 = 10$ olup;

$$ii: \cos^2(\varphi) = \frac{\left(\frac{\sin(10)}{\sin(35)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\cos(10)}{\cos(35)}\right)^2}{\left(\frac{\cos(10)}{\cos(35)}\right)^2 + \left(\left(\frac{\sin(10)}{\sin(35)}\right)^2 - \left(\frac{\cos(10)}{\cos(35)}\right)^2\right) \cdot \cos^2(\lambda)} \quad (3.35)$$

elde edilir.

i ve ii ' den, λ değerleri için:

$$\lambda_1 = -11.9, \quad \lambda_2 = 11.9, \quad \lambda_3 = 180 - 11.9, \quad \lambda_4 = 180 + 11.9 \quad (3.36)$$

bulunur. P_1 noktası için λ_2 'yi seçelim. (Şekil 3.9.'a bakınız) Seçilen λ_2 değeri için φ ,

$$\varphi_1 = 19.7, \quad \varphi_2 = -19.7$$

elde edilir. Böylece P_1 küresel koordinatları için;

$$P_1(\lambda/\varphi) = (11.9/19.7)$$

bulunur.

3. Aynı şekilde P_2, P_3, P_4 noktalarının koordinatları 2 deki gibi hesaplanarak

$$P_2(34.7/10.0), \quad P_3(23.6/49.0), \quad P_4(55.0/22.8) \quad (3.37)$$

olarak bulunur.

4. P_1 'in P_4 'e d_1 küresel uzaklığını 1.3 teoremine göre hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \cos(d_1) = & \cos(90 - 19.7) \cdot \cos(90 - 22.8) + \sin(90 - 19.7) \cdot \sin(90 \\ & - 22.8) \cos(55.0 - 11.9) \end{aligned} \quad (3.38)$$

için

$$d_1 = 40.1$$

P_2 'nin P_3 'e d_1 küresel uzaklığı ise;

$$\begin{aligned} \cos(d_2) = & \cos(90 - 10.0) \cdot \cos(90 - 49.0) + \sin(90 - 10.0) \cdot \sin(90 \\ & - 49.0) \cos(34.7 - 23.6) \end{aligned} \quad (3.39)$$

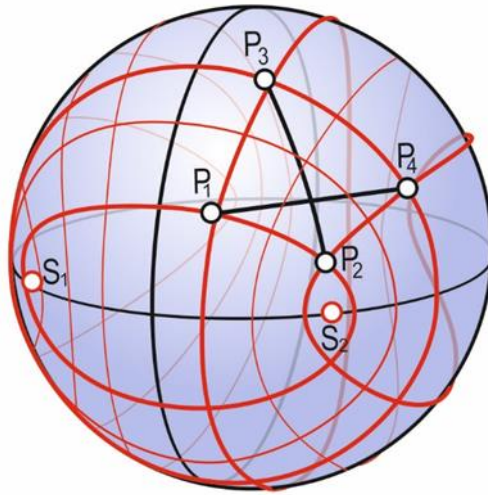
$$d_2 = 40.1 = d_1$$

bulunmuş olur. Böylece d_1 ve d_2 küresel uzaklıkları özel seçilmiş $k_1 \dots k_4$ koni kesitleri için aynı olduğunu göstermiş olduk.

Sonuç olarak Ivory Teoreminin dörtgen ağlarıyla örülen konfokal koni kesitleri için küresel versiyonu da geçerli olduğu aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 3.2 (Küresel Ivory Teoremi)

Konfokal küresel koni kesitlerinin oluşturduğu dörtgen ağlarının köşegen uzunlukları birbirine eşittir (Şekil 3.11.).



Şekil 3.11. Konfokal küresel koni kesitlerinin oluşturduğu dörtgen ağları

Bu teorem, sadece küre yüzeyinde değil hiperbolik uzaylarda ve daha genel olarak sabit eğriliği olan tüm uzaylarda geçerlidir.

BÖLÜM 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yaşadığımız yerküre düzlem geometrisi ile küre yüzeyi üzerindeki ilişkiler bağlamında bizlere küre geometrisinin uygulamaları anlamında Projektif tasarımlar, dönüşümler ve izdüşümler ile benzerliğini ve matematiğin teorideki kavramlarının pratiğe nasıl dönüştürülebileceğini gösterir. Buna en uygun örnek olarak, bu çalışmada verilen küre yüzeyi üzerindeki temel teoremler, günümüzdeki Navigasyon sistemlerinin çalışma prensipleri matematiksel işlemler geometrik tasarımlarla görselleştirilerek verilmeye çalışılmıştır. Hayatın matematik ile olan birebir ilişkisine dair, konfokaller yardımıyla lazer ile insan vücudu taramalarındaki görüntü hassasiyetlerinde kullanılan bir teknoloji olarak da düşünülebilir. Sonuç olarak, hiperbolik dalgaların frekans yoğunlukları ile taramaların daha detaylı sonuçlar vereceği aşikârdır.

Bu anlamda, çalışma yeni Navigasyon sistemlerinin geometrik tasarımları başta olmak üzere, sadece pozisyon bulma yöntemi olarak değil, insan sağlığında vücudun lazer taramalarındaki teorileri anlamında da geliştirilebilir.

KAYNAKÇA

Bigalke, H.-G. (1984). Kugelgeometrie: Salle.

Bigalke, H. (1984). Funktortung nach dem Omega System- Spharische Kegelschnitte. MU-DER Mathematikunterricht, 3, 48-57.

Gfrerrer, A. (2000). Übunge zur Projektive Geometrie. Tu Graz.

Glaeser, G., & Stachel, H. (1999). Solids. In Open Geometry: OpenGL®+ Advanced Geometry (pp. 179-192): Springer.

Kollars, K., & Müllner, R. (1990). Darstellende Geometrie 1 für Bautechnik u. Maschinenbau. In: hpt Verlag, Wien.

Lang, J. (1998). Vorlesungen ZUr Projektive Geometrie Tu Graz.

Rixecker, H. (1984). Moderne Trigonometrie. MU-Der Mathematikunterricht, 3, 6-19.

Schupp, H. (1988). Kegelschnitte: BI-Wiss.-Verlag.

Stachel, H. (1998). Der Spharische Peripheriewinkelsatz: Tu Wien

Stachel, H., & Wallner, J. (2004). Ivory's theorem in hyperbolic spaces. Siberian Mathematical Journal, 45(4), 785-794.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Pınar KOÇ

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	2021
Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen - Edebiyat Fakültesi / Matematik Bölümü	2012
Lise	Zehra Akkoç Kız Lisesi	2007

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer	Görev
2018-Halen	Sakarya Gençlik ve Spor İl Müdürlüğü	Memur

YABANCI DİL

İngilizce