T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# PADE YAKLAŞIMLARI

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Özlem KIRAT**

**Enstitü Anabilim Dalı** : **MATEMATİK**

**Enstitü Bilim Dalı** : **UYGULAMALI MATEMATİK**

**Tez Danışmanı** : **Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL**

**Ocak 2020**

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# PADE YAKLAŞIMLARI

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Özlem KIRAT**

**Enstitü Anabilim Dalı** : **MATEMATİK**

**Enstitü Bilim Dalı** : **UYGULAMALI MATEMATİK**

**Bu tez ...../...../2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.**

| | | |
|---|---|---|
| Prof.Dr.<br>Ö. Faruk GÖZÜKIZIL<br>Jüri Başkanı | Prof.Dr.<br>İsmet YILDIZ<br>Üye | Prof.Dr.<br>Şevket GÜR<br>Üye |

**BEYAN**

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Özlem KIRAT

30.11.2019

**TEŞEKKÜR**

Yükseklisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle kendisinden birçok şey öğrendiğim ve tez çalışmamın planlanması, araştırılması ve yürütülmesinde tezimi okuyup gerekli düzeltmeleri yapmam için değerli bilgi, tecrübe ve zamanını sabırla esirgemeyip, kendisine ne zaman danışsam bana her fırsatta yardımcı olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a teşekkürü bir borç bilirim. Son olarak bugünlere gelmemde büyük emek sahibi olan aileme şükranlarımı sunarım.

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ | : Pade rasyonel serisi |
| $\xi_x$ | : Hata teriminin $x_0 \le \xi_x \le x$ aralığındaki kesilen noktası |
| $O(x^n)$ | : $n.$ terim ve sonrasının ihmal edilmesi, kalan terimler |
| $\phi$ | : Kutsal oran, altın oran |
| $L_{n,k}$ | : Lagrange polinomunu oluşturan rasyonel polinom |
| $R_n(x)$ | : Payı $P_n(x)$, paydası $Q_n(x)$ olan rasyonel Pade polinomu |
| $[m/n]$ | : Payı m. derece, paydası n. derece olan Pade yaklaşımı |
| $\omega p$ | : Polinom ya da kuvvet serisinin en küçük üs derecesi |
| $\partial p$ | : Polinom ya da kuvvet serisinin en yüksek üs derecesi |
| $P_n(x)$ | : Taylor polinomu |
| $[m/n]_f$ | : Rasyonel fonksiyon |
| $[a_0, a_1, a_2 ...]$ | : Sonsuz sürekli kesir |
| $R_{n+1}(x)$ | : Taylor polinomunun kalan terimi veya hata terimi |

# ŞEKİLLER LİSTESİ

# TABLOLAR LİSTESİ

# ÖZET


Anahtar kelimeler: Pade yaklaşımı, İndisel Denklem, Adi ve Düzgün Tekil Nokta, Taylor açılım katsayıları

Pade yaklaşımı,

$$\left[m/n\right]_{f(x)}(x)=\frac{\sum_{i=0}^{m}a_i x^i}{1+\sum_{i=1}^{n}b_i x^i}$$

ifadesindeki gibi iki polinomun birbirine oranı olarak ifade edilir.

Pay ve paydadaki polinomun katsayıları

$$\left[m/n\right]=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}{1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}$$

$$\sum_{i=0}^{n}c_i x^i=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$$

şeklinde Taylor açılım katsayıları kullanılarak belirlenen bir kesir yaklaşımıdır. Pade yaklaşımı genellikle Taylor serisinin yakınsamadığı yerlerde işe yaramaya devam edebilir. Taylor serileri sınırlandırıldığında polinom $x\to\infty$ değeri için yakınsak olmamaktadır. Bunun için yaklaşımdaki polinomun derecelerine göre Lagrange fonksiyonu üzerinde uygulamalar yapılmıştır ve farklı polinom fonksiyonların Pade oluşumları incelenmiştir.

Pade yaklaşımı ile verilen diferansiyel denklemin mertebesine göre yaklaşılan serinin kuvvet açılımı hem sınırlanabilir hem de yakınsak hale getirilebilir. Bu durum adi ve tekil noktalarda seri açılımını bulurken daha çok kullanılır. Noktanın adi yada düzgün tekil nokta olması durumu incelenir. İndisel denklemden elde edilen $r_1$ ve $r_2$ köklerinin farklı kök yada katlı kök olma durumlarına göre diferansiyel denklemlerin Pade genel çözümleri incelenir.

# PADE APPROACHES


## SUMMARY



Keywords: Pade approximation, Indial Equation, Ordinary and Singular Point, Taylor expansion coefficients.



The Pade approximation is expressed as the ratio of two polynomials to each other as in

$$[m/n]_{f(x)}(x)=\frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{1+\sum_{i=1}^{n} b_i x^i}$$

In this study, some Pade applications in different polynomial types were investigated. The coefficients of the polynomial in the numerator and denominator are a fraction approach determined by using the Taylor expansion coefficients in the form of

$$[m/n]=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}{1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n \, .$$

The Pade approach can often continue to work where the Taylor series does not converge. Taylor series is not convergent for the $x \to \infty$ value of the polynomial when confined. For this purpose, applications on Lagrange function were made according to the degree of polynomial in the approach and Pade creation of different polynomial functions were examined.

The force expansion of the series approached according to the order of the differential equation given by Pade approach can be limited and convergent. This situation is more commonly used when finding series expansion in ordinary and singular points. Whether the point is a name or a regular singular point is examined. Pade general solutions of differential equations are examined according to the different root or folded root of the $r_1$ and $r_2$ roots obtained from the indices equation.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

Pade yaklaşımı iki fonksiyonun oranı ile oluşan rasyonel fonksiyon ile ifade edilir. Pay ve paydadaki polinom katsayıları Taylor açılımı katsayıları kullanılarak belirlenir. Pade yaklaşımından bahsetmeden önce sürekli kesirler ve rasyonel yaklaşımlardan bahsetmek uygun olacaktır.

## 1.1. Sonlu Sürekli Kesirlerde Rasyonel Yaklaşım

Rasyonel yaklaşımlarda önemli bir yeri olan ve bir çok aşkın(transandantal) sayıları oluşturmada kolaylık sağlayan sürekli kesirler vardır. Sürekli kesirler, bileşik kesirlerin genelleştirilmesi şeklinde düşünebilir. Örneğin $\frac{11}{8}$ bileşik kesri,

$$\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}=1+\frac{1}{\frac{8}{3}}=1+\frac{1}{2\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3/2}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu yazım biçimi her $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı için de geçerlidir. Yani $a_0,a_1,a_2,....,a_r$ pozitif tam sayılar olmak üzere $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı,

$$\frac{p}{q}=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+....+\frac{1}{a_r}}}$$

şeklinde yazılabilir. Gösterim kolaylığı için yukarıdaki açılım

$$p/q = [a_0, a_1, a_2, ...., a_r]$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca irrasyonel sayılar da sürekli kesirler şeklinde ifade edilebilir. Örneğin, $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısını göz önüne alacak olursak,

$$\sqrt{3} = 1 + 0.7320508... = 1 + \cfrac{1}{1 + 0.3660254...} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + 0.7320508...}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + 0.3660254...}}}}$$

şeklinde açılımı yapılabilir.

Bu tür kesirleri sonsuz sürekli kesir olarak isimlendirmek doğru olacaktır. Burada dikkat etmemiz gereken, sadece rasyonel sayıların sonlu sürekli kesir olarak yazılabileceğidir. Genel olarak her $x$ reel sayısının $x = [a_0(x), a_1(x), a_2(x), ...., a_r(x)]$ şeklinde bir açılımı vardır. Örneğin,

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, ...]$$

ve

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, ...]$$

olduğu gibi.

Bir sayının sürekli kesir olarak açılımının en önemli özelliği, baştan itibaren alınan rakamlardan oluşturulan kısmın, açılımı yapılan sayıya çok iyi bir yaklaşım sağlamasıdır. Yani, $[a_0, a_1, a_2, ...., a_r]$ sürekli kesrinin $k$ .yakınsaması, $c_k = [c_0, c_1, c_2, ...., c_k]$ olarak tanımlanır. Burada $k \geq n(n = k + 1)$ olmasına dikkat edelim. Ayrıca k. terimin rasyonel açılımında paydanın en alt paydasının k. terimi her zaman 1 fazla olacak şekildedir. Örneğin, $[1,2,3,4]$ sürekli kesri için,

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$c_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \frac{10}{7}$$

$$c_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{43}{30}$$

ve

$$c_4 = c_5 = \ldots = \frac{43}{30}$$

olur.

Başka bir örnek için, $\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,...]$ sayısını ele alırsak, ilk iki rakamdan oluşan bir yakınsama

$$c_1 = [3,7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

olup, bu sayı $\pi$ sayısına iyi bir yaklaşık değerdir. Diğer bir yaklaşık değer için 292 den önce gelen sayıları alarak oluşturulacak yakınsama olan

$$c_3 = [3,7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.14159292...$$

sayısı elde edilir ki bu da $\pi = 3{,}141592653...$ sayısına oldukça yakın bir değerdir.

Kutsal oran (Rönesans'tan gelen bir terimdir) ve kendine benzerlik özelliklerine sahip bir dikdörtgenin oluşturulması çabaları,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

altın oranının sürekli kesir açılımının geometrideki kopyasından başka bir şey değildir. Sürekli kesirlerin çıkış noktasını tam olarak belirlemek oldukça zordur. Bu zorluk, sürekli kesirlerle matematikte son 2000 yılda karşılaşılması fakat 1600'ların başlarına ve 1700'lerin sonlarına kadar geçen süreçte bu kavramın tam olarak oturtulamamasından kaynaklanmaktadır. Bununla birlikte, sürekli kesirlerin kökeni, Öklid Algoritmasının ortaya çıkarıldığı zamanla çakıştırılır. Öklid Algoritması iki sayının en büyük ortak bölenini(ebob) bulmada kullanılır. Bu algoritmayı ustaca kullanarak, $p$ ve $q$ nun ebobunu bulmak yerine, $\frac{p}{q}$ rasyonelinin sürekli kesir açılımı bulunur. Bunu görebilmek için 348 ve 124 sayılarını,

$$348 = 124 \times 2 + 100$$

$$\frac{348}{124} = 2 + \frac{100}{124} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{124}{100}}$$

$$124 = 100 \times 1 + 24$$

$$\frac{124}{100} = 1 + \frac{24}{100} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{100}{24}}$$

$$100 = 24 \times 4 + 4$$

$$\frac{100}{24} = 1 + \frac{4}{24} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{24}{4}}$$

$$24 = 6 \times 4$$

şeklinde Öklid algoritması ile gösterdiğimizde, bütün kesirler yerine yazılır ve $\frac{348}{124} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6}}}$ sürekli kesri elde edilir. Bu sürekli kesir $\frac{348}{124} = [2,1,4,6]$ şeklinde ifade edilir. Şimdi kısaca sürekli kesirler teorisini ele alalım. Bunun için bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir. $a_0, a_1, ...$ ve $b_0, b_1, ...$ sayıları reel yada kompleks sayılar olmak üzere,

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{...}}}}$$

biçimindeki ifadeye sürekli kesir denir. Burada $a_i$ ve $b_i$ sayıları sonlu ya da sonsuz sayıda olabilir. $\forall i$ için $b_i = 1$ olması durumunda bu kesre basit sürekli kesir denir. Basit sürekli kesirler $[a_0, a_1, a_2 ...]$ şeklinde gösterilirler. Terimler sonlu ise sonlu sürekli kesir, sonsuz ise sonsuz sürekli kesir terimi kullanılır.

**Teorem:** Bir sayının birden fazla sonlu sayıda terim içeren basit sürekli kesir olarak ifade edilebilir olması için ancak ve ancak sayı rasyonel olması ile mümkündür. Örneğin;

$$\frac{47}{17} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}}$$ yazılabilir.

**Teorem:** Her irrasyonel sayının basit sürekli kesir açılımı sonsuz sayıda terim içerir.

Örneğin; $e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{3 + \cfrac{x}{...}}}}}$ ; $\dfrac{\tan x}{x} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{...}}}}$

$$\left( \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) e^{\frac{2\pi}{3}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi}}{1 + \cfrac{e^{-6\pi}}{1 + ...}}}}$$ ifadelerinde olduğu gibidir. Bu kesir,

matematik dehası S.Ramanujan’ın bir buluşudur[2-1].

### 1.2. Taylor Yaklaşımı

#### 1.2.1. Taylor teoremi(kalanlı Taylor teoremi)

$f(x)$, $n \geq 0$ olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $n+1$ kez sürekli türevlenebilir ve $x, x_0 \in [a,b]$ olsun. $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ fonksiyonu için,

$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$ polinomu ve $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

kalanı vardır.

Ayrıca, $x$ ve $x_0$ arasında bir $\xi_x$ noktası vardır öyle ki $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$

dir. Burada $x_0$ noktası genellikle 0 seçilir. Kalanın 2 formu da aynıdır. Biri nokta tabanlı bir kalan iken diğeri integral formunda bir kalandır. Bazı fonksiyonlar kalanları ile ifade edilecek olursa,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{\xi_x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi_x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\cos\xi_x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + R_n(x)$$

gibidir[3].

#### 1.2.2. Taylor polinom yaklaşımı

Taylor serisi sonsuz terimlerin polinomudur. Bu nedenle,

$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$ dir. Elbette sonsuz sayıda öğeyi değerlendirmek imkansızdır. $n$, Taylor polinomunun derecesi; $R_{n+1}(x)$ kalan terimi ve $P_n(x)$ Taylor polinomu olmak üzere,

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0)$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \Rightarrow x_0 \leq \xi \leq x$$
$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

şeklinde tanımlanır. Taylor polinomu kalan veya hata terimi ile kesilmiş bir Taylor serisidir[6-4].

## 1.3. Pade Yaklaşımı

Pade yaklaşımları, fonksiyon değerine özel bir tür rasyonel kesir yaklaşımıdır. Buradaki amaç Taylor serileri açılımını mümkün olduğunca eşleştirmektir. Pade yaklaşımı genellikle fonksiyonun Taylor serisini kesmeden daha iyi bir yaklaşım sağlar ve Taylor serisinin yakınsamadığı yerlerde işe yaramaya devam edebilir [6-4].

### 1.3.1. Pade'nin tarihçesi

1731'de rasyonel kesirler (şimdi Fransız matematikçi Henri Pade (1863-1953)'den sonra Pade yaklaşımları olarak adlandırılır) İngiliz matematikçi Georges Ander'in bir mektubunda belirtilmiştir. $f(t) - [p/q]_f(t) = 0(t^{p+q+1})$ temel özelliğini bilen ilk matematikçi, sürekli fonksiyonlarla diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili bir makalede Joseph Louis Lagrange idi (1776).

Bununla birlikte sürekli fonksiyonlar, 1756 da Johann Henrich Lambert(1728-177) tarafından kullanılmaktadır. Pade, Charles Hermite (1822-1901) yönetimindeki tezinde Pade tablosunu keşfetmiş ve blok yapı olarak çalışmıştır.

19.yy da Pade yaklaşımları teorisine Carl Gustav Jakobi(1804-1851), Leopold Kronecher(1823-1891), Bernhard Rieman(1826-1866) ve George Frobenius(1847-1917) çalışmalar yapmışlardır. Muhtemelen, E.B Van Vleck de rasyonel kesirlere Pade yaklaşımı ismini vermiştir [7].

### 1.3.2. Pade yaklaşımının oluşturulması

Pade yaklaşımı, iki polinomun oranı ile bir fonksiyonu ifade eder. Pay ve paydadaki polinomun katsayıları Taylor açılım katsayıları kullanılarak belirlenir. Buradaki amaç Taylor serileri açılımını mümkün olduğunca eşleştirmektir. Pade yaklaşımı genellikle fonksiyonun Taylor serisini kesmeden daha iyi bir yaklaşım sağlar ve Taylor serisinin yakınsamadığı yerlerde işe yaramaya devam edebilir. Şöyle ki, Taylor serileri sınırlandırıldığında elde edilen polinomun $x \to \infty$ değeri için seri yakınsak olmamaktadır.

$x = 0$ da (Maclaurin) Taylor serisi

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x_i \tag{1.1}$$

ise, Pade yaklaşımı

$$\left[m/n\right]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i x^i} \tag{1.2}$$

şeklinde yazılabilir. Pade yaklaşımı $\left[m/n\right]$ ile gösterilir. Pay ve paydanın ortak çarpanı yoktur (yani aralarında asal) ve $b_0 = 1$ kabul edildiğinde,

$$\left[m/n\right] = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n} \tag{1.3}$$

şeklinde rasyonel fonksiyonu tanımlanır. $m = n$ seçilirse, bu durumda $\left[n/n\right]$ yaklaşımına köşegen(çapraz) yaklaşım denir. Pade yaklaşımı için verilen fonksiyonun paydasını sıfır yapan noktası(singülaritesi) yoksa bütün reel eksen üzerinde Pade yaklaşımı yakınsak olacaktır. $m = n$ olduğunda köşegen Pade yaklaşımlarının birçoğunun doğru ve kesin sonuçlar verdiği tartışılmıştır.

Şimdi Pade yaklaşımlarını oluşturmak için basit ve anlaşılır bir yöntem gösterecek olursak:

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ verilsin. $f(x)$, $m = n$ iken (3) te belirtilen köşegen yaklaşımı ile kullanılabilir olsun.

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \qquad (1.4)$$

kullanımını kabul edelim. (4) üzerinde çapraz çarpım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n)(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n) \\ &= c_0 + (c_1 + b_1 c_0)x + (c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0)x^2 + (c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0)x^3 + \ldots \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı katsayılı $x$ -ler karşılıklı eşitlenirse,

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ a_3 &= c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \\ &\vdots \\ a_n &= c_n + \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k} \end{aligned}$$

eşitliği ile gösterilir.

Tablo 1.3. Pade **[m/n]** yaklaşım tablosu

| **M/N** | **0** | **1** | **2** | **3** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | [0/0] | [1/0] | [2/0] | [3/0] | $\cdots$ |
| **1** | [0/1] | [1/1] | [2/1] | [3/1] | $\cdots$ |
| **2** | [0/2] | [1/2] | [2/2] | [3/2] | $\cdots$ |
| **3** | [0/3] | [1/3] | [2/3] | [3/3] | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |

### 1.3.3. Örnek rasyonel ve üstel Pade yaklaşımları ve çözümleri

1) $f(x)=e^x$ üstel fonksiyonunu $R_{2,2}(x)=[2/2]$ Pade yaklaşımını bulalım:

Çözüm: İlk olarak $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ şeklinde denklemi kuralım.

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O(x^5)$$

$$P_n(x)=p_0+xp_1+x^2p_2$$

$$Q_m(x)=1+xq_1+x^2q_2$$

Bu bilgiler,

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{p_0+p_1x+p_2x^2}{1+q_1x+q_2x^2}$$

denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{p_0+p_1x+p_2x^2}{1+q_1x+q_2x^2}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots$$

elde edilir.

Burada sol taraftaki eşitlikte soruda $[2/2]$ Pade istediği için açılım $x^2$ ye kadar açılır ve $p_0,p_1,p_2,q_1,q_2$ şeklinde beş katsayı olacağı için verilen $f(x)$ fonksiyonunun açılımını 5. terime kadar açılır.

Şimdi, elde edilen bu denklemde çapraz çarpım yapılırsa,

$$p_0+p_1x+p_2x^2=(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4)(1+q_1x+q_2x^2)$$

$$=1+q_1x+q_2x^2+x+q_1x^2+q_2x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}q_1x^3+q_2\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}q_1x^4+\frac{1}{6}q_2x^5+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{24}q_1x^5+\frac{1}{24}q_2x^6$$
$$=1+x(1+q_1)+x^2(q_2+q_1+\frac{1}{2})+x^3(q_2+\frac{1}{2}q_1+\frac{1}{6})+x^4(\frac{1}{2}q_2+\frac{1}{6}q_1+\frac{1}{24})+x^5(\frac{1}{6}q_2+\frac{1}{24}q_1)+x^6\frac{1}{24}q_2$$

bulunur. Katsayıları aynı olan ifadeler karşılıklı birbirine eşitlenirse,

$$p_0=1$$
$$p_1=1+q_1$$
$$p_2=q_2+q_1+\frac{1}{2}$$
$$0=q_2+\frac{1}{2}q_1+\frac{1}{6}$$
$$0=\frac{1}{2}q_2+\frac{1}{6}q_1+\frac{1}{24}$$

bulunur. Buradan,

$$\left(\frac{-1}{2}\right)q_2+\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{2}q_1=\left(\frac{-1}{2}\right)(-\frac{1}{6})$$
$$\frac{1}{2}q_2+\frac{1}{6}q_1=-\frac{1}{24}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanıp işlemler yapıldığında,

$$p_0=1 \quad p_1=\frac{1}{2} \quad p_2=\frac{1}{12} \quad q_1=-\frac{1}{2} \quad q_2=\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad f(x)=e^x, \quad R_{2,2}(x)=[2/2]=\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

Pade yaklaşımı elde edilir. Aşağıdaki tabloda $e^x$ in diğer yaklaşımları verilmiştir.

Tablo 1.4 $e^x$ pade yaklaşım tablosu

| M/N | 0 | 1 | 2 | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | $1$ | $\dfrac{1}{1-x}$ | $\dfrac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2}$ | $\ldots$ |
| **1** | $1+x$ | $\dfrac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$ | $\dfrac{1+\frac{1}{3}x}{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}$ | $\ldots$ |
| **2** | $1+x+\frac{1}{2}x^2$ | $\dfrac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$ | $\dfrac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}$ | |
| **3** | $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ | $\dfrac{1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^3}{1-\frac{1}{4}x}$ | $\vdots$ | |

2) $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun $R_{4,4}(x)=[4/4]$ Pade yaklaşımını bulalım.

Çözüm: $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ şeklinde denklemi kuralım.

$$f(x)=\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8$$
$$P_n(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4$$
$$Q_m(x)=1+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+q_4x^4$$

Bu bilgiler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4}{1+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+q_4x^4}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8+\ldots$$

elde edilir. Bu denklemde çapraz çarpım yapılırsa,

$$p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4=\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8\right)\left(1+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+q_4x^4\right)$$

$$=1+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+q_4x^4-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}q_1x^3-\frac{1}{2}q_2x^4-\frac{1}{2}q_3x^5-\frac{1}{2}q_4x^6+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{24}q_1x^5$$
$$+\frac{1}{24}q_2x^6+\frac{1}{24}q_3x^7+\frac{1}{24}q_4x^8-\frac{1}{720}x^6-\frac{1}{720}q_1x^7-\frac{1}{720}q_2x^8-\frac{1}{720}q_3x^9-\frac{1}{720}q_4x^{10}$$
$$+\frac{1}{40320}x^8+\frac{1}{40320}q_1x^9+\frac{1}{40320}q_2x^{10}+\frac{1}{40320}q_3x^{11}+\frac{1}{40320}q_4x^{12}$$

denklem $x$ katsayılarının ortak parantezine alınırsa ve

$$=1+xq_1+x^2\left(q_2-\frac{1}{2}\right)+x^3\left(q_3-\frac{1}{2}q_1\right)+x^4\left(q_4-\frac{1}{2}q_2+\frac{1}{24}\right)+x^5\left(-\frac{1}{2}q_3+\frac{1}{24}q_1\right)$$
$$+x^6\left(-\frac{1}{2}q_4+-\frac{1}{24}q_2-\frac{1}{720}\right)+x^7\left(\frac{1}{24}q_3-\frac{1}{720}q_1\right)+x^8\left(\frac{1}{24}q_4-\frac{1}{720}q_2+\frac{1}{40320}\right)+O(x)^9$$

şeklinde katsayıları aynı olan ifadeler karşılıklı birbirine eşitlenirse,

$$p_0=1$$
$$p_1=q_1$$
$$p_2=q_2-\frac{1}{2}$$
$$p_3=q_3-\frac{1}{2}q_1$$
$$p_4=q_4-\frac{1}{2}q_2+\frac{1}{24}$$
$$0=-\frac{1}{2}q_3+\frac{1}{24}q_1$$
$$0=-\frac{1}{2}q_4+-\frac{1}{24}q_2-\frac{1}{720}$$
$$0=\frac{1}{24}q_3-\frac{1}{720}q_1$$
$$0=\frac{1}{24}q_4-\frac{1}{720}q_2+\frac{1}{40320}$$

gerekli işlemler yapılırsa,

$$p_0 = 1 \qquad q_1 = 0$$
$$p_1 = 0 \qquad q_2 = \frac{11}{252}$$
$$p_2 = -\frac{115}{252} \qquad q_3 = 0$$
$$p_3 = 0 \qquad q_4 = \frac{13}{15120}$$
$$p_4 = \frac{313}{15120}$$

elde edilir. Buradan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$f(x) = \cos x$

$$R_{4,4}(x) = [4,4] = \frac{15120 - 6900x^2 + 313x^4}{15120 + 660x^2 + 13x^4}$$

Pade formu elde edilir.

3) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ fonksiyonu için $[3/3]$ ve $[4/4]$ Pade yaklaşımlarını kuralım.

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun Taylor açılımı,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{7} - \frac{x^7}{8} + \frac{x^8}{9} + O(x^{10})$$

şeklindedir.

İlk olarak $[3/3]$ Pade yaklaşımının bulunması için bu açılımı 6. terimine kadar açmamız gerektiğini bilmemiz gerekir. Çünkü $[3/3]$ Pade yaklaşımında 6 bilinmeyen vardır. O halde,

$[3/3] = \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3}$ şeklinde Pade yaklaşımını kuralım.

Bilinmeyenleri bulmak için,

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{7}$$

şeklinde eşitleme yapılır ve çapraz çarpım yapılırsa,

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{7}\right)\left(1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3\right)$$

$$=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3-\frac{x}{2}+b_1\frac{x^2}{2}-b_2\frac{x^3}{2}+b_3\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{3}+b_1\frac{x^3}{3}+b_2\frac{x^4}{3}+b_3\frac{x^5}{3}$$

$$-\frac{x^3}{4}-b_1\frac{x^4}{4}-b_2\frac{x^5}{4}-b_3\frac{x^6}{4}+\frac{x^4}{5}+b_1\frac{x^5}{5}+b_2\frac{x^6}{5}+b_3\frac{x^7}{5}-\frac{x^5}{6}-b_1\frac{x^6}{6}+b_2\frac{x^7}{6}$$

$$+b_3\frac{x^8}{6}+\frac{x^6}{7}+b_1\frac{x^7}{7}+b_2\frac{x^8}{7}+b_3\frac{x^9}{7}+O(x^{10})$$

$$=1+x\left(b_1-\frac{1}{2}\right)+x^2\left(b_2+\frac{b_1}{2}+\frac{1}{3}\right)+x^3\left(b_3-\frac{b_2}{2}+\frac{b_1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$+x^4\left(\frac{b_3}{2}+\frac{b_2}{3}-\frac{b_1}{4}+\frac{1}{5}\right)+x^5\left(\frac{b_3}{3}-\frac{b_2}{4}+\frac{b_1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$

$$+x^6\left(-\frac{b_3}{4}+\frac{b_2}{5}-\frac{b_1}{6}+\frac{1}{7}\right)+O(x^7)$$

elde edilir. Şimdi katsayıları aynı olan ifadeler karşılıklı eşitlenirse,

$$a_0=1$$

$$a_1=b_1-\frac{1}{2}$$

$$a_2=b_2+\frac{b_1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$a_3=b_3-\frac{b_2}{2}+\frac{b_1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$0=\frac{b_3}{2}+\frac{b_2}{3}-\frac{b_1}{4}+\frac{1}{5}$$

$$0=\frac{b_3}{3}-\frac{b_2}{4}+\frac{b_1}{5}-\frac{1}{6}$$

$$0=-\frac{b_3}{4}+\frac{b_2}{5}-\frac{b_1}{6}+\frac{1}{7}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında ise katsayıları,

$$a_0=1 \qquad b_1=\frac{1}{7}$$

$$a_1=\frac{17}{4} \qquad b_2=\frac{6}{7}$$

$$a_2=\frac{1}{3} \qquad b_3=\frac{4}{35}$$

$$a_3=\frac{1}{140}$$

şeklinde elde edilir. O halde gerekli sadeleştirmelerden sonra $[3/3]$ Pade yaklaşımı

$$[3/3]=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3} \quad \Rightarrow \quad [3/3]=\frac{420+510x+140x^2+3x^3}{420+720x+360x^2+48x^3}$$

benzer şekilde işlemler yapıldığında ise $[4/4]$ Pade yaklaşımı

$$[4/4]=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4}$$

$$[4/4]=\frac{3780+6510x+3360x^2+505x^3+6x^4}{3780+8400x+6300x^2+1800x^3+150x^4}$$

şeklinde elde edilir.

### 1.4. Pade Yaklaşımlarına Ait Bazı Özellikler

Özetle,

$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i x^i$ kuvvet serisi ve $R(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ , $\begin{matrix} p(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i x^i \\ q(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i x^i \end{matrix}$ olmak üzere $R(x)$

rasyonel fonksiyonu $f(x)-R(x)=O(x^{m+n+1})$ ise $f(x)$ serisine Pade yaklaşım serisi denilmişti. Bu tanımlamayı göz önüne alarak aşağıdaki özellikleri verelim [8].

#### 1.4.1. $\partial$ ve $\omega$ notasyonları (operatörleri)

Pade yaklaşımlarına ait $\partial$ ve $\omega$ operatörlerini özellikleri yardımıyla incelenecektir.

$\partial$ operatörü: Eğer $p$ bir polinom ise $\partial p$ bir polinomun tam derecesini yani sıfır olmayan terimin en yüksek üs derecesini verir.

Örneğin; $\partial\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=2$ gibi.

$\omega$ operatörü: Eğer $p$ bir polinom yada bir kuvvet serisi ise $\omega p$ ilk sıfır olmayan terimin derecesini, yani en küçük üs derecesini verir.

Örneğin; $a_3 \neq 0$ olmak üzere $\omega\left(\sum_{i=3}^{\infty}a_i x_i\right)=3$ gibi

Keyfi $p$ ve $q$ polinomlarına uygulanan bu operatörler aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\partial(pq) = \partial p + \partial q$

2. $\omega(p+q) = \min\{\omega p, \omega q\}$

3. $\omega(cp) = \omega p$ , $c$ sabit

4. $\omega(x^k p) = k + \omega(p)$

5. $\omega(p) \geq k \;\Rightarrow\; \omega(pq) \geq k$

6. $(\omega p \geq n+1) \wedge (\partial p \leq n) \;\Rightarrow\; p \equiv 0$

Pade yaklaşım problemine ilk adım olarak $[m,n] = (m,n)$ mertebelerinin , $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlarıyla şu şekilde belirlenmesiyle oluşur.

7. $$\begin{aligned} &\partial p \leq m \\ &\partial q \leq n \\ &\omega(fq - p) \geq m+n+1 \end{aligned}$$

Son eşitsizlikte $fq - p$ serisi kuvvetlerin $i < m+n+1$ indeksine sahip tüm katsayıların ortadan kalktığını ifade eder. Çünkü en küçük kuvvettir.

**Teorem:** $p_1, q_1$ ve $p_2, q_2$ polinomları (7). özelliğe uygunsa $p_1 q_2 = p_2 q_1$ dir [8].

İspat: $p := p_1 q_2 - p_2, q_1$ polinomu alınsın. Bu polinomda $fq_1 q_2$ ekleyip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} p &:= p_1 q_2 - p_2 q_1 + fq_1 q_2 - fq_1 q_2 \\ p &:= (fq_2 - p_2) q_1 - (fq_1 - p_1) q_2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $p_1, q_1$ ve $p_2, q_2$ (7) deki eşitsizlikleri sağlar ve buradan da

$$\begin{aligned} \omega(fq_1 - p_1) &\geq m+n+1 \\ \omega(fq_2 - p_2) &\geq m+n+1 \end{aligned}$$

şeklinde içerdeki polinomun en yüksek dereceleri bulunur. Özellik (2) den de $\omega(p_1 q_2 - p_2 q_1) \geq m+n+1$ dir. Ancak en büyük derecesi olarak da $\partial(p_1 q_2 - p_2 q_1) \geq m+n$ dir. Dolayısıyla buradan da,

$$\omega\left(p_1q_2 - p_2q_1\right) \geq m+n+1$$
$$\partial\left(p_1q_2 - p_2q_1\right) \geq m+n$$

şeklinde özellik (6) yı sağlatmış oluruz. $\langle(\omega p \geq n+1) \wedge (\partial p \leq n) \Rightarrow p \equiv 0\rangle$

Sonuç olarak $p$ ye (6) uygulanması $p_1q_2 = p_2q_1$ e eşdeğer $p \equiv 0$ ı verir.

Rasyonel sayılara benzer şekilde $\frac{p_1}{q_1}$ ve $\frac{p_2}{q_2}$ rasyonel formları eşdeğerdir. Eğer $p$ ve $q$ (6) yı sağlıyorsa o zaman,

$$[m/n]_f = R_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)}$$

gibi Pade yaklaşımı adında $(m,n)$ mertebeli ve indirgenemez $\frac{p}{q}$ formu, $\begin{matrix} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{matrix}$ alınarak normalize edilir. Daha sonra $p_0(x)$ ve $q_0(x)$ hesaplamasında polinom iptal edilebildiğinden

$$m' := \partial p_0 \leq m$$
$$n' := \partial q_0 \leq n$$

bağıntısına dikkat edilmelidir. Bununla birlikte, her negatif olmayan $m$ ve $n$ için, $f$ için yalnız bir $(m,n)$ mertebeli Pade yaklaşımı olduğu kesindir.

**Teorem:** $f$ için $(m,n)$ mertebeli Pade yaklaşımı $R_{m,n} = \frac{p_0(x)}{q_0(x)}$ şeklinde verilmişse o halde $0 \leq s \leq \min\{m-m', n-n'\}$ olacak şekilde bir $s$ tam sayısı vardır öyle ki özellik (7) den de sağlanır ki $\begin{matrix} p(x) = x^s p_0(x) \\ q(x) = x^s q_0(x) \end{matrix}$ tır.

# BÖLÜM 2. PADE YAKLAŞIMLARININ LAGRANGE İNTERPOLASYON AÇILIMI İLE BAĞLANTISI

Bilinen değerleri kullanarak aralarda bilinmeyen noktalardaki değerleri yaklaşık olarak belirleme işlemine interpolasyon denir. İnterpolasyon, bilinmeyen değerler bilinen değerlerin arasında bir noktada ise bilinen noktalar kullanarak bilinmeyen değerler bulunabilir. Eğer değeri bulunmak istenen nokta bilinen noktaların dışında bir yerde ise eğri uydurma (ekstrapolasyon) işlemleri ile bilinmeyen değerler bulunabilir.

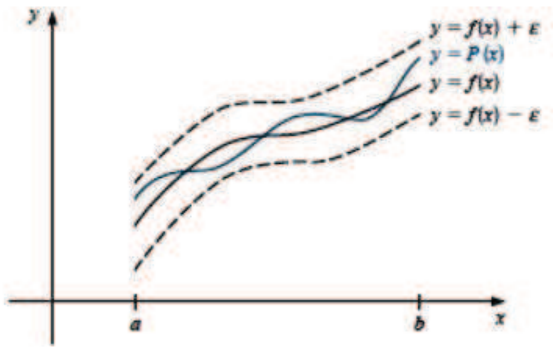
İnterpolasyon çok yaygın olarak kullanılan noktalara polinom uydurarak sonuca gitmektir. Eğer bilinen nokta sayısı iki ise bunları bir doğru ile birleştirerek ara değerleri aramak gerekir. Bilinen nokta sayısı arttıkça polinomun derecesi artacaktır. $n$ adet nokta için $(n-1)$. dereceden bir polinom uydurmak bütün mevcut noktaları sağlayacaktır. İnterpolasyon yöntemi olarak kullanabileceğimiz literatürde birçok yöntem vardır.

Bu çalışmada Lagrange interpolasyon yöntemi incelenip Pade yaklaşım polinomuna uyarlanmaya çalışılacaktır.

## 2.1. Lagrange İnterpolasyon Yöntemi

### 2.1.1. Weierstrass yaklaşım teoremi

$n$. dereceden bir polinomu $a_n \neq 0$; $P_n(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ şeklinde gösterilsin. Burada $a_0, a_1, ..., a_n$ değerleri polinomun reel katsayılarıdır. $n$ negatif olmayan bir tamsayıdır. $(n \geq 0)$ $f$ $x$ in , $a,b$ aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olduğu varsayılsın. $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $P(x)$ polinomu vardır ki, $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ ifadesi $a,b$ aralığındaki her $x$ için geçerlidir.




Şekil 2.1 Polinomların yaklaşımı

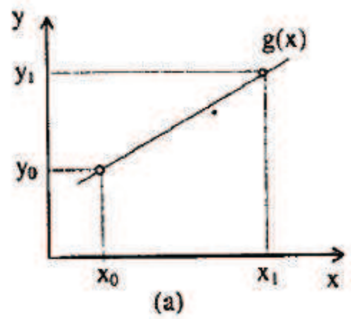
Yaklaşım teorisinde kullanılan bir çok polinom türü vardır. (Lagrange, Hermit, Chebische, Lagurre vb.)

## 2.2. Lagrange Polinomu ve Pade Yaklaşık Çözümü

Lagrange interpolasyon ifadeleri aslında bir interpolasyon işleminden ziyade eğri uydurma işlemi olarak kullanılması daha anlamlı olabilir. Elde var olan noktalar ile bir doğru ya da eğri uydurulur. Daha sonra bu eşitlik üzerinden istenilen noktaların değerleri hesaplanır.

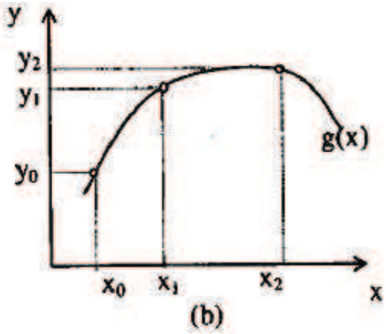
Bu yöntemde nokta sayısına bağlı olarak polinomun derecesi değişir. Örneğin $n$ adet nokta için uydurulacak polinomun derecesi $n-1$ olur.

Aşağıdaki şekilde iki noktadan uydurulmuş doğru görülmektedir.




Şekil 2.2. İki noktadan geçen uydurulmuş doğru

Aşağıdaki şekilde ise üç noktadan uydurulmuş eğri görülmektedir.

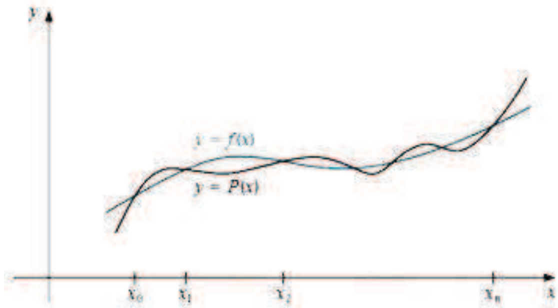



Şekil 2.3. Üç noktadan geçen uydurulmuş eğri

$ax+b$ gibi birinci dereceden bir polinomu belirlemek için $(x_0, y_0)$ ve $(x_1, y_1)$ noktalarını bildiğimizi kabul edelim. Aslında bu veri $y_0 = f(x_0)$ ve $y_1 = f(x_1)$ şeklinde bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0$ ve $x_1$ noktalarında aldığı değerler olarak düşünülürse;

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $(x_0, y_0)$ ve $(x_1, y_1)$ noktalarından geçen birinci dereceden (Lineer) Lagrange interpolasyon polinomu; $P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$ şeklinde hesaplanır. Aşağıda hesaplandığı gibi, $P(x_0) = f(x_0) = y_0$ ve $P(x_1) = f(x_1) = y_1$ olur [9-10].




Şekil 2.4. Lagrange interpolasyon polinomu

**Teorem:** $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n+1)$ farklı sayı ve $f(x)$ fonksiyonu bu $(n+1)$ noktada değeri bilinen bir fonksiyon ise, $n.$dereceden $P(x)$ polinomu mevcuttur ve $f(x_k) = P(x_k)'dır.$

Şimdi de yaklaşım polinomunun n. dereceden olduğu düşünülürse $(n+1)$ tane detaya ihtiyaç vardır.

Yani $y = f(x)$ fonksiyonu için;

$$f(x_0) = y_0 \ , \ f(x_1) = y_1, \ ..., \ f(x_n) = y_n$$

$n.$dereceden Lagrange polinomu verilen detay ile şu şekilde ifade edilir:

$0 \le k \le n$ olmak üzere $L_{n,k} = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$

şeklindedir.

Özetle;

$$L_{n,k} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

olmak üzere $L_{n,k}$ polinomlarını kullanarak yaklaşım polinomu:

$$P(x) = L_{n,0} f(x_0) + L_{n,1} f(x_1) + ... + L_{n,n} f(x_n)$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k} f(x_k)$$

şeklindedir. Şimdi Lagrange interpolasyonu ile elde edilen açılımı Pade yaklaşımını kullanarak çözüme varmaya çalışılsın:

Örnek: $x_0=1, x_1=2, x_2=4$ noktalarında tanımlı ikinci dereceden Lagrange polinomunun Pade yaklaşım fonksiyonunu bulunuz. $\left(f(x)=\frac{1}{x}\right)$

Çözüm:

$$L_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-2)(x-4)}{(-1)(-3)}=\frac{1}{3}\left(x^2-6x+8\right)$$
$$L_1=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-4)}{-4}=-\frac{1}{4}\left(x^2-5x+4\right)$$
$$L_2=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{3}=\frac{1}{3}\left(x^2-3x+2\right)$$

$f(x)=\frac{1}{x}$ olduğuna göre,

$$\begin{array}{lcl} f(x_0)=\dfrac{1}{x_0} & & f(1)=1 \\ f(x_1)=\dfrac{1}{x_1} & \Rightarrow & f(2)=\dfrac{1}{2} \\ f(x_2)=\dfrac{1}{x_2} & & f(4)=\dfrac{1}{4} \end{array}$$

olup Lagrange polinomu, $P(x)=1L_0+\frac{1}{2}L_1+\frac{1}{4}L_2$ şeklindedir. Buradan;

$$P(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-6x+8\right)-\frac{1}{8}\left(x^2-5x+4\right)+\frac{1}{12}\left(x^2-3x+2\right)$$
$$=x^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)+x\left(-2+\frac{5}{8}+\frac{1}{6}\right)+\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

Lagrange polinomu elde edilir. Bu polinomu biraz daha düzenler ve polinomun paydaları eşitlenirse,

$$P(x)=\frac{7}{24}x^2-\frac{29}{24}x+\frac{56}{24}$$

polinomu bulunur. Şimdi $x = 0,1,2,3,4,5$ için $f(x)$ fonksiyonu, Lagrange fonksiyonu ve Lagrange Pade fonksiyonlarının verdiği sonuçları kıyaslanır, elde edilen $P(x)$ fonksiyonu $[1/1]$ Pade yaklaşımına uyarlanırsa,

$$[1/1] = \frac{56}{24} - \frac{29}{24}x + \frac{7}{24}x^2 = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$$

elde edilir ve eşitliği için içler dışlar çarpımı yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&(1 + b_1 x)\left(56 - 29x + 7x^2\right) = 24\left(a_0 + a_1 x\right) \\
&56 - 29x + 7x^2 + 56b_1 x - 29b_1 x^2 + 7b_1 x^3 = 24a_0 + 24a_1 x \\
&56 + x\left(-29 + 56b_1\right) + x^2\left(7 - 29b_1\right) + O(x^3) = 24a_0 + 24a_1 x
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte karşılıklı katsayıları aynı ifadeler eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
&a_0 = \frac{56}{24} \\
&24a_1 + 56b_1 = 29 \\
&7 - 29b_1 = 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&a_0 = \frac{56}{24} \\
&a_1 = \frac{449}{696} \\
&b_1 = \frac{7}{29}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
P_{1,1} = [1/1] = \frac{\frac{56}{24} + \frac{449}{696}x}{1 + \frac{7}{29}x}$$

şeklinde $a_0, a_1, b_1$ katsayılarını ve yaklaşımı elde edilir.

Lagrange dan elde edilen polinomun verilerini ve Lagrange'a Pade ile yaklaşarak elde edilen polinomun verileri kıyaslandığında aşağıdaki tabloyu elde edilir.

Tablo 2.1. Lagrange polinomu ve Pade ile yaklaşılan Lagrange polinomu veri tablosu

| X | $P_{1,1}=[1/1]=\dfrac{\dfrac{56}{24}+\dfrac{449}{696}x}{1+\dfrac{7}{29}x}$ | $P_{lagrange}(x)=\dfrac{7}{24}x^2-\dfrac{29}{24}x+\dfrac{56}{24}$ |
|---|---|---|
| $x=0$ | $P_{1,1}(0)=$ 2,333333333 | $P(0)=$2,333333333 |
| $x=1$ | $P_{1,1}(1)=$2,074074074 | $P(1)=$1,416666666 |
| $x=2$ | $P_{1,1}(2)=$2,443798225 | $P(2)=$ 1,089999999 |
| $x=3$ | $P_{1,1}(3)=$2,475833332 | $P(3)=$1,333333333 |
| $x=4$ | $P_{1,1}(4)=$2,500000000 | $P(4)=$ 2,166666666 |
| $x=5$ | $P_{1,1}(5)=$2,518880208 | $P(5)=$3,583333333 |

Tablodan görüldüğü üzere Lagrange denklemine Pade ile yaklaşıldığında daha seri ve yakın sonuçlar vermiştir. Kullanışlılık açısından Pade yaklaşımı Lagrange olduğu gibi birçok üstel açılıma sahip polinomlarda da aynı düzenli sonuçları vermektedir.

# BÖLÜM 3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE PADE YAKLAŞIMI

## 3.1. Analitiklik

**Tanım:** Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ civarında Taylor seri açılımı mevcut ise ve bu seri $x_0$ ın komşuluğunda $f(x)$e yakınsıyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna $x_0$ da analitik fonksiyondur denir.

Genel olarak, bir fonksiyonun değeri $x = x_0$ da sonsuza gidiyorsa, fonksiyon analitik değildir. $f(x)$, $x = x_0$ da analitik ise $x = x_0$ da sürekli olmak zorunda değildir.

Örnek: $x = 0, x = 1, x = 2$ noktalarının $(x^2 - 9)y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminin hangi tip noktalar olduğunu inceleyiniz.

Çözüm: Verilen denklemi düzenlersek $y'' + \dfrac{1}{(x^2 - 9)} y = 0$ elde edilir.

$P(x) = 0$ ve $Q(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ olup $P(x)$ ve $Q(x)$ $x = 0, x = 1, x = 2$ de analitik olduğundan bu noktalar denklemin adi noktalarıdır. $x = 3$ için $Q(x)$ analitik değildir. Ancak,

$$(x-3)P(x) = 0$$
$$(x-3)^2 \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{x-3}{x+3}$$

ifadeleri $x = 3$ te analitik olduğundan $x = 3$ diferansiyel denklemin düzgün tekil noktasıdır.

### 3.2. Adi ve Tekil Nokta

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ diferansiyel denkleminin $x=x_0$ noktası ya adi noktadır yada tekil noktadır. Bunu belirlediğimizde seri çözümünü yapabiliriz.

**Tanım(Adi Nokta):** $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ ikinci mertebe homojen diferansiyel denkleminde $P(x)$ ve $Q(x)$ i ikisinin de sıfır olmadığını varsayalım. Eğer $P(x)$ ve $Q(x)$ $x=x_0$ da analitik (her noktada türevlenebilir) iseler bu noktaya diferansiyel denklemin adi noktası denir.

**Tanım(Tekil - Düzgün Tekil Nokta):** $x=x_0$ noktasının diferansiyel denklemin tekil noktası olması için $P(x_0)$ ve /Veya $Q(x_0)$ tanımsız olmalıdır. Bu durumda $x=x_0$ noktası düzgün tekil nokta ya da düzgün olmayan tekil nokta olur.

$(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2\,Q(x)$ fonksiyonlarının analitik olması durumunda $x=x_0$ a denklemin düzgün tekil noktasıdır denilir. Aksi taktirde $x=x_0$ a düzgün olmayan tekil noktadır denir.

### 3.3. Adi Noktada Seri Çözüm ve Pade Yaklaşımı

Diferansiyel denklemde $x_0$ noktası bir adi nokta ise $x=x_0$ da seri çözümü $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ şeklindedir. Burada $x=0$ noktasını alarak adi noktada Pade yaklaşımını bulmak için için $y$,

$$y=[m/n]_{f(x)}(x)=\frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{1+\sum_{i=1}^{n} b_i x^i}$$

şeklinde alınarak seri çözümü bulunur. Fakat dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta ise Pade yaklaşımının adi noktada seri çözümünü bulurken diferansiyel denklemin en yüksek mertebesine ait katsayının 1 olması gerektiğidir.

Burada $$y_1 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$ $$y_2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$$ olmak üzere,

$$y = \frac{y_1}{y_2}$$

$$y' = \frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{(y_2)^2}$$

$$y'' = \frac{y_1'' y_2 + y_2' y_1' - y_2'' y_1 - y_1' y_2'}{(y_2)^4} = \frac{y_1'' y_2 - y_2'' y_1}{(y_2)^4}$$

türevleri elde edilir. Türevler alınırken 1.türevde alt indis 1 den , 2.türevde 2 den başlaması gerektiğine dikkat edilmelidir. Çünkü tekil nokta civarında alınan türevlerde alt indisler değişmeyecektir. Daha sonra adım adım:

1. Elde edilen türevler denklemde yerlerine yazılır
2. Toplamı tek seride bulmak için x in üsleri eşitlenir
3. Serinin alt toplam indisleri eşitlenir
4. İndirgeme bağıntısı bulunur ve katsayılar 0 eşitlenerek çözüm bulunur.

Şimdi aşağıdaki örnekte adi noktada Pade çözümünü inceleyelim:

ÖRNEK 1(Pade): $xy' - y = 0$ diferansiyel denkleminin x=0 adi noktası civarında Pade çözümünü inceleyelim.

$$y = [1/1] = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$$

$$y' = \frac{a_1 - a_0 b_1}{(1 + b_1 x)^2}$$

$$xy' - y = \frac{a_1 x - a_0 b_1 x}{(1 + b_1 x)^2} - \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x} = 0$$

Paydalar eşitlenip gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$a_0 - 2a_0 b_1 x - a_1 b_1 x^2 = 0$$

$$a_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -2a_0b_1 &= 0 \\ -a_1b_1 &= 0 \end{aligned}\right. \rightarrow \quad \text{2 durum incelenir.}$$

$1.durum:$ $b_1 \neq 0$ ise $a_1 = 0$ olup Pade çözüm fonksiyonu $y = 0$ olur.

$2.durum:$ $b_1 = 0$ ise $a_1 = c$ olup Pade çözüm fonksiyonu $y = cx$ olur.

ÖRNEK 2 : $xy' - y = 0$ diferansiyel denkleminin x=0 adi noktasında $[1/2]$ Pade çözümüne bakalım.

$$y = [2/1] = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$$

$$y' = \frac{a\left(1 + b_1 x + b_2 x^2\right) - \left(b_1 + 2b_2 x\right)\left(a_0 + a_1 x\right)}{\left(1 + b_1 x + b_2 x^2\right)^2}$$

$y$ ve $y'$ ifadeleri denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{a_1 x\left(1 + b_1 x + b_2 x^2\right) - \left(b_1 x + 2b_2 x^2\right)\left(a_0 + a_1 x\right)}{\left(1 + b_1 x + b_2 x^2\right)^2} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-2a_1 b_2 x^3 - a_1 b_1 x^2 - 2a_0 b_2 x^2 - 2a_0 b_1 x - a_0 = 0$$

denklemi elde edilir. Buradan,

$$-2a_1 b_2 x^3 - a_1 b_1 x^2 - 2a_0 b_2 x^2 - 2a_0 b_1 x - a_0 = 0$$

$$a_0 = 0$$
$$a_0 b_1 = 0 \rightarrow b_1 \neq 0$$

$$a_1 b_1 + 2a_0 b_2 = 0 \rightarrow b_1 = c_1, a_1 = 0$$
$$a_1 b_2 = 0 \rightarrow b_2 = c_2$$

veya

$$a_0 = 0, b_1 = 0, a_1 = c_1, b_2 = 0$$

elde edilir ki Pade çözüm fonksiyonu,

$y = 0$ ya da $y = c_1 x$

şeklinde elde edilir.

ÖRNEK 3 : $xy''-y'=0$ diferansiyel denkleminin x=0 adi noktasında $[2/1]$ Pade çözümüne bakalım.

$$y=[2/1]=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x}$$

$$y'=\frac{(a_1+2a_2x)(1+b_1x)-b_1(a_0+a_1x+a_2x^2)}{(1+b_1x)^2}=\frac{a_1-b_1a_0+2a_2x+a_2b_1x^2}{(1+b_1x)^2}$$

$$y''=\frac{(2a_2x+2a_2b_1x)(1+b_1x)^2-2b_1(1+b_1x)(a_1-b_1a_0+2a_2x+a_2b_1x^2)}{(1+b_1x)^4}$$

$y, y'$ ve $y''$ ifadelerini denklemde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

1) $a_1-b_1a_0+3a_1b_1x+(3a_2b_1-3a_0b_1^2)x^2+a_2b_1^2x^3=0$

2) $a_1-b_1a_0=0 \quad \rightarrow a_1=b_1a_0$

3) $3a_1b_1=0 \quad \rightarrow a_1b_1=0$

4) $3a_2b_1-3a_0b_1^2=0 \quad \rightarrow b_1(a_2-a_0b_1)=0$

5) $a_2b_1^2=0 \quad \rightarrow$ Burada, yukarıdaki eşitlikler de göz önüne alınarak iki durum incelenir:

1.*durum*: $b_1=0$ ise $\begin{matrix} a_0\neq 0 \\ a_1=0 \\ a_2\neq 0 \end{matrix}$ olur. $\quad y=c_1+c_2x^2$ çözümü bulunur.

2.*durum*: $b_1\neq 0$ ise $\begin{matrix} a_2=0 \\ a_1=0 \\ a_0=0 \end{matrix}$ olur. Yani, $b_1=k$ alınırsa Pade çözüm fonksiyonu,

$y=0$ şeklinde elde edilir.

Örnek 3: $y''+xy'-y=0$ diferansiyel denkleminin $x=0$ adi noktasında Pade seri çözümünü bulunuz.

$[2/1]$ Pade serisi için türevler,

$$[2/1] = y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x}$$

$$y' = \frac{a_1 - a_0 b_1 + 2a_2 x + a_2 b_1 x^2}{(1 + b_1 x)^2}$$

$$y'' = \frac{2a_2 - 2a_1 b_1 + 2a_0 b_1^2}{(1 + b_1 x)^3}$$

şeklinde alınır ve denklemde yerine yazılırsa,

$$y'' + xy' - y = \frac{2a_2 + 2a_2 b_1 - 2a_1 b_1 - 2a_0 b_1^2 - 2a_2 b_1 x}{(1 + b_1 x)^3} + x\left(\frac{a_1 - a_0 b_1 + 2a_2 x + a_2 b_1 x^2}{(1 + b_1 x)^2}\right)$$

$$+ \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x} = 0$$

$$2a_2 - a_0 - 2a_1 b_1 + 2a_0 b_1^2 + x(-3a_0 b_1) + x^2(-a_1 b_1 - 2a_0 b_1^2 + a_2) + x^3(a_2 b_1 - a_1 b_1^2) + a_2 b_1^2 x^4 = 0$$

bulunur. Katsayılar sıfıra eşitlenirse,

$$a_2 b_1^2 = 0$$
$$a_0 b_1 = 0$$
$$2a_2 - a_0 - 2a_1 b_1 + 2a_0 b_1^2 = 0$$
$$-a_1 b_1 - 2a_0 b_1^2 + a_2 = 0$$
$$a_2 b_1 - a_1 b_1^2 = 0$$

$b_1 \neq 0 \rightarrow a_2 = a_1 = a_0 = 0$ olur ve

$y = 0$ bulunur.

$b_1 = 0 \rightarrow a_2 - a_1 b_1 \neq 0$

$\rightarrow a_2 = 0$

$\rightarrow a_1 \neq 0$ olup

$\rightarrow a_0 \neq 0$

$y = c_1 + c_2 x$ elde edilir.

### 3.4. Tekil Noktada Seri Çözüm ve Pade Yaklaşımı

**Teorem:** $x = x_0$ noktası $P(x_0)$ ve/veya $Q(x_0)$ tanımsız ise $x = x_0$ noktası düzgün tekil yada düzgün olmayan tekil noktadır. Eğer $(x - x_0)P(x)$ ve $(x - x_0)^2 Q(x)$ fonksiyonları analitik iseler $x = x_0$ a denklemin düzgün tekil noktasıdır aksi halde $x = x_0$ düzgün olmayan tekil noktadır. Düzgün olmayan bir nokta üzerinde seri çözümü yapılamaz.

#### 3.4.1. Düzgün tekil noktada pade seri çözümü

**Tanım:** $x = x_0$ düzgün tekil nokta ise seri çözümü $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ şeklinde olup, düzgün tekil nokta değilse $x_0$ noktasında seri çözümü yoktur. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ serisine Frobenius serisi denir. Bu seri ile yapılan çözüm yöntemine de düzgün tekil noktalar için Frobenius yöntemi denir.

Şimdi $x_0$ noktasının düzgün tekil nokta olup olmadığını belirtelim. Aşağıdaki

$p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) P(x) = reel$ *sayı* (sonlu)

$q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = reel$ *sayı* (sonlu)

$p_0$ ve $q_0$ limitleri sonsuz olmamalıdır (limitlerin sonuçları eşit çıkmayabilir). Önemli olan durum limitlerin sonlu ve analitik olmasıdır. $p_0$ ve $q_0$ noktaları bulunduktan sonra,

1. $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ indisiyel denkleminde yerine yazılır ve r değerleri bulunur.
2. Bulunan $r$ değerleri ile

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}=\frac{\sum_{n=0}^{m}a_n(x-x_0)^n(x-x_0)^r}{1+\sum_{n=1}^{n}b_n(x-x_0)^n}=\frac{(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_ix^i)(x-x_0)^r}{1+b_1x+b_2x^2+...+b_ix^i}$$

ve türevlerinin alındığı serilerde yerine yazılır.

3. $x^{n+r}$ nin katsayıları 0 a eşitlenir ve $y=\frac{(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_ix^i)(x-x_0)^r}{1+b_1x+b_2x^2+...+b_ix^i}$ şeklinde çözüm bulunur.

### 3.4.2. İndisel denklemin köklerinin durumlarına göre seri çözümleri

**Teorem:** İndisel denklemin kökleri $r_1$ ve $r_2$ olmak üzere,

i) Kökler arasındaki fark tam sayı ise yani $r_1>r_2$ ve $r_1-r_2\notin Z$ ise tekil nokta $x=x_0$ olmak üzere $y_1(x)=\sum_{n=0}^{k}c_k(x-x_0)^{k+r_1}$ ve $y_2(x)=\sum_{n=0}^{k}c_k(x-x_0)^{k+r_2}$ şeklinde bağımsız iki çözümü vardır. İndisel denklemin farklı köklerinden büyük olanı için elde edilen $y_1(x)$ çözümü denklemin esas çözümü adını alır.

ii) Kökler katlı ise yani $r_1=r_2$ ise $y_1(x)=|x-x_0|^{r_1}\sum_{n=0}^{k}c_k(x-x_0)^k$ ($a_n\neq 0$) olmak üzere $y_1(x)=y(x,r)\big|_{r=r_1}$ ve $y_2(x)=\frac{\partial}{\partial r}y(x,r)\big|_{r=r_1}$ elde edilir. Genel çözüm $y(x)=\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)$ şeklindedir.

Bu durum için alternatif olarak $y_1(x)$ bulunduktan sonra lineer bağımsız diğer çözümü bulmak için parametrelerin değişimi yöntemi kullanılır. $y_2(x)=u(x)y_1(x)$ çözüm kabul edilerek denklemde yerine yazılıp sağladıktan sonra $u(x)$ fonksiyonu bulunur.

$u(x)=\ln x+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3 \dots$ şeklindedir ve bu fonksiyon $y_2(x)$ de yerine yazılırsa $y_2(x)=y_1(x)\ln|x-x_0|+|x-x_0|^{r_1}\sum_{n=0}^{k} c_k(x-x_0)^k$ , $c_0\neq 0$ bulunur.

iii) $r_1>r_2$ ve $r_1-r_2\in Z$ olması durumunda $y_1(x)=|x-x_0|^{r_1}\sum_{n=0}^{k} c_k(x-x_0)^k$ ( $a_n\neq 0$ ) ve $y_2(x)=|x-x_0|^{r_2}\sum_{n=0}^{k} c_k(x-x_0)^k+\alpha y_1(x)\ln|x-x_0|;c_0\neq 0$ şeklinde bulunup genel çözüm $y(x)=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)$ dir. Burada $y_2(x)=\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)y(x,r)\right]_{r=r_2}$ ya da $y_2(x)=\left.\frac{\partial y_1}{\partial r}\right|_{r=r_2}$ şeklinde bulunabilir [11].

Verilen diferansiyel denklemin Pade yaklaşımı ile düzgün tekil noktaya seri yaklaşımı yapılırken sadece $y=\sum_{i=0}^{m} c_i x^i=\dfrac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{1+\sum_{i=1}^{n} b_i x^i}$ rasyonel serisinin verilen mertebeye göre açılımı yapılırken

$$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_mx^m}{1+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n}$$

ifadesi kullanılır. Diğer tüm seri çözüm aşamaları yukarıda anlatıldığı şekildedir.

Örneğin; çözümü istenilen denklem 2.mertebe ise r sayısı, yukarıda belirtilen $r$ lerin durumuna göre bulunur ve $y=\dfrac{(a_0+a_1x+a_2x^2)x^r}{1+b_1x+b_2x^2}$ şeklinde türevler alınarak çözüme ulaşılmaya çalışılır.

Pade ile elde edilen çözüm fonksiyonları diferansiyel denklemin tam çözümleri değil çözüm fonksiyonuna belirtilen koşullardaki yaklaşık çözümlerdir.

ÖRNEK: $x^2y''+xy'-y=0$ denkleminin $x=0$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{x}{x^2}=1\in R$$

olup $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır.

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{-1}{x^2}=-1\in R$$

İndisel denklem : $\begin{matrix} r(r-1)-r+r-1=0 \\ r^2-1=0 \end{matrix}$ ve $\begin{matrix} r=1 \\ r=-1 \end{matrix}$ bulunur.

O halde ;

$r_1=1$ için

$$[2/1]=y=\frac{\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)x^{r_1}}{1+b_1x^1}\Rightarrow \boxed{y(x)=\frac{\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)x}{1+b_1x}}$$

$r_2=-1$ için

$$[2/1]=y=\frac{\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)x^{r_2}}{1+b_1x}$$

$$\Rightarrow y_2(x)=\frac{\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)x^{-1}}{1+b_1x}\Rightarrow \boxed{y(x)=\frac{\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)}{x+b_1x^2}}$$

$r_1=1$ için $y_1(x)$ çözümünü inceleyelim.

$$[2/1]=y_1(x)=\frac{\left(a_0x+a_1x^2+a_2x^3\right)}{1+b_1x}$$

$$\to y'=\frac{(a_0+2a_1x+3a_2x^2)(1+b_1x)-(b_1)(a_0x+a_1x^2+a_2x^3)}{(1+b_1x^2)^2}$$

$$=\frac{a_0+2a_1x+3a_2x^2+a_0b_1x+2a_1b_1x^2+3a_2b_1x^3-a_0b_1x-a_1b_1x^2-a_2b_1x^3}{(1+b_1x^2)^2}$$

$$=\frac{a_0+2a_1x+(3a_2+a_1b_1+2a_2b_1)x^2}{(1+b_1x^2)^2}$$

$$\to y'' = \frac{\left(2a_1 + 2(3a_2 + a_1b_1 + 2a_2b_1)x\right)(1+b_1x^2)^2 - 4b_1x(1+b_1x^2)\left(a_0 + 2a_1x + (3a_2 + a_1b_1 + 2a_2b_1)x^2\right)}{(1+b_1x^2)^4}$$

$$= \frac{\left(2a_1 + (6a_2 + 2a_1b_1 + 4a_2b_1)x\right)(1+b_1x^2) - 4b_1x\left(a_0 + 2a_1x + (3a_2 + a_1b_1 + 2a_2b_1)x^2\right)}{(1+b_1x^2)^3}$$

$$= \frac{2a_1 + 6a_2x + 2a_1b_1x + 4a_2b_1x + 2a_1b_1x^2 + 6a_2b_1x^3 + 2a_1b_1^{\,2}x^3 + 4a_2b_1^{\,2}x^3 - 4a_0b_1x - 8a_1b_1x^2 - 12a_2b_1x^3 - 4a_1b_1^{\,2}x^3 - 8a_2b_1^{\,2}x^3}{(1+b_1x^2)^3}$$

$$= \frac{2a_1 + (6a_2 + 2a_1b + 4a_2b_1 - 4a_0b_1)x + (-6a_1b_1)x^2 + (-6a_2b_1 - 2a_1b_1^{\,2} - 4a_2b_1^{\,2})x^3}{(1+b_1x^2)^3}$$

elde edilir. Şimdi $y'', y'$ ve $y$ ifadelerini diferansiyel denklemde yerine yazılırsa ve

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{2a_1 + (6a_2 + 2a_1b_1 + 4a_2b_1 - 4a_0b_1)x + (-6a_1b_1)x^2 + (-6a_2b_1 - 2a_1b_1^{\,2} - 4a_2b_1^{\,2})x^3}{(1+b_1x^2)^3}$$

$$+ \frac{1}{x}\frac{a_0 + 2a_1x + (3a_2 + a_1b_1 + 2a_2b_1)x^2}{(1+b_1x^2)^2} - \frac{\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right)x}{1+b_1x} = 0$$

ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$= 4a_1 + a_0b_1 + x(6a_2 + 5a_1b_1 + 6a_2b_1 - 4a_0b_1 - a_0) + x^2(-6a_1b_1 - 2a_0b_1 + 3a_2b_1 + 2a_2b_1^{\,2} + a_1b_1^{\,2} - a_1)$$
$$+ x^3(-2a_1b_1 - a_0b_1^{\,2} - 6a_2b_1 - 4a_2b_1^{\,2} - 2a_1b_1^{\,2} - a_2) + x^4(-2a_1b_1 - a_1b_1^{\,2}) - x^5a_2b_1^{\,2} = 0$$

elde edilir. Katsayılar sıfıra eşitlenirse,

$\boxed{1} \to -2a_1b_1 - a_1b_1^{\,2} = 0 \Rightarrow b_1(-2a_1 - a_1b_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2a_1 - a_1b_1 = 0$ ise $\boxed{b_1 \neq 0}$ ve

$$\boxed{b_1 = \frac{-2a_2}{a_1}}$$

$$\boxed{2} \to 4a_1 + a_0b_1 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{-4a_1}{a_0}}$$

$$\boxed{3} \to 6a_2 + 5a_1b_1 + 6a_2b_1 - 4a_0b_1 - a_0 = 0$$

$$\boxed{4} \to -6a_1b_1 - 2a_0b_1 + 3a_2b_1 + 2a_2b_1^{\,2} + a_1b_1^{\,2} - a_1 = 0$$

$$\boxed{5} \to -2a_1b_1 - a_0b_1^{\,2} - 6a_2b_1 - 4a_2b_1^{\,2} - 2a_1b_1^{\,2} - a_2 = 0$$

$\boxed{3}$. ifadeyi 2 ile çarparak $\boxed{4}$. ifade ile toplanırsa,

$$-14a_1b_1 - 4a_0b_1 - a_0b_1^{\,2} - 2a_1 - a_2 = 0$$

elde edilir. Burada,

$$a_0 b_1 = -4a_1$$

$$\frac{-4a_0}{5} = -4a_1 \quad , \quad b_1 = \frac{-2a_2}{a_1} = \frac{\frac{-2a_0}{6}}{\frac{-5a_0}{12}} \Rightarrow \boxed{b_1 = -\frac{4}{5}} \quad \text{ve} \quad \boxed{a_2 = \frac{a_0}{6}}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{a_0}{5}}$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$-4a_2 - 2a_1 - \frac{a_0}{6} = 0$$

$$-24a_2 - 12a_1 - a_0 = 0$$

$$-24\left(\frac{a_0}{6}\right) - 12a_1 - a_0 = 0$$

$$-5a_0 = 12a_1$$

$$\boxed{a_1 = \frac{-5a_0}{12}}$$

elde edilir. Buradan $r = 1$ için genel çözüm:

$$y = \frac{\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) x^{r_1}}{1 + b_1 x^1} \Rightarrow \boxed{y(x) \cong \frac{\left(a_0 + \frac{a_0}{5} x + \frac{a_0}{6} x^2\right) x}{1 - \frac{4}{5} x} \cong \frac{a_0\left(1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{6} x^2\right)}{\frac{1}{x} - \frac{4}{5}}}$$

genel çözümü elde edilir. $r = -1$ için genel çözüm arandığında,

$$y = \frac{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) x^{-1}}{1 + b_1 x}$$

$$y' = \frac{\frac{-a_0}{x^2} - \frac{2a_0 b_1}{x} - a_1 b_1 + a_2}{(1 + b_1 x)^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{2a_0}{x^3} + \frac{6a_0 b_1}{x^2} + \frac{6a_0 b_1^2}{x} + 2a_1 b_1 - 2a_2 b_1}{(1 + b_1 x)^3}$$

ifadeleri denklemde yerine yazılırsa,

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{\frac{2a_0}{x^3} + \frac{6a_0 b_1}{x^2} + \frac{6a_0 b_1^2}{x} + 2a_1 b_1 - 2a_2 b_1}{(1 + b_1 x)^3} + \frac{1}{x}\left(\frac{\frac{-a_0}{x^2} - \frac{2a_0 b_1}{x} - a_1 b_1 + a_2}{(1 + b_1 x)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{x^2}\left(\frac{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) x^{-1}}{1 + b_1 x}\right) = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{a_0}{x^3}+\frac{1}{x^2}\left(3a_0b_1-a_1\right)+\frac{1}{x}\left(4a_0b_1^{\;2}\right)+x\left(-a_0-a_2b_1^{\;2}\right)+x^2\left(-2a_0b_1\right)-3a_2b_1=0$$

elde edilir. Katsayılar sıfıra eşitlenirse,

$\boxed{1}\rightarrow a_2b_1=0\Rightarrow b_1=0$ ise $a_2\neq 0$ dır.

$\boxed{2}\rightarrow a_0b_1=0\Rightarrow b_1=0$ ise $a_0=0$ elde edilir. Bu sonuca,

$+3/\,a_2b_1-a_0b_1=0$

$+1/\,3a_0b_1-a_1=0$ şeklinde taraf tarafa toplanırsa,

$3a_2b_1-a_1=0\Rightarrow \boxed{b_1=\dfrac{a_1}{3a_2}}$ bulunur ki bu da $a_1=0$ olduğunu gösterir.

$\boxed{3}\rightarrow 3a_0b_1-a_1=0$ olduğu görülür.

$r=-1$ için genel çözüm $y\cong a_0+a_1x+a_2x^2\Rightarrow y\ ;\ a_0+a_0x^2+a_1x\Rightarrow \boxed{y\cong a_0(1+x^2)+a_1x}$ şeklinde bulunur. O halde çözümler bir araya getirilirse,

$r_1=1$ için çözüm: $y_1=\dfrac{a_0\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x^2\right)x^{r_1}}{\frac{1}{x}-\frac{4}{5}}$

$r_2=-1$ için çözüm: $y_2=\dfrac{\left(a_2x^2\right)x^{r_2}}{1}(a_0,a_1,b_1=0)$

$y_2=a_2x^{2+r_2}$

Genel çözüm:

$$y=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$$

$$y_1=\frac{a_0\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x^2\right)x^{r_1}}{\frac{1}{x}-\frac{4}{5}}$$

$$y_2=a_2x^{2+r_2}+\frac{a_0x^{r_1}\ln x\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x^2\right)}{\frac{1}{x}-\frac{4}{5}}\Rightarrow y_2=a_2x+\frac{a_0x\ln x\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x^2\right)}{\frac{1}{x}-\frac{4}{5}},(r_1=1,r_2=-1)$$

şeklinde elde edilir.

Ek olarak, $r=-1$ elde edilen çözümü,

$$y_2 = a_2 x$$
$$y_2' = a_2$$
$$y_2'' = 0$$

şeklinde türevleri ile diferansiyel denklemde yerine yazılırsa $y_2 = a_2 x$ çözümünün,

$$x^2 y_2'' + x y_2' - y_2 = 0 \rightarrow \quad \begin{array}{l} 0 + x a_2 - x a_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

şeklinde diferansiyel denklemi sağladığı görülür. $r_2$ için de sağladığı benzer şekilde gösterilebilir.

ÖRNEK: $x^2 y'' - x y' + y = 0$ denkleminin $x=0$ civarında genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklem düzenlenirse $y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$ elde edilir. Burada,

$$\begin{array}{l} P(x) = \dfrac{-1}{x} \\ Q(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} xP(x) = -1 \\ x^2 Q(x) = 1 \end{array} \Rightarrow x = 0 \text{ da düzgün tekil noktadır.}$$

İndisel denklem:

$$\begin{array}{l} r(r-1) - r + 1 = 0 \\ r^2 - 2r + 1 = 0 \\ (r-1)^2 = 0 \end{array} \Rightarrow r_1 = r_2 = 1 \text{ katlı kökü elde edilir.}$$

Şimdi diferansiyel denklemin genel çözümüne ulaşmak için $[2/1] = y = \dfrac{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)x}{1 + b_1 x}$ nin türevlerini bulalım:

$$y = \frac{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)x}{1 + b_1 x} = \frac{a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3}{1 + b_1 x}$$

$$y' = \frac{a_0 + 2a_1 x + (3a_2 + a_1 b_1)x^2 + 2a_2 b_1 x^3}{(1 + b_1 x)^2}$$

$$y'' = \frac{2a_1 - 2a_0 b_1 + 6a_2 x + 6a_2 b_1 x^2 + 2a_2 b_1^2 x^3}{(1 + b_1 x)^3}$$

bulunur ve bu türevler denklemde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-4a_1 - 3a_0 b_1 + 18a_2 b_1 + (3a_2 - 3a_1 b_1 + 20a_2 b_1^2)x + (3a_2 b_1 - 2a_1 b_1 + 3a_1 b_1^2 + 6a_2 b_1^3)x^2 + 2a_2 b_1^3 x^3 = 0$$

$\boxed{1} \rightarrow a_2 b_1^3 = 0 \Rightarrow\ b_1 = 0 \Rightarrow a_2 \neq 0$ dır.

$\boxed{2} \rightarrow -4a_1 - 3a_0 b_1 + 18a_2 b_1 = 0$

$\boxed{3} \rightarrow 3a_2 - 3a_1 b_1 + 20a_2 b_1^2 = 0$

$\boxed{4} \rightarrow 3a_2 b_1 - 2a_1 b_1 + 3a_1 b_1^2 + 6a_2 b_1^3 = 0$

$\rightarrow b_1(3a_2 - 2a_1 + 3a_1 b_1 + 6a_2 b_1^2) = 0$

$\rightarrow b_1 = 0, 3a_2 - 2a_1 + 3a_1 b_1 + 6a_2 b_1^2 \neq 0$

$\rightarrow 3a_2 - 2a_1 = 0$

$\rightarrow \boxed{a_2 = \frac{2}{3} a_1}$

O halde $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ biçimindeki genel Pade çözüm fonksiyonu,

$$[2/1] = y_1 = \frac{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)x}{1 + b_1 x} = \frac{(a_0 + kx + \frac{2}{3}kx^2)x}{1}$$

$$y_1 = a_0 x + kx^2 + \frac{2}{3}kx^3$$

$$y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial r} = a_0 + 2kx + 2kx^2$$

$$y \cong a_0 x + kx^2 + \frac{2}{3}kx^3 + a_0 + 2kx + 2kx^2$$

$$\boxed{y \cong a_0 + (a_0 + 2k)x + 3kx^2 + \frac{2}{3}kx^3}$$

şeklinde elde edilir.

$b_1 \neq 0 \Rightarrow a_2 = 0$ durumunu alınırsa,

$\boxed{2} \rightarrow -4a_1 - 3a_0 b_1 + 18a_2 b_1 = 0$

$\boxed{3} \rightarrow 3a_2 - 3a_1 b_1 + 20a_2 b_1^2 = 0$

$\rightarrow a_1 b_1 = 0$

$\boxed{4} \rightarrow 3a_2 b_1 - 2a_1 b_1 + 3a_1 b_1^2 + 6a_2 b_1^3 = 0$

$\rightarrow a_1 b_1 (2 - 3b_1) = 0$

$\rightarrow a_1 b_1 = 0, b_1 = \dfrac{2}{3}, a_1 = 0$

$$[2/1] = y_1 = \frac{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)x}{1 + b_1 x} = \frac{a_0 x}{1 + \frac{2}{3}x}$$

$$y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial r} = \frac{a_0 x}{1 + \frac{2}{3}x} \frac{a_0\left(1 + \frac{2}{3}x\right) - \frac{2}{3}a_0 x}{\left(1 + \frac{2}{3}x\right)^2} = \frac{a_0}{\left(1 + \frac{2}{3}x\right)^2}$$

$$\boxed{y \cong \frac{a_0 x}{1 + \frac{2}{3}x} + \frac{a_0}{\left(1 + \frac{2}{3}x\right)^2}}$$

şeklinde genel Pade çözüm fonksiyonu elde edilir.

ÖRNEK: $\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + 20y = 0$ diferansiyel denklemini $x = 1$ noktasındaki seri çözümünün karakterini ve genel çözümünü elde etmede kullanılacak denklemleri belirleyiniz.

Çözüm: Öncelikle $\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + 20y = 0$ diferansiyel denklemi $P_n(x) = \left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + n(n-1)y = 0$ genel Legendre diferansiyel denkleminin $P_4(x)$ özel çözümünü ifade eder.

İlk olarak kullanılması gereken Pade yaklaşım türü ve indisel denklem bulunur.

$x = 1$ için Pade seri çözümünde $y = [2/1] = \dfrac{a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2}{1 + b_1(x-1)}$ yaklaşımını kullanılır.

$$y''+\frac{2x}{x^2-1}y'-\frac{20}{1-x^2}y=0$$

$$P(x)=\frac{2x}{1-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad p_0=\lim_{x\to1}(x-1)\frac{2x}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{-2x}{1+x}=-1\in R$$

$$Q(x)=\frac{20}{1-x^2} \qquad\qquad q_0=\lim_{x\to1}-(x-1)^2\frac{20}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{20(x-1)}{x+1}=0\in R$$

Burada $x=1$ düzgün tekil noktadır. İndisel denklem ve kökleri,

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} r(r-1)-r=0 \\ r^2-2r=0 \\ r(r-2)=0 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} r_1=0 \\ r_2=2 \end{array}$$

şeklinde aralarındaki fark tam sayı olan iki farklı kök elde edilir. İndisel kök bulma durumlarındaki iii) durumu göz önüne alınır.

O halde,

$r_1=0$ için , $$y=\frac{\left(a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2\right)x^0}{1+b_1(x-1)}$$

$r_2=2$ için , $$y=\frac{\left(a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2\right)x^2}{1+b_1(x-1)}$$

denklemleri kullanılarak yukarıdaki örneklerde uygulanan işlem sıraları ile yaklaşık genel çözüme ulaşılabilir.

# BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Pade yaklaşımı iki polinomun birbirine oranı olarak ifade edilir. Pay ve paydadaki polinomlar Taylor seri açılımından faydalanılarak oluşturulur. Bu çalışmada farklı polinom tiplerinde Pade uygulaması incelenmiştir. Bu polinomun pay ve paydasındaki dereceler bize verilen diferansiyel denklemin mertebesine göre alınmaktadır. Mertebenin pay ve payda derecesini belirlemesi arasındaki ilişki örneklerle incelenmiş, Taylor çözümü ile kıyaslanarak benzer fakat Taylor'a göre daha geniş çapta genel çözüme ulaşıldığı belirlenmiştir.

Örneğin; payı $m$ . dereceden paydası n. dereceden olan bir

$$\left[m/n\right]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{1+\sum_{i=1}^{n} b_i x^i} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n}$$

şeklindeki Pade yaklaşımı 2. mertebe diferansiyel denklemlerin adi ve düzgün tekil noktalarında çözüm arandığında,

$$\left[2/2\right] = y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2} \qquad \text{ve} \qquad \left[2/1\right] = y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x}$$

açılımları ile genel çözüme ulaşılabilir. Ancak, 2.mertebe diferansiyel denklemler için $[2/1]_{f(x)}$ Pade yaklaşımı katsayıları bulma ve işlem yürütülebilmesi açısından daha net bir genel çözüm vermiştir. Aynı zamanda her düzgün tekil nokta için kök durumlarına göre kısıtlanmış denklemler elde edip ve farklı genel çözümler elde edildiği görülmüştür.

Yaklaşım yapılacak fonksiyonun türevlenebilir olması ve yakınsak olması analitik olmasını sağlar. Ancak fonksiyonun değeri bir noktada sonsuza gidiyorsa analitik olmayıp sürekliliğini de etkilemektedir. Yani bir noktada analitik olan bir fonksiyon sürekli olmak zorunda değildir. Ama bu durum fonksiyona Pade ile yaklaşılarak fonksiyonun genel çözümünde Taylor a göre hızlı büyüme yapabileceği bir çözüm vermesi yada daha kısa çözüm vermesi söz konusu olabilir. Taylor ile aralarında benzer bir yaklaşım vardır.
Pade yaklaşımı yöntemi matematikte Taylor, Maclourin, Bessel, Laplace gibi birçok özel denklemler üzerinde uygulanabilir. Bu çalışmada Lagrange interpolasyonu üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

Pade yaklaşımı genellikle fonksiyonun Taylor serisini kesmeden daha iyi bir yaklaşım sağlar ve Taylor serisinin yakınsamadığı yerlerde işe yaramaya devam edebilir. Özellikle üstel fonksiyonların Pade çözümünde kalıntı hatayı en aza indirebilir. Son aşamada en küçük derecenin bilinmeyen katsayıları 0 a eşitlenerek bulunan rekürans denklemiyle çözüme ulaşırken de hata en aza indirilebilir ve Pade yaklaşık çözümleri elde edilebilir.

Pade yaklaşımının uygulanabilirliği birçok diferansiyel denklem üzerinde çalışılmaya ve genişletilmeye müsait bir yöntemdir. Mühendislik ve kimya alanlarında da tercih edilmektedir. Dezavantajı olarak; Polinomlar salınım yapabilirler. Bu da hata payında değişkenlik gösterir. Pade yi oluşturan pay ve payda polinomlarının derecelerinde doğru kısıtlamalar yapılırsa hata payında da olumlu değişmeler olabilir.

# KAYNAKLAR


[1] Brezinski, History of Continued Fractions and Pade Aproximants Springe Verlag, New York, 1980.

[2] Olds, C.D: Continued Fractions Random House, New York, 1963.

[3] Epperson, J. F: Introduction to Numerical Methods and Analysis, 2001.

[4] G.A Baker, P. Graves Morris, Pade Approximants, Part I-II, Encyclopedia of Mathematics and its Aplications, 13, Addison Wesley Publishing Co, 1981.

[5] G.A Baker, Essentials of Pade Approximants Academic Press, New York, 1975.

[6] Brezinski, Pade Approximants, 37-63, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1983.

[7] Kallrath, On Rational Function Techniques and Pade Approximants, Germany, 2002.

[8] Ö. F. Gözükızıl, İ. Şiap, Diferansiyel Denklemler, Sakarya Kitabevi, 2002.

[9] R. Burden, Numerical Analysis, Brooks Cola Cengage Learning Boston, 2009.

# ÖZGEÇMİŞ

Özlem Kırat, 1992 yılının eylül ayında Niğde' de doğdu. İlk ve ortaokulu İstanbul'da tamamlayıp 2010 yılında İstanbul'da liseyi tamamladı. Aynı yıl Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 2015 yılında Pedagojik Formasyon Eğitimi'ni yine Niğde'de tamamlayarak, matematik bölümünden mezun oldu. 2017-2019 yılları arasında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik anabilim dalında yüksek lisansını tamamladı. Özlem Kırat bundan sonraki süreç için akademisyenlik üzerine gerekli sınav çalışmalarını devam ettirmektedir.