T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÖRÜNÜRDE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELLERİNDE ÖN TAHMİN EDİCİLERİN KOVARYANS MATRİSLERİ İÇİN BAZI EŞİTLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nevin YÜCE

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nesrin GÜLER

Eylül 2020

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Nevin YÜCE

02.09.2020

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e teşekkürlerimi sunarım.

Anlayış ve yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e, her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^{n\times 1}$	: n boyutlu reel vektör kümesi
$\mathbb{R}^{m\times n}$	: mxn boyutlu reel matris kümesi
$x, y, z, \ldots$	: Vektörler
A, B, C	: Matrisler
$A = (a_{ij})$	: Elemanları (a_{ij}) olan A matrisi
I_n	: nxn boyutlu birim matris
A'	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^{+}	: A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi
$A^{\perp}$	: A matrisinin dik izdüşüm matrisi
P_A, E_A, F_A	: A matrisinin izdüşüm matrisleri
$\mathcal{C}(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$A \otimes B$	: A ve B matrislerinin kroneker çarpımı
$[A \quad B]$	: Parçalanmış matris
$Cov(.)$	: Kovaryans operatörü
$E(.)$	: Beklenen değer operatörü
■	: İspat sonu
BLUE	: En iyi lineer yansız tahmin edici (Best linear unbiased estimator)
BLUP	: En iyi lineer yansız ön tahmin edici (Best linear unbiased predictor)
SUR	: Görünürde ilişkisiz regresyon (Seemingly unrelated regression)

ÖZET

Anahtar kelimeler: BLUE, BLUP, kovaryans matris, rank, SUR model

Görünürde ilişkisiz regresyon (SUR) modelleri denklemler arasındaki hataların ilişkili olduğu çoklu regresyon denklemlerinin ele alındığı lineer regresyon modellerinin uzantılarıdır. Bu çalışmada, iki SUR model ve bu modellerin blok matrisler kullanılarak birleştirilmesi ile elde edilen genel lineer modeli ele alınmıştır. Ele alınan modeller altında ön tahmin problemi incelenmiştir. İki SUR modeli ve bu modellerin genel modeli altında tüm bilinmeyen vektörlerin en iyi lineer yansız ön tahmin edicilerinin (BLUP'larının) istatistiksel özellikleri üzerine çeşitli sonuçlar verilmiştir. Özellikle, matrislerin bazı rank formülleri kullanılarak ele alınan modeller altında BLUP'ların kovaryans matrisleri üzerine bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın ilk bölümü giriş bölümüdür. Bu bölümde, konu ve konunun önemi hakkında bazı bilgiler verilmiştir. Ayrıca SUR modelleri ile ilgili literaturde mevcut olan bazı çalışmalardan söz edilmiştir. Çalışma boyunca kullanılan bazı teorem, kavram ve özellikler ikinci bölümde yer almaktadır. Çalışmanın üçüncü bölümünde SUR modelin tanımı, matematiksel olarak ifadesi ve özellikleri verilmiştir. Ele alınan modeller altında, bir genel lineer fonksiyonun tahmin edilebilirliği incelenmiş ve ayrıca tahmin ve ön tahmin ediciler açıklanmıştır. Dördüncü bölüm ana sonuçları içeren bölümdür. Bu bölümde, ele alınan modeller altında ortak bilinmeyen vektörlerin BLUP'ları ve onların kovaryans matrisleri ile ilgili bazı eşitlikler matrislerin rankları ile ilgili bazı temel özellikler kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca ele alınan modeller altında özel durumlara karşılık gelen sonuçlar verilmiştir. Son bölüm sonuç ve tartışmalar bölümüdür.

SOME EQUALITIES FOR THE COVARIANCE MATRICES OF PREDICTORS IN SEEMINGLY UNRELATED REGRESSION MODELS

SUMMARY

Keywords: BLUE, BLUP, covariance matrix, rank, SUR model

Seemingly unrelated regression (SUR) models are extensions of linear regression models by considering multiple regression equations with correlated errors among equations. In this study, two SUR models are considered with their general linear models which is obtained from combining the models by using block matrices. The prediction problem is examined under considered models. Several results are given on statistical properties of the best linear unbiased predictors (BLUPs) of all unknown vectors under two SUR models and under their general model. Especially, some results established on covariance matrices of BLUPs under two models by using some rank formulas of matrices.

The study consists of five sections. The first part of the study is the introduction. Some information about the subject and its importance are given in this section. Some of the existing work related to SUR models considered before in the literature are also discussed. Some theorems, concepts and properties used throughout the study are given in the second section. In the third section of the study, definition, mathematical expression and properties of SUR models are given. The predictability of a general linear function under considered models is examined and in addition, estimators and predictors are described. The fourth section contains the main results. In this section, some equalities are obtained related to BLUPs of joint unknown vectors and their covariance matrices under considered models by using some basic properties related to ranks of matrices. The results corresponding to the special cases are also given. The last section is the conclusion and discussions section.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İstatistik, rasgelelik içeren olaylar, süreçler, sistemler hakkında modeller kurmada, gözlemlere dayanarak bu modellerin geçerliliğini sınamada ve modellerden sonuç çıkarmada gerekli bazı bilgi ve yöntemleri içeren bilim dalıdır (Öztürk, 2011).

Günümüzde, teknolojinin gelişmesi ile birlikte veri sayısı giderek çoğalmaktadır. Bu durum birçok detay içeren sorunları beraberinde getirmektedir. Bununla birlikte az verinin olduğu problemlerde ele alınmakta ve bu durum karmaşık bazı işlemlere yol açmaktadır. Tüm bu durumlar, incelenmesi gereken sistemlerin özelliklerine ve amaçlarına bağlı olarak farklılık göstermektedir. Bu farklılıklardan meydana gelen detaylı sorunları kolay, anlaşılabilir seviyede tutmak ve açıklamak, birbirinden bağımsız gibi görünen olaylar arasında ilişki kurmak zamanla daha da önemli bir hal almıştır. Bu karmaşık yapıya sahip sistemlerin, varlıkların ve süreçlerin incelenip araştırılması, gerçeğe uygun bir takım kanun ve kurallara dayanan varsayımlarla basitleştirilmesi model kavramı, başka bir deyişle modelleme üzerinden yapılmaktadır.

Karmaşık yapıda, az ya da çok sayıda veri ile karşılaşılması durumları göz önüne alındığında verilerin özelliklerini incelemek ve aralarındaki ilişkilere ait oluşturulan modellerdeki parametreler için tahmin tekniklerini kullanmak önem kazanmıştır. Parametrelerin uygun tahminlerini belirlemek için farklı ölçütler vardır. Örneğin, tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmak için sıklıkla kullanılan ve iyi bilinen ölçütlerden biri hata kareler ortalaması olarak bilinen kovaryans matris karşılaştırmasına dayanan ölçüttür. Ayrıca büyük örnekler söz konusu olduğunda bazı asimptotik özellikler dikkate alınır. Bu durum asimptotik etkinlik olarak düşünülebilir ve veri sayısının sonsuza gitmesi durumunda tahmin edicilerin etkin olması şeklinde ifade edilebilir (Kmenta, 1986, s. 52).

Görünürde ilişkisiz regresyon (SUR) modelleri, regresyon denklemleri arasında ilişkili hataların olduğu lineer regresyon modellerinin bir uzantısıdır. Günlük hayatta karşımıza çıkan problemlerde veriler arasında birtakım ilişkilerin olması veya ilişkilerin beklenmesi doğaldır. Başka bir deyişle, veriler arasında ilişki olmadığı varsayımı çoğu zaman gerçek hayata uymaz. Bu noktada SUR denklemleri içeren model ve bu modelin parametre tahminleri önemli bir rol üstlenir. SUR modelleri adından da anlaşılacağı gibi klasik tahmin yöntemlerinden farklı temellere dayanmaktadır. Bu nedenlerden dolayı, farklı amaçlar için farklı durumlarda kullanılabilmektedir. SUR modelin özelliği verilerin istatistiksel ilişkileri arasında varolabilen sezilmesi zor etkileşimleri mümkün olduğunca hesaba katmasıdır (Srivastava ve Giles, 1987). Yani bu modeller birbirinden bağımsız olarak düşünebilen ve istatistiksel yöntemler kullanarak açıklanabilen olaylar arasında, etkileşim olabileceğini kabul eder. Bu etkileşim farklı metotlar kullanılarak tespit edilebilir ve sonrasında bu modeller altında bilinmeyen parametreler farklı tahmin yöntemleri ile tahmin edilebilir. Belli bir dönemde aynı sektördeki bazı şirketlerdeki yatırımlar üzerine yapılan bir çalışma bu modeller için bir örnek olarak verilebilir. Her şirket aynı sektörden geldiğinden ve aynı dönemlerde ele alındığından dolayı benzer faktörlerden etkilenebilir. Bu durumda, her bir şirket için dikkate alınan modeller kümesinin hata terimleri eş zamanlı olarak ilişkilendirilebilir. Yani tamamen veya çoğu aynı olacak şekildeki verileri kullanan lineer regresyon modelleri arasında ilişkili hatalar olabilir. Böylece modelleri ayrı ayrı ele almak yerine, model grubuna bir yaklaşım benimsemek çoğu zaman daha doğru ve etkili bir yoldur.

SUR modelleri ilk olarak Zellner (1962) tarafından önerilmiştir. Zellner çalışmasında bu modellerin temelini oluşturmuş ve SUR modelin parametrelerinin asimtotik etkinliğinin diğer metotlarla karşılaştırmasını yaparak bu modellerin uygulamasını vermiştir. Zellner (1962, 1963) ile Zellner ve Huang (1962), ilişkili hatalara sahip çoklu denklemleri birleştirerek sistemdeki bilinmeyen katsayılar için tahmin yöntemi önermişlerdir. Daha sonra Kmenta ve Gilbert (1968) tarafından farklı tahmin ediciler geliştirilip, tartışılmıştır. Kmenta (1986, s. 517) zaman serisi üzerinde yapılan gözlemlerle, farklı endüstriler için üretim fonksiyonları veya çeşitli mallar için talep fonksiyonlarının SUR modelin örnekleri olacağını belirtmiş ve General Electric ile Westinghouse firmalarının yatırımlarını SUR modeli kullanarak bir arada ele almıştır. Bu modeller sosyoloji, iktisat, sağlık ve fen bilimleri gibi birçok alanda uygulama alanına sahiptir. Özellikle istatistik ve ekonometri literaturünde teorik ve uygulamalı olmak üzere, bu modellerle ilgili birçok çalışmaya rastlamak mümkündür. Örnek olarak, Theil (1971), Rao (1974), Phillips (1977), Dwiwedi ve Srivastava (1978), Baksalary ve Kala (1979), Srivastava ve Raj (1979), Srivastava ve Giles (1987), Baksalary ve Trenkler (1989), Foschi ve Kontoghiorghes (2002), Liu (2002), Qian (2008), Sun ve ark. (2014) ve Gong (2019) çalışmaları verilebilir.

İstatistiksel sonuçlar elde edilirken lineer regresyon modellerinin bilinmeyen parametre vektör tahminleri karşımıza çıkan klasik kavramlardır. Doğrusal regresyon modellerden istatistiksel sonuçlar çıkarılırken, modellerdeki bilinmeyen tüm vektörler çeşitli yöntemlerle tahmin edilebilir. Parametre tahminleri için farklı ölçütler ve dolayısı ile farklı tahmin ediciler vardır. İstatistik literaturünde, istatistiksel ve matematiksel açıdan basit özelliklere sahip iyi bilinen ve popüler olan ön tahmin ve tahmin ediciler sırasıyla en iyi lineer yansız ön tahmin edici (BLUP) ve en iyi lineer yansız tahmin edicidir (BLUE'dur). Bunlar sırasıyla, bilinmeyen parametrelerin yansız ön tahmin ve tahmin edicileri arasında Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisine sahip olan ön tahmin ve tahmin ediciler olarak tanımlanır. BLUP ve BLUE'ların kovaryans matrisleri, diğer tip yansız ön tahmin ve tahmin edicilerin kovaryans matrisleri için Löwner sıralamasına göre bir karşılaştırma ölçütü olarak kullanılır. Bu tür tahmin ediciler üzerinde literaturde birçok çalışma bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak, Goldberger (1962), Drygas (1975), Henderson (1975), Rao (1975), Harville (1976), Robinson (1991), Searle (1997), Liu ve Xia (2013), Arendacká ve Puntanen (2015), Tian (2015a, 2015b, 2017a), Tian ve Jiang (2016a) çalışmaları verilebilir. Ayrıca farklı varsayımlar altında BLUP' ların karşılaştırılması üzerine örnek olarak, Haslett ve Puntanen (2010, 2011), Liu ve Wang (2013) ve Dong ve ark. (2014) çalışmaları verilebilir.

Bu çalışmada iki SUR model ele alınmıştır. Bu modeller

$$\mathcal{M}_1\colon \mathrm{y}_1 = \mathrm{X}_1\beta_1 + \varepsilon_1 \text{ ve } \mathcal{M}_2\colon \mathrm{y}_2 = \mathrm{X}_2\beta_2 + \varepsilon_2 \tag{1.1}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\mathrm{y_i} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n_i}\times 1}$, $\mathrm{X_i} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n_i}\times \mathrm{p}}$ ve $\varepsilon_\mathrm{i} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n_i}\times \mathrm{p}}$, $\mathrm{n} = \mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2$, $\mathrm{i} = 1, 2$'dir. Bu iki model blok matrisler yardımı ile birleştirildiğinde, bu modellerin bir genel lineer modeli

$$\mathcal{M}\colon \begin{bmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

olarak veya $\mathrm{y} = \begin{bmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{bmatrix}$ ve $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\mathcal{M}\colon \mathrm{y} = \mathrm{X}\beta + \varepsilon \tag{1.3}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Çalışmada $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında ortak bilinmeyen parametrelerin BLUP'ları ve ilişkili olarak BLUE'ları ile ilgili çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Diğer bir deyişle, bu ön tahmin ve tahmin ediciler SUR modeller üzerinden karakterize edilmiştir. Ayrıca çalışmada elde edilen sonuçlar özel durumlara da indirgenmiştir. Çalışmanın asıl amacı, SUR modeller altında BLUP'lar arasındaki bazı kovaryans matris özelliklerini vermektir. Özellikle, BLUP'lar ve BLUE'lara ait kovaryans matrisleri ile ilişkili bazı eşitlikler elde etmektir.

$\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri yapı olarak benzerlik gösterselerde, bu modeller altında ele alınan ortak bilinmeyen vektörlerin ön tahmin ve tahmin edicileri farklılık gösterir. Dolayısı ile bu ön tahmin ve tahmin edicilerin istatistiksel özelliklerini karşılaştırmak önemlidir. Sonuçlara ulaşılırken matrislerin ranklar ile ilgili bazı özellikleri kullanılmıştır. Kovaryans matrisleri ve ilişkili özellikler elde edilirken matrislerin Moore-Penrose genelleştirilmiş ters matrislerinide içeren karmaşık yapıda matris ifadeleri ile karşılaşılmaktadır. Bu karmaşık yapılı matrisleri ve denklemlerini basitleştirmek ve karakterizasyonlarını yapmak için matris cebirine başvurulmaktadır. Özellikle matrislerin bazı rank formülleri, elde edilen karmaşık yapıları sadeleştirmede oldukça kullanışlıdır. Simetrik matrislerin rankları üzerine daha fazla detay için Tian (2010, 2012), Puntanen ve ark. (2011), Tian ve Jiang (2016b) çalışmalarına bakılabilir.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı sonuçlar verilmektedir.

2.1. Matris Cebiri İle İlgili Bazı Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1. $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$ olacak şekilde tümü birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ skalerleri varsa, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörlerinin kümesine lineer bağımlıdır, aksi taktirde lineer bağımsızdır denir (Magnus ve Neudecker, 1988).

Tanım 2.1.2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü için $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen tüm vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $\mathcal{C}(A) = \{y \in \mathbb{R}^{n\times 1} : y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ şeklinde ifade edilir. $\mathcal{C}(A)$, A matrisinin sütunları tarafından üretilir (Venit ve Bishop, 1985; Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.1.3. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin $a_1, a_2, \dots, a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$'in alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $\mathcal{C}(A')$ olarak gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.1.4. A matrisinin sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı, satır uzayının boyutuna ise A matrisinin satır rankı denir (Venit ve Bishop, 1985).

Tanım 2.1.5. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir matrise satır indirgenmiş eşelon biçimdedir denir (Venit ve Bishop, 1985).

a. Tüm elemanları sıfır olmayan herhangi bir satırda, sıfırdan farklı ilk eleman 1'dir (bu eleman 1 baş elemanı olarak adlandırılır).

b. 1 baş elemanını içeren herhangi bir sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır.

c. Sıfırdan farklı eleman içeren herhangi iki satırda, daha büyük numaralı satırın 1 baş elemanı daha sağda bulunur.

d. Sadece sıfır elemanlarından ibaret olan herhangi bir satır, sıfırdan farklı eleman içeren diğer satırlardan daha aşağıdadır.

Tanım 2.1.6. Bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisine uygulanan aşağıdaki işlemlere elementer satır işlemleri denir (Seber, 2008).

a. A matrisinin herhangi iki satırının yer değiştirilmesi,

b. A matrisinin herhangi bir satırının sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılması,

c. A matrisinin herhangi bir satırının belli bir katının diğer bir satıra ilave edilmesi.

Eğer A matrisinin satırları r_i $(1 \leq i \leq m)$ ile gösterilirse, bu durumda yukarıda verilen a, b, c ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

a′. $r_i \leftrightarrow r_j$,

b′. $k \neq 0$ olmak üzere $r_i \rightarrow kr_i$,

c′. $k \neq 0$ olmak üzere $r_i \rightarrow r_j + kr_i$.

Tanım 2.1.7. Bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisine uygulanan aşağıdaki işlemlere elementer sütun işlemleri denir (Seber, 2008).

a. A matrisinin herhangi iki sütununun yer değiştirilmesi,

b. A matrisinin herhangi bir sütununun sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılması,

c. A matrisinin herhangi bir sütununun belli bir katının diğer bir sütununa ilave edilmesi.

Eğer A matrisinin sütunları c_j $(1 \leq j \leq n)$ ile gösterilirse, bu durumda yukarıda verilen a, b, c ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

a'. $c_j \leftrightarrow c_i$,

b'. $t \neq 0$ olmak üzere $c_j \rightarrow tc_j$,

c'. $t \neq 0$ olmak üzere $c_j \rightarrow c_i + tc_j$.

Tanım 2.1.8. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırlarının sayısına A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir (Venit ve Bishop, 1985).

Tanım 2.1.9. Bir $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin satır rankı, sütun rankı ve rankı eşittir (Venit ve Bishop, 1985).

Tanım 2.1.10. $B \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisi, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile B matrisinin satır uzayı aynıdır (Venit ve Bishop, 1985).

Tanım 2.1.11. $A, B \in \mathbb{R}^{mxn}$ olsun. Eğer B matrisi, A matrisinin elementer satır veya sütun işlemleri tarafından elde edilirse, A matrisi B matrisine denktir denir (Seber, 2008).

Teorem 2.1.12. A matrisi B matrisine denk ise $r(A) = r(B)$'dir (Seber, 2008).

2.2. Kuadratik Formlar ve İlgili Bazı Tanımlar

Tanım 2.2.1. $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik bir $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi için

$$Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$$

ifadesi, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ elemanlarının bir kuadratik formudur. Burada A matrisine bu kuadratik formun matrisi denir. Kuadratik form vasıtasıyla aşağıdaki tanımlar verilebilir (Graybill, 1969; Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

a. $\forall y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise A pozitif tanımlıdır.
b. $\forall y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise A negatif tanımlıdır.
c. $\forall y$ için $y'Ay \geq 0$ ise A pozitif yarı-tanımlıdır.
d. $\forall y$ için $y'Ay \leq 0$ ise A negatif yarı-tanımlıdır

Tanım 2.2.2. A ve B simetrik matrisler için $A \succcurlyeq B$ ifadesinde ‘‘$\succcurlyeq$‘‘ ile gösterilen kısmi sıralama Löwner sıralaması olarak tanımlanır (Bhatia, 2007). A uygun boyutlu simetrik matris olsun. A matrisinin pozitif tanımlı, pozitif yarı-tanımlı, negatif tanımlı, negatif yarı-tanımlı matris olduğu, Löwner sıralamasına göre sırasıyla $A \succ 0$, $A \succcurlyeq 0$, $A \prec 0$ ve $A \preccurlyeq 0$ eşitsizlikleri ile gösterilir.

A ve B aynı boyutlu simetrik iki matris olduğunda $A - B$ matrisinin pozitif tanımlı, pozitif yarı-tanımlı, negatif tanımlı, negatif yarı-tanımlı olduğu, Löwner sıralamasına göre sırasıyla $A \succ B$, $A \succcurlyeq B$, $A \prec B$ ve $A \preccurlyeq B$ eşitsizlikleri ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. A ve B pozitif yarı-tanımlı matrisleri için $B - A$ pozitif yarı-tanımlı ise Löwner sıralamasına göre A matrisi, B matrisinden küçüktür denir. $A \preccurlyeq B$ veya $B \succcurlyeq A$ ile gösterilir. Eğer $B - A$ pozitif tanımlı ise, bu durumda A matrisine kesinlikle B matrisinden küçüktür denir. $A \prec B$ veya $B \succ A$ ile gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

2.3. Parçalanmış Matrisler

Tanım 2.3.1. Bir kümenin parçalanmasına benzer olarak bir matrisin parçalanması, orijinal matrisin her bir elemanının, parçalanışın yalnız ve yalnız bir alt matrisine düşecek şekilde karşılıklı ayrık alt matrislerine ayrılmış halidir.

Örneğin, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ifadesi, A matrisinin bir parçalanışıdır. Burada $m_1 + m_2 = m$ ve $n_1 + n_2 = n$ olmak üzere $A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1\times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1\times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2\times n_1}$ ve $A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2\times n_2}$'dir (Seber, 2008).

Daha genel olarak ifade etmek gerekirse, bir matrisin satırları veya sütunları arasına hayali yatay veya dikey çizgiler çizilmesi ile bu matris alt matrislere parçalanabilir. Böylece oluşan matrise parçalanmış matris ve alt matrislere de bloklar denir. Eğer

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1c} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rc} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

matrisi parçalanmış ise, i.satırdaki alt matrisleri $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, \dots, A_{ic}$ olup her birinin satır sayısı eşittir ve benzer şekilde j. sütundaki alt matrisleri $A_{1j}, A_{2j}, A_{3j}, \dots, A_{rj}$ olup her birinin sütun sayısı eşittir. Ayrıca A_{ij} alt matrisi, yukarıdaki parçalanmış matrisin i,j bloğu olarak tanımlanır ve eğer $r = c$ için $i = j$ ise A_{ij} alt matrisine, A matrisinin köşegen bloğu denir (Harville, 1997).

2.4. Matrisin Moore-Penrose Genelleştirilmiş Tersi

Tanım 2.4.1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bir kare matris ve $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ birim matris olmak üzere, $AB = BA = I_n$ olacak şekilde bir $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi varsa, bu durumda B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Tersi olan (tersinir) matrislere düzgün (tekil olmayan) matrisler de denir (Taşçı, 2011).

Tanım 2.4.2. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi için, $AGA = A$ şartını sağlayan $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrisi, A matrisinin genelleştirilmiş tersi olarak tanımlanır ve $G = A^{-}$ ile gösterilir (Seber, 2008).

Teorem 2.4.3. A matrisi için, A^- genelleştirilmiş tersi her zaman vardır, ancak tek değildir (Seber, 2008).

Teorem 2.4.4. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi için, aşağıdaki dört şartı sağlayan tek bir $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrisi vardır. Bu G matrisi A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersidir ve $G = A^+$ ile gösterilir (Harville, 1997).

a. $AGA = A$ (G, A'nın genelleştirilmiş tersidir),
b. $GAG = G$ (A, G'nın genelleştirilmiş tersidir),
c. $(AG)' = AG$ (AG simetriktir),
d. $(GA)' = GA$ (GA simetriktir).

Teorem 2.4.5. $(A')^+ = (A^+)'$'dir (Harville, 1997).

2.5. Lineer Denklem Sistemleri

Tanım 2.5.1. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ler bilinmeyenler, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ve b skaler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.2}$$

şeklindeki denkleme, bir lineer denklem denir. Eğer $b = 0$ ise, bu durumda (2.2) denklemine, bir homejen lineer denklem denir (Taşçı, 2011).

Tanım 2.5.2. Birden fazla lineer denklemden oluşan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklindeki sisteme, lineer denklem sistemi denir. Burada a_{ij} $(1\leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ ve b_i $(1\leq i \leq m)$'ler bilinen sayılar ve x_j $(1 \leq j \leq n)$'ler bilinmeyenlerdir.

Eğer (2.3) sisteminde $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_m = 0$ ise, bu durumda (2.3) lineer denklem sistemine homojen lineer denklem sistemi denir (Taşçı, 2011).

Tanım 2.5.3. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ bilinmeyenli bir lineer denklem sisteminin bir çözümü, sistemin her denklemini $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$, değerleri için aynı anda sağlanacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sayılarının bir kümesine denir. Eğer bir denklem sistemi en az bir çözüme sahipse, bu denklem sistemine tutarlı, aksi takdirde tutarsız denir (Magnus ve Neudecker, 1988).

Lineer denklem sistemleri matris formunda da ifade edilebilir. En genel gösterim $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times t}$ ve $C \in \mathbb{R}^{m\times t}$ bilinen matrisler olmak üzere,

$$AXB = C \tag{2.4}$$

olarak yazılabilir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Tanım 2.5.4. (2.4) matris denklem sistemini sağlayan en az bir $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ matrisi varsa, sistem tutarlıdır denir. Aksi takdirde sistem tutarsızdır (Graybill, 1969).

Teorem 2.5.5. (2.4) matris denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathcal{C}(C) \subset \mathcal{C}(A)$ ve $\mathcal{C}(C') \subset \mathcal{C}(B')$ olmasıdır (Graybill, 1969).

Teorem 2.5.6. (2.4) matris denklem sistem tutarlı ise uygun boyutlu herhangi U ve V matrisleri için

$$X = A^{+}CB^{+} + (I - A^{+}A)U + V(I - BB^{+})$$

ile verilen X matrisi, (2.4) matris denklem sisteminin genel çözümüdür (Graybill, 1969).

Sonuç 2.5.7. (2.4) matris denklem sisteminin tutarlı ise $X = A^{+}CB^{+}$, (2.4) matris denklem sistemi için bir çözümdür (Graybill, 1969).

(2.4) matris denkleminde B yerine I birim matrisi alınırsa, $AX = C$ lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece Teorem 2.5.6'nın daha özel durumu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.5.8. $AX = C$ lineer matris denklem sistemi tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu $r[A \quad C] = r(A)$ veya denk olarak, $AA^{+}C = C$ olmasıdır. Bu durumda, denklemin genel çözümü

$$X = A^{+}C + (I - A^{+}A)U$$

olarak yazılabilir. Burada U keyfi bir matristir (Penrose,1955).

2.6. İzdüşüm Matrisleri

Bir S vektör uzayı, herhangi a ve b reel sayıları için $u, v \in S$ olmak üzere, $au + bv \in S$ olacak şekilde vektörlerin boştan farklı bir kümesidir. Bir u vektörü eğer $u'v = 0$ eşitliğini sağlıyorsa bu vektöre v vektörünün dikidir denir. Eğer bir vektör, S vektör uzayına ait tüm vektörlere dikse bu durumda bu vektör S uzayına diktir. S_1 ve S_2 vektör uzayları olmak üzere eğer S_1 vektör uzayındaki her vektör S_2 vektör uzayına dik (ortogonal) ise o zaman bu iki vektör uzayı birbirine diktir denir. S_1 ve S_2 birbirine dikse, toplamları $S_1 \oplus S_2$ ile gösterilir. Eğer $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^n$ sağlanıyorsa S_1 ve S_2'ye biribirinin dik tümleyeni denir. Bu durumda $S_1 = S_2^{\perp}$ ve $S_2 = S_1^{\perp}$ olarak yazılır. Açıkça bir S vektör uzayı için $(S^{\perp})^{\perp} = S$ dir.

$n \times 1$ boyutlu vektörleri içeren herhangi S vektör uzayı için $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^n$ dir. Bundan dolayı $n \times 1$ boyutlu her v vektörü $v_1 \in S$, $v_2 \in S^{\perp}$ olmak üzere $v = v_1 + v_2$ olarak yazılabilir. Bu iki parça biribirinin dikidir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.6.1. Her $v \in S$ için $Pv = v$ ve $Pv \in S$ ise, P matrisine S vektör uzayı için izdüşüm matrisi denir. Bu durumda Pv tüm v vektörleri için S üzerine izdüşümdür. Herhangi v vektörü için $PPv = Pv$ olduğundan P matrisi, $P^2 = P$ özelliğini sağlar. Yani her izdüşüm matrisi idempotenttir. Eğer P idempotent ise $I - P$ de idempotenttir. $I - P, S^{\perp}$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi olacak şekilde, S vektör uzayının dik izdüşüm matrisi ise, bu durumda P, S vektör uzayı için dik izdüşüm matrisidir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Herhangi bir $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi için $P_A = AA^+$ matrisi $\mathcal{C}(A)$ için bir dik izdüşüm matrisidir. $E_A = A^{\perp} = I_m - AA^+$ ve $F_A = I_n - A^+A$ matrisleri de sırasıyla $\mathcal{C}(A)^{\perp}$ ve $\mathcal{C}(A')^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisleridir (Tian, 2010). Ayrıca $E_A = F_{A'}$ ve $F_A = E_{A'}$ olduğu açıktır. Dik izdüşüm matrislerinin ranklarıyla ilgili $r(E_A) = m - r(A)$ ve $r(F_A) = n - r(A)$ eşitlikleri de mevcuttur (Tian, 2017c).

Teorem 2.6.2. A bilinen bir matris olmak üzere ve AA^+ ve A^+A matrisleri simetrik ve idempotenttir. Bu durumda eğer A simetrik ise $AA^+ = A^+A$'dır. Ayrıca $AA^+A = A$ yazılabilir (Harville, 1997).

2.7. Bir Matrisin Rank İle İlgili Özellikleri

Matrislerin rankları ile ilgili genel özellikler aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 2.7.1. Bir matrisin rankını, elementer satır ya da sütun işlemleri değiştirmez. Bu durum blok matrisler için de geçerlidir (Seber, 2008).

Teorem 2.7.2. $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $B \in \mathbb{R}^{mxk}$, $C \in \mathbb{R}^{lxn}$ ve $D \in \mathbb{R}^{lxk}$ olsun. Bu durumda

a. $r[A \quad B] = r(A) + r(E_AB) = r(B) + r(E_BA)$,

b. $r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)$,

c. $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r(B) + r(E_BAF_C)$,

d. Eğer $\mathcal{C}(\mathrm{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{A})$ ve $\mathcal{C}(\mathrm{C}') \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{A}')$, ise $\mathrm{r}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix} = \mathrm{r}(\mathrm{A}) + \mathrm{r}(\mathrm{D} - \mathrm{CA}^{+}\mathrm{B})$ (Marsaglia ve Styan, 1974).

2.8. Matrislerin Kroneker Çarpımı

Tanım 2.8.1. $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ ve $\mathrm{B} = (\mathrm{b_{ij}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{p}\times\mathrm{q}}$ matrislerinin Kroneker çarpımı $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ ile gösterilir ve

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{11}B} & \mathrm{a_{12}B} & \cdots & \mathrm{a_{1n}B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a_{m1}B} & \mathrm{a_{m2}B} & \cdots & \mathrm{a_{mn}B} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{\mathrm{mp}\times\mathrm{nq}}$'dır. Kroneker çarpıma aynı zamanda matrislerin tensör çarpımı ya da direkt çarpımı da denir (Taşçı, 2011).

Kroneker çarpımın bazı özelliklerini aşağıdaki gibi verilebilir.

a. Genel olarak $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}$ dir.
b. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ile A ve B matrisleri için $(\alpha\mathrm{A}) \otimes \mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes (\alpha\mathrm{B})$ dir.
c. A, B ve C matrisleri için $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C} = \mathrm{A} \otimes (\mathrm{B} \otimes \mathrm{C})$ dir.
d. Uygun boyutlu A, B ve C matrisleri için $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C} = \mathrm{A} \otimes \mathrm{C} + \mathrm{B} \otimes \mathrm{C}$ dir.

2.9. Bir Matrisin Rank İle İlgili Özellikleri

Aşağıdaki tanım ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için örneğin, Seber (1977, 2008), Harville (1997), Puntanen ve ark. (2011) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.9.1. $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ rasgele bir matris olmak üzere, A matrisinin beklenen değeri $\mathrm{E}(\mathrm{A}) = \mathrm{E}\left((\mathrm{a_{ij}})\right)$'dir.

Teorem 2.9.2. A rasgele bir matris, B, C ve D bilinen uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $\mathrm{E}(\mathrm{BAC} + \mathrm{D}) = \mathrm{BE}(\mathrm{A})\mathrm{C} + \mathrm{D}$'dir.

Sonuç 2.9.3. A ve B uygun boyutlu matrisler, X ve Y uygun boyutlu rastgele matrisler olmak üzere, $E(AX + BY) = AE(X) + BE(Y)$'dir.

Tanım 2.9.4. X rastgele vektörünün varyansı, $Var(X) = \sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$dir. Burada, $\mu = E(X)$'dir.

Tanım 2.9.5. X ve Y rastgele vektörleri arasındaki kovaryans, $Cov(X, Y) = \sigma_x = E\big((X - \mu)(Y - v)'\big)$'dir. Burada $\mu = E(X)$, $v = E(Y)$'dir.

Teorem 2.9.6. $A \in \mathbb{R}^{k\times m}$ ve $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ bilinen matrisler, X ve Y rastgele matrisler olsun. Bu durumda aşağıdaki özellik sağlanır.

$Cov(AX, BY) = ACov(X, Y)B'$.

X rastgele matris olmak üzere, $D(X) = Cov(X, X)$ olarak tanımlanır. Teorem 2.2.7'ye göre A bilinen matrisi için $D(AX) = AD(X)A'$ olarak yazılır.

Teorem 2.9.7. $y = X\beta + \varepsilon$ modeli için $E(y) = X\beta$ ve $D(y) = \sigma^2 I$ olmak üzere, $\lambda'\beta$ nin tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter koşul $\lambda' = a'X$ olacak şekilde bir a vektörünün bulunmasıdır.

BÖLÜM 3. SUR MODEL ALTINDA TAHMİN

Bu bölümde, öncelikle görünürde ilişkisiz regresyon yani SUR modeli tanıtılacaktır. Daha sonra SUR modeller altında ön tahmin edilebilirlik ve tahmin edilebilirlik ile ilgili tanımlar verilecektir. Son olarak en iyi lineer yansız ön tahmin edici olan BLUP ve en iyi lineer yansız tahmin edici olan BLUE ile ilgili özelikler detaylı olarak ele alınacaktır.

3.1. SUR Modeli

Regresyon analizi, aralarında sebep sonuç ilişkisi bulunan iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi belirlemek ve bu ilişkiyi kullanarak ele alınan konu ile ilgili tahminler yapabilmek amacıyla kullanılır. Güncel hayatta karşılaşılan problemlerin bazılarında doğrusal regresyon modelleri kullanılarak istatistiksel sonuçlar çıkarılabilir. Bazı durumlarda da birden fazla model ile karşılaşılabilir ve bu modeller arasında bireysel bir takım ilişkiler olabilir. Doğrusal regresyon modellerinden oluşan sistemdeki modeller farklı bağımlı değişkenler içermelerine ve birbirleriyle ilişkisiz gibi görünmelerine rağmen, birbirleriyle ilişkili hata terimlerine sahip olabilirler. Özellikle tam olarak aynı veriyi kullanan modeller veya bağımsız değişkenlerinin bazıları diğer modellerdeki bağımsız değişkenlerin bazıları ile ortak olan modelle söz konusu olduğunda bu durumla karşılaşılabilir. Doğrusal regresyon modelleri sisteminin bu şekilde açıklanan özel bir örneği, görünürde ilişkisiz regresyon modelleri yani SUR modelleridir. SUR modelleri denklemler arasındaki ilişkili hatalara izin veren modellerdir. Diğer bir deyişle, SUR modelin özelliği istatistiksel veriler arasında varolabilen sezilmesi zor etkileşimleri mümkün olduğunca hesaba katmasıdır. Bu modeller ilk olarak Zellner (1962) tarafından önerilmiştir. SUR modellere genel yaklaşım bu modelleri tek tek ele almak yerine, ortak bir model grubuna yani bu modellerin sistemine yaklaşmak şeklindedir. Bu yaklaşıma göre modeller blok matrisler kullanılarak birleştirilmektir. Dolayısıyla yapılan işlemler sonucunda SUR modeli ve bu model altında yapılacak parametre tahminleri ile ilgili sonuçları açık bir şekilde ortaya koymak önemlidir.

SUR model birden fazla sayıda çoklu denklemi içeren bir denklem sistemidir. Denklemlerin herbiri doğrusal, çok değişkenli regresyon denklemi olup; denklemler arasında genel olarak görülen bir bağlantı yoktur. Her bir denklemde ihmal edilmiş bir değişken varsa, bunun etkisi hata payı üzerinde açığa çıkar. Eğer bu değişken başka bir denklemin açıklayıcı değişkenlerinden biriyle yüksek derecede ilişki gösteriyorsa hata payları arasında bir bağlantı görülür veya varolan bağlantı daha da yükselir.

SUR denklemleri olarak

$$y_{1j} = x_{1j1}\beta_{i1} + \cdots + x_{1jp_i}\beta_{p_1} + \varepsilon_{1j}, \tag{3.1a}$$

$$y_{2j} = x_{2j1}\beta_{i1} + \cdots + x_{2jp_i}\beta_{p_2} + \varepsilon_{2j} \tag{3.1b}$$

ile verilen iki denklem ele alınsın, $j = 1,2, \dots, n$. Bu denklemler $i = 1, 2$ için

$$y_{ij} = x_{ij1}\beta_{i1} + \cdots + x_{ijp_i}\beta_{p_i} + \varepsilon_{ij} \tag{3.1c}$$

olarak ifade edilebilir. $y_1 = (y_{1j})$ ve $y_2 = (y_{2j})$ olarak alınıp denklemlerin diğer terimleri uygun şekilde düzenlendiğinde, (3.1c) SUR denklemi matrisler vasıtasıyla aşağıdaki SUR modeller olarak yazılabilir.

$$y_1 = X_1\beta_1 + \varepsilon_1, \tag{3.2a}$$

$$y_2 = X_2\beta_2 + \varepsilon_2. \tag{3.2b}$$

Burada $y_i = (y_{ij}) \in \mathbb{R}^{nx1}$ gözlemlenebilir rasgele vektör, $X_i = (x_{ijt}) \in \mathbb{R}^{nxp_i}$ bilinen bir matris, $\beta_i = (\beta_{ij}) \in \mathbb{R}^{p_i x1}$ tahmin edilebilir bilinmeyen parametre vektörü ve $\varepsilon_i =$

$(\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{R}^{nx1}$ hata vektörüdür, $i = 1, 2$, $j = 1,2, \dots, n$ ve $t = 1,2, \dots, p_i$. (3.2a) ve (3.2b) modelleri için varsayımlar

$$E(\varepsilon_i) = 0, \tag{3.3a}$$

$$D(\varepsilon_i) = \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma_{ii} I_n \coloneqq \Sigma_{ii} \text{ ve } \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = \sigma_{ik} I_n \coloneqq \Sigma_{ik} \tag{3.3b}$$

olarak ele alınmaktadır, $i, k = 1,2$.

(3.2a) ve (3.2b) modelleri blok matrisler kullanılarak birleştirilebilir ve aşağıda verilen model olarak ifade edilebilir.

$$y = X\beta + \varepsilon. \tag{3.4}$$

(3.4) modelinde

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

olarak ele alımıştır ve bu modelde $y \in \mathbb{R}^{2nx1}$, $X \in \mathbb{R}^{2nxp}$, $\beta \in \mathbb{R}^{px1}$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^{2nx1}$ dir, $p = p_1 + p_2$. (3.3a) ve (3.3b) varsayımlarına göre (3.4) modeli için

$$E(\varepsilon) = 0, \tag{3.5a}$$

$$D(\varepsilon) = \operatorname{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = \Sigma \otimes I_n \tag{3.5b}$$

yazılır. Burada $\Sigma = (\sigma_{ik}) \in \mathbb{R}^{2x2}$ nonnegatif tanımlı bilinen bir matristir. $\Sigma \otimes I_n$ matrisi açık bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\Sigma \otimes I_n = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I_n & \sigma_{12} I_n \\ \sigma_{21} I_n & \sigma_{22} I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

(3.2a), (3.2b) ve (3.4) modelleri aşağıdaki gibi kapalı formda ifade edilebilirler.

$$\mathcal{M}_1 = \{\, y_1, X_1\beta_1, \Sigma_{11}\}, \tag{3.6a}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{\, y_2, X_2\beta_2, \Sigma_{22}\}, \tag{3.6b}$$

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \Sigma \otimes I_n\}. \tag{3.6c}$$

Çalışma boyunca $\mathcal{M}$ modelinin tutarlı olduğu kabul edilecektir. Yani bu durumda 1 olasılıkla aşağıdaki koşul sağlanır (Rao, 1973, s. 282).

$$y \in \mathcal{C}[X \quad \Sigma \otimes I_n]. \tag{3.7}$$

Eğer $\mathcal{M}$ modeli tutarlı ise $\mathcal{M}_i$ modelleri de tutarlıdır (Tian, 2017c).

3.2. SUR Modeller Altında Tahmin Edilebilirlik

Bu kısımda öncelikle tahmin edilebilirlik tanımı verilecek daha sonra ele aldığımız modeller altında ön tahmin ve tahmin edilebilme ile ilgili detaylı bilgiler verilcektir.

Tanım 3.2.1. $y = X\beta + \varepsilon$ olarak verilen bir lineer regresyon modeli için $T(y)$ tahmin edicisi, $a_i, c \in \mathbb{R}$ ve $a = (a_i) \in \mathbb{R}^{nx1}$, $i = 1, \ldots, n$, için $T(y) = c + a'y$ şeklinde yazılabiliyorsa, $T(y)$ tahmin edicisine lineer bir tahmin edici denir. Ayrıca $\lambda'\beta$ için lineer yansız bir tahmin edici bulunabiliyorsa, $\lambda'\beta$ ye lineer tahmin edilebilirdir veya kısaca tahmin edilebilirdir denir (Akdi, 2005).

Tanıma göre, $E(Ty) = E(c + a'y) = \lambda'\beta$ olmak üzere, $T(y) = c + a'y$ tahmin edicisi bulunabiliyorsa, $\lambda'\beta$ vektörü lineer tahmin edilebilirdir (kısaca tahmin edilebilirdir).

Çalışmada, $\mathcal{M}$ modeli altında bilinmeyen tüm parametrelerin ön tahmin ve tahmin edicileri üzerine bazı genel sonuçlara varmak için, bilinmeyen vektörlerin bir genel lineer fonksiyonu olarak

$$\phi = K\beta + H\varepsilon \tag{3.8}$$

vektörü ele alınacaktır. Burada $K \in \mathbb{R}^{kxp}$ ve $H \in \mathbb{R}^{kx2n}$ bilinen matrislerdir. (3.5a) ve (3.5b) varsayımlarına göre, (3.8) için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$E(\phi) = K\beta, \tag{3.9a}$$

$$D(\phi) = H(\Sigma \otimes I_n)H'. \tag{3.9b}$$

$\mathcal{M}_i$ ve $\mathcal{M}$ modellerini istatistiksel çıkarımlar yapmak için ayrı ayrı veya aynı anda ele almak mümkündür. $\mathcal{M}_i$ ve $\mathcal{M}$ modelleri altında eş zamanlı bazı genel sonuçlar elde etmek için modellerdeki tüm bilinmeyen ortak parametrelerin aşağıda verilen bir genel lineer fonksiyonu ele alınabilir.

$$\phi_i = K_i\beta_i + H_i\varepsilon_i = \widehat{K}_i\beta + \widehat{H}_i\varepsilon, \tag{3.10}$$

$i = 1, 2$. Burada $K_i \in \mathbb{R}^{k\times p_i}$ ve $H_i \in \mathbb{R}^{k\times n}$ bilinen matrislerdir. Ayrıca (3.10) vektöründe $\widehat{K}_1 = [K_1 \quad 0] \in \mathbb{R}^{k\times p}$, $\widehat{K}_2 = [0 \quad K_2] \in \mathbb{R}^{k\times p}$, $\widehat{H}_1 = [H_1 \quad 0] \in \mathbb{R}^{k\times 2n}$ ve $\widehat{H}_2 = [0 \quad H_2] \in \mathbb{R}^{k\times 2n}$ dir. (3.2a) ve (3.2b) varsayımlarına göre, (3.10) için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$E(\phi_i) = K_i\beta_i, \tag{3.11a}$$

$$D(\phi_i) = H_i\Sigma_{ii}H_i' = \widehat{H}_i(\Sigma \otimes I_n)\widehat{H}_i'. \tag{3.11b}$$

Not 1. $T_1 = [I_n \quad 0]$ ve $T_2 = [0 \quad I_n]$ olsun. $\Sigma \otimes I_n = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ olduğundan

$$\Sigma_{11} = T_1(\Sigma \otimes I_n)\, T_1'$$

$$\Sigma_{22} = T_2(\Sigma \otimes I_n)\, T_2'$$

$$\Sigma_{12} = T_1(\Sigma \otimes I_n)\, T_2'$$

olarak yazılır. Ayrıca

$$\widehat{\mathrm{H}}_1 = [\mathrm{H}_1 \quad 0] = \mathrm{H}_1[\mathrm{I}_n \quad 0] = \mathrm{H}_1\mathrm{T}_1$$

olarak yazıldığına dikkat edilmelidir.

Tanım 3.2.2. $\mathcal{M}$ modeli ele alınsın. ϕ vektörü (3.8)'de verildiği gibi olsun. $\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{\mathrm{kx2n}}$ olmak üzere, $\mathrm{E(Ly} - \phi) = 0$ olacak şekilde bir Ly lineer istatistiği bulunabiliyorsa bu durumda ϕ parametre vektörüne $\mathcal{M}$ modeli altında y tarafından ön tahmin edilebilirdir denir (Tian 2015a).

$\mathcal{M}$ modeli altında ϕ parametre vektörünün ön tahmin edilebilirlik koşulu olan $\mathrm{E(Ly} - \phi) = 0$ koşulu aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} &\mathrm{E(Ly} - \phi) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \mathrm{E(Ly)} = \mathrm{E}(\phi) \\ &\Leftrightarrow \ \mathrm{LX}\beta = \mathrm{K}\beta \end{aligned}$$

Bu eşitlik her $\beta \in \mathbb{R}^{\mathrm{px1}}$ için sağlandığından

$$\mathrm{E(Ly} - \phi) = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{LX}\beta = \mathrm{K}\beta$$

elde edilir. Bu durumda ϕ parametre vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathcal{C}(\mathrm{K}') \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{X}') \tag{3.12}$$

koşulunun sağlanmasına karşılık gelir. Bu konu ile ilgili detaylı bilgi Tian (2015a) Theorem 1'de verilmiştir.

(3.12) koşulu aynı zamanda $\mathcal{M}$ modeli altında $\mathrm{K}\beta$ vektörünün tahmin edilebilir olma koşuludur (Alalouf ve Styan; 1979).

Tanım 3.2.2 ve (3.12) koşulu kullanılarak aşağıdakiler kolayca elde edilir.

$\mathcal{M}$ modeli ele alınsın. ϕ_i vektörü (3.10)'da verildiği gibi olsun. $L_i \in \mathbb{R}^{kx2n}$ olmak üzere, $E(L_i y - \phi_i) = 0$ olacak şekilde bir $L_i y$ lineer istatistiği bulunabiliyorsa bu durumda ϕ_i parametre vektörüne $\mathcal{M}$ modeli altında y tarafından ön tahmin edilebilirdir denir. Yani ϕ_i parametre vektörü $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilirdir ancak ve ancak

$$\mathcal{C}(\widehat{K}_i') \subseteq \mathcal{C}(X') \tag{3.13}$$

koşulu sağlanır. (3.13) koşulu aynı zamanda $\mathcal{M}$ modeli altında $\widehat{K}_i \beta = K_i \beta_i$ vektörünün tahmin edilebilir olma koşuludur.

Benzer şekilde, $\mathcal{M}_i$ modeli ele alınsın. ϕ_i vektörü (3.10)'da verildiği gibi olsun. $G_i \in \mathbb{R}^{kxn}$ olmak üzere, $E(G_i y_i - \phi_i) = 0$ olacak şekilde bir $G_i y_i$ lineer istatistiği bulunabiliyorsa bu durumda ϕ_i parametre vektörüne $\mathcal{M}_i$ modeli altında y_i tarafından ön tahmin edilebilirdir denir. Yani ϕ_i parametre vektörü $\mathcal{M}_i$ modeli altında ön tahmin edilebilirdir ancak ve ancak

$$\mathcal{C}(K_i') \subseteq \mathcal{C}(X_i') \tag{3.14}$$

koşulu sağlanır. (3.14) koşulu aynı zamanda $\mathcal{M}_i$ modeli altında $K_i \beta_i$ vektörünün tahmin edilebilir olma koşuludur.

3.3. SUR Modeller Altında BLUP ve BLUE

$\mathcal{M}$ modeli ele alınsın ve ϕ vektörü (3.8)'de verildiği gibi olsun. ϕ fonksiyonunun $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Yani (3.12) koşulu sağlansın. $L \in \mathbb{R}^{kx2n}$ olmak üzere, Ly lineer istatistiği için

$$D(Ly - \phi) = \min \tag{3.15}$$

sağlanıyorsa, Ly lineer istatistiği ϕ parametre vektörünün BLUP'ı, olarak tanımlanır (Tian, 2015a). Ly lineer istatistiği $\mathcal{M}$ modeli altında ϕ parametre vektörü için BLUP ise, bu durum

$$\mathrm{Ly} = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi) = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\mathrm{K}\beta + \mathrm{H}\varepsilon) \tag{3.16}$$

olarak gösterilir. Bu tanım benzer şekilde $\mathrm{L}, \mathrm{L}_0 \in \mathbb{R}^{\mathrm{kx2n}}$ olmak üzere, $\mathrm{L}_0\mathrm{y}$ lineer istatistiği için $\mathrm{E}(\mathrm{L}_0\mathrm{y} - \phi) = 0$ olmak üzere

$$\mathrm{Ly} = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi) \Leftrightarrow \mathrm{E}(\mathrm{Ly} - \phi) = 0 \text{ ve } \mathrm{D}(\mathrm{Ly} - \phi) \preccurlyeq \mathrm{D}(\mathrm{L}_0\mathrm{y} - \phi) \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilebilir.

ϕ bilinmeyen parametreler vektöründe $\mathrm{H} = 0$ olarak alındığında, (3.16) ifadesi $\mathrm{K}\beta$ vektörünün BLUE'su olarak ifade edilir ve $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(\mathrm{K}\beta)$ olarak gösterilir.

(3.17) tanımı kullanılarak aşağıdakiler kolayca elde edilir. $\mathrm{L}_{i0}\mathrm{y}$ lineer istatistiği için $\mathrm{E}(\mathrm{L}_{i0}\mathrm{y} - \phi_i) = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}_i\mathrm{y} = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_i) \\ &\quad \Leftrightarrow \mathrm{E}(\mathrm{L}_i\mathrm{y} - \phi_i) = 0 \text{ ve } \mathrm{D}(\mathrm{L}_i\mathrm{y} - \phi_i) \preccurlyeq \mathrm{D}(\mathrm{L}_{i0}\mathrm{y} - \phi_i) \end{aligned} \tag{3.18}$$

ve $\mathrm{G}_0\mathrm{y}_i$ lineer istatistiği için $\mathrm{E}(\mathrm{G}_0\mathrm{y}_i - \phi_i) = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\mathrm{G}_i\mathrm{y}_i = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i) \\ &\quad \Leftrightarrow \mathrm{E}(\mathrm{G}_i\mathrm{y}_i - \phi_i) = 0 \text{ ve } \mathrm{D}(\mathrm{G}_i\mathrm{y}_i - \phi_i) \preccurlyeq \mathrm{D}(\mathrm{G}_0\mathrm{y}_i - \phi_i). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Şimdi ele alınan modeller altında bilinmeyen vektörlerin BLUP ve BLUE'ları için bazı sonuçlar verilecektir. Aşağıdaki teoremin ispatı için (Tian, 2015a, 2017b) kaynaklarına bakılabilir.

Teorem 3.3.1. $\mathcal{M}$ modeli ele alınsın ve ϕ vektörü (3.8)'de verildiği gibi olsun. ϕ fonksiyonunun $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin, yani (3.12) koşulu sağlansın. Bu durumda, $\mathcal{M}$ modeli altında ϕ fonksiyonu için temel BLUP denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\mathrm{Ly} = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi) \Leftrightarrow \mathrm{L}[\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}] = [\mathrm{K} \quad \mathrm{H}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]. \tag{3.20}$$

(3.20) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned}\mathrm{Ly} &= \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi) \\ &= ([\mathrm{K} \quad \mathrm{H}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}][\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]^{+} + \mathrm{U}[\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]^{\perp})\mathrm{y}\end{aligned} \tag{3.21}$$

dir. Burada $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^{\mathrm{kx2n}}$ keyfi bir matristir. $\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi)$ aşağıdakileri sağlar:

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi)] \\ &\quad = [\mathrm{K} \quad \mathrm{H}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})([\mathrm{K} \quad \mathrm{H}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+})',\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\mathrm{cov}[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi), \phi] = [\mathrm{K} \quad \mathrm{H}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{H}', \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}\left[\phi - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi)\right] \\ &\quad = ([\mathrm{K} \quad \mathrm{H}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \mathrm{H})(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})([\mathrm{K} \quad \mathrm{H}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \mathrm{H})'.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Burada $\mathrm{W} = [\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]$ dir. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır.

a. $\mathrm{r}[\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}] = \mathrm{r}[\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})]$, $\mathcal{C}[\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}] = \mathcal{C}[\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})]$ ve $\mathcal{C}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{C}((\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}) = \{0\}$,

b. $\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi)$ 1 olasılık ile tektir $\Leftrightarrow$ 1 olasılık ile $\mathrm{y} \in \mathcal{C}[\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})]$ sağlanır,

c. L tektir $\Leftrightarrow \mathrm{r}[\mathrm{X} \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})] = 2\mathrm{n}$.

Aşağıdaki teoremler Teorem 3.3.1'in bir uyarlamasıdır.

Teorem 3.3.2. $\mathcal{M}$ modeli ele alınsın ve ϕ_i vektörü (3.10)'da verildiği gibi olsun. ϕ_i fonksiyonunun $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin, yani (3.13) koşulu sağlansın. Bu durumda, $\mathcal{M}$ modeli altında ϕ_i fonksiyonu için temel BLUP denklemi aşağıdaki gibidir.

$$L_i y = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_i) \Leftrightarrow L[X \quad (\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}] = [\widehat{K}_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]. \tag{3.25}$$

(3.25) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} L_i y &= \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_i) \\ &= ([\widehat{K}_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}][X \quad (\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]^{+} + U_i[X \quad (\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]^{\perp})y \end{aligned} \tag{3.26}$$

dir. Burada $U \in \mathbb{R}^{kx2n}$ keyfi bir matristir. $\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_i)$ aşağıdakileri sağlar:

$$\begin{aligned} &D[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_i)] \\ &= [\widehat{K}_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]W^{+}(\Sigma \otimes I_n)([\widehat{K}_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]W^{+})', \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\mathrm{cov}[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_i), \phi_i] = [\widehat{K}_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]W^{+}(\Sigma \otimes I_n)\widehat{H}_i{}', \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} &D\big[\phi_i - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big] \\ &= ([\widehat{K}_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_i)(\Sigma \otimes I_n)\big([\widehat{K}_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_i\big)'. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Burada $W = [X \quad (\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}]$ dir. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır.

a. $r[X \quad (\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}] = r[X \quad (\Sigma \otimes I_n)]$, $\mathcal{C}[X \quad (\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}] = \mathcal{C}[X \quad (\Sigma \otimes I_n)]$ ve $\mathcal{C}(X) \cap \mathcal{C}((\Sigma \otimes I_n)X^{\perp}) = \{0\}$,

b. $\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_i)$ 1 olasılık ile tektir $\Leftrightarrow$ 1 olasılık ile $y \in \mathcal{C}[X \quad (\Sigma \otimes I_n)]$ sağlanır,

c. L_i tektir $\Leftrightarrow r[X \quad (\Sigma \otimes I_n)] = 2n, i = 1,2.$

Teorem 3.3.3. $\mathcal{M}_i$ modeli ele alınsın ve ϕ_i vektörü (3.10)'da verildiği gibi olsun. ϕ_i fonksiyonunun $\mathcal{M}_i$ modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin, yani (3.14) koşulu sağlansın. Bu durumda, $\mathcal{M}_i$ modeli altında ϕ_i fonksiyonu için temel BLUP denklemi aşağıdaki gibidir.

$$G_i y_i = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i) \Leftrightarrow G_i[X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}] = [K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i^{\perp}]. \tag{3.30}$$

(3.30) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} G_i y_i &= \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i) \\ &= \left([K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i^{\perp}][X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}]^{+} + U_i[X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}]^{\perp}\right)y_i \end{aligned} \tag{3.31}$$

dir. Burada $U_i \in \mathbb{R}^{kxn}$ keyfi matristir, $i = 1, 2$. (3.31) ile verilen $\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)$ aşağıdakileri sağlar:

$$D\left[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right] = [K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i^{\perp}]W_i^{+}\Sigma_{ii}\left([K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i^{\perp}]W_i^{+}\right)', \tag{3.32}$$

$$\mathrm{cov}\left[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i), \phi_i\right] = [K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i^{\perp}]W_i^{+}\Sigma_{ii}H_i', \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} &D\left[\phi_i - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right] \\ &\quad = \left([K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i^{\perp}]W_i^{+} - H_i\right)\Sigma_{ii}\left([K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i^{\perp}]W_i^{+} - H_i\right)'. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Burada $W_i = [X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}]$ dir, $i = 1,2$. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır.

a. $r[X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}] = r[X_i \quad \Sigma_{ii}]$, $\mathcal{C}[X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}] = \mathcal{C}[X_i \quad \Sigma_{ii}]$ ve $\mathcal{C}(X_i) \cap \mathcal{C}(\Sigma_{ii}X_i^{\perp}) = \{0\}$,

b. $\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)$ 1 olasılık ile tektir $\Leftrightarrow$ 1 olasılık ile $y_i \in \mathcal{C}[X_i \quad \Sigma_{ii}]$ sağlanır,

c. G_i tektir $\Leftrightarrow r[X_i \quad \Sigma_{ii}] = n, i = 1,2.$

Not 2. (3.31) ile verilen eşitlik $T_1 = [I_n \quad 0]$ ve $T_2 = [0 \quad I_n]$ olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} &\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i) \\ &\quad = ([K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i^{\perp}][X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}]^+ + U_i[X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}]^{\perp})T_iy \\ &\quad = ([K_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}][X_i \quad T_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}]^+ \\ &\qquad\qquad + U_i[X_i \quad T_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}]^{\perp})T_iy. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Burada

$$T_1y = [I_n \quad 0]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1$$

$$T_2y = [0 \quad I_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_2$$

olduğu açıktır. Bu durumda (3.35) kullanıldığında (3.32)-(3.34) eşitlikleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} &D\big[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\big] \\ &\quad = [K_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}]W_i^{+}T_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'\big([K_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}]W_i^{+}\big)', \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\mathrm{cov}\big[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i), \phi_i\big] = [K_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}]W_i^{+}T_i(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i', \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} &D\left[\phi_i - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right] \\ &\quad = \big([K_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}]W_i^{+}T_i - \widehat{H}_i\big) \\ &\qquad (\Sigma\otimes I_n)\big([K_i \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}]W_i^{+}T_i - \widehat{H}_i\big)'. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Burada $W_i = [X_i \quad \Sigma_{ii}X_i^{\perp}] = [X_i \quad T_i(\Sigma\otimes I_n)T_i'X_i^{\perp}]$ dir, $i = 1, 2$.

Not 3. $\mathcal{M}_i$ modeli altında ϕ_i parametre vektörünün BLUP'ı ve alışılagelmiş en küçük kareler ön tahmin edicisi (OLSP' si), $\Sigma_{ii} = \sigma_{ii}I_n$, $i = 1,2$ olduğundan dolayı çakışır.

Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılabilir. Detaylı bilgi için Tian (2017b) kaynağına bakılabilir.

$$G_i y_i = \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i) = (K_i X_i{}^{\perp} + H_i X_i{}^{\perp}) y_i, \tag{3.39}$$

$$D\left[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right] = \sigma_{ii}(K_i X_i{}^{\perp} + H_i X_i{}^{\perp})(K_i X_i{}^{\perp} + H_i X_i{}^{\perp})', \tag{3.40}$$

$$\mathrm{cov}\left[\mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i), \phi_i\right] = \sigma_{ii}(K_i X_i{}^{\perp} + H_i X_i{}^{\perp}) H_i{}', \tag{3.41}$$

$$D\left[\phi_i - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right] = \sigma_{ii}\left(K_i X_i{}^{\perp} - H_i P_{X_i}\right)\left(K_i X_i{}^{\perp} - H_i P_{X_i}\right)'. \tag{3.42}$$

BÖLÜM 4. SUR MODELLER ALTINDA BLUP'LAR ARASINDA BAZI KOVARYANS MATRİS EŞİTLİKLERİ

Bu bölümde, SUR modellere genel bir yaklaşım sunularak, $\mathcal{M}$ modeli ile $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ alt modelleri altında bilinmeyen vektörlerin BLUP'ları arasındaki kovaryans matrisleri üzerine bazı sonuçlar verilecektir. Ayrıca elde edilen sonuçların özel durumlara karşılık gelen sonuçları da ele alınacaktır.

4.1. $\mathcal{M}$ Modeli Altında BLUP'lar Arasındaki Kovaryans Matris Eşitlikleri

Bu kısımda, $\mathcal{M}$ modeli altında ϕ_1 ve ϕ_2 bilinmeyen parametre vektörlerinin BLUP' ları arasındaki kovaryans matrisleri ile ilgili sonuçlar ve bu sonuçlara karşılık gelen özel durumlar verilecektir.

Teorem 4.1.1. $\mathcal{M}$ modeli ele alınsın ve ϕ_i vektörü (3.10)'da verildiği gibi olsun, $i = 1, 2$. ϕ_i vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin, yani (3.13) koşulu sağlansın.

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma \otimes I_n & X & 0 \\ X' & 0 & \widehat{K}_2' - X'\widehat{H}_2' \\ 0 & \widehat{K}_1 - \widehat{H}_1 X & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

olsun. Bu durumda $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1)$ ve $\phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)$ vektörlerinin arasındaki kovaryans matrisinin rankı aşağıdaki gibidir.

$$r(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)\}) = r(M) - r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Ayrıca $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1)$ ve $\phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu

$$r(M) = r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3.3.2'de ifade edilen (3.26) ve (3.29) eşitliklerine göre $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1)$ ve $\phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)$ vektörleri arasındaki kovaryans matrisi

$$\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)\}$$

$$= \left([\widehat{K}_1 \quad \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_1\right) (\Sigma\otimes I_n)\left([\widehat{K}_2 \quad \widehat{H}_2(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_2\right)' \tag{4.4}$$

olarak yazılır. Burada $W = [X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]$ dir. (4.4) ifadesinin rankı alınarak ve $(\Sigma\otimes I_n) = (\Sigma\otimes I_n)(\Sigma\otimes I_n)^{+}(\Sigma\otimes I_n)$ özelliği kullanılarak

$$r(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)\})$$

$$= r\left[\left([\widehat{K}_1 \quad \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_1\right)(\Sigma\otimes I_n)\left([\widehat{K}_2 \quad \widehat{H}_2(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_2\right)'\right]$$

$$= r[\left([\widehat{K}_1 \quad \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_1\right) (\Sigma\otimes I_n)(\Sigma\otimes I_n)^{+}(\Sigma\otimes I_n)\left([\widehat{K}_2 \quad \widehat{H}_2(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_2\right)'] \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) ifadesine Teorem 2.7.2 (d) uygulanabilir. Çünkü Teorem 2.7.2 (d) ile verilen $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$ ve $\mathcal{C}(C') \subseteq \mathcal{C}(A')$, ise $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r(D - CA^{+}B)$ özelliğine göre, (4.5)'te

$A = (\Sigma\otimes I_n)$,

$\mathrm{B} = (\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\left([\widehat{\mathrm{K}}_2 \quad \widehat{\mathrm{H}}_2(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_2\right)'$,

$\mathrm{C} = \left([\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})$,

$\mathrm{D} = 0$

olarak alınırsa

$\mathcal{C}\left((\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\left([\widehat{\mathrm{K}}_2 \quad \widehat{\mathrm{H}}_2(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_2\right)'\,]\right) \subseteq \mathcal{C}(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})$,

$\mathcal{C}\left(\left[\left([\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\right]'\right) \subseteq \mathcal{C}((\Sigma\otimes\mathrm{I_n})')$

sütun uzayı özellikleri her zaman sağlanır. Böylece Teorem 2.7.2 (d) özelliğinin (4.5) ifadesine uygulanması ile

$$\mathrm{r}(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)\})$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & (\Sigma\otimes\mathrm{I_n})(\mathrm{Z_2W^{+}} - \widehat{\mathrm{H}}_2)' \\ (\mathrm{Z_1W^{+}} - \widehat{\mathrm{H}}_1)(\Sigma\otimes\mathrm{I_n}) & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}(\Sigma\otimes\mathrm{I_n}) \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada $\mathrm{Z_1} = [\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]$ ve $\mathrm{Z_2} = [\widehat{\mathrm{K}}_2 \quad \widehat{\mathrm{H}}_2(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]$' dir. (4.6) eşitliğinin sağ tarafı denk olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & -(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\widehat{\mathrm{H}}_2' \\ -\widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I_n}) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{Z_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W}' & 0 \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{Z_2'} \end{bmatrix}\right) - \mathrm{r}(\Sigma\otimes\mathrm{I_n}). \tag{4.7}$$

(4.7) ifadesine tekrar Teorem 2.7.2 (d) özelliği uygulanabilir. Çünkü

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W}' & 0 \end{bmatrix}$,

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}_2' \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & -(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\widehat{\mathrm{H}}_2' \\ -\widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I_n}) & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa $\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W}' & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{W} & 0 \\ 0 & \mathrm{W}' \end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{C}(\Sigma\otimes\mathrm{I_n}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{W})$, $\mathcal{C}(\mathrm{Z}_1') \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{W}')$ ve $\mathcal{C}(\mathrm{Z}_2') \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{W}')$ olduğundan dolayı

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}_2' \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W}' & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}_1 \end{bmatrix}'\right) \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W}' & 0 \end{bmatrix}'\right)$$

sütun uzayı özellikleri sağlanır. Böylece Teorem 2.7.2 (d) özelliğinin (4.7) ifadesine uygulanması ile

$$\mathrm{r}(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)\})$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{W} & \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & 0 \\ -\mathrm{W}' & 0 & 0 & \mathrm{Z}_2' \\ \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & 0 & \Sigma\otimes\mathrm{I_n} & -(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\widehat{\mathrm{H}}_2' \\ 0 & \mathrm{Z}_1 & -\widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I_n}) & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W}' & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}(\Sigma\otimes\mathrm{I_n}) \tag{4.8}$$

elde edilir. $\mathrm{W} = [\mathrm{X} \quad (\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]$, $\mathrm{Z}_1 = [\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]$ ve $\mathrm{Z}_2 = [\widehat{\mathrm{K}}_2 \quad \widehat{\mathrm{H}}_2(\Sigma\otimes\mathrm{I_n})\mathrm{X}^{\perp}]$ matrisleri (4.8) ifadesinde yerine yazılıp, Tanım 2.1.5 ve Tanım 2.1.6 da söz edilen elementer satır-sütun işlemleri uygulanarak ve Teorem 2.7.2 kulanılarak aşağıdakiler elde edilir.

$$r(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_2)\})$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}] & \Sigma\otimes I_n & 0 \\ -[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]' & 0 & 0 & [\widehat{K}_2 \quad \widehat{H}_2(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]' \\ \Sigma\otimes I_n & 0 & \Sigma\otimes I_n & -(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \\ 0 & [\widehat{K}_1 \quad \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}] & -\widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & 0 \end{bmatrix}$$
$$-r\begin{bmatrix} 0 & [X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}] \\ [X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]' & 0 \end{bmatrix} - r(\Sigma\otimes I_n)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & \Sigma\otimes I_n & 0 \\ -X' & 0 & 0 & 0 & \widehat{K}_2' \\ -X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 & 0 & X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \\ \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 & \Sigma\otimes I_n & -(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \\ 0 & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & -\widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & 0 \end{bmatrix}$$
$$- r(\Sigma\otimes I_n) - r[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}] - r[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]$$

$$= r\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes I_n) & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & 0 & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \\ -X' & 0 & 0 & 0 & \widehat{K}_2' \\ -X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 & 0 & X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma\otimes I_n & 0 \\ \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & 0 & -\widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \end{bmatrix}$$
$$- r(\Sigma\otimes I_n) - r[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}] - r[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]$$

$$= r\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes I_n) & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \\ -X' & 0 & 0 & \widehat{K}_2' \\ -X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 & X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \\ \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & -\widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' \end{bmatrix}$$
$$+ r(\Sigma\otimes I_n) - r(\Sigma\otimes I_n) - 2r[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X & \Sigma\otimes I_n & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' & 0 \\ X' & 0 & 0 & \widehat{K}_2' & 0 \\ \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' & X \\ \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_2' & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-2r(X) - 2r(X \quad \Sigma\otimes I_n)$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X & \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 \\ X' & 0 & 0 & \widehat{K}_2' - X'\widehat{H}_2' & 0 \\ \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 & 0 & X \\ \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-2r(X) - 2r(X \quad \Sigma\otimes I_n)$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X & \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 \\ X' & 0 & 0 & \widehat{K}_2' - X'\widehat{H}_2' & 0 \\ \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & \widehat{K}_1 - \widehat{H}_1 X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-2r(X) - 2r(X \quad \Sigma\otimes I_n)$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X & 0 & 0 & 0 \\ X' & 0 & -X' & \widehat{K}_2' - X'\widehat{H}_2' & 0 \\ 0 & -X & -(\Sigma\otimes I_n) & 0 & X \\ 0 & \widehat{K}_1 - \widehat{H}_1 X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-2r(X) - 2r(X \quad \Sigma\otimes I_n)$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X & 0 & 0 & 0 \\ X' & 0 & 0 & \widehat{K}_2' - X'\widehat{H}_2' & 0 \\ 0 & 0 & -(\Sigma\otimes I_n) & 0 & X \\ 0 & \widehat{K}_1 - \widehat{H}_1 X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X & 0 & 0 & 0 \\ X' & 0 & \widehat{K}_2' - X'\widehat{H}_2' & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{K}_1 - \widehat{H}_1 X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma\otimes I_n & X \\ 0 & 0 & 0 & X' & 0 \end{bmatrix} - 2r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X & 0 \\ X' & 0 & \widehat{K}_2' - X'\widehat{H}_2' \\ 0 & \widehat{K}_1 - \widehat{H}_1 X & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} - 2r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.9)$$

Böylece (4.9) ifadesinden, (4.2) ve dolayısıyla (4.3) elde edilir.

Teorem 4.1.1 aynı zamanda Güler (2019) çalışmasında Teorem 2 olarak ele alınmıştır. Teorem 4.1.1'in özel durumlara karşılık gelen sonuçları aşağda verilmiştir.

Sonuç 4.1.2. $\widehat{K}_1\beta$ ve $\widehat{K}_2\beta$ vektörlerinin $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin yani (3.13) sağlansın.

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma \otimes I_n & X & 0 \\ X' & 0 & \widehat{K}_2' \\ 0 & \widehat{K}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade sağlanır.

$$r\left(\operatorname{cov}\left\{\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}\left(\widehat{K}_1\beta\right), \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}\left(\widehat{K}_2\beta\right)\right\}\right) = r(M) - r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Ayrıca $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}\left(\widehat{K}_1\beta\right)$ ve $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}\left(\widehat{K}_2\beta\right)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu aşağıdaki gibidir.

$$r(M) = r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Sonuç 4.1.3. $\widehat{H}_1\varepsilon$ ve $\widehat{H}_2\varepsilon$ vektörleri $\mathcal{M}$ modeli altında her zaman ön tahmin edilebilirdir ve

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma \otimes I_n & X & 0 \\ X' & 0 & X'\widehat{H}_2' \\ 0 & \widehat{H}_1 X & 0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

olmak üzere aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\begin{aligned} & r\left(\operatorname{cov}\left\{\widehat{H}_1\varepsilon - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}\left(\widehat{H}_1\varepsilon\right), \widehat{H}_2\varepsilon - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}\left(\widehat{H}_2\varepsilon\right)\right\}\right) \\ & \quad = r(M) - r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ayrıca $\widehat{H}_1\varepsilon - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\widehat{H}_1\varepsilon)$ ve $\widehat{H}_2\varepsilon - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\widehat{H}_2\varepsilon)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu

$$r(M) = r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

olmasıdır.

Sonuç 4.1.4. $\widehat{X}_1 = [X_1 \quad 0]$ ve $\widehat{X}_2 = [0 \quad X_2]$ olmak üzere,

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X & 0 \\ X' & 0 & \widehat{X}_2' \\ 0 & \widehat{X}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$r\left(\mathrm{cov}\left\{\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(\widehat{X}_1\beta), \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(\widehat{X}_2\beta)\right\}\right) = r(M) - r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

$$r\left(\mathrm{cov}\left\{\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\varepsilon_1), \varepsilon_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\varepsilon_2)\right\}\right) = r(M) - r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Ayrıca aşağıdaki ifadeler denktir.

a. $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)$ ilişkisizdir.

b. $\varepsilon_1 - \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(\varepsilon_1)$ ve $\varepsilon_2 - \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(\varepsilon_2)$ ilişkisizdir.

c. $r(M) = r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}.$

Böylece bu kısımda $\mathcal{M}$ modeli altında bilinmeyen parametreler ϕ_1 ve ϕ_2 nin BLUP'larının kovaryans matrisleri arasındaki ilişkiler elde edilmiş ve bu sonuçlar Sonuç 4.1.2-4.1.4'de verildiği gibi özel durumlara indirgenmiştir.

4.2. $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ Modelleri Altında BLUP'lar Arasındaki Kovaryans Matris Eşitlikleri

Bu kısımda, $\mathcal{M}_1$ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında ϕ_1 ve ϕ_2 bilinmeyen parametre vektörlerinin BLUP'ları arasındaki kovaryans matrisleri ile ilgili sonuçlar ve bu sonuçlara karşılık gelen özel durumlar verilecektir.

Teorem 4.2.1. $\mathcal{M}_1$ve $\mathcal{M}_2$ modelleri ele alınsın. ϕ_1 ve ϕ_2 vektörleri (3.10)'da verildiği gibi olsun. ϕ_1 ve ϕ_2 vektörlerinin sırasıyla $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında ön tahmin edilebilir oldukları kabul edilsin, yani (3.14) koşulu sağlansın.

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & X_1 & 0 & 0 \\ \Sigma_{22} & 0 & 0 & X_2 & 0 \\ X_2{}' & 0 & 0 & 0 & K_2' - X_2'H_2' \\ 0 & X_1{}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 - H_1X_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

olsun. Bu durumda $\phi_1 - \text{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)$ ve $\phi_2 - \text{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)$ vektörleri arasındaki kovaryans matrisinin rankı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} &r\big(\text{cov}\{\phi_1 - \text{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1), \phi_2 - \text{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\}\big) \\ &\quad = r(M) - r[X_1\ \Sigma_{11}] - r[X_2\ \Sigma_{22}] - r(X_1) - r(X_2) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ayrıca $\phi_1 - \text{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)$ ve $\phi_2 - \text{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu

$$r(M) = r[X_1\ \Sigma_{11}] + r[X_2\ \Sigma_{22}] + r(X_1) + r(X_2) \tag{4.21}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3.3.3'de ifade edilen (3.31) ve (3.34) eşitliklerine göre $\phi_1 - \text{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)$ ve $\phi_2 - \text{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)$ vektörleri arasındaki kovaryans matrisi

$$\operatorname{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\}$$
$$= \left([K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}]W_1{}^{+} - H_1\right)\Sigma_{12}\left([K_2 \quad H_2\Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]W_2{}^{+} - H_2\right)' \tag{4.22}$$

olarak yazılır. Burada $\operatorname{cov}(y_1, y_2) = \Sigma_{12}$ ve $W_i = [X_i \quad \Sigma_{ii}X_i{}^{\perp}]$, $i = 1,2$ dir. (4.22) ifadesinin rankı alınarak ve $\Sigma_{12} = \Sigma_{12}\Sigma_{12}{}^{+}\Sigma_{12}$ özelliği kullanılarak

$$r\left(\operatorname{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\}\right)$$

$$= r\left(\left([K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}]W_1{}^{+} - H_1\right)\Sigma_{12}\left([K_2 \quad H_2\Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]W_2{}^{+} - H_2\right)'\right)$$

$$= r[\left([K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}]W_1{}^{+} - H_1\right)$$
$$\Sigma_{12}\Sigma_{12}{}^{+}\Sigma_{12}\left([K_2 \quad H_2\Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]W_2{}^{+} - H_2\right)'] \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.23) ifadesine Teorem 2.7.2 (d) uygulanabilir. Çünkü Teorem 2.7.2 (d) ile verilen $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$ ve $\mathcal{C}(C') \subseteq \mathcal{C}(A')$, ise $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r(D - CA^{+}B)$ özelliğine göre, (4.23)'te

$A = \Sigma_{12}$,

$B = \Sigma_{12}\left([K_2 \quad H_2\Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]W_2{}^{+} - H_2\right)'$,

$C = \left([K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}]W_1{}^{+} - H_1\right)\Sigma_{12}$,

$D = 0$

olarak alınırsa

$\mathcal{C}\left(\Sigma_{12}\left([K_2 \quad H_2\Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]W_2{}^{+} - H_2\right)'\right) \subseteq \mathcal{C}(\Sigma_{12})$,

$\mathcal{C}\left(\left[\left([K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}]W_1{}^{+} - H_1\right)\Sigma_{12}\right]'\right) \subseteq \mathcal{C}(\Sigma_{12}{}')$

sütun uzayı özellikleri her zaman sağlanır. Böylece Teorem 2.7.2 (d) özelliğinin (4.23) ifadesine uygulanması ile

$$r\left(\operatorname{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{12}\left([K_2 \quad H_2\Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]W_2{}^{+} - H_2\right)' \\ \left([K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}]W_1{}^{+} - H_1\right)\Sigma_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$-r(\Sigma_{12}) \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24) eşitliğinin sağ tarafı denk olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$r\left(\begin{bmatrix} \Sigma_{12} & -\Sigma_{12}H_2' \\ -H_1\Sigma_{12} & 0 \end{bmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & 0 \\ 0 & [K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2{}' & 0 \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & 0 \\ 0 & [K_2 \quad H_2\Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]' \end{bmatrix}\right) \tag{4.25}$$

$$- r(\Sigma_{12}).$$

(4.25) ifadesine tekrar Teorem 2.7.2 (d) özelliği uygulanabilir. Çünkü

$$A = \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2{}' & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & 0 \\ 0 & [K_2 \quad H_2\Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]' \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & 0 \\ 0 & [K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}] \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & -\Sigma_{12}H_2' \\ -H_1\Sigma_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2{}' & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2{}' \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{C}([K_i \quad H_i\Sigma_{ii}X_i{}^{\perp}]') \subseteq \mathcal{C}(W_i')$$

ve

$$\mathcal{C}(\Sigma_{ij}) \subseteq \mathcal{C}(W_i),\ i, j = 1,2$$

olduğundan dolayı

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \Sigma_{12} & 0 \\ 0 & [K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}] \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2{}' & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \Sigma_{12} & 0 \\ 0 & [K_1 \quad H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp}] \end{bmatrix}'\right) \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2{}' & 0 \end{bmatrix}'\right)$$

sütun uzayı özellikleri sağlanır. Böylece Teorem 2.7.2 (d) özelliğinin (4.25) ifadesine uygulanması ve $W_i = [X_i \quad \Sigma_{ii}X_i{}^{\perp}],\ i = 1, 2,$ matrisinin yerine yazılması ile

$$r\big(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\}\big)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -X_1 & -\Sigma_{11}X_1{}^{\perp} & \Sigma_{12} & 0 \\ -X_2' & 0 & 0 & 0 & K_2' \\ -X_2{}^{\perp}\Sigma_{22} & 0 & 0 & 0 & X_2{}^{\perp}\Sigma_{22}H_2' \\ \Sigma_{12} & 0 & 0 & \Sigma_{12} & -\Sigma_{12}H_2' \\ 0 & K_1 & H_1\Sigma_{11}X_1{}^{\perp} & -H_1\Sigma_{12} & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 0 & [X_1 \quad \Sigma_{11}X_1{}^{\perp}] \\ [X_2 \quad \Sigma_{22}X_2{}^{\perp}]' & 0 \end{bmatrix} - r(\Sigma_{12}) \qquad (4.26)$$

elde edilir. Tanım 2.1.5 ve Tanım 2.1.6 da söz edilen elementer satır-sütun işlemleri uygulanarak ve Teorem 2.7.2 kulanılarak aşağıdakiler elde edilir.

$$\mathrm{r}\big(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1), \phi_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\}\big)$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} -\Sigma_{12} & -X_1 & -\Sigma_{11}{X_1}^{\perp} & 0 & \Sigma_{12}H_2' \\ -X_2' & 0 & 0 & 0 & K_2' \\ -{X_2}^{\perp}\Sigma_{22} & 0 & 0 & 0 & {X_2}^{\perp}\Sigma_{22}H_2' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{12} & 0 \\ H_1\Sigma_{12} & K_1 & H_1\Sigma_{11}{X_1}^{\perp} & 0 & H_1\Sigma_{12}H_2' \end{bmatrix}$$
$$-\mathrm{r}[X_1 \quad \Sigma_{11}{X_1}^{\perp}] - \mathrm{r}[X_2 \quad \Sigma_{22}{X_2}^{\perp}] - \mathrm{r}(\Sigma_{12})$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} -\Sigma_{12} & -X_1 & -\Sigma_{11}{X_1}^{\perp} & \Sigma_{12}H_2' \\ -X_2' & 0 & 0 & K_2' \\ -{X_2}^{\perp}\Sigma_{22} & 0 & 0 & {X_2}^{\perp}\Sigma_{22}H_2' \\ H_1\Sigma_{12} & K_1 & H_1\Sigma_{11}{X_1}^{\perp} & -H_1\Sigma_{12}H_2' \end{bmatrix}$$
$$-\mathrm{r}[X_1 \quad \Sigma_{11}{X_1}^{\perp}] - \mathrm{r}[X_2 \quad \Sigma_{22}{X_2}^{\perp}] - \mathrm{r}(\Sigma_{12}) + \mathrm{r}(\Sigma_{12})$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} \Sigma_{12} & X_1 & \Sigma_{11} & \Sigma_{12}H_2' & 0 \\ X_2' & 0 & 0 & K_2' & 0 \\ \Sigma_{22} & 0 & 0 & \Sigma_{22}H_2' & X_2 \\ H_1\Sigma_{12} & K_1 & H_1\Sigma_{11} & H_1\Sigma_{12}H_2' & 0 \\ 0 & 0 & X_1' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-\mathrm{r}[X_1 \quad \Sigma_{11}] - \mathrm{r}[X_2 \quad \Sigma_{22}] - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X_2)$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} \Sigma_{12} & X_1 & \Sigma_{11} & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 & K_2' - X_2'H_2' & 0 \\ \Sigma_{22} & 0 & 0 & 0 & X_2 \\ 0 & K_1 - H_1X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-\mathrm{r}[X_1 \quad \Sigma_{11}] - \mathrm{r}[X_2 \quad \Sigma_{22}] - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X_2)$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & X_1 & 0 & 0 \\ \Sigma_{22} & 0 & 0 & X_2 & 0 \\ {X_2}' & 0 & 0 & 0 & K_2' - X_2'H_2' \\ 0 & X_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 - H_1X_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$
$$-\mathrm{r}[X_1 \quad \Sigma_{11}] - \mathrm{r}[X_2 \quad \Sigma_{22}] - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X_2).$$

Böylece (4.27) ifadesinden, (4.20) ve dolayısıyla (4.21) elde edilir.

Teorem 4.2.1 aynı zamanda Güler ve Yüce (2020) çalışmasında Teorem 1 olarak ele alınmıştır. Teorem 4.2.1'in özel durumlara karşılık gelen sonuçları aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.2.2. $K_1\beta_1$ ve $K_2\beta_2$ vektörlerinin $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında sırasıyla tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin yani (3.14) sağlansın.

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & X_1 & 0 & 0 \\ \Sigma_{22} & 0 & 0 & X_2 & 0 \\ X_2{}' & 0 & 0 & 0 & K_2' \\ 0 & X_1{}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\begin{aligned} &r\left(\mathrm{cov}\left\{\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_1}(K_1\beta_1), \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_2}(K_2\beta_2)\right\}\right) \\ &\qquad = r(M) - r[X_1\ \Sigma_{11}] - r[X_2\ \Sigma_{22}] - r(X_1) - r(X_2). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ayrıca, $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_1}(K_1\beta_1)$ ve $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_2}(K_2\beta_2)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu aşağıdaki gibidir.

$$r(M) = r[X_1\ \Sigma_{11}] + r[X_2\ \Sigma_{22}] + r(X_1) + r(X_2). \tag{4.30}$$

Sonuç 4.2.3. $H_1\varepsilon_1$ ve $H_2\varepsilon_2$ vektörleri $\mathcal{M}_1$ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında her zaman ön tahmin edilebilirdir ve

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & X_1 & 0 & 0 \\ \Sigma_{22} & 0 & 0 & X_2 & 0 \\ X_2{}' & 0 & 0 & 0 & X_2'H_2' \\ 0 & X_1{}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1X_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

olmak üzere aşağıdaki ifade sağlanır.

$$r\left(\mathrm{cov}\left\{H_1\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(H_1\varepsilon_1), H_2\varepsilon_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(H_2\varepsilon_2)\right\}\right)$$
$$= r(M) - r[X_1\ \Sigma_{11}] - r[X_2\ \Sigma_{22}] - r(X_1) - r(X_2). \quad (4.32)$$

Ayrıca $H_1\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(H_1\varepsilon_1)$ ve $H_2\varepsilon_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(H_2\varepsilon_2)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu

$$r(M) = r[X_1\ \Sigma_{11}] + r[X_2\ \Sigma_{22}] + r(X_1) + r(X_2) \quad (4.33)$$

olmasıdır.

Sonuç 4.2.4. $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ sırasıyla her zaman $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında tahmin edilebilir ve ε_1 ve ε_2 vektörleri sırasıyla $\mathcal{M}_1$ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında her zaman ön tahmin edilebilirdir.

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & 0 \\ \Sigma_{22} & 0 & X_2 \\ 0 & X_1' & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

olmak üzere, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$r\left(\mathrm{cov}\left\{\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\right\}\right) \quad (4.35)$$
$$= r(M) - r[X_1\ \Sigma_{11}] - r[X_2\ \Sigma_{22}].$$

$$r\left(\mathrm{cov}\left\{\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\varepsilon_1), \varepsilon_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\varepsilon_2)\right\}\right) \quad (4.36)$$
$$= r(M) - r[X_1\ \Sigma_{11}] - r[X_2\ \Sigma_{22}].$$

Ayrıca aşağıdaki ifadeler denktir.

a. $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ ilişkisizdir.

b. $\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\varepsilon_1)$ ve $\varepsilon_2 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_2}(\varepsilon_2)$ ilişkisizdir.

c. $\quad r(M) = r[X_1 \ \ \Sigma_{11}] + r[X_2 \ \Sigma_{22}].$

Böylece bu kısımda, $\mathcal{M}_1$ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında bilinmeyen parametreler ϕ_1 ve ϕ_2 nin BLUP'larının kovaryans matrisleri arasındaki ilişkiler elde edilmiş ve bu sonuçlar Sonuç 4.2.2-4.2.4. de verildiği gibi özel durumlara indirgenmiştir.

4.3. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_i$ Modelleri Altında BLUP'lar Arasındaki Kovaryans Matris Eşitlikleri

Bu kısımda $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_i$ modelleri altında ϕ_i bilinmeyen parametre vektörünün BLUP'ları arasındaki kovaryans matrisleri ile ilgili sonuçlar ve bu sonuçlara karşılık gelen özel durumlar verilecektir, $i = 1, 2$. Aşağıdaki teoremlerde genelliği bozmaksızın $i = 1$ alınarak sonuçlar elde edilecektir.

Teorem 4.3.1. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_1$ modelleri ele alınsın. ϕ_1 vektörü (3.10)'da verildiği gibi olsun. ϕ_1 vektörünün $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_1$ modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin, yani sırasıyla (3.13) ve (3.14) koşulları sağlansın.

$$M = \begin{bmatrix} (\Sigma\otimes I_n)T_1' & \Sigma\otimes I_n & X & 0 & 0 \\ \Sigma_{11} & 0 & 0 & X_1 & 0 \\ X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1'-X_1'H_1' \\ 0 & X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{K}_1-\widehat{H}_1X & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

olsun. Bu durumda $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1)$ ve $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)$ vektörleri arasındaki kovaryans matrisin rankı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} &r\big(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\}\big) \\ &\qquad = r(M) - r(X) - r(X_1) - r(X \quad \Sigma\otimes I_n) - r(X_1 \quad \Sigma_{11}). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Ayrıca $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1)$ ve $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu aşağıdaki koşulun sağlanmasıdır.

$$\mathrm{r}(\mathrm{M}) = \mathrm{r}(\mathrm{X}) + \mathrm{r}(\mathrm{X}_1) + \mathrm{r}(\mathrm{X} \quad \Sigma\otimes\mathrm{I}_n) + \mathrm{r}(\mathrm{X}_1 \quad \Sigma_{11}). \tag{4.39}$$

İspat. Teorem 3.3.2'deki (3.26) ile (3.29) ve Not 2'deki (3.35) ile (3.38) eşitliklerine göre $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1)$ ve $\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)$ vektörleri arasındaki kovaryans matrisi

$$\begin{aligned} &\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\} \\ &\quad = \left([\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_1\right) \\ &\qquad (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\left([\mathrm{K}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1'\mathrm{X}_1{}^{\perp}]\mathrm{W}_1{}^{+}\mathrm{T}_1 - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)' \end{aligned} \tag{4.40}$$

olarak yazılır. Burada $\mathrm{W} = [\mathrm{X} \quad (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{X}^{\perp}]$, $\mathrm{W}_i = [\mathrm{X}_i \quad \mathrm{T}_i(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{T}_i'\mathrm{X}_i{}^{\perp}]$ ve $\mathrm{T}_1 = [\mathrm{I}_n \quad 0]$ dır. (4.22) ifadesinin rankı alınarak ve $(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n) = (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)^{+}(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)$ özelliği kullanılarak

$$\mathrm{r}\left(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{r}\left([\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_1\right) \\ &\qquad (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\left([\mathrm{K}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1'\mathrm{X}_1{}^{\perp}]\mathrm{W}_1{}^{+}\mathrm{T}_1 - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{r}\left([\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_1\right) \\ &\qquad (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)^{+}(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\left([\mathrm{K}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1'\mathrm{X}_1{}^{\perp}]\mathrm{W}_1{}^{+}\mathrm{T}_1 - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)' \end{aligned} \tag{4.41}$$

olarak yazılabilir. (4.41) ifadesine Teorem 2.7.2 (d) uygulanabilir. Çünkü Teorem 2.7.2 (d) ile verilen $\mathcal{C}(\mathrm{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{A})$ ve $\mathcal{C}(\mathrm{C}') \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{A}')$, ise $\mathrm{r}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix} = \mathrm{r}(\mathrm{A}) + \mathrm{r}(\mathrm{D} - \mathrm{CA}^{+}\mathrm{B})$ özelliğine göre, (4.41)'de

$\mathrm{A} = (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)$,

$\mathrm{B} = (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\left([\mathrm{K}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1'\mathrm{X}_1{}^{\perp}]\mathrm{W}_1{}^{+}\mathrm{T}_1 - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)'$,

$$\mathrm{C} = \left([\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n),$$

$$\mathrm{D} = 0$$

olarak alınırsa

$$\mathcal{C}\left((\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\left([\mathrm{K}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1'\mathrm{X}_1{}^{\perp}]\mathrm{W}_1{}^{+}\mathrm{T}_1 - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)'\right) \subseteq \mathcal{C}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n),$$

$$\mathcal{C}\left(\left[\left([\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{X}^{\perp}]\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\right]'\right) \subseteq \mathcal{C}((\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)')$$

sütun uzayı özellikleri her zaman sağlanır. Böylece Teorem 2.7.2 (d) özelliğinin (4.41) ifadesine uygulanması ile

$$\mathrm{r}\left(\mathrm{cov}\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\}\right)$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} \Sigma\otimes \mathrm{I}_n & (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\left(\mathrm{Z}_1\mathrm{W}_1{}^{+}\mathrm{T}_1 - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)' \\ \left(\mathrm{Z}\mathrm{W}^{+} - \widehat{\mathrm{H}}_1\right)(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) \qquad (4.42)$$

elde edilir. Burada $\mathrm{Z} = [\widehat{\mathrm{K}}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{X}^{\perp}]$, $\mathrm{Z}_1 = [\mathrm{K}_1 \quad \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1'\mathrm{X}_1{}^{\perp}]$, $\mathrm{W} = [\mathrm{X} \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{X}^{\perp}]$, ve $\mathrm{W}_1 = \left[\mathrm{X}_1 \quad \mathrm{T}_1(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1'\mathrm{X}_1{}^{\perp}\right]$ dir. (4.42) eşitliğinin sağ tarafı denk olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathrm{r}\begin{bmatrix} \Sigma\otimes \mathrm{I}_n & (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1'\mathrm{W}_1{}^{+\prime}\mathrm{Z}_1' - (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\widehat{\mathrm{H}}_1' \\ \mathrm{Z}\mathrm{W}^{+}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) - \widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n).$$

$$= \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \Sigma\otimes \mathrm{I}_n & -(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\widehat{\mathrm{H}}_1' \\ -\widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1' & 0 \\ 0 & \mathrm{Z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W}_1{}' & 0 \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} \Sigma\otimes \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}_1' \end{bmatrix}\right) - \mathrm{r}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n). \qquad (4.43)$$

(4.43) ifadesine tekrar Teorem 2.7.2 (d) özelliği uygulanabilir. Çünkü

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W_1}' & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}_1' \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{T}_1' & 0 \\ 0 & \mathrm{Z} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I_n} & -(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\widehat{\mathrm{H}}_1' \\ -\widehat{\mathrm{H}}_1(\Sigma \otimes \mathrm{I_n}) & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W_1}' & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{W} & 0 \\ 0 & \mathrm{W_1}' \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{C}((\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{T}_1') \subseteq \mathcal{C}(\Sigma \otimes \mathrm{I_n}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{W}),$$

$$\mathcal{C}(\mathrm{Z}_1') \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{W_1}'),$$

$$\mathcal{C}(\mathrm{Z}') \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{W_1}')$$

olduğundan dolayı

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}_1' \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W_1}' & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} (\Sigma \otimes \mathrm{I_n})\mathrm{T}_1' & 0 \\ 0 & \mathrm{Z} \end{bmatrix}'\right) \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ \mathrm{W_1}' & 0 \end{bmatrix}'\right)$$

sütun uzayı özellikleri sağlanır. Böylece Teorem 2.7.2 (d) özelliğinin (4.43) ifadesine uygulanması ile

$$
\begin{aligned}
&r\left(\mathrm{cov}\left\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right\}\right) \\
&= r\begin{bmatrix} 0 & -W & \Sigma\otimes I_n & 0 \\ -W_1{}' & 0 & 0 & Z_1' \\ (\Sigma\otimes I_n)T_1' & 0 & \Sigma\otimes I_n & -(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \\ 0 & Z & -\widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad -r\begin{bmatrix} 0 & W \\ W_1{}' & 0 \end{bmatrix} - r(\Sigma\otimes I_n)
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

elde edilir. $W = [X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]$, $W_1 = \left[X_1 \quad T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1'X_1{}^{\perp}\right]$, $Z = [\widehat{K}_1 \quad \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}$ ve $Z_1 = \left[K_1 \quad \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)T_1'X_1{}^{\perp}\right]$ matrisleri (4.44) ifadesinde yerine yazılıp Tanım 2.1.5 ve Tanım 2.1.6 da söz edilen elementer satır-sütun işlemleri uygulanarak ve Teorem 2.7.2 kulanılarak aşağıdakiler elde edilir.

$$
r\left(\mathrm{cov}\left\{\phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\phi_1), \phi_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right\}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= r\begin{bmatrix} 0 & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & \Sigma\otimes I_n & 0 \\ -X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1' \\ -X_1^{\perp}T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & 0 & 0 & 0 & X_1^{\perp}T_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \\ (\Sigma\otimes I_n)T_1' & 0 & 0 & \Sigma\otimes I_n & -(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \\ 0 & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & -\widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - r\begin{bmatrix} 0 & [X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}] \\ \left[X_1 \quad T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1'X_1{}^{\perp}\right]' & 0 \end{bmatrix} - r(\Sigma\otimes I_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= r\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes I_n)T_1' & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & 0 & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \\ -X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1' \\ -X_1^{\perp}T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & 0 & 0 & 0 & X_1^{\perp}T_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma\otimes I_n & 0 \\ \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & 0 & -\widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \end{bmatrix} \\
&\quad - r(\Sigma\otimes I_n) - r[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}] - r\left[X_1 \quad T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1'X_1{}^{\perp}\right]
\end{aligned}
$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes I_n)T_1' & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \\ -X_1' & 0 & 0 & K_1' \\ -X_1^{\perp}T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & 0 & 0 & X_1^{\perp}T_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \\ \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & -\widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' \end{bmatrix}$$
$$+\, \mathrm{r}(\Sigma\otimes I_n) - \mathrm{r}(\Sigma\otimes I_n) - \mathrm{r}[X \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}] - \mathrm{r}\left[X_1 \quad T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1'{X_1}^{\perp}\right]$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} (\Sigma\otimes I_n)T_1' & X & \Sigma\otimes I_n & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' & 0 \\ X_1' & 0 & 0 & K_1' & 0 \\ T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & 0 & 0 & T_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' & X_1 \\ \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_1' & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-\mathrm{r}(X) - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X \quad \Sigma\otimes I_n) - \mathrm{r}[X_1 \quad T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1']$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} (\Sigma\otimes I_n)T_1' & X & \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 \\ X_1' & 0 & 0 & K_1'-X_1'H_1' & 0 \\ T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & 0 & 0 & 0 & X_1 \\ \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & \widehat{K}_1 & \widehat{H}_1(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-\mathrm{r}(X) - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X \quad \Sigma\otimes I_n) - \mathrm{r}[X_1 \quad T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1']$$

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} (\Sigma\otimes I_n)T_1' & X & \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 \\ X_1' & 0 & 0 & K_1'-X_1'H_1' & 0 \\ T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1' & 0 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & \widehat{K}_1 - \widehat{H}_1X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-\mathrm{r}(X) - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X \quad \Sigma\otimes I_n) - \mathrm{r}[X_1 \quad T_1(\Sigma\otimes I_n)T_1']$$

elde edilir. Son ifade aşağıda verildiği gibi düzenlenebilir.

$$= \mathrm{r}\begin{bmatrix} (\Sigma\otimes I_n)T_1' & \Sigma\otimes I_n & X & 0 & 0 \\ \Sigma_{11} & 0 & 0 & X_1 & 0 \\ X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1'-X_1'H_1' \\ 0 & X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{K}_1 - \widehat{H}_1X & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$
$$-\mathrm{r}(X) - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X \quad \Sigma\otimes I_n) - \mathrm{r}(X_1 \quad \Sigma_{11}).$$

Böylece (4.45) ifadesinden, (4.38) ve dolayısıyla (4.39) elde edilir. ■

Teorem 4.3.1'in özel durumlara karşılık gelen sonuçları aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.3.2. $K_1\beta_1$ vektörünün $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_1$ modelleri altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin, yani sırasıyla (3.13) ve (3.14) koşulları sağlansın.

$$M = \begin{bmatrix} (\Sigma\otimes I_n)T_1' & \Sigma\otimes I_n & X & 0 & 0 \\ \Sigma_{11} & 0 & 0 & X_1 & 0 \\ X_1' & 0 & 0 & 0 & K_1' \\ 0 & X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{K}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\begin{aligned} & r\left(\mathrm{cov}\left\{\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(K_1\beta_1), \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_1}(K_1\beta_1)\right\}\right) \\ &\qquad = r(M) - r(X) - r(X_1) - r(X \quad \Sigma\otimes I_n) - r(X_1 \quad \Sigma_{11}). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Ayrıca, $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}\,(K_1\beta_1)$ ve $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_1}\,(K_1\beta_1)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu

$$r(M) = r(X) + r(X_1) + r(X \quad \Sigma\otimes I_n) + r(X_1 \quad \Sigma_{11}) \tag{4.48}$$

olmasıdır.

Sonuç 4.3.3. $H_1\varepsilon_1$ vektörü $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_1$ modelleri altında her zaman ön tahmin edilebilirdir ve

$$M = \begin{bmatrix} (\Sigma\otimes I_n)T_1' & \Sigma\otimes I_n & X & 0 & 0 \\ \Sigma_{11} & 0 & 0 & X_1 & 0 \\ X_1' & 0 & 0 & 0 & X_1'H_1' \\ 0 & X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{H}_1X & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

olmak üzere aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\mathrm{r}\big(\mathrm{cov}\{\mathrm{H}_1\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\mathrm{H}_1\varepsilon_1), \mathrm{H}_1\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\mathrm{H}_1\varepsilon_1)\}\big)$$
$$= \mathrm{r}(\mathrm{M}) - \mathrm{r}(\mathrm{X}) - \mathrm{r}(\mathrm{X}_1) - \mathrm{r}(\mathrm{X} \quad \Sigma\otimes\mathrm{I}_n) - \mathrm{r}(\mathrm{X}_1 \quad \Sigma_{11}). \tag{4.50}$$

Ayrıca $\mathrm{H}_1\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\mathrm{H}_1\varepsilon_1)$ ve $\mathrm{H}_1\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\mathrm{H}_1\varepsilon_1)$ vektörlerinin ilişkisiz olmasının gerek ve yeter koşulu aşağıdaki koşulun sağlanmasıdır.

$$\mathrm{r}(\mathrm{M}) = \mathrm{r}(\mathrm{X}) + \mathrm{r}(\mathrm{X}_1) + \mathrm{r}(\mathrm{X} \quad \Sigma\otimes\mathrm{I}_n) + \mathrm{r}(\mathrm{X}_1 \quad \Sigma_{11}). \tag{4.51}$$

Sonuç 4.3.4. $\mathrm{X}_1\beta_1$ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir ve ε_1 vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilirdir olduğu kabul edilsin. $\mathrm{X}_1\beta_1$ vektörü her zaman $\mathcal{M}_1$ modeli altında tahmin edilebilir ve ε_1 vektörü $\mathcal{M}_1$ modeli altında her zaman ön tahmin edilebilirdir.

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\mathrm{T}_1' & \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & \mathrm{X}_2 & 0 \\ \Sigma_{11} & 0 & 0 & \mathrm{X}_1 \\ 0 & \mathrm{X}' & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$\mathrm{r}\big(\mathrm{cov}\{\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}_1\beta_1), \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_1}(\mathrm{X}_1\beta_1)\}\big) = \tag{4.53}$$
$$= \mathrm{r}(\mathrm{M}) - \mathrm{r}(\mathrm{X}) + \mathrm{r}(\mathrm{X}_1) - \mathrm{r}(\mathrm{X} \quad \Sigma\otimes\mathrm{I}_n) - \mathrm{r}(\mathrm{X}_1 \quad \Sigma_{11}).$$

$$\mathrm{r}\big(\mathrm{cov}\{\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\varepsilon_1), \varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\varepsilon_1)\}\big) \tag{4.54}$$
$$= \mathrm{r}(\mathrm{M}) - \mathrm{r}(\mathrm{X}) + \mathrm{r}(\mathrm{X}_1) - \mathrm{r}(\mathrm{X} \quad \Sigma\otimes\mathrm{I}_n) - \mathrm{r}(\mathrm{X}_1 \quad \Sigma_{11}).$$

Ayrıca aşağıdaki ifadeler denktir.

a. $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}_1\beta_1)$ ve $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}_1}(\mathrm{X}_1\beta_1)$ ilişkisizdir.

b. $\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}}(\varepsilon_1)$ ve $\varepsilon_1 - \mathrm{BLUP}_{\mathcal{M}_1}(\varepsilon_1)$ ilişkisizdir.

c. $\mathrm{r}(\mathrm{M}) = \mathrm{r}(\mathrm{X}) - \mathrm{r}(\mathrm{X}_1) + \mathrm{r}(\mathrm{X} \quad \Sigma\otimes\mathrm{I}_n) + \mathrm{r}(\mathrm{X}_1 \quad \Sigma_{11})$.

Böylece bu kısımda $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_1$ modelleri altında bilinmeyen parametre ϕ_1 vektörünün BLUP'ının kovaryans matrisleri arasındaki ilişkiler elde edilmiş ve bu sonuçlar Sonuç 4.3.2-4.3.4. de verildiği gibi özel durumlara indirgenmiştir.

BÖLÜM 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Çalışmada

$\mathcal{M}_1: y_1 = X_1\beta_1 + \varepsilon_1$ ve $\mathcal{M}_2: y_2 = X_2\beta_2 + \varepsilon_2$

SUR modelleri ile bu modellerden elde edilen

$\mathcal{M}: y = X\beta + \varepsilon$

genel lineer model ele alınmıştır. $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri aynı zamanda $\mathcal{M}$ modelinin $T_1 = [I_n \quad 0]$ ve $T_2 = [0 \quad I_n]$ dönüşüm matrisleri kullanılarak elde edilen dönüşüm modelleridir. Dolayısı ile bu modeller eklenen veya silinen gözlemlerin olduğu durumlarda birlikte veya ayrı ayrı ele alınabilecek modellerdir. $\mathcal{M}$ modeli ve bu modelin alt modelleri olarak da ifade edilebilecek olan $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modellerini oluşturan denklemlerin her biri kendine özeldir. Yani her bir alt model ve dolayısı ile $\mathcal{M}$ modeli biri diğerinden ayrı olacak şekilde çok değişkenli regresyon denklemlerinden meydana gelen bir denklemler kümesidir. Denklem içindeki herhangi bir parametre bir başka denklem içinde yer almaz, başka bir ifade ile oluşan bu denklem kümesi eşanlı bir sistem oluşturmaz. Görünürde ilişki olmaması varyans kovaryans matrisinin diagonal olduğu anlamına gelmez. Bu durum bize farklı denklemlerin hata payları arasında ilişki olabileceğini gösterir. Böylece denklemler birlikte incelendiğinde ayrı ayrı incelenmesinden daha fazla bilgi verirler (Rao, 1974, s. 101-105).

$\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ SUR modelleri ve birleştirilmiş model $\mathcal{M}$ modeli üzerinde eşzamanlı sonuçlar elde edebilmek için bilinmeyen vektörlerin tahminleri incelenir. Bu modeller yapı olarak benzemelerine rağmen içerdikleri bazı farklılıklardan dolayı bu modeller altında ortak bilinmeyen parametrelerin ön tahmin edicileri ve dolayısı ile tahmin edicileri farklı ifade, özellik ve performanslara sahiptir. Bu nedenle, genel model $\mathcal{M}$ ve alt modeller $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ altında ortak olan bilinmeyenler için

$$\phi_{\mathrm{i}} = \mathrm{K}_{\mathrm{i}}\beta_{\mathrm{i}} + \mathrm{H}_{\mathrm{i}}\varepsilon, \mathrm{i} = 1,2$$

vektörü ele alınabilir. ϕ_i vektörünün $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında BLUP'larının özelliklerinin incelenmesi bu modeller altında farklılıkları veya benzerlikleri ortaya koymak açısından önemlidir. Çalışmada $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ SUR modelleri ve birleştirilmiş model $\mathcal{M}$ altında ortak olan bilinmeyenler vektörü ϕ_{i}'nin BLUP'larının arasındaki kovaryans matrislerin özellikleri incelenmiştir. Sonuçlar elde edilirken karşılaşılan Moore-Penrose genelleştirilmiş tersleride içeren karmaşık matris ifadelerinin daha kolay anlaşılır forma indirgenmesi için matrislerin bazı rank özellikleri kullanılmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçlar bazı özel durumlara indirgenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, SUR modelleri altında ortak olan bilinmeyen vektörlerin BLUP'larının kovaryansları ile ilgili olan konuların bir parçasıdır. Ele alınan konu ile ilgili bir sonraki çalışma matrislerin rank ve inertialarını kullanarak SUR modeller altında ortak olan bilinmeyenler vektörünün BLUP'larının karşılaştırması olabilir. Böylece hangi koşullar altında hangi modelden daha iyi sonuç çıkarılacağı ile iligili sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca SUR modeller altında farklı tahmin ediciler ele alınarak, bu tahmin edicilerin kovaryans matris özellikleri incelenebilir. Bu yaklaşımla elde edilecek sonuçlar genel sonuçlar olacaktır. Bu genel sonuçların özel durumlara karşılık gelecek durumları da elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Akdi, Y. 2005. Matematiksel İstatistiğe Giriş, Bıçaklar Kitabevi, Ankara, 1-404.

Alalouf, I. S., Styan, G. P. H. 1979. Characterizations of estimability in the general linear model. Ann. Stat., 7: 194-200.

Arendacká, B., Puntanen, S. 2015. Further remarks on the connection between fixed linear model and mixed linear model. Stat. Papers, 56 (4): 1235–1247.

Baksalary, J.K., Kala, R. 1979. On the prediction problem in the seemingly unrelated regression equations model. Statistics 10, 203–208.

Baksalary, J.K., Trenkler, G. 1989. The efficiency of OLS in a seemingly unrelated regressions model. Econ. Theory 5, 463–465.

Bhatia, R. 2007. Positive definite matrices, Princeton series in applied mathematics, Princeton University Press, Priceton, NJ.

Dong, B., Guo, W., Tian, Y. 2014. On relations between BLUEs under two transformed linear models. J. Multivariate Anal., 131, 279-292.

Drygas, H. 1975. Estimation and prediction for linear models in general spaces Math. Operationsforsch. Statist., 6: 301-321.

Dwivedi, T.D., Srivastava, V.K. 1978. Optimality of least squares in the seemingly unrelated regression model. J. Econ. 7, 391–395.

Foschi, P., Kontoghiorghes, E.J. 2002. Seemingly unrelated regression model with unequal size observations: computational aspects. Comput. Stat. Data Anal. 41, 211–229.

Goldberger, A.S. 1962. Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression model. J. Amer. Statist. Assoc., 57: 369-375.

Gong, L. 2019. Establishing equalities of OLSEs and BLUEs under seemingly unrelated regression Models, Journal of Statistical Theory and Practice, 13:5.

Graybill, F.A. 1969. Introduction to matrices with applications in statistics, Wadworth Publising Company inc., California.

Güler N. 2019. Some Properties of Covariance Matrices of Predictors under Seemingly Unrelated Regression Model. 11th International Statistics Congress (ISC2019), 820-830.

Güler, N., Yüce, N. 2020. Some notes on covariance matrices of predictors under two SUR models, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 7 (1) , 273-281.

Harville, D.A. 1976. Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random effects. The Annals of Statistics, 4: 384-395.

Harville, D.A. 1997. Matrix algebra from a statiscians perspective, Springer.

Haslett, S.J., Puntanen, S. 2010. Equality of BLUEs or BLUPs under two linear models using stochastic restrictions. Stat. Papers, 51 (2): 465-475.

Haslett, S.J., Puntanen, S. 2011. On the equality of the BLUPs under two linear mixed models. Metrika, 74: 381–395.

Henderson, C.R. 1975. Best linear unbiased estimation and prediction under a selection model. Bio-metrics, 31: 423-447

Kmenta, J. 1986. Elements of Econometrics, Macmillan Publishing, New York.

Kmenta, J., Gilbert, R.F. 1968. Small sample properties of alternative estimators of seemingly unrelated regressions. Journal of the American Statistical Association, 63, 1180-1200.

Liu, A.Y. 2002. Efficient estimation of two seemingly unrelated regression equations, Journal of Multivariate Analysis, 82, 445-456.

Liu, X., Wang, Q.W. 2013. Equality of the BLUPs under the mixed linear model when random components and errors are correlated. J. Multivariate Anal., 116: 297–309.

Liu, Y., Xia, C. 2013. Fundamental equations of BLUE and BLUP in the multivariate linear model with applications, Commun Stat: Theory and Methods, 42, 398-412.

Magnus, J.R., Neudecker, H. 1988. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics, John Wiley, G. Britain.

Marsaglia, G., Styan, G.P.H. 1974. Equalities and inequalities for ranks of matrices. Linear Multilinear Algebra, 2: 269–292.

Öztürk, F. 2011, Olasılık ve İstatistiğe Giriş 1, Gazi Kitabevi, Ankara, 1-245.

Penrose, R. 1955. A generalized inverse for matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc.,51: 406–413.

Phillips, P.C.B. 1977. An approximation to the finite sample distribution of Zellner's seemingly unrelated regression estimator. J. Econ. 6, 147–164.

Puntanen, S., Styan, G.P.H., Isotalo, J. 2011. Matrix tricks for linear statistical models. Our Personal Top Twenty. Springer, Heidelberg.

Qian, H. 2008. Sources of efficiency gain of the FGLS estimator relative to the OLS estimator of seemingly unrelated regressions models. Econ. Theory 24, 1456–1460.

Rao, C.R. 1973. Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix. J. Multivariate Anal., 3: 276-292.

Rao, C.R. 1975. Simultaneous estimation of parameters in different linear models and applications to biometric problems. Biometrics, 31: 545-554.

Rao, P. 1974. Specification bias in SUR. Econometric and economic theory, Ed. Willy Sellerkearts, International Airts and Science Press, New York.

Robinson, G.K. 1991. That BLUP is a good thing: the estimation of random effects (with discussion on pp. 32-51), Stat. Sci 6, 15-51.

Searle, S.R. 1997. The matrix handling of BLUE and BLUP in the mixed linear model, Linear Algebra and its Applications, 264, 291-311.

Seber, G.A.F. 1977. Linear regression analysis, John Wiley, New York.

Seber, G.A.F. 2008. A matrix handbook for statisticians, John Wiley & Sons, Inc.New Jersey.

Sengupta, D., Jammalamadaka, S.R. 2003. Linear models an integrated approach, World Scientific, Singapore.

Srivastava, V.K., Giles, D.E.A. 1987. Seemingly Unrelated Regression Equations Model. Marcel Dekker, New York.

Srivastava, V.K., Raj, B. 1979. The existence of the mean of the estimator in seemingly unrelated regressions. Commun. Stat. Ser. A 48, 713–717.

Sun, Y., Ke, R., Tian, Y. 2014. Some overall properties of seemingly unrelated regression models. Adv. Stat. Anal., 98 (2), 103-120.

Taşçı, D. 2011. Lineer Cebir, 4. Baskı, Gazi Üniversitesi, Ankara, 1–585.

Theil, H. 1971. Principles of Econometrics, New York.

Tian, Y. 2010. Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications. Linear Algebra Appl., 433: 263–296.

Tian, Y. 2012. Solving optimization problems on ranks and inertias of some constrained nonlinear matrix functions via an algebraic linearization method. Nonlinear Analysis, 75: 717–734.

Tian, Y. 2015a. A new derivation of BLUPs under effect model. Metrika, 78: 905-918.

Tian, Y. 2015b. A matrix handling of predictions under a general linear random-effects model with new observations, Electron. J. Linear Algebra, 29, 30-45.

Tian, Y. 2017a. Some equalities and inequalities for covariance matrices of estimators under linear models. Stat. Papers, 58: 467-484.

Tian, Y. 2017b. Matrix rank and inertia formulas in the analysis of general linear models. Open Math., 15, 126–150.

Tian, Y. 2017c. Transformation approaches of linear random-effects models. Stat. Methods Appl., 26(4): 583-608.

Tian Y., Jiang, B. 2016a. An algebraic study of BLUPs under two linear random-effects models with correlated covariance matrices, Linear and Multilinear Algebra, 64 (12), 2351-2367.

Tian Y., Jiang, B. 2016b. Matrix rank/inertia formulas for least-squares solutions with statistical applications, Spec. Matrices, 4, 130-140.

Venit, S., Bishop, W. 1985. Elementary linear algebra, PWS publishers, Massachusetts.

Zellner, A. 1962. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. J. Am. Stat. Assoc. 57, 348–368.

Zellner, A. 1963. Estimators for seemingly unrelated regression equations: some exact finite sample results. J. Am. Stat. Assoc. 58, 977–992.

Zellner, A., Huang, D.S. 1962. Further properties of efficient estimators for seemingly unrelated regression equations. Int. Econ. Rev. 3, 300–313.

ÖZGEÇMİŞ

Nevin Yüce, 28.05.1991'de Düzce'de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Düzce'de tamamladı. 2009 yılında Düzce Arsal Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2010 yılında başladığı Karabük Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2016 yılında bitirdi. 2017 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2015 yılında başladığı iş hayatına Düzce Belediyesi Çocuk Kulübü'nde matematik öğretmeni olarak devam etmektedir.