T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER TRANSPOZ MATRİS DENKLEMİNİN SİMETRİK VE TERS SİMETRİK AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra KAPLAN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Murat SARDUVAN**

Ekim 2020

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER TRANSPOZ MATRİS DENKLEMİNİN SİMETRİK VE TERS SİMETRİK AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra KAPLAN

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK

Bu tez 20 / 10 / 2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR Jüri Başkanı	Doç. Dr. Murat SARDUVAN Üye	Doç. Dr. Emrah Evren KARA Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Esra KAPLAN
20 / 10 / 2020

TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğretimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, her türlü koşulda bana destek olan Sayın Doç. Dr. Murat SARDUVAN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Özellikle, tüm eğitimim ve öğrenimim süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen eşime, anneme ve arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\bar{A}$	: A matrisinin eşleniği
A^T	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozu
$A \otimes B$	: A ve B matrislerinin Kronecker çarpımı
I	: Birim matris
S	: Simetrik matris
R	: Ters simetrik matris
H	: Hermityen matris
T	: Ters Hermityen matris
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^n$	: $n \times 1$ boyutlu karmaşık vektörler kümesi
$\mathbb{C}^{m\times n}$	: $m \times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}^{n\times n}$	: $n \times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: $n \times 1$ boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{m\times n}$	: $m \times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$\mathbb{R}^{n\times n}$	: $n \times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$M(\alpha)$	: İterasyon matrisi
$\rho(A)$	: A matrisinin spektral yarıçapı
$\lambda(A)$	: A matrisinin spektral kümesi
$\\|.\\|_2$	: Frobenius norm
$\|\\|.\\|\|$	: Matris normu
$K(A)$	: A matrisinin spektral koşul sayısı
$vec(.)$	: vec operatörü
$\mathrm{tr}(A)$	: A matrisinin izi

$\in$	: Elemanıdır
■	: İspat sonu
ark.	: Arkadaşları
bkz.	: Bakınız
vb.	: Ve benzeri
vs.	: Vesaire

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: SSS metodu, Sylvester Transpoz Matris Denklemi, Kronecker Çarpım, Matris Normları, Spektral Yarıçap

Çalışmanın konusu ve kapsamı hakkında bazı bilgiler ilk bölümde verilmektedir. Ayrıca, matrislerin tarihsel gelişiminden, çalışmada ele alınan $Ax = b$ lineer denklem sistemi ve farklı matris denklemleri üzerinde yapılan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir. Sonraki bölümde, literatürde mevcut olup, çalışma boyunca kullanılacak olan bazı tanım ve sonuçlar verilmektedir.

Bölüm 3'te, genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisinin çözümünü bulunmasıyla ilgili olarak ikili eşlenik kalan algoritması (BCR) hatırlatılmıştır. Bölüm 4'te, $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümü için hermityen ve ters hermityen ayrışım (HSS) metodu hatırlatılmıştır.

Bölüm 5'te, $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümü için simetrik ve ters simetrik ayrışım (SSS) metodu tanıtılmaktadır. Ayrıca genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin SSS kullanılarak nasıl çözüleceği ortaya konulmakta ve bu metodun algoritması verilmiştir. Son olarak, SSS metodunun algoritmasının etkinliğini göstermek için sayısal örnekler verilmektedir.

ON THE SOLUTION OF GENERALIZED SYLVESTER TRANSPOSE MATRIX EQUATION USING SYMMETRIC AND SKEW SYMMETRIC SPLITTING METHOD

SUMMARY

Keywords: SSS method, Sylvester Transpose the matrix equation, Kronecker product, Matrix Norms, Spectral Radius.

In the first chapter, there are some information about the content and subject of the study. In addition, the historical development of matrices and some studies related to the system of linear equations $Ax = b$ and different matrix equations were mentioned. In the second chapter, it is given some conceps and results that are available in the literature and will be used throughout the study.

In Chapter 3, the Biconjugate Residual Algorithm (BCR) is remended related to finding the solution of the coupled general Sylvester transpose matrix equations. In Chapter 4, It is reminded the Hermitian and Skew Hermitian splitting (HSS) method to solve the system of linear equations $Ax = b$.

In Chapter 5, Symmetric and skew symmetric splitting method (SSS) to solve the system of linear equation $Ax = b$ has been introduced. Moreover, it has been established how to solve the generalized Sylvester transpose matrix equation using the SSS method and is given algorithm of this method. Lastly, numerical examples have been given to demonstrate the effectiveness of the SSS method's algorithm.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Önemi

1.1.1. Matrislerin tarihsel gelişimi

Lineer (Doğrusal) denklem sistemlerinin çözümü için matris kavramlarının kullanılmasının çok uzun bir geçmişi vardır Fakat matrisler 1800'lü yılların başlarına kadar diziler olarak bilinirdi. Şöyleki, ilk olarak lineer denklem sistemlerinin diziler (şimdili adıyla matrisler) kullanılarak çözümü, özellikle kare matrislerle ifade edilmesi ve determinant kullanımına M.Ö 10. yy'da yazılan 'Matematiksel Sanat Üzerine Dokuz Bölüm' isimli Çince yazılmış bir eserde rastlanmıştır. Bu kavram çok uzun zaman sonra Batı'ya ulaşabilmiştir [1]. 1545'te İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano, Ars Magna'yı yayınlayarak matris ile doğrusal denklem sistemlerinin çözüm yöntemini Avrupa'ya ilk defa getirdi. Hollandalı matematikçi Jan de Witt, 1659'da kitabı Elements of Curves 'de matrisleri kullanarak doğrusal dönüşümleri temsil etti [2]. Japon matematikçi Seki Kowa 1683 yılında doğrusal denklem sistemlerini çözmek için aynı matris yöntemlerini kullandı [3]. Batı Avrupa'da 1700-1710 yılları arasında Alman matematikçi Gottfried Wilhelm Leibnitz, doğrusal denklemlerin çözülmesinde matrislerin kullanımı ile alakalı 50'den fazla farklı matris sistemi üzerinde denemeler yaptı. 1750 yılında da Gabriel Cramer, determinantları kullanarak doğrusal denklem sistemlerinin pratik çözümlerini üreten Cramer kuralını sundu [2].

Gauss 1801 yılında yayımladığı sayılar kuramı çalışmaları ve ikinci dereceden katsayıları olan "$x^2 + xy - 2y^2$" şeklindeki ifadeleri, üç boyutlu doğrusal sistemler ile ilişkilendirmeye yöneldi [4].

Matematik ve Fizik alanında çalışmalar yapan Cauchy, bir matrisin determinantının günümüzde kullanılan tanımını ve determinantlarla ilgili genel ifadeleri düzenli bir şekilde ortaya koydu. Ayrıca 1829'da reel simetrik matrislerin özdeğerlerinin reel olduğunu gösterdi [4].

İngiliz Matematikçi James Joseph Sylvester determinantları açıp sayısal değerlerini bulmak için satır ve sütunları sildikçe daha küçük determinant (minör) elde ederek sonuca varmak için çalışmalar yaparken, sanki 'ana' bir determinanttan gittikçe küçülen 'çocuk' determinantların bulunmasından ilham alarak o güne kadar diziler olarak geçen kavrama 1850'de 'Matrix' adını vermiştir. Bu adı vermesinin sebebi 'Matris' kelimesinin kökeninin Latince'de 'womb' yani 'Rahim' ya da 'mater-mother' yani 'anne' anlamlarına gelmesidir [5]. J.J. Sylvester'ın 1851 tarihli makalesinde 'Matris' terimini şöyle açıklamıştır; 'Daha önceki makalelerimde Matris'i dikdörtgen bir terim dizisi olarak tanımlamıştım ancak daha da genişletilerek bunun dışında farklı determinant sistemleri oluşturabiliriz.' [6].

Matris teorisinin Batı Avrupa'da geliştirilmesinde en çok determinant kavramı öne çıkmaktaydı [2]. Determinanttan bağımsız olarak matris teorisinin geliştirilmesi 1858'de Arthur Cayley tarafından yayınlanan "Memoir on The Theory of Matrices" adlı eserle başlamıştır. O eserde Cayley-Hamilton teoremi tanıtıldı ve ispatlandı. Ayrıca matrislerde toplama, çıkarma, çarpma gibi işlemler matrislerin lineer dönüşümleri olarak tanımlandı ve bu işlemlerin dağılma özellikleri gösterildi. Aynı zamanda matris çarpımının ve matrislerde bir satırın katının başka bir satıra eklenmesi veya bir sütunun katının başka bir sütuna eklenmesinin değişme özelliklerinin olup olmadığı araştırıldı. Böylece, matris teorisi, sadece determinantlar ile sınırlı olmaktan kurtuldu. Cayley'in soyut matris işlemleri devrim niteliğindeydi. Bu durum önceki matris teorisini bitirip modern görüşte matris yapılarını ortaya çıkarmaya başlamıştır. Bu, denklem sistemlerinden bağımsız bir matris kavramını önermede etkili oldu [7]. Özellikle fizikçiler modern görüşte matris yapılarını Kuantum Fiziği alanında çok kullanmışlardır [8].

Einstein sayılar kuramını ve ikinci dereceden katsayıları olan ifadelerin üç boyutlu doğrusal sistemlerini daha da geliştirdi ve Cayley'in soyut matris yapılarının (modern görüşteki matris yapılarının) değişmediğini gösterdi. Bu çalışmalar Einstein'in izafiyet teorisinin temelini oluşturdu [4].

Jacobi, daha sonra Sylvester tarafından Jacobi determinantları olarak adlandırılan fonksiyonel determinantlar üzerinde çalıştı ve yerel düzeyde (veya sonsuz küçük) geometrik dönüşümleri tanımlamak için kullandı. 'Kronecker's Vorlesungen über die Theorie der Determinanten' (Kronecker 1897) ve 'Weierstrass Zur Determinantentheorie' (Weierstrass 1915, s. 271-286) çalışmalarının her ikisi de Cauchy'nin 1903 de yayınladığı somut yaklaşımların aksine, ilk defa determinantların kurallarını aksiyom haline getirdi. Bu çalışmaların en önemli özelliği determinantların aksiyomları oluşturulurken sağlam bir şekilde kurgulanmış olmasıdır [9].

Cullis adında bir İngiliz matematikçi 1913 yılında matrisler için modern parantez gösterimini kullanan ilk kişiydi. Burada $A = [a_{i,j}]$ bir matrisi temsil eder ve $a_{i,j}$ matrisin i. satır, j.sütunundaki elemanı gösterirdi [2].

Matrislerdeki birçok teorem ilk zamanlarda küçük boyutlu matrisler için oluşturuldu. Örneğin, Cayley-Hamilton teoremini; 2×2 boyutlu matrisler için Cayley, 4×4 boyutlu matrisler için Hamilton kanıtlamıştır. Frobenius, 1898 yılında (bilinear forms) ikili formlar üzerinde çalışarak teoremi tüm boyutlara genelleştirmiştir. Matrisler 18. yüzyılda kısmen de olsa hiperkompleks sayı sistemlerinin (üç boyutlu sayı sistemleri) sınıflandırılmasında kullanılıyordu. Bu durum çok boyutlu sayı sistemlerinde matrislerin kullanılmasını yaygınlaştırmıştı. Böylece, matrisler 19. yüzyılda ve 20. yüzyılın başlarında lineer cebirin çalışma alanlarının tamamında kullanılmıştır [9].

Alman fizikçi Heisenberg atomların değişmez durumlarını yani belirli yerde olma koşullarını matrislerle açıklamıştır, bu duruma matris mekaniği denir. Matris mekaniği, Kuantum Mekaniğinin farklı bir alanıdır. Böylece, Heisenberg, Born ve Jordan tarafından matris mekaniğinin çalışılmaya başlanması, sonsuz boyutlu matrislerin incelenmesine öncülük etti. Daha sonra Von Neumann, Hilbert uzaylarında lineer operatörler gibi Öklid uzayına karşılık gelen fonksiyonel analitik kavramlar geliştirerek kuantum mekaniğinin matematiksel formülasyonunu gerçekleştirdi [10].

1.1.2. Matrislerin matematikte ve diğer bilimlerde kullanım alanları

Hem matematikte hem de diğer bilimlerde matrislerin çok sayıda uygulaması vardır. Bazıları sadece bir sayı kümesinin bir matristeki kompakt gösteriminden yararlanır. Örneğin, oyun teorisi ve ekonomide, ödeme matrisi, iki oyuncunun seçtiği sonlu alternatiflerin belirli bir kümesinden hangisine bağlı olarak oyuncuların ödemesi yapacağını kodlar [11].

Birkaç dokümandaki belli kelimelerin sıklıklarını takip eden tf-idf gibi doküman terim matrisleri metin madenciliği ve otomatik eş anlamlılar sözlüğü derlemesi için kullanılır [12].

Karmaşık sayılar belirli 2×2 matrisler ile temsil edilebilir. Bu durum karmaşık sayıların ve matrislerin birbiriyle örtüştüğünü gösterir. Benzer durum kuaterniyonlar içinde geçerlidir. Sir William Hamilton tarafından üretilen Kuaterniyonlardan önce uzayda noktalar sayı üçlüleri olarak gösteriliyordu. Bu sayı üçlüleri toplanıp çıkartılabiliyor fakat çapılıp bölünemiyordu. Kuaterniyonlar teoride sayı dörtlüsü olarak gösterildi ve bu keşif bilgisayar grafiklerine kadar yansıdı. Bu durum aynı zamanda Clifford Cebiri içinde geçerlidir. Clifford Cebiri, karmaşık sayıların ve karmaşık sayı sistemlerinin genelleştirilmesidir [13].

Hill şifrelemesi gibi eski şifreleme tekniklerinde de matrisler kullanılır. Bir matris ile şifreleme yaparken onun tersi ile şifre çözülmesi işlemi yapılmıştır. Bu ise diğer şifreleme yöntemlerine göre kodlarının kırılmasını kolaylaştırmıştır [14].

Bilgisayar grafiklerinde nesneleri temsil etmek ve üç boyutlu bir nesneyi iki boyutlu bir ekrana yansıtmak gibi görevleri yerine getirmek için Affine döndürme matrisleri kullanılır ve nesnelerin dönüşümlerini hesaplamak için özel tanımlı matrisler kullanılır. Grafiklerin yazılımında kullanılan polinom halkaları üzerindeki matrisler kontrol teorisinin incelemelerinde önemlidir [15].

Kimyada, özellikle Kuantum teorisinde moleküler bağ ve spektroskopi (madde ile ışın arasındaki ilişkiyi inceleme) konularında matrisler çeşitli şekillerde kullanılır. Örneğin, Hartree -Fock metodu bir kuantum sistemin bir izole noktadaki enerjisini yaklaşık hesaplamak için determinantlar kullanır [15].

Matrislerin Graf Teorisinde de kullanımı çok fazladır. Sonlu bir grafiğin yakınlık ya da bitişiklik (adjacency) matrisi Graf teorisinin temel bir kavramıdır. Graf teorisinin mantığında grafik çizimleri vardır ve bilgisayar programları verilen bir grafiğin algoritmalarla belirlenen tepe uçlarının bir kenarla bağlandığını kaydeder. Uzaklık (veya maliyet) matrisleri kenarların uzaklıkları hakkında bilgi verir. Bu kavramlar birbirleri ile ilgili ve birbirlerinden geçiş yapan web sitelerine de uygulanabilir. Örneğin, A sitesinden link ile B sitesine geçiş sıklıklarına bakılır. Bu durumda (bağlantı ağı son derece yoğun olmadığı sürece) matris seyrek olma eğilimindedir. Bu nedenle ağ teorisine özel olarak uyarlanmış matris algoritmaları kullanılabilir. Ağ teorisinde en çok kullanılan matrisler, bitişiklik matrisleridir [16,17].

Türevlenebilir bir fonksiyonun Hessian matrisi, fonksiyonların tanım aralıklarındaki koordinat yönleriyle ilgili ikinci türevlerinden oluşur. Yani fonksiyonun yerel büyüme davranışı ile ilgili bilgileri kodlar [18].

Aynı şekilde Kuadritik programlamada matrislerle yazılabilen Kuadritik fonksiyonların genel minimum veya maksimum değerlerini bulmak için kullanılır [19].

Jacobi matrisi geometride sıklıkla kullanılır. Ayrıca, kısmi diferansiyel denklemlerde, denklemin en yüksek mertebeden diferansiyel operatörünün katsayılar matrisini baz alarak çözümünü oluşturur. Eliptik kısmi diferansiyel denklemler için bu matris pozitif ve kesindir ve bu da söz konusu denklemin çözüm kümesi üzerinde belirleyicidir [20].

Sonlu elemanlar yöntemi, karmaşık fiziksel sistemlerin bilgisayar simülasyonlarında yaygın olarak uygulanan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için önemli bir sayısal yöntemdir. Bu yöntem kullanılırken fiziksel sistem parçalanır ve parçalar matris denklemi olarak yeniden yazılır. Yazılan matris denklemleri doğrusal fonksiyonların yaklaşık çözümünü verir [21].

Olasılık teorisinde en yaygın kullanılan matris çeşidi stokastik matristir. Olasılık teorisi ve istatistikte stokastik matrisler olasılıkların kümelerini tanımlamak için kullanılır. Örneğin bir Google aramasında sayfaları sayan PageRank algoritmasından yararlanılır. Stokastik matrisler sonlu adımlı Markov zincirlerini tanımlamak için de kullanılır. Markov zincirleri, stokastik matrisleri kullanarak ileriye dönük tahminleri hesaplayabilen ve çözümleme sürecinde sonsuz tane diferansiyel denklem barındıran bir yöntemdir. Örnek olarak kuyrukta bekleme süresi tahmin problemi verilebilir. Stokastik matrisin bir satırında bir parçacığın şimdiki durumuna olarak sonraki durumu verilmektedir. Şöyleki sonraki durum koşullu olasılıklarla sadece şimdiki duruma bağlı olarak ifade edilmektedir. Markov zincirleri de bu parçacıkların en sonunda elde ettiği durumları, geçiş matrislerinin özvektörlerinden bulunmasına yardımcı olur. Geçiş matrisi, bir Markov zincirinin geçişlerini tanımlamakta kullanılan matristir [22,23].

İstatistikte de çok farklı matrisler kullanılır. Tanımlayıcı istatistikler genellikle veri matrisleri olarak gösterilen veri kümelerini tanımlamayla ilişkilidir. Hatta bu matrislerin boyutları, boyut indirgeme tekniklerine tabi tutularak küçültülür. Örneğin, kovaryans matrisi birkaç rasgele değişkenin karşılıklı varyansını kodlayan bir matristir. İstatistikte matrisleri kullanan başka bir teknik de en küçük kareler yöntemidir [24,25,26].

Doğrusal dönüşümler ve bu dönüşümlerle ilgili simetriler modern fizikte önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin Kuantum Alan teorisindeki temel parçacıklar, bağımsız ışık hızının nasıl gözlemlendiğini açıklayan, Lorentz özel görelilik grubunun temsilleri ve daha spesifik olarak spin grubu altındaki davranışlara göre sınıflandırılırlar. Spin grubu, bir parçacığın açısal momentumudur. Örneğin gezegenlerin kendi eksenleri etrafında dönmesinin momentumudur. Özel olarak tanımlanan Pauli matrisleri ve daha genel Gama matrislerini içeren somut temsiller, spinor olarak görünen fermiyonlar’ın yani parçacık fiziğinde belli statik değerleri olan parçacıkların fiziksel tanımının ayrılmaz bir parçasıdır. Burada spinor vektör uzayları ile ilişkilendirilebilir öklid alanıdır [27].

Fizikçiler hesaplamaları için, güçlü nükleer etkileşimlerin, kuantum renk dinamiğinin modern tanımının temelini oluşturan SU(3) ölçer grubu için de kullanılan Gell-Mann matrisleri olarak bilinen uygun bir matris gösterimi de kullanır. Ayrıca Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrisi olarak bilinen özel metrislerde zayıf madde etkileşimleri için önemli olan temel kuark (kuramsal tanecikler) durumlarının belirli ve farklı kütlelerle parçacıkları tanımlayan temel kuark durumlarının aynı olmadığını ifade eder [28].

Kuantum mekaniğinin ilk modeli (Heisenberg, 1925) kuantum durumları üzerinde hareket eden sonsuz boyutlu matrisler tarafından teorinin operatörlerini temsil eder [29]. Bu temsile matris mekaniği denir. Buna örnek olarak Kuantum sisteminin 'karışık' durumunu net olarak ifade eden doğrusal bir kombinasyon olarak nitelendirilen yoğunluk matrisleri verilebilir [30].

Deneysel parçacık fiziğinin temelini oluşturan saçılma deneylerini tanımlamak için de matrisler kullanılır. Örneğin, birbirleriyle etkileşime girmeyen parçacıkların, parçacık hızlandırıcılarda birbirlerine yönlendirilmesiyle meydana gelen çarpışma reaksiyonlarının sonuçlarını hesaplayabilmek için tüm etkileşimler hakkındaki bilgileri kodlayan S-matrisleri kullanılır [31].

Fizikte doğrusal birleştirilmiş harmonik sistemlerin tanımlarında matrislerin genel uygulaması vardır. Bu tür sistemlerin hareket denklemleri matris şeklinde tanımlanabilir. Moleküllerin iç dinamikleri söz konusu olduğunda denklemlerin matris olarak yazılması çok önemlidir. Ayrıca mekanik titreşimleri ve elektrik devrelerinde salınımları tanımlamak için de matrisler gereklidir [32,33].

Elektronikte geleneksel örgü analizi ve nodal analiz, bir matrisle tanımlanabilecek lineer denklemler sistemine yol açar. Bu şekilde birçok elektronik bileşenin davranışı matrisler kullanılarak tanımlanır. Bir devrenin hesaplanması sürecinde artık matrisler azalır ve nihai çözüme gidilir [34].

Geometrik optik teorisinde ışığın dalga doğası ihmal edilir. Böylece ışık ışınları gerçekten de geometrik ışınların olduğu bir model olur. Kullanılan matris optik elemanın özelliklerini kodlar. Bunu uygulayan iki tip matris vardır. Biri mercek üzerindeki kırılmayı açıklayan kırılma matrisi diğeri de çeviri matrisidir. Çeviri matrisi düzlemde bir sonraki ışık kırılmasını, kırılma yüzeyine çeviren ve açıklayan matristir [34].

1.2. Literatür Bilgisi ve Çalışmanın İçeriği

Bu çalışmada üzerinde durulan $Ax = b$ lineer denklem sistemleri ile matematikte olduğu kadar fizik, mühendislik, ekonomi gibi birçok uygulamalı alanda da karşılaşılmaktadır. $AXB = C$, $AXB + CXD = F$, $AXB + CX^T D = E$ ve $AX = B, XC = D$, $X - AXB = C$ gibi lineer matris denklemlerinin çözümlerini iteratif yöntemlerle inceleyen birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda matris denklemleri bazı özel isimler de almıştır. Örneğin, $AX + XB = C$ Sylvester matris denklemi adını alırken onun özel hali olan $AX + XA^T = C$ denklemine Lyapunov denklemi denilmiştir. Yine birçok çalışma bunların genelleştirilmiş versiyonları ile ilgilidir.

Wang ve Jiang $Ax = b$' nin çözümü ile ilgili çalışmalarında boyut indirgeme metodu olarak adlandırılan bir metot önermişlerdir. Bu yöntemin özellikle büyük boyutlu lineer denklem sistemlerinin çözümünü kolaylaştırdığı ve boyutunu indirgediği iddia edilmiştir [35].

Zhang'ın 2002'de yapmış olduğu çalışmasında [35]'te öne sürülen boyut indirgeme metodunun aslında Schur ayrışım metodundan (Schur Decomposition Method) farklı olmadığı, bu metodun bir türü olduğu ve aslında Wang ve Jiang'ın boyut indirgeme metodunun gerçekte bir boyut indirgeme metodu olmadığı ifade edilmiştir. Hatta bahsedilen metotta bulunması gereken bilinmeyen sayısının Schur ayrışım metodundan (Schur Decomposition Method) daha fazla olduğu söylenmektedir. [35,36].

Bulgakov ve Godunov, [37] çalışmasında $Ax = b$ sistemi için Conjugate Gradient Yöntem (CGM)'ini kullanarak, Sylvester matris denkleminin bir özel durumu olan $A^{*}H + HA + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü için algoritma vermiştir. Bulgakov ve Godunov [38] çalışmasında ise, [37] çalışmasında verdikleri algoritmanın hata analizini yapmışlardır.

Mukaidani ve ark. [39] çalışmasında, Lyapunov matris denkleminin genelleştirilmiş versiyonları ve Riccati matris denklemi için iteratif yöntem üzerine tartışma yapmışlardır.

Jiang ve Wei [40] çalışmasında, $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$olmak üzere $X - AXB = C$ ve $X - A\bar{X}B = C$ matris denklemlerinin aşikâr çözümlerini karakteristik polinom yöntemiyle elde etmeye çalışmışlardır.

Ding ve Chen [41] çalışmasında, $Ax = b$'nin iteratif çözümü için bilinen Jacobi ve Gauss-Siedel yöntemlerini ikili Sylvester matris denklemlerinin çözümlerine modifiye etmişlerdir.

Peng ve ark. [42] çalışmasında, $AXB = C$ matris denkleminin optimal yaklaşık çözümleri ve simetrik çözümleri için bir iteratif yöntem geliştirmiş, matris denklemi bu yöntemin algoritmasına uygun olursa denklemin çözümünün otomatik elde edildiğini savunmuşlardır.

Peng [43] çalışmasında, $AXB = C$ matris denkleminin simetrik çözümlerini bulmak için $R = AXB - C$ kalan matrisinin normunun istenen en küçük değer olması için bir iteratif yöntem vermiştir. Bu yöntemde, simetrik olarak seçilen herhangi bir başlangıç matrisi ile yuvarlama hataları olmadan, sonlu sayıda iterasyonla çözümün elde edildiğini ifade etmiştir.

Sheng ve Chen [44] çalışmasında, $(AXB, CXD) = (E, F)$ olarak verilen matris denklem ikilisinin çözümlerinde etkin bir iteratif yöntem vermiş, ayrıca bu yöntemle matris denklemlerinin çözümünün var olup olmadığını göstermişlerdir.

Fanliang ve ark. [45]'daki çalışmasında, $(AX = B, XC = D)$ matris denklem ikilisinin çözümlerini incelemiş, ayrıca çözümün yapılabilmesi için gerekli koşullar verilmiştir.

Ding ve ark. [46] çalışmasında, Ding ve Chen'in [41]'de yaptığı matris denklemleri genişletme çalışmasını, bazı özel matris denklemlerini genişletmek için geliştirmişlerdir. Ayrıca iteratif algoritmaların hata analizini de yapmışlardır. Oluşturdukları algoritmaların çalışıp çalışmadığını örneklerle test etmişlerdir.

Xu ve ark. [47] çalışmasında genelleştirilmiş Sylvester matris denklemi $AXB + CXD = E$ ve $AX + XB = C$ Sylvester matris denkleminin iteratif metotlarla çözümlerini incelemiştir.

Wang ve ark. [48] çalışmasında, genelleştirilmiş Sylvester matris denklemlerinden olan $AXB + CX^TD = E$ matris denkleminin çözümü için iki iteratif algoritma vermiş, bu algoritmalardan birisini matris denklemi uygun iken, diğerini ise uygun değilken kullanmışlar ve bu algoritmalarla yuvarlama hataları olmadan sonlu iterasyonla çözümü elde etmişlerdir.

Ayrıca Sylvester matris denklemlerinin çözümlerini elde ermek için HSS, IHSS, MHSS, GMHSS vb. iteratif metotlar da kullanılmıştır [örneğin, bakınız,49-53].

$$A_1XB_1 + C_1XD_1 + E_1X^TF_1 = M_1$$
$$A_2XB_2 + C_2XD_2 + E_2X^TF_2 = M_2$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisinde, M.Hajarian HSS metodunu farklı şekilde geliştirip BCR algoritması kullanmıştır [52].

Bu çalışmada $A, B, C, D, E, F, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen matrisler olmak üzere, genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi olan

$$AXB + CXD + EX^TF = M$$

matris denkleminin Bölüm 5’te çözümü verildi. Bu çözüm verilirken öncelikle bu matris denklemi $Ax = b$ matris denklemine çevrildi ve daha sonra onun üzerinden simetrik ve ters simetrik ayrışım (SSS) metodu kullanıldı.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilmektedir.

2.1. Matrisler ve Lineer Denklem Sistemleri ile İlgili Bazı Temel Kavramlar ve Özellikler

Tanım 2.1.1. V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise V kümesi $\mathbb{C}$ kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır, denir.

1. V kümesinde $+$ ile gösterilen ve adına toplama denilen bir işlem tanımlanmıştır. Bu işlemde aşağıdaki özellikler vardır.

a. Her $u, v \in V$ için $u + v$ tanımlıdır ve $u + v \in V$'dir. Yani V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

b. Her $u, v, w \in V$ için $(u + v\,) + w = u + (v + w)$'dir. Yani V kümesinde toplama işlemine göre birleşme özelliği vardır.

c. Her $u \in V$ için $u + 0 = 0 + u = u$ olacak şekilde $0 \in V$ vardır. Yani V kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı vardır. Bu etkisiz eleman "0" simgesi ile gösterilir.

d. Her $u \in V$ için V kümesinde $-u$ ile gösterilen ve $u + (-u) = 0$ ve $(-u) + u = 0$ eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır. Yani u elemanının toplamaya göre tersi vardır ve $-u$ ile gösterilir.

e. Her $u, v \in V$ için $u + v = v + u$'dur. Yani V kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

2. $\mathbb{C} \times V \rightarrow V, (a, u) \rightarrow au$ biçiminde, adına skalerle çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır. Bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri sağlar.

a. Her $a \in \mathbb{C}$ ve her $u, v \in V$ için $a(u + v) = au + av$'dır.
b. Her $a, b \in \mathbb{C}$ ve her $u \in V$ için $(a + b)\, u = au + bu$'dır.
c. Her $a, b \in \mathbb{C}$ ve her $u \in V$ için $(ab)\, u = a(bu)$'dır.
d. $1 \in \mathbb{C}$ ve her $u \in V$ için $1u = u1 = u$'dır [53].

Tanım 2.1.2. V kümesi $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı ise her $u \in V$ elemanına vektör denir [53].

Tanım 2.1.3. $V, \mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ biçiminde, (u, v)'deki değeri $\langle u, v \rangle$ ile gösterilen ve aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir f fonksiyonuna V üstünde bir iç çarpım denir. V vektör uzayı üstünde bir iç çarpım varsa bu vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

1) $\forall u \in V, u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0,$
2) $\forall u, v \in V, \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle},$
3) $\forall u, v, w \in V, \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle,$
4) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall u, v \in V, \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.

Bu tanımdaki $\overline{\langle u, v \rangle}$ gösterimi, $\langle u, v \rangle$ sayısının eşleniğini göstermektedir. V reel sayılar üzerinde vektör uzayı ise 2) önermesi, $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ biçiminde olur [53].

Tanım 2.1.4. V iç çarpım uzayında $\langle u, v \rangle = 0$ ise u vektörü, v vektörüne diktir veya ortogonaldir denir [53].

Tanım 2.1.5. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ bilinen skalerler olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ ifadesine n bilinmeyenli bir lineer (doğrusal) denklem denir. Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerdir [53].

Tanım 2.1.6.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.1}$$

ifadesi n bilinmeyenli m denklemden oluşan lineer denklem sistemi adını alır. Burada a_{ij} ve b_i , $i = 1,2, \dots, m,$ $j = 1,2, \dots, n$ bilinen skalerler olup $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenlerdir. Burada eğer mevcutsa tüm satırlardaki denklemleri eşanlı olarak sağlayan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sıralı n'lisine lineer denklem sisteminin bir çözümü denir. Bu durumda lineer denklem sistemine de tutarlı lineer denklem sistemi denir. Böyle bir sıralı n'li yoksa lineer denklem sistemine tutarsız lineer denklem sistemi denir [53].

Tanım 2.1.7. $X = \{1,2, \cdots, m\}$ ve $Y = \{1,2, \cdots, n\}$ olsun. $X \times Y$ kümesinden $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ kümelerine giden bir fonksiyona, $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ kümeleri üstünde $m \times n$ boyutlu ($m \times n$ tipinde) bir matris denir.

Örneğin, $A: X \times Y \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun verilmesi demek her $(i, j) \in X \times Y$ için $A(i, j)$ elemanlarının verilmesi demektir. $A(i, j) = a_{ij}$ olsun. $\mathbb{C}$ kümesinin $\{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1,} a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}, a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}\}$ alt kümesi verildiğinde A fonksiyonu verilmiş olur. Ayrıca A fonksiyonu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçiminde veya kısaca $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ biçiminde yazılabilir. Böylece, A fonksiyonuna $\mathbb{C}$ kümesi üzerinde $m \times n$ boyutlu matris denir [53].

Tanım 2.1.8. Bir matrisin satır sayısı, sütun sayısına eşit ise bu matrise kare matris denir. $n \times n$ biçimindeki bir kare matrise kısaca n'inci mertebeden kare matris denir [53].

Tanım 2.1.9. n'inci mertebeden bir kare matriste, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, sayılarının oluşturduğu

$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

sıralı n' lisine kare matrisin esas köşegeni veya kısaca köşegeni denir [53].

Tanım 2.1.10. n'inci mertebeden bir kare matrisin köşegenindeki elemanların tümü 1, köşegen dışındaki elemanların tümü sıfır ise bu matrise n'inci mertebeden birim matris denir ve genellikle I_n ile gösterilir [53].

Kısaca

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \text{'dır.}$$

n'inci mertebeden her $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi için $A.I_n = A$ ve $I_n.A = A$ olur. Eğer $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ise $A.I_n = A$ ve $I_m.A = A$ olur [53].

Tanım 2.1.11. Bir $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisindeki elemanlarının tamamı '0' ise A matrisine sıfır matris denir [53].

Tanım 2.1.12. Bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi için $A.B = I_n$ ve $B.A = I_n$ olacak biçimde bir $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi varsa bu B matrisine, A matrisinin çarpmaya göre tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir [53].

Tanım 2.1.13. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin çarpmaya göre tersi varsa A matrisine tersinir (regüler) matris denir. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin çarpmaya göre tersi yoksa bu matrise tekil (singüler) matris denir [53].

Tanım 2.1.14. Bir $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrisinin satırları sütun yapılarak elde edilen yeni matrise A matrisinin devriği (transpozu) denir ve A^T ile gösterilir [53].

Tanım 2.1.15. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için eğer $A = A^T$ sağlanıyorsa A matrisine simetrik matris denir. Eğer $A = -A^T$ oluyorsa A matrisine ters simetrik matris denir [53].

Tanım 2.1.16. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin eşlenik transpozu kendine eşitse, yani $A^* = (\bar{A})^T$ için $A = A^*$ oluyorsa matrise hermityen eğer $A = -A^*$ ise ters hermityen matris denir [54].

Tanım 2.1.17. Bir simetrik $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi ve $x \in \mathbb{R}^n$ sıfırdan farklı vektörü için $x^T A x > 0$ oluyorsa A matrisine pozitif tanımlıdır denir [54].

Tanım 2.1.18. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ sayısına A matrisinin izi denir ve $\operatorname{tr} A$ biçiminde gösterilir [53].

Tanım 2.1.19. $|||.|||: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, eğer $\forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için aşağıdaki beş aksiyomu sağlıyorsa matris normu olarak adlandırılır.

(1) $|||A||| \geq 0$, Eğer $|||A||| = 0$ ise $A = 0$'dır,
(2) $|||cA||| = |c|\,|||A|||$, $c \epsilon \mathbb{C}$ için,
(3) $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$,
(4) $|||AB||| \leq |||A|||.|||B|||$.

Eğer $\forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için (4) özelliği hariç diğer özellikler sağlanıyorsa bu durumda $|||.|||$ fonksiyonu genelleştirilmiş matris normu ya da vektör normu adını alır [54].

Tanım 2.1.20. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için $\|A\|_2 = \left(\sum_{\mathrm{i,j}=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlı norma Frobenius norm denir [54].

Tanım 2.1.21. Bir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ için eğer $AA^T = A^T A = I$ oluyorsa A matrisine ortogonal matris denir. Bu tanımın bir sonucu olarak ortogonal matris tersinir bir matris olup tersi transpozesine eşittir. Ayrıca sütunları (veya satırları) birbirlerine ikişer ikişer diktir [53].

Tanım 2.1.22. A bir $m \times n$ boyutlu matris, B bir $p \times q$ boyutlu matris olsun. Bu durumda A ve B matrislerinin Kronecker çarpımı $A \otimes B$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlı $mp \times nq$ boyutlu bir C matrisidir.

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp\times nq}$$

Bu çarpıma aynı zamanda sağ direk çarpım da denir. Benzer şekilde sol direk çarpım da tanımlanabilir [55].

Tanım 2.1.23. m denklemden oluşan n bilinmeyenli (2.1) lineer denklem sistemi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ve\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Ax = b \qquad (2.2)$$

biçiminde de yazılabilir. Burada $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ katsayılar matrisi, $x \in \mathbb{R}^n$ bilinmeyenler vektörü ve $b \in \mathbb{R}^n$ karşı taraf sabitleri vektörü olarak adlandırılır. Yani (2.1) ile (2.2) denktir [53].

Teorem 2.1.24. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ve $b \in \mathbb{C}^n$ olsun. A tersinir bir matristir $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ lineer denkleminin bir ve yalnız bir çözümü vardır. Bu çözüm $A^{-1}b$ matrisidir [53].

Tanım 2.1.25. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ve $b \in \mathbb{C}^n$ olsun. $b = 0$ ise $Ax = 0$ eşitliğine bir homojen lineer denklem sistemi denir [53].

Sonuç 2.1.26. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ olsun. A matrisi tersinir bir matristir $\Leftrightarrow Ax = 0$ denkleminin, sıfır çözümünden başka bir çözümü yoktur [53].

Teorem 2.1.27. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ olsun. $m < n$ ise $Ax = 0$ homojen lineer denklem sisteminin sıfırdan farklı en az bir çözümü vardır [53].

Teorem 2.1.28. x vektörünün $Ax = b$ denkleminin bir çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul $(A^T A)x = A^T b$ denkleminin tutarlı olmasıdır [53].

Tanım 2.1.29. Lineer denklem sistemleri genellikle, direkt (analitik) yöntemler ve iteratif (dolaylı) yöntemler ile çözülmeye çalışılırlar. Denklem sistemini sağlayan vektörü tam olarak bulan yöntemler direkt yöntemlerdir. Denklem sistemini sağlayan vektör direkt bulunamadığında, tahmini çözüm değerleri kabul edilerek çözüme başlanmakta ve ardışık hesaplamalarla doğru çözüm değerine yaklaşılmaktadır. Bu ardışık hesaplamalara iterasyon denir. Çözüm değerine yaklaşma yöntemine de iteratif yöntem denir. İteratif yöntemlerde, tahmini ilk değerlerden başlayarak ardışık hesaplamalarla gerçek çözüm değerine yaklaşmaya yakınsama, çözümden uzaklaşmaya ise ıraksama denir.

Tanım 2.1.30. $Ax = b$ lineer denklem sisteminin tutarsız olduğu, yani sistemi sağlayan herhangi bir x vektörünün olmadığı kabul edilirse, bu durumda $Ax = b$ sistemi,

$$Ax - b = e(x) \tag{2.3}$$

olarak yazılabilir. Burada $e(x)$ bir kalan vektör ya da sapmalar vektörüdür. $Ax = b$ sistemini sağlayan bir x_0 vektörü olsaydı, bu $e(x) = 0$ olacak şekilde bir x_0 vektörü olduğu anlamına gelecektir. Eğer $e(x) = 0$ olacak şekilde bir x vektörü yoksa $\|e(x_0)\|_2$ 'küçük' olacak şekilde bir x_0 vektörü araştırılmak istenebilir. x_0 böyle bir vektör ise, bu durumda x_0 vektörüne $Ax = b$ sisteminin bir "yaklaşık" çözümü denir [55].

Tanım 2.1.31. A matrisi $m \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere x_0 vektörünün $Ax - b = e(x)$ denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü olarak tanımlanmasının gerekli ve yeterli koşulları:

1) $\mathbb{R}^n$'deki tüm x ler için $(Ax - b)^T(Ax - b) \geq (Ax_0 - b)^T(Ax_0 - b)$ bağıntısının sağlanması,

2) $(Ax - b)^T(Ax - b) = (Ax_0 - b)^T(Ax_0 - b)$ şeklindeki tüm $x \neq x_0$ vektörleri için $x^T x > x_0^T x_0$ bağıntısının sağlanmasıdır [55].

Tanım 2.1.32. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için eğer M tersinir ise $A = M - N$ ifadesine, A matrisinin bir ayrışımı denir. $A = M - N$ ayrışımı kullanılarak $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b,\ k \geq 0$ şeklinde iteratif metodlar kullanılabilir. Böylece, $C = I - M^{-1}A = M^{-1}N$ matrisi bu yapıdaki $x^{(k)}$ için katsayılar matrisi olup iterasyon matrisi adını alır [54].

Tanım 2.1.33. Bir $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrisi çok büyük boyutlu ve elemanlarının çoğu '0' ise A matrisine büyük seyrek matris denir [54].

Tanım 2.1.34. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bir matris olsun. $Ax = \lambda x$ olacak biçiminde $\mathbb{C}^n$ uzayının sıfırdan farklı en az bir x vektörü varsa, λ sayınına A matrisinin bir özdeğeri (veya karakteristik değeri) denir. Böyle λ sayıları en fazla n adet olup, tüm bu λ sayıları ile oluşturulan kümeye A matrisinin spektral kümesi denir [53].

Tanım 2.1.35. λ sayısı $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin bir özdeğeri olmak üzere $Ax = \lambda x$ eşitliğini doğrulayan her x vektörüne, A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü (veya karakteristik vektörü) denir [53].

Tanım 2.1.36. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ herhangi bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin özdeğerleri olsun. Bu durumda $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ değerine A matrisinin spektral yarıçapı denir [53].

Teorem 2.1.37. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ herhangi matrisler olsun. Bu durumda AB'nin spektral yarıçapı ile BA'nın spektral yarıçapı birbirine eşittir yani $\rho(AB) = \rho(BA)$'dır [56].

Teorem 2.1.38. Herhangi bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için $\rho(A) \le \|A\|_2$ koşulu sağlanır [54].

Tanım 2.1.39. Bir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için $K(A) = \|A\|_2 . \|A^{-1}\|_2$ skalerine spektral koşul sayısı denir [54].

Tanım 2.1.40. $A, B, C, D, E, F, M \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ bilinen matrisler ve $X \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ bilinmeyen matris olmak üzere,

$$AX + XB = C,$$
$$AX + X^T B = C,$$
$$AXB + CXD = E,$$
$$AXB + CXD + EX^T F = M,$$

matris denklemleri sırasıyla Sylvester matris denklemi, Sylvester transpoz matris denklemi, genelleştirilmiş Sylvester matris denklemi, genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi adını alır [51,52].

BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER TRANSPOZ MATRİS DENKLEM İKİLİSİNİN, İKİLİ EŞLENİK KALAN ALGORİTMASI (BCR) İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümü için BCR algoritması tanıtılacaktır. Bu algoritmayı kullanarak Hajarian 2018 yılında genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisinin çözümünü ortaya koymuştur [52]. Bu bölümün amacı bu çalışmayı hatırlatmak yani,

$$\begin{aligned} A_1XB_1 + C_1XD_1 + E_1X^TF_1 &= M_1 \\ A_2XB_2 + C_2XD_2 + E_2X^TF_2 &= M_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisinin $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ çözümünü BCR algoritması ile hesaplamaktır.

3.1. BCR Algoritması

Simetrik olmayan $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümlerini bulmak için çeşitli iteratif yöntemler geliştirilmiştir (Örneğin [57-63]). Vespucci ve Broydan BCR algoritmasının farklı hesaplama varyasyonlarını yakınsama analizi yapmadan sundular [64]. Bunlardan biri aşağıdaki gibidir.

Algoritma 3.1.1

$x(1)\ ve\ s(1)$ herhangi başlangıç değerleri olsun,

Adım 1. $r(1) = Ax(1) - b$ olarak hesapla,

Adım 2. $u(1) = s(1), v(1) = r(1), w(1) = Au(1)$ ve $z(1) = A^Tv(1)$ olarak hesapla,

Adım 3. Aşağıdaki hesaplamaları tekrarla,

$\alpha(k) = \frac{w(k)^T r(k)}{w(k)^T w(k)'}$ $, x(k+1) = x(k) - \alpha(k)u(k),$

$r(k+1) = r(k) - \alpha(k)w(k),$

$\beta(k) = \frac{z(k)^T s(k)}{z(k)^T z(k)'}$ $,\ s(k+1) = s(k) - \beta(k)z(k),$

$\gamma(k) = \frac{\omega(k)^T As(k+1)}{w(k)^T w(k)}$ $,\ u(k+1) = s(k+1) - \gamma(k)u(k),$

$\eta(k) = \frac{z(k)^T A^T r(k+1)}{z(k)^T z(k)}$ $,\ v(k+1) = r(k+1) - \eta(k)v(k),$

$w(k+1) = Au(k+1),$

$z(k+1) = A^T v(k+1).$

Bu algoritma $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümü içindir. Oysaki bu bölüm (3.1) biçimli genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisinin çözümü ile alakalıdır. Bunu yapabilmek için öncelikle $Ax = b$ ile (3.1) arasında alaka kurulmalıdır. Bu aşağıdaki kısımda yapılacaktır.

3.2. Genelleştirilmiş Sylvester Transpoz Matris Denklem İkilisinin Kronecker Çarpım Yardımıyla $Ax = b$ Lineer Denklem Sistemine Dönüştürülmesi

$i = 1,2$ için $A_i, C_i \in \mathbb{R}^{p_i \times m}, B_i, Di \in \mathbb{R}^{n \times q_i}, E_i \in \mathbb{R}^{p_i \times n}, F_i \in \mathbb{R}^{m \times q_i}$ ve $F_i \in \mathbb{R}^{p_i \times q_i}$ bilinen matrisler olmak üzere,

$$\begin{cases} A_1XB_1 + C_1XD_1 + E_1X^TF_1 = M_1 \\ A_2XB_2 + C_2XD_2 + E_2X^TF_2 = M_2 \end{cases}$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisini Kronecker çarpım kullanarak

$$\begin{pmatrix} {B_1}^T \otimes A_1 + {D_1}^T \otimes C_1 + \left({F_1}^T \otimes E_1\right)P) \\ {B_2}^T \otimes A_2 + {D_2}^T \otimes C_2 + \left({F_2}^T \otimes E_2\right)P) \end{pmatrix} vec(x) = \begin{pmatrix} vec(M_1) \\ vec(M_2) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$A = \begin{pmatrix} {B_1}^T \otimes A_1 + {D_1}^T \otimes C_1 + \left({F_1}^T \otimes E_1\right)P) \\ {B_2}^T \otimes A_2 + {D_2}^T \otimes C_2 + \left({F_2}^T \otimes E_2\right)P) \end{pmatrix},$$

$$x = vec(x),$$

$$b = \begin{pmatrix} vec(M_1) \\ vec(M_2) \end{pmatrix}$$

olduğu düşünülürse sistem $Ax = b$ lineer denklem sistemine dönmüş olur. Ayrıca, P matrisi Lemma 5.1.1.'de verildiği gibidir. Sistemin bu $Ax = b$ tipli (3.2) hali için BCR algoritması aşağıdaki gibi düzenlenebilir. Öncelikle

$$r(1) = \begin{pmatrix} {B_1}^T \otimes A_1 + {D_1}^T \otimes C_1 + \left({F_1}^T \otimes E_1\right)P) \\ {B_2}^T \otimes A_2 + {D_2}^T \otimes C_2 + \left({F_2}^T \otimes E_2\right)P) \end{pmatrix} x(1) - \begin{pmatrix} vec(M_1) \\ vec(M_2) \end{pmatrix},$$

$$w(k+1) = \begin{pmatrix} {B_1}^T \otimes A_1 + {D_1}^T \otimes C_1 + \left({F_1}^T \otimes E_1\right)P) \\ {B_2}^T \otimes A_2 + {D_2}^T \otimes C_2 + \left({F_2}^T \otimes E_2\right)P) \end{pmatrix} u(k+1), \tag{3.3}$$

$$z(k+1) = \begin{pmatrix} {B_1}^T \otimes A_1 + {D_1}^T \otimes C_1 + \left({F_1}^T \otimes E_1\right)P) \\ {B_2}^T \otimes A_2 + {D_2}^T \otimes C_2 + \left({F_2}^T \otimes E_2\right)P) \end{pmatrix}^T v(k+1)$$

Burada

$Q_1 = {B_1}^T \otimes A_1 + {D_1}^T \otimes C_1 + \left({F_1}^T \otimes E_1\right)$ ve

$Q_2 = {B_2}^T \otimes A_2 + {D_2}^T \otimes C_2 + \left({F_2}^T \otimes E_2\right)$ olsun.

Bu durumda

$z(k+1) = Q_1 Q_2 v(k+1)$ olur.

(3.3)'e göre

$$x(k) = vec\big(X(k)\big), s(k) = vec\big(S(k)\big), z(k) = vec\big(Z(k)\big),\\ u(k) = vec\big(U(k)\big), \tag{3.4}$$

$$v(k) = \begin{pmatrix} vec\big(V_1(k)\big) \\ vec\big(V_2(k)\big) \end{pmatrix}, r(k) = \begin{pmatrix} vec\big(R_1(k)\big) \\ vec\big(R_2(k)\big) \end{pmatrix}, w(k) = \begin{pmatrix} vec\big(W_1(k)\big) \\ vec\big(W_2(k)\big) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

olarak tanımlansın. Burada $X(k), S(k), Z(k), U(k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ve $R_i, V_i, W_i(k) \in \mathbb{R}^{p_i \times q_i}$, $i = 1,2$ dir. Ayrıca (3.4) ve (3.5) ifadeleri (3.3)'de yerine yazılırsa

$$vec\big(R_i(1)\big) = vec(A_i X(1) B_i + C_i X(1) D_i + E_i X(1)^T F_i - M_i), i = 1,2,$$

$$vec\big(W_i(k+1)\big) = vec(A_i U(k+1) B_i + C_i U(k+1) D_i + E_i U(k+1)^T F_i), i = 1,2,$$

$$vec\big(Z(k+1)\big) = vec(A_1^T V_1(k+1) B_1^T + C_1^T V_1(k+1) D_1^T + F_1 V_1(k+1)^T E_1 \\ + A_2^T V_2(k+1) B_2^T + A_2^T V_2(k+1) B_2^T + F_2 V_2(k+1)^T E_2).$$

olur. Şimdi yukarıdakileri göz önünde bulundurarak (3.1) denkleminin çözümü için BCR algoritmasının matris biçimi aşağıdaki gibi yazılabilir.

Algoritma 3.2.1.

Adım 1. $X(1) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ başlangıç matrisi ve $S(1) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sıfırdan farklı herhangi matrisini al. Tolerans değeri τ'yu $\tau > 0$ olarak gir.

Adım 2. $k = 1$ olarak ayarla.

$$R_i(1) = A_iX(1)B_i + C_iX(1)D_i + E_iX(1)^TF_i - M_i,\ i = 1,2,$$

$$U(1) = S(1), V_1(1) = R_1(1), V_2(1) = R_2(1),$$

$$W_i(1) = A_iU(1)B_i + C_iU(1)D_i + E_iU(1)^TF_i - M_i, i = 1,2,$$

$$\begin{aligned} Z(1) = {} & A_1^TV_1(k+1)B_1^T + C_1^TV_1(k+1)D_1^T + F_1V_1(k+1)^TE_1 + A_2^TV_2(k+1)B_2^T \\ & +A_2^TV_2(k+1)B_2^T + F_2V_2(k+1)^TE_2 \end{aligned}$$

değerlerini hesapla,

Adım 3. $\sqrt{\|R_1(k)\|^2 + \|R_2(k)\|^2} \leq \tau$ ise dur.

Adım 4.

$$\alpha(k) = \frac{tr(W_1(k)^TR_1(k) + tr(W_2(k)^TR_2(k)}{tr(W_1(k)^TW_1(k) + tr(W_2(k)^TW_2(k)},$$

$$X(k+1) = X(k) - \alpha(k)U(k),$$

$$R_i(k+1) = R_i(k) - \alpha(k)W_i(k), i = 1,2,$$

$$\beta(k) = \frac{\mathrm{tr}\big(Z(k)^TS(k)\big)}{\mathrm{tr}\big(Z(k)^TZ(k)\big)},$$

$$S(k+1) = S(k) - \beta(k)Z(k),$$

$$\gamma(k) = \frac{\sum_{i=1}^{2} tr\ (W_i(k)^T A_i S(k+1) B_i + C_i S(k+1) D_i + E_i S(k+1)^T F_i)}{tr(W_1(k)^T W_1(k)) + tr(W_2(k)^T W_2(k))},$$

$$U(k+1) = S(k+1) - \gamma(k) U(k)\,,$$

$$\eta(k) = \frac{1}{\mathrm{tr}\left(Z(k)^T Z(k)\right)}\ [\mathrm{tr}\ (z\,(k)^T (A_1^T R_1(k+1) B_1^T + C_1^T R_1(k+1) D_1^T)$$
$$+ R_1(k+1)^T E_1 + A_2^T R_2(k+1) B_2^T + C_2^T R_2(k+1) D_2^T + F_2 R_2(k+1)^T E_2)]$$

$$V_i(k+1) = R_i(k+1) - \eta(k) V_i(k),\ i = 1,2,$$

$$\begin{aligned} W_i(k+1) &= A_i U(k+1) B_i + C_i U(k+1) D_i + E_i U(k+1)^T F_i \\ &= A_i S(k+1) B_i + C_i S(k+1) D_i + E_i S(k+1)^T F_i - \gamma(k) W_i(k),\ i = 1,2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(k+1) &= A_1^T V_1(k+1) B_1^T + C_1^T V_1(k+1) D_1^T + F_1 V_1(k+1)^T E_1 \\ &\quad + A_2^T V_2(k+1) B_2^T + C_2^T V_2(k+1) D_2^T + F_2 V_2(k+1)^T E_2 \\ &= A_1^T R_1(k+1) B_1^T + C_1^T R_1(k+1) D_1^T + F_1 R_1(k+1)^T E_1 \\ &\quad + A_2^T R_2(k+1) B_2^T \end{aligned}$$

değerlerini hesapla.

Adım 5. $k = k + 1$ olarak ayarla ve Adım 3'e git [52].

Şimdi Algoritma 3.2.1.'in yakınsaklığını gösterebilmek için gerekli olan bir Lemma verilecektir.

Lemma 3.2.2. $\alpha(k) \neq 0, \alpha(k) \neq \infty$ ve tüm $k = 1,2,\cdots,r$ için $\|R_1(k)\| + \|R_2(k)\| \neq 0$ olacak şekilde r pozitif tam sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$tr(R_1(v)^T W_1(u)) + tr(R_2(v)^T W_2(u)) = 0,\ u,v = 1,2,\ldots,r,\ \ v > u, \tag{3.6}$$
$$tr\left(S(v)^T Z(u)\right) = 0,\ u,v = 1,2,\ldots,r,\quad v > u, \tag{3.7}$$
$$tr\left(Z(v)^T Z(u)\right) = 0,\ u,v = 1,2,\ldots,r,\quad v \neq u, \tag{3.8}$$

$$tr(W_1(v)^T W_1(u)) + tr(W_2(v)^T W_2(u)) = 0, \;\; u, v = 1,2, \ldots, r, \;\; v \neq u \qquad (3.9)$$

dir [52].

İspat. İspat tümevarım ile yapılacaktır. İç çarpım değişmeli olduğu için ispat yalnızca $1 \leq u < v \leq r$ için yapılsa yeterli olur. $v = 2$ ve $u = 1$ olsun. Bu durumda

$$tr(R_1(2)^T W_1(1)) + tr(R_2(2)^T W_2(1))$$
$$= tr(R_1(1)^T W_1(1)) + tr(R_2(1)^T W_2(1)) - tr(W_1(1)^T R_1(1)) - tr(W_2(1)^T W_2(1))$$
$$= 0,$$

$$tr(S(2)^T Z(1)) = tr(S(1)^T Z(1)) - tr(Z(1)^T S(1)) = 0,$$

$$tr(Z(2)^T Z(1))$$
$$= \mathrm{tr}((A_1^T R_1(1) B_1^T + C_1^T R_1(1) D_1^T + F_1 R_1(1)^T E_1 + A_2^T R_2(1) B_2^T + C_2^T R_2(1) D_2^T$$
$$+ F_2 R_2(1)^T E_2 - \eta(1) Z(1))^T Z(1))$$

$$= \mathrm{tr}((A_1^T R_1(2) B_1^T + C_1^T R_1(2) D_1^T + F_1 R_1(2)^T E_1 + A_2^T R_2(2) B_2^T + C_2^T R_2(2) D_2^T$$
$$+ F_2 R_2(2)^T E_2)^T Z(1)) - \mathrm{tr}(Z(1)^T (A_1^T R_1(2) B_1^T + C_1^T R_1(2) D_1^T + F_1 R_1(2)^T E_1$$
$$+ A_2^T R_2(2) B_2^T + C_2^T R_2(2) D_2^T + F_2 R_2(2)^T E_2) = 0,$$

$$tr(W_1(2)^T W_1(1)) + tr(W_2(2)^T W_2(1))$$
$$= \mathrm{tr} \quad (A_1 S(2) B_1 + C_1 S\,(2) D_1 + E_1 S(2)^T F_1 - \gamma(1) W_1(1))^T$$
$$+ \mathrm{tr}((A_2 S(2) B_2 + C_2 S\,(2) D_2 + E_2 S(2)^T F_2 - \gamma(1) W_2(1))^T W_2(1))$$
$$= \mathrm{tr}((A_1 S(2) B_1 + C_1 S\,(2) D_1 + E_1 S(2)^T F_1)^T W_1(1))$$
$$+ \mathrm{tr}((A_2 S(2) B_2 + C_2 S\,(2) D_2 + E_2 S(2)^T F_2)^T W_2(1)$$
$$- \sum_{i=1}^{2} \mathrm{t\,r}(W_i(1)^T (A_i S(2) B_i + C_i S(2) Di + E_i s(2)^T F_i)) = 0.$$

Bunlar $v = 2$ ve $u = 1$ için (3.6) - (3.9) sağlandığını gösterir. Şimdi $u < w < r$ için aşağıdakilerin doğruluğu kabul edilsin.

$$tr(R_1(w)^T W_1(u)) + tr(R_2(w)^T W_2(u)) = 0, \qquad tr(S(w)^T Z(u)) = 0, \qquad (3.10)$$

$$tr(Z(w)^T Z(u)) = 0, \qquad tr(W_1(w)^T W_1(u)) + tr(W_2(w)^T W_2(u)) = 0. \tag{3.11}$$

Burada (3.10) ve (3.11) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\big(R_1(w+1)^T W_1(u)\big) + \mathrm{tr}\big(R_2(w+1)^T W_2(u)\big) \\
&= tr\left(\big(R_1(w) - \alpha(w)W_1(w)\big)^T W_1(u)\right) + tr\left(\big(R_2(w) - \alpha(w)W_2(w)\big)^T W_2(u)\right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}\big(S(w+1)^T Z(u)\big) = \mathrm{tr}\left(\big(S(w) - \beta(w)Z(w)\big)^T Z(u)\right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\big(Z(w+1)^T Z(u)\big) \\
&= \mathrm{tr}((A_1^T R_1(w+1)B_1^T + C_1^T R_1(w+1)D_1^T + F_1 R_1(w+1)^T E_1 + A_2^T R_2(w+1)B_2^T \\
&\quad + C_2^T R_2(w+1)D_2^T + F_2 R_2(w+1)^T E_2 - \eta(w)Z(w))^T Z(u)) \\
&= \frac{1}{\beta(u)}[tr\big(R_1(w+1)^T\big(A_1\big(s(u) - S(u+1)\big)B_1 + C_1\big(S(u) - S(u+1)\big)D_1\big) \\
&\quad + E_1\big(S(u) - S(u+1)\big)^T F_1)) \\
&\quad + \mathrm{tr}\big(R_2(w+1)^T\big(A_2\big(s(u) - S(u+1)\big)B_2 + C_2\big(S(u) - S(u+1)\big)D_2\big) \\
&\quad + E_2\big(S(u) - S(u+1)\big)^T F_2))] \\
&= \frac{1}{\beta(u)}[\mathrm{tr}\left(R_1(w+1)^T\big(W_1(u) + \gamma(u-1)W_1(u-1)\big)\right) \\
&\quad - \mathrm{tr}\left(R_1(w+1)^T\big(W_1(u+1) + \gamma(u)W_1(u)\big)\right) \\
&\quad + \mathrm{tr}\left(R_2(w+1)^T\big(W_2(u) + \gamma(u-1)W_1(u-1)\big)\right) \\
&\quad - \mathrm{tr}\left(R_2(w+1)^T\big(W_2(u+1) + \gamma(u)W_1(u)\big)\right)] \\
&= -\frac{1}{\beta(u)}\big[\mathrm{tr}\big(R_1(w+1)^T W_1(u+1)\big) + \mathrm{tr}\big(R_2(w+1)^T W_2(u+1)\big)\big],
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\big(W_1(w+1)^T W_1(u)\big) + \mathrm{tr}\big(W_2(w+1)^T W_2(u)\big) \\
&= \mathrm{tr}\left(\big(A_1 S(w+1)B_1 + C_1 S(w+1)D_1 + E_1 S(w+1)^T F_1 - \gamma(w)W_1(w)\big)^T W_1(u)\right) \\
&\quad + \mathrm{tr}\left(\big(A_2 S(w+1)B_2 + C_2 S(w+1)D_2 + E_2 S(w+1)^T F_2 - \gamma(w)W_2(w)\big)^T W_2(u)\right) \\
&= \mathrm{tr}(S(w+1)^T(A_1^T W_1(u)B_1^T + C_1^T W_1(u)D_1^T + F_1 W_1(u)^T E_1 + A_2^T W_2(u)B_2^T)
\end{aligned}$$

$$+C_2^T W_2(u) D_2^T + F_2 W_2(u)^T E_2)$$
$$= \frac{1}{\alpha(u)}[\mathrm{tr}(\, S(w+1)^T (A_1^T\big(R_1(u) - R_1(u+1)\big)B_1^T + C_1^T\big(R_1(u) - R_1(u+1)\big)D_1^T$$
$$+F_1\big(R_1(u) - R_1(u+1)\big)^T E_1 + A_2^T\big(R_2(u) - R_2(u+1)\big)B_2^T$$
$$+C_2^T\big(R_2(u) - R_2(u+1)\big)D_2^T + F_2\big(R_2(u) - R_2(u+1)\big)^T E_2))^T]$$
$$= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\mathrm{tr}\big(S(w+1)^T\big(Z(u) + \eta(u-1)Z(u-1)\big) - Z(u+1) - \eta(u)Z(U)\big)\big)\right]$$
$$= -\tfrac{1}{\alpha(u)}\left[\mathrm{tr}\big(S(w+1)^T Z(u+1)\big)\right] \cdot \tag{3.13}$$

elde edilir. Ayrıca $u = w$ için,

$$\mathrm{tr}\big(R_1(w+1)^T W_1(w)\big) + \mathrm{tr}\big(R_2(w+1)^T W_2(w)\big) = 0,$$

$$\mathrm{tr}\big(S(w+1)^T Z(w)\big) = 0,$$

$$\mathrm{tr}(Z(w+1)^T Z(w)$$
$$= \mathrm{tr}((A_1^T R_1(w+1)B_1^T + C_1^T R_1(w+1)D_1^T + F_1 R_1(w+1)^T E_1 + A_2^T R_2(w+1)B_2^T$$
$$+C_2^T R_2(w+1)D_2^T + F_2 R_2(w+1)^T E_2 - \eta(w)Z(w))^T Z_2(w))$$
$$= \mathrm{tr}((A_1^T R_1(w+1)B_1^T + C_1^T R_1(w+1)D_1^T + F_1 R_1(w+1)^T E_1 + A_2^T R_2(w+1)B_2^T$$
$$+C_2^T R_2(w+1)D_2^T + F_2 R_2(w+1)^T E_2)^T Z(w))$$
$$-\,\mathrm{tr}(z(w)^T(A_1^T R_1(w+1)B_1^T + C_1^T R_1(w+1)D_1^T + F_1 R_1(w+1)^T E_1$$
$$+A_2^T R_2(w+1)B_2^T + C_2^T R_2(w+1)D_2^T + F_2 R_2(w+1)^T E_2) = 0,$$

$$\mathrm{tr}\big(W_1(w+1)^T W_1(1)\big) + \mathrm{tr}\big(W_2(w+1)^T W_2(1)\big)$$
$$= \mathrm{tr}\Big(\big(A_1 S(w+1)B_1 + C_1 S(w+1)D_1 + E_1 S(w+1)^T F_1 - \gamma(w)W_1(w)\big)^T W_1(w)\Big)$$
$$+\,\mathrm{tr}\Big(\big(A_2 S(w+1)B_2 + C_2 S(w+1)D_2 + E_2 S(w+1)^T F_2 - \gamma(w)W_2(w)\big)^T W_2(w)\Big)$$
$$= \mathrm{tr}\big((A_1 S(w+1)B_1 + C_1 S(w+1)D_1 + E_1 S(w+1)^T F_1)^T W_1(w)\big)$$
$$+\,\mathrm{tr}\big((A_2 S(w+1)B_2 + C_2 S(w+1)D_2 + E_2 S(w+1)^T F_2)^T W_2(w)\big)$$
$$\sum_{i=1}^{2} \mathrm{tr}\left(W_i(w)^T(A_i S(w+1)B_i + C_i S(w+1)D_i + E_i S(w+1)^T F_i)\right) = 0.$$

bulunur.

$$\mathrm{tr}\big(Z(w)^T Z(u)\big) = 0,\quad \mathrm{tr}\big(R_1(w+1)^T W_1(w)\big) + \mathrm{tr}\big(R_2(w+1)^T W_2(w)\big) = 0,$$

ve (3.3) eşitliğinden

$$\mathrm{tr}\big(Z(w+1)^T Z(u)\big) = 0.$$

sonucuna varılabilir. Ayrıca

$$\mathrm{tr}\big(W_1(w)^T W_1(u)\big) + \mathrm{tr}\big(W_2(w)^T W_2(u)\big) = 0,\quad \mathrm{tr}\big(S(w+1)^T Z(w)\big) = 0,$$

ve (3.4) eşitliklerinden

$$\mathrm{tr}\big(W_1(w+1)^T W_1(u)\big) + \mathrm{tr}\big(W_2(w+1)^T W_2(u)\big) = 0$$

yazılabilir. Böylece ispat biter [52].

Teorem 3.2.3. Genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisi (3.1) tutarlı olsun. Algoritma 3.2.1, yuvarlama hatalarının olmadığı varsayımı ile sınırlı sayıda iterasyonla (3.1)'in çözümünü hesaplar [52].

İspat. Aşağıdaki gibi tanımlanan bir iç çarpım ile $\mathbb{R}^{p_1\times q_1}\times\mathbb{R}^{p_2\times q_2}$ uzayını ele alalım.

$$\langle (M_1, M_2), (N_1, N_2)\rangle = \mathrm{tr}(M_1^T N_1) + \mathrm{tr}(M_2^T N_2)\quad M_1, N_1 \in \mathbb{R}^{p_1\times q_1}, M_2, N_2 \in \mathbb{R}^{p_2\times q_2}.$$

Eğer $k = 1,2,\cdots,p_1q_1 + p_2q_2$ için $W_1(k) \neq 0$ veya $W_2(k) \neq 0$ ise Lemma 3.2.2'den $\big(W_1(k), W_2(k)\big)$, $k = 1,2,\cdots,p_1q_1 + p_2q_2$ ifadesinin $\mathbb{R}^{p_1\times q_1}\times\mathbb{R}^{p_2\times q_2}$ iç çarpım uzayının bir ortogonal bazı olduğu görülür. Bu sonuç ve (3.6)'ten yuvarlama hatalarını gözardı ederek sonlu iterasyonla (3.1)'ün çözümünün elde edilebileceği görülür [52]. ■

Şimdi, özel başlangıç matrisli Algoritma 3.2.1 ile (3.1)'in en küçük Frobenius norm çözümünün elde edilebileceği gösterilecektir.

Teorem 3.2.4. Genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisi (3.1) tutarlı olsun. Eğer başlangıç matrisleri

$$X(1) = A_1^T M_1(1) B_1^T + C_1^T M_1(1) D_1^T + F_1 M_1(1)^T E_1 + A_2^T M_2(1) B_2^T + C_2^T M_2(1) B_2^T + F_2 M_2(1)^T E_2, \tag{3.14}$$

ve

$$S(1) = A_1^T N_1(1) B_1^T + C_1^T N_1(1) D_1^T + F_1 N_1(1)^T E_1 + A_2^T N_2(1) B_2^T + C_2^T N_2(1) B_2^T + F_2 N_2(1)^T E_2, \tag{3.15}$$

olarak seçilirse, Algoritma 3.2.1. üretilen X^* çözümü (3.1)'ün en küçük Frobenius normlu çözümüdür. Burada $M_1, N_1 \in \mathbb{R}^{p_1 \times q_1}$ ve $M_2, N_2 \in \mathbb{R}^{p_2 \times q_2}$ herhangi matrislerdir [52].

İspat. (3.14) ve (3.15) ifadeleri Algoritma 3.2.1 ile birlikte göz önüne alınırsa $M_1, N_1 \in \mathbb{R}^{p_1 \times q_1}$ ve $M_2, N_2 \in \mathbb{R}^{p_2 \times q_2}$ matrisleri

$$X(k) = A_1^T M_1(k) B_1^T + C_1^T M_1(k) D_1^T + F_1 M_1(k)^T E_1 + A_2^T M_2(k) B_2^T + C_2^T M_2(k) B_2^T + F_2 M_2(k)^T E_2, \tag{3.16}$$

$$S(k) = A_1^T N_1(k) B_1^T + C_1^T N_1(k) D_1^T + F_1 N_1(k)^T E_1 + A_2^T N_2(k) B_2^T + C_2^T N_2(k) B_2^T + F_2 N_2(k)^T E_2, \tag{3.17}$$

olacak şekilde mevcut oldukları görülür. (3.16) ve (3.17) kullanılırsa

$$vec\big(X(k)\big) = vec(A_1^T M_1(k) B_1^T + C_1^T M_1(k) D_1^T + F_1 M_1(k)^T E_1 + A_2^T M_2(k) B_2^T + C_2^T M_2(k) B_2^T + F_2 M_2(k)^T E_2)$$

$$= \left(B_1 \otimes A_1^T + D_1 \otimes C_1^T + P^T(F_1 \otimes E_1^T)B_2 \otimes A_2^T + D_2 \otimes C_2^T + P^T(F_2 \otimes E_2^T)\right)$$
$$\begin{pmatrix} vec(M_1(k)) \\ vec(M_2(k)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_1^T \otimes A_1 + D_1^T \otimes C_1 + (F_1^T \otimes E_1)P \\ B_2^T \otimes A_2 + D_2^T \otimes C_2 + (F_2^T \otimes E_2)P \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} vec(M_1(k)) \\ vec(M_2(k)) \end{pmatrix},$$

Yani $vec(X(k))$ vektörü $\left(\begin{pmatrix} B_1^T \otimes A_1 + D_1^T \otimes C_1 + (F_1^T \otimes E_1)P \\ B_2^T \otimes A_2 + D_2^T \otimes C_2 + (F_2^T \otimes E_2)P \end{pmatrix}^T\right)$ matrisinin sütun uzayının elemanı olur. Böylece, Algoritma 3.2.1 tarafından üretilen X^* çözümü (3.1) denklem sisteminin en küçük Frobenius norm çözümüdür [52]. ■

Uyarı 3.2.5.

$$\|R_1(k+1)\|^2 + \|R_2(k+1)\|^2$$
$$= \operatorname{tr}\left(\left(R_1(k) - \alpha(k)W_1(k)\right)^T\left(R_1(k) - \alpha(k)W_1(k)\right)\right)$$
$$+ \operatorname{tr}\left(\left(R_2(k)\alpha(k)W_2(k)\right)^T\left(R_2(k) - \alpha(k)W_2(k)\right)\right)$$
$$= \|R_1(k)\|^2 + \|R_2(k)\|^2 + \alpha(k)^2(\|W_1(k)\|^2 + \|W_2(k)\|^2)$$
$$-2\alpha(k)\left[\operatorname{tr}\left(W_1(k)^T R_1(k)\right) + \operatorname{tr}\left(W_2(k)^T R_2(k)\right)\right]$$
$$= \|R_1(k)\|^2 + \|R_2(k)\|^2 - \alpha(k)\left[\operatorname{tr}\left(W_1(k)^T R_1(k)\right) + \operatorname{tr}\left(W_2(k)^T R_2(k)\right)\right]$$
$$= \|R_1(k)\|^2 + \|R_2(k)\|^2 - \frac{\left[\operatorname{tr}\left(W_1(k)^T R_1(k)\right) + \operatorname{tr}\left(W_2(k)^T R_2(k)\right)\right]^T}{\|W_1(k)\|^2 + \|W_2(k)\|^2}$$
$$\leq \|R_1(k)\|^2 + \|R_2(k)\|^2.$$

ifadesi sağlanır. Bu, Algoritma 3.2.1.'in kalan normlarının küçüldüğünü garanti eder [52].

BÖLÜM 4. $Ax = b$ LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HERMİTYEN VE TERS HERMİTYEN AYRIŞIM (HSS) METODU

Bu bölümde, $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümü için hermityen ve ters hermityen ayrışım (HSS) metodu ile ilgili bazı özel tanımlar ve bu tanımlarla ilgili bazı temel sonuçlar ispatsız olarak verilmektedir. Bu metodu Bai ve ark. 2003 yılında kullanarak hermityen olmayan pozitif tanımlı sistemlerin çözümlerini vermiştir [49]. Bu bölümde bu çalışmada ortaya konulan sonuçlar hatırlatılmaktadır.

Tanım 4.1. $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermityen matris, $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ters hermityen matris olmak üzere bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi $A = H + T$ şeklinde yazılabilir. $H = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ve $T = \frac{1}{2}(A - A^*)$ eşitlikleri A matrisleri için sağlanır [49].

Bu bölümde H ve T matrisleri bu tanımlarda olduğu gibi A matrisinin hermityen ve ters hermityen kısımları olacaktır.

Lemma 4.2. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi $A = M_i - N_i$ $(i = 1,2)$ şeklinde iki ayrışıma sahip bir matris ve $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ verilmiş bir başlangıç vektörü olsun. Eğer $\{x^{(k)}\}$ iki kademeli iterasyon dizisi

$$\begin{cases} M_1 x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = N_1 x^{(k)} + b \\ M_2 x^{(k+1)} = N_2 x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b \end{cases},$$

$k = 0,1,2, \dots$, ile tanımlanırsa bu durumda,

$$x^{(k+1)} = M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1 x^{(k)} + M_2^{-1}(I + N_2 M_1^{-1}) b \,, \; k = 0,1,2, \dots ,$$

elde edilir. Ayrıca $M_2^{-1}N_2M_1^{-1}N_1$ iterasyon matrisinin $\rho(M_2^{-1}N_2M_1^{-1}N_1)$ spektral yarıçap değeri, 1'den küçükse, bu durumda tüm $x^0 \in \mathbb{C}^n$ başlangıç vektörleri için $\{x^{(k)}\}$ dizisi $Ax = b$ denklem sisteminin $x^* \in \mathbb{C}^n$ yegâne çözümüne yakınsar [49].

Tanım 4.3. Verilen bir $x^{(0)}$ başlangıç vektörü için $\{x^{(k)}\}$, $k = 0,1,2,\cdots$, dizisi

$$\begin{cases} (\alpha I + H)x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = (\alpha I - T)x^{(k)} + b \\ (\alpha I + T)x^{(k+1)} = (\alpha I - H)x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b \end{cases}$$

hesaplamaları ile oluşsun. Bu işlemler $x^{(k)}$ aranan çözüme yeterince yaklaşıncaya kadar yapılır. α burada pozitif bir sabittir. Bu kademeli çözümüne HSS iterasyon metodu denir [49].

Bu metodun yakınsaklığını gösteren ve [49]'de verilen teorem aşağıdaki gibidir

Teorem 4.4. $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ bir pozitif tanımlı matris olsun. Ayrıca $H = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ve $T = \frac{1}{2}(A - A^*)$ onun hermityen ve ters hermityen kısımları ve α pozitif bir sabit olsun. Bu durumda HSS iterasyonunun $M(\alpha)$ iterasyon matrisi

$$M(\alpha) = (\alpha I + T)^{-1}(\alpha I - H)(\alpha I + H)^{-1}(\alpha I - T)$$

ile verilir. $M(\alpha)$'nın spektral yarıçapı $\rho\big(M(\alpha)\big)$,

$$\sigma(\alpha) \equiv \max_{\lambda_i \in \lambda(H)} \left|\frac{\alpha - \lambda_i}{\alpha + \lambda_i}\right|$$

ile sınırlıdır. Burada, $\lambda(H)$, H matrisinin spektral kümesidir. Böylece $\forall \alpha > 0$ için

$$\rho\big(M(\alpha)\big) \leq \sigma(\alpha) < 1$$

sağlanır. Yani HSS iterasyonu $Ax = b$ matris denkleminin $x^* \in \mathbb{C}^n$ yegâne çözümüne yakınsar [49].

Eğer A matrisinin hermityen kısmı olan H matrisinin en büyük ve en küçük özdeğerleri biliniyorsa $\sigma(\alpha)$ için α optimal parametresi elde edilebilir. Bu gerçek aşağıdaki sonuçta yer almaktadır.

Sonuç 4.5. $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ bir pozitif tanımlı matris, $H = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ve $T = \frac{1}{2}(A - A^*)$ onun hermityen ve ters hermityen kısımları ve $\gamma_{min}, \gamma_{max}$ sırasıyla H matrisinin en küçük ve en büyük özdeğerleri olsun. Ayrıca α pozitif sabit olsun. Bu durumda

$$\alpha^* = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \left\{ \max_{\gamma_{min} \leq \lambda \leq \gamma_{max}} \left| \frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda} \right| \right\} = \sqrt{\gamma_{min} \cdot \gamma_{max}}$$

ve

$$\sigma(\alpha^*) = \frac{\sqrt{\gamma_{max}} - \sqrt{\gamma_{min}}}{\sqrt{\gamma_{max}} + \sqrt{\gamma_{min}}} = \frac{\sqrt{K(H)} - 1}{\sqrt{K(H)} + 1}$$

olur. Burada $K(H)$, H matrisinin spektral koşul sayısıdır [49].

BÖLÜM 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER TRANSPOZ DENKLEMİNİN SİMETRİK VE TERS SİMETRİK AYRIŞIM (SSS) METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde [52] makalesinde ele alınan ve Bölüm 3'te hatırlatılan genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisinden ve [49] makalesinde ele alınan HSS metodlarından esinlenerek genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin simetrik ve ters simetrik ayrışım metodu (SSS) ile çözümü ele alınacaktır. Bu bölümde yapılanlar bir yayın haline getirilerek tarafımızdan [66] çalışması oluşturulmuştur.

Bu bölümde öncelikle $Ax = b$ lineer denklem sistemi için simetrik ve ters simetrik ayrışım metodu ortaya konulacaktır. Bölümün esas amacı ise genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin bu yöntemle çözümü olduğu, bununla birlikte bu çözümün direk yapılamaması sebebiyle genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin Kronecker çarpım yardımıyla $Ax = b$'ye nasıl dönüştürülebileceği anlatılacaktır. Son olarak da istenen çözüm verilecektir.

5.1. $\boldsymbol{Ax = b}$ Denklem Sistemi için Simetrik ve Ters Simetrik Ayrışım (SSS) Metodu

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$Ax = b \qquad (5.1)$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu kısımda A matrisinin simetrik ve ters simetrik ayrışımı kullanılarak oluşturulan SSS metodu ve bu metodun yakınsaklığı ortaya konulacaktır.

Lemma 5.1.1 $A = M_i - N_i$, $i = 1,2$, ifadeleri $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin iki ayrışımı olsun ve $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ bir verilmiş başlangıç vektörü olsun. Eğer $\{x^{(k)}\}$ iki kademeli iterasyon dizisi

$$\begin{cases} M_1 x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = N_1 x^{(k)} + b \\ M_2 x^{(k+1)} = N_2 x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b \end{cases}$$

$k = 0,1,2,\cdots$, ile tanımlanırsa bu durumda,

$$x^{(k+1)} = M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1 x^{(k)} + M_2^{-1}(I + N_2 M_1^{-1}) b \tag{5.2}$$

elde edilir. Ayrıca $M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1$ iterasyon matrisinin $\rho(M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1)$ değeri, 1'den küçükse bu durumda tüm $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ başlangıç vektörleri için $\{x^{(k)}\}$ dizisi $Ax = b$ sisteminin $x^* \in \mathbb{R}^n$ yegâne çözümüne yakınsar.

İspat.

$$M_1 x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = N_1 x^{(k)} + b \tag{5.3}$$

$$M_2 x^{(k+1)} = N_2 x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b \tag{5.4}$$

olsun. Bu durumda M_1 tersinir olduğundan (5.3) ifadesinden

$$x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = M_1^{-1} N_1 x^{(k)} + M_1^{-1} b \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.5) ifadesi (5.4) ifadesinde yerine yazılır ve M_2 matrisinin tersinir olduğu kullanılırsa

$$x^{(k+1)} = M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1 x^{(k)} + M_2^{-1}(N_2 M_1^{-1} + \mathrm{I}) b$$

elde edilir. ■

$A = S + R$ olacak şekilde S simetrik, R ters simetrik matrisleri $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ve $R = \frac{1}{2}(A - A^T)$ şeklinde belirlensin. $\alpha \in \mathbb{R}^+$olmak üzere $A = (\alpha I + S) + (R - \alpha I)$ veya $A = (\alpha I + R) + (S - \alpha I)$ olarak yazılabilir. Bu ifadeler (5.1) denkleminde yerine yazılırsa $A = (\alpha I + S) + (R - \alpha I)$ ve $A = (\alpha I + R) + (S - \alpha I)$ için, sırasıyla,

$$\big((\alpha I + S) + (R - \alpha I)\big)x = b$$

$$(\alpha I + S)x = (\alpha I - R)x + b \tag{5.6}$$

$$\big((\alpha I + R) + (S - \alpha I)\big)x = b$$

$$(\alpha I + R)x = (\alpha I - S)x + b \tag{5.7}$$

elde edilir. Böylece A matrisinin özel durumları için (5.1) denklemi ile (5.6) ve (5.7) denklemlerinin denkliği açıktır. Bu çalışma boyunca S ve R matrisleri yukarıdaki gibi olacaktır. Bu durumda SSS iterasyonu şu şekilde oluşur.

Tanım.5.1.2 (SSS iterasyonu) Verilen bir $x^{(0)}$ başlangıç vektörü için $\{x^{(k)}\}$, $k = 0,1,2,\cdots$, dizisi

$$\begin{cases} (\alpha I + S)x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = (\alpha I - R)x^{(k)} + b \\ (\alpha I + R)x^{(k+1)} = (\alpha I - S)x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b \end{cases}$$

hesaplamaları ile oluşsun. Bu işlemler $x^{(k)}$ aranan çözüme yeterince yaklaşıncaya kadar yapılsın. α burada pozitif bir sabittir. Bu şekilde ilerleyen kademeli çözüm sürecine SSS iterasyon metodu denir.

Teorem.5.1.3. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bir pozitif tanımlı matris ve α pozitif bir sabit olsun. Ayrıca $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ve $R = \frac{1}{2}(A - A^T)$ onun simetrik ve ters simetrik kısımları olsun. Bu durumda SSS iterasyonunun $M(\alpha)$ iterasyon matrisi;

$$M(\alpha) = (\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)$$

ile verilir. $M(\alpha)$'nın spektral yarıçapı $\rho\big(M(\alpha)\big)$,

$$\sigma(\alpha) \equiv \max_{\lambda_i \in \lambda(S)} \left|\frac{\alpha - \lambda_i}{\alpha + \lambda_i}\right|$$

ile sınırlıdır. Burada $\lambda(S)$, S matrisinin spektral kümesidir. Böylece, $\forall\alpha > 0$ için

$$\rho\big(M(\alpha)\big) \leq \sigma(\alpha) < 1$$

olur. Yani SSS iterasyonu $Ax = b$ denklem sisteminin $x^* \in \mathbb{R}^n$ yegâne çözümüne yakınsar.

İspat. Lemma 5.1.1' de verilen (5.2) ifadesinde

$$M_1 = (\alpha I + S),\ M_2 = (\alpha I + R),\ N_1 = (\alpha I - R),\ N_2 = (\alpha I - S)$$

alınırsa SSS metodunun iterasyon matrisi

$$M(\alpha) = (\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)$$

şeklinde bulunur. Burada $(\alpha I + S)$ ve $(\alpha I + R)$ yani M_1 ve M_2 tersinir kabul edilmiştir. $(\alpha I + R)^{-1}$ ve $(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)$ matrisleri için Teorem 2.1.36 göz önüne alındığında

$$\rho\big(M(\alpha)\big) = \rho\big((\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\big)$$

yazılır. Ayrıca, Teorem 2.1.39'dan

$$\begin{aligned}\rho\big(M(\alpha)\big) &\leq \|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\|_2 \\ &\leq \|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}\|_2 . \|(\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\|_2\end{aligned}$$

olur. Burada $Q(\alpha) = (\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
Q(\alpha).Q^T(\alpha) &= (\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\left((\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\right)^T \\
&= (\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - R)^{-1}(\alpha I + R) \\
&= (\alpha I - R)\left((\alpha I - R)(\alpha I + R)\right)^{-1}(\alpha I + R) \\
&= (\alpha I - R)(\alpha^2 I - R^2)^{-1}(\alpha I + R) \\
&= (\alpha I - R)(\alpha I - R)^{-1}(\alpha I + R)^{-1}(\alpha I + R) = I
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani $Q(\alpha)$ matrisinin ortogonal matris olduğu görülür. Böylece $\|Q(\alpha)\|_2 = 1$'dir. Buradan,

$$\rho\big(M(\alpha)\big) \leq \|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}\|_2 = \sigma(\alpha)$$

olur. α bir pozitif sabit ve $\lambda_i > 0$, $i = 1,2,\cdots,n$, olduğundan

$$\sigma(\alpha) = \max_{\lambda_i \in \lambda(S)} \left|\frac{\alpha - \lambda_i}{\alpha + \lambda_i}\right|$$

$$\rho\big(M(\alpha)\big) \leq \sigma(\alpha) < 1$$

yazılabilir.■

Bu sonuç SSS iterasyonunun yakınsama hızının yalnızca S kısmının spektrumuna bağlı olduğunu gösterir. R kısmının spektrumuna, A matrisine, ya da S, R, A matrislerinin özvektörlerine bağlı değildir.

$x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için bir vektör norm

$$|||x||| = \|(\alpha I + R)x\|_2$$

şeklinde ve $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ için bir matris norm $|||X||| = \|(\alpha I + R)X(\alpha I + R)^{-1}\|_2$ şeklinde verilirse teoremin ispatından,

$$|||M(\alpha)||| = \|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\|_2 \leq \sigma(\alpha)$$

olduğu görülür. Buradan da

$$|||x^{(k+1)} - x^*||| \leq \sigma(\alpha)|||x^{(k)} - x^*|||, k = 0,1,2,\cdots,$$

elde edilir. Böylece $\sigma(\alpha)$, $|||.|||$ normu anlamında SSS iterasyonunun küçülme katsayısının bir üst sınırıdır. S'nin maksimum ve minimum özdeğerleri biliniyorsa $\sigma(\alpha)$ için en iyi α parametresi $\rho(M(\alpha))$ veya $|||M(\alpha)|||$ olur. Bu durum aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

Sonuç.5.1.4. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bir pozitif tanımlı matris, $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ve $R = \frac{1}{2}(A - A^T)$ onun simetrik ve ters simetrik kısımları ve $\gamma_{min}, \gamma_{max}$ sırasıyla S matrisinin en küçük ve en büyük özdeğerleri olsun. Ayrıca α pozitif sabit olsun. Bu durumda

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha}\left\{\max_{\gamma_{min}\leq\lambda\leq\gamma_{max}}\left|\frac{\alpha-\lambda}{\alpha+\lambda}\right|\right\} = \sqrt{\gamma_{min}\cdot\gamma_{max}}$$

ve

$$\sigma(\alpha^*) = \frac{\sqrt{\gamma_{max}} - \sqrt{\gamma_{min}}}{\sqrt{\gamma_{max}} + \sqrt{\gamma_{min}}} = \frac{\sqrt{K(S)} - 1}{\sqrt{K(S)} + 1}$$

olur. Burada $K(S)$, S matrisinin spektral koşul sayısıdır.

İspat. $\sigma(\alpha) = \max_{\lambda_i\in\lambda(S)}\left|\frac{\alpha-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|$ olduğu teoremden biliniyor. Buna göre

$$\sigma(\alpha) = \max\left\{\left|\frac{\alpha-\gamma_{min}}{\alpha+\gamma_{min}}\right|, \left|\frac{\alpha-\gamma_{max}}{\alpha+\gamma_{max}}\right|\right\}$$

olur. SSS iterasyonunun $\rho(M(\alpha))$ yakınsaklık çarpanını minimum yapacak şekilde bir yaklaşık optimal $\alpha > 0$ değeri hesaplamak için $\rho(M(\alpha))$ yerine $\sigma(\alpha)$ üst sınırı minimize edilir. Eğer α^* böyle bir minimum nokta ise bu durumda $\alpha^* - \gamma_{min} > 0$ ve $\alpha^* - \gamma_{max} < 0$ ve

$$\frac{\alpha^* - \gamma_{min}}{\alpha^* + \gamma_{min}} = \frac{\gamma_{max} - \alpha^*}{\gamma_{max} + \alpha^*}$$

olmak zorundadır. Böylece,

$$(\alpha^* - \gamma_{min})(\gamma_{max} + \alpha^*) = (\alpha^* + \gamma_{min})(\gamma_{max} - \alpha^*)$$
$$\alpha^*.\gamma_{max} + {\alpha^*}^2 - \gamma_{min}\gamma_{max} - \gamma_{min}\alpha^* = \alpha^*\gamma_{max} - {\alpha^*}^2 + \gamma_{max}\gamma_{max} - \gamma_{min}\alpha^*$$

$$\alpha^* = \sqrt{\gamma_{min}\gamma_{max}}$$

bulunur. α^*'ın bu değeri $\sigma(\alpha) = \max\left\{\left|\frac{\alpha - \gamma_{min}}{\alpha + \gamma_{min}}\right|, \left|\frac{\alpha - \gamma_{max}}{\alpha + \gamma_{max}}\right|\right\}$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\sigma(\alpha^*) = \max\left\{\left|\frac{\alpha^* - \gamma_{min}}{\alpha^* + \gamma_{min}}\right|, \left|\frac{\alpha^* - \gamma_{max}}{\alpha^* + \gamma_{max}}\right|\right\}$$

$$\sigma(\alpha^*) = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{\gamma_{min}\gamma_{max}} - \gamma_{min}}{\sqrt{\gamma_{min}\gamma_{max}} + \gamma_{min}}\right|, \left|\frac{\sqrt{\gamma_{min}\gamma_{max}} - \gamma_{max}}{\sqrt{\gamma_{min}\gamma_{max}} + \gamma_{max}}\right|\right\}$$

$$\sigma(\alpha^*) = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{\gamma_{max}} - \sqrt{\gamma_{min}}}{\sqrt{\gamma_{max}} + \sqrt{\gamma_{min}}}\right|, \left|\frac{\sqrt{\gamma_{min}} - \sqrt{\gamma_{max}}}{\sqrt{\gamma_{min}} + \sqrt{\gamma_{max}}}\right|\right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5.2. Genelleştirilmiş Sylvester Transpoz Matris Denkleminin Kronecker Çarpım Yardımıyla Lineer Denklem Sistemine Dönüştürülmesi

Bir önceki kısımda (5.1) sisteminin çözümü için SSS metodu tanıtıldı. Bu kısımda aşağıdaki şekilde genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi ile (5.1) arasında Kronecker çarpım yardımıyla denklik oluşturulacaktır.

$A, B, C, D, E, F, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen matrisler ve $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinmeyen matris olmak üzere

$$AXB + CXD + EX^TF = M \tag{5.7}$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi, Kronecker çarpım kullanılırsa,

$$(B^T \otimes A + D^T \otimes \mathrm{C} + (F^T \otimes \mathrm{E})P)\, vec(x) = \big(vec(M)\big)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece,

$\mathcal{A} := B^T \otimes A + D^T \otimes \mathrm{C} + (F^T \otimes \mathrm{E})P$ ve $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$,
$x := vec(X)$ ve $x \in \mathbb{R}^{n^2}$,
$b := \big(vec(M)\big)$ ve $b \in \mathbb{R}^{n^2}$

olmak üzere genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi ile (5.1) matris denkleminin yukarıdaki anlamda denk olduğu görülür. Burada, bu denklik için gerekli olan P matrisinin yapısı Lemma 5.2.1'de mevcuttur [65].

Lemma 5.2.1. $X \in \mathbb{R}^{nxn}$ herhangi bir matris olsun. Bu durumda

$$vec(X^T) = Pvec(X)$$

olup burada P, n tamsayısı ile belirli tek türlü tanımlı matristir. Ayrıca P aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. Herhangi n tamsayısı için $P \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$ matrisi

$$\begin{bmatrix} E_{11}^T & E_{12}^T & \cdots & E_{1n}^T \\ E_{21}^T & E_{22}^T & \cdots & E_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1}^T & E_{n2}^T & \cdots & E_{nn}^T \end{bmatrix}$$

biçimine sahiptir. Burada $E_{ij}, i,j = 1,2,\dots,n$ matrisi (i,j) elemanı 1 ve diğer elemanları 0 olan $n \times n$ boyutlu reel matristir.

ii. Herhangi n tamsayısı için P bir ortogonal matristir. Yani,

$$PP^T = P^T P = I$$

□

5.3. Genelleştirilmiş Sylvester Transpoz Matris Denkleminin SSS Metodu ile Çözümü

(5.7) denkleminin çözümü için 5.1 kısmında verilen denklik de kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem.5.3.1. $A,B,C,D,E,F,M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, bilinen matrisler, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinmeyenler matrisi ve $\mathcal{A} := B^T \otimes A + D^T \otimes \mathrm{C} + (F^T \otimes \mathrm{E})P$ ve $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$, $x := vec(X)$ ve $x \in \mathbb{R}^{n^2}$, $b := \big(vec(M)\big)$ ve $b \in \mathbb{R}^{n^2}$olmak üzere,

$$AXB + CXD + EX^T F = M$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi $\mathcal{A}x = b$ biçiminde yazılır. Bu durumda $\alpha^* = \sqrt{\gamma_{min}\cdot\gamma_{max}}$, $S = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^T)$ ve $R = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^T)$ olmak üzere

$$x^{(k+1)} = (\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)x^{(k)} + (\alpha I + R)^{-1}\big((\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1} + I\big)b$$

ile bulunan x vektörü (5.7) denkleminin gerçek çözümü X^* iken, $vec(X^*)\epsilon\mathbb{R}^n$ vektörüne yakınsar. □

Bu teoreme göre

$$AXB + CXD + EX^T F = M$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ çözümünü bulan algoritma aşağıdaki gibi yazılabilir.

Algoritma.5.3.2.

Adım 1. n ve d gir. Burada n, matrislerin boyutu ve d, $AXB + CXD + EX^TF - M$ matrisinin normu için istenen üst sınırdır.

Adım 2. $A, B, C, D, E, F, M, X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gir. $k = 0$ olsun.

Adım 3. $P = \left[E_{ij}\right]_{n^2\times n^2}$ matrisini oluştur,

Adım 4. $\mathcal{A} := B^T \otimes A + D^T \otimes \mathrm{C} + (F^T \otimes \mathrm{E})P$ matrisini ve $b := vec(M)\ ve\ x^{(k)} = vec(X_0)$ vektörlerini oluştur,

Adım 5. $\mathcal{A}$ matrisinin özdeğerlerinde negatif veya kompleks eleman varsa 'Adım 1.' e git.

Adım 6. $S = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^T),\ R = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^T)$ olarak hesapla,

Adım 7. $\alpha = \sqrt{\gamma_{min}.\gamma_{max}}$ olarak hesapla,

Adım 8. $x^{(k+1/2)} = (\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)x^{(k)} + (\alpha I + S)^{-1}b$ ve

$x^{(k+1)} = (\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - S)x^{(k+1/2)} + (\alpha I + R)^{-1}b$ olarak hesapla,

Adım 9. $x^{(k+1)} = vec(X)$ olacak şekilde X matrisini oluştur,

Adım 10. $\|AXB + CXD + EX^TF - M\|_2 < d$ ise dur, değilse 'Adım 8.' e git.

5.4. Örnekler

Bu kısımda Algoritma 5.3.2.'nin etkinliğini ve hızını resmeden örnekler yer almaktadır.

Örnek 5.4.1. $A=\begin{pmatrix}10&6&5\\6&8&5\\5&5&10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10&5&6\\5&10&5\\6&5&8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}10&4&5\\4&4&3\\5&3&6\end{pmatrix}$,
$D=\begin{pmatrix}10&5&2\\5&6&6\\2&6&8\end{pmatrix}$,$E=\begin{pmatrix}0&4&4\\4&0&3\\4&3&4\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0&3&5\\3&2&6\\5&6&10\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}8&1&9\\1&8&5\\9&5&10\end{pmatrix}$

verilen matrisleri ve

$$X_0=\begin{pmatrix}10&11&10\\11&6&9\\10&9&12\end{pmatrix}$$

seçilen başlangıç matrisi için

$$AXB+CXD+EX^TF=M$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin $X\in\mathbb{R}^{3\times3}$ çözümü SSS metodu ile 28 adımda

$$X=\begin{pmatrix}0{,}0707&-0{,}1841&0{,}1481\\-0{,}1120&0{,}2456&-0{,}1630\\0{,}0702&-0{,}0774&0{,}0658\end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada $\|AXB+CXD+EX^TF-M\|=0{,}0854$ olur.

Örnek 5.4.2. $A=\begin{pmatrix}10&4&3\\4&8&5\\3&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10&2&6\\2&4&3\\6&3&10\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6&4&1\\4&4&4\\1&4&4\end{pmatrix}$,
$D=\begin{pmatrix}8&3&1\\3&8&4\\1&4&6\end{pmatrix}$,$E=\begin{pmatrix}4&5&6\\5&2&2\\6&2&2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}2&5&4\\5&2&7\\4&7&4\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}4&3&3\\3&8&4\\3&4&10\end{pmatrix}$

verilen matrisleri ve

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

seçilen başlangıç matrisi için

$AXB + CXD + EX^T F = M$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ çözümü SSS metodu ile 28 adımda

$$X = \begin{pmatrix} -0{,}0916 & -0{,}1984 & 0{,}0597 \\ 0{,}2495 & 0{,}8238 & -0{,}4816 \\ -0{,}2606 & -0{,}3766 & 0{,}3736 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada $\|AXB + CXD + EX^T F - M\| = 0{,}0994$ olur.

Örnek 5.4.3. $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,$E = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 7 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$
verilen matrisleri ve

$$X_0 = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

seçilen başlangıç matrisi için

$AXB + CXD + EX^T F = M$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ çözümü SSS metodu ile 23 adımda

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}0714 & -0{,}1459 & 0{,}1563 \\ -0{,}1552 & 0{,}2609 & -0{,}1701 \\ 0{,}0693 & -0{,}2046 & 0{,}1674 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada $\|AXB + CXD + EX^TF - M\| = 0{,}0943$ olur.

Örnek 5.4.4. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,$E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 8 \\ 1 & 10 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

verilen matrisleri ve

$$X_0 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

seçilen başlangıç matrisi için

$$AXB + CXD + EX^TF = M$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin $X \in \mathbb{R}^{3\times3}$ çözümü SSS metodu ile 25 adımda

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}0369 & -0{,}0388 & 0{,}2292 \\ 0{,}0131 & 0{,}0902 & -0{,}1597 \\ 0{,}1941 & -0{,}0507 & -0{,}2828 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada $\|AXB + CXD + EX^TF - M\| = 0{,}0813$ olur

Örnek 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3, ve 5.4.4'de başlangıç matrisleri (X_0) herhangi seçilen matrisler olduğunda, sırasıyla, 28, 28, 23 ve 25 adımda çözüme ulaşılırken başlangıç matrislerinin her biri sıfır matrisi olarak ele alınırsa, sırasıyla, 15, 23, 15 ve 18 adımda (0.0897, 0.0845, 0.0967, 0.0857 hatalarıyla $\|AXB + CXD + EX^TF - M\|$)

çözüme ulaşılır. O halde başlangıç matrisi olarak sıfır matrisini almak konjektür olarak daha uygun olacaktır.

Aşağıdaki tablolarda yukarıdaki örnekler için bazı adımlardaki karşılık gelen X matrisleri ve o adımlardaki hata değerleri listelenmiştir. Böylece algoritmanın etkinliğini örnekler üzerinden resmetmek amaçlanmıştır.

Tablo 5.1 Beşinci Bölümde Verilen Sonuçlara Ait Bazı Örnekler

İlgili Teorem ve Örnek	*Adım sayısı*	*X Matrisi*	*Yakınsama Değeri*$=\|AXB+CXD+EX^TF-M\|$
Teo.5.3.1. 5.4.1.	1	$\begin{pmatrix} -8,8847 & -4,9986 & -4,9968 \\ -6,6004 & -6,6024 & -4,7847 \\ -11,5928 & -8,2941 & -6,8875 \end{pmatrix}$	16443,8000
Teo.5.3.1. 5.4.1.	5	$\begin{pmatrix} -1,8813 & -0,7807 & -0,4069 \\ -1,6689 & -0,9271 & -0,7364 \\ -2,4166 & -1,5102 & -1,1225 \end{pmatrix}$	2984,1111
Teo.5.3.1. 5.4.1.	10	$\begin{pmatrix} 0,2685 & -0,0574 & 0,1355 \\ 0,0636 & 0,2866 & -0,0263 \\ 0,3173 & 0,0821 & 0,1811 \end{pmatrix}$	308,6551
Teo.5.3.1. 5.4.1.	15	$\begin{pmatrix} 0,0495 & -0,1828 & 0,1339 \\ -0,1318 & 0,2235 & -0,1546 \\ 0,0439 & -0,0899 & 0,0501 \end{pmatrix}$	31,6454
Teo.5.3.1. 5.4.1.	20	$\begin{pmatrix} 0,0726 & -0,1809 & 0,1459 \\ -0,1107 & 0,2436 & -0,1582 \\ 0,0727 & -0,0751 & 0,0663 \end{pmatrix}$	3,2513
Teo.5.3.1. 5.4.1.	25	$\begin{pmatrix} 0,0704 & -0,1838 & 0,1476 \\ -0,1122 & 0,2450 & -0,1624 \\ 0,0698 & -0,0774 & 0,0655 \end{pmatrix}$	0,3322
Teo.5.3.1. 5.4.1.	28	$\begin{pmatrix} 0,0706 & -0,1840 & 0,1481 \\ -0,1119 & 0,2456 & -0,1629 \\ 0,0701 & -0,0774 & 0,0658 \end{pmatrix}$	0,0854

İlgili Teorem ve Örnek	*Adım sayısı*	*X Matrisi*	*Yakınsama Değeri*$=\|AXB+CXD+EX^TF-M\|$
Teo.5.3.1. 5.4.2.	1	$\begin{pmatrix} -2,2227 & 0,0150 & 2,2415 \\ -5,9629 & 2,3639 & -1,7250 \\ -6,5051 & -2,2361 & 0,7752 \end{pmatrix}$	3031,5142
Teo.5.3.1. 5.4.2.	5	$\begin{pmatrix} -0,3753 & -0,5441 & 0,1076 \\ -0,0465 & 1,3931 & -1,4310 \\ -1,2068 & -1,1171 & 0,3061 \end{pmatrix}$	563,1434
Teo.5.3.1. 5.4.2.	10	$\begin{pmatrix} -0,1479 & -0,2967 & 0,0948 \\ 0,5015 & 1,1720 & -0,6925 \\ -0,3600 & -0,4787 & 0,4994 \end{pmatrix}$	39,7105
Teo.5.3.1. 5.4.2.	15	$\begin{pmatrix} -0,1203 & -0,2342 & 0,0887 \\ 0,3186 & 0,9512 & -0,5718 \\ -0,3356 & -0,4111 & 0,4164 \end{pmatrix}$	1,3233
Teo.5.3.1. 5.4.2.	20	$\begin{pmatrix} -0,1017 & -0,2126 & 0,0693 \\ 0,2775 & 0,8661 & -0,5149 \\ -0,2864 & -0,3863 & 0,3402 \end{pmatrix}$	0,3983
Teo.5.3.1. 5.4.2.	25	$\begin{pmatrix} -0,0939 & -0,2016 & 0,0621 \\ 0,2560 & 0,8333 & -0,4892 \\ -0,2667 & -0,3783 & 0,3770 \end{pmatrix}$	0,1667
Teo.5.3.1. 5.4.2.	28	$\begin{pmatrix} -0,0915 & -0,1984 & 0,0597 \\ 0,2494 & 0,8238 & -0,4816 \\ -0,2606 & -0,3765 & 0,3735 \end{pmatrix}$	0,0994

Tablo 5.2 Beşinci Bölümde Verilen Sonuçlara Ait Bazı Örnekler (Devamı)

İlgili Teorem ve Örnek	*Adım sayısı*	*X Matrisi*	*Yakınsama Değeri*$=\|AXB+CXD+EX^TF-M\|$
Teo.5.3.1. 5.4.3.	1	$\begin{pmatrix} -2,3044 & -4,7043 & -6,0495 \\ -1,3692 & -4,2951 & 0,3145 \\ -5,6349 & -3,0718 & -3,9549 \end{pmatrix}$	6362,1538
Teo.5.3.1. 5.4.3.	5	$\begin{pmatrix} -0,4992 & -0,5387 & -0,6789 \\ 0,3348 & -0,3079 & 0,1600 \\ -0,6221 & -0,5046 & -0,5170 \end{pmatrix}$	677,5689
Teo.5.3.1. 5.4.3.	10	$\begin{pmatrix} 0,0125 & -0,0196 & 0,1288 \\ -0,0455 & 0,1302 & -0,1339 \\ 0,0262 & -0,1184 & 0,1637 \end{pmatrix}$	17,3791
Teo.5.3.1. 5.4.3.	15	$\begin{pmatrix} 0,0502 & -0,1177 & 0,1477 \\ -0,1204 & 0,2280 & -0,1651 \\ 0,0530 & -0,1895 & 0,1660 \end{pmatrix}$	0,6473
Teo.5.3.1. 5.4.3.	20	$\begin{pmatrix} 0,0675 & -0,1407 & 0,1549 \\ -0,1487 & 0,2549 & -0,1695 \\ 0,0530 & -0,2019 & 0,1672 \end{pmatrix}$	0,1932
Teo.5.3.1. 5.4.3.	23	$\begin{pmatrix} 0,0714 & -0,1459 & 0,1563 \\ -0,1551 & 0,2608 & -0,1701 \\ 0,0693 & -0,2046 & 0,1674 \end{pmatrix}$	0,0943
İlgili Teorem ve Örnek	*Adım sayısı*	*X Matrisi*	*Yakınsama Değeri*$=\|AXB+CXD+EX^TF-M\|$
Teo.5.3.1. 5.4.4.	1	$\begin{pmatrix} -3,9225 & -1,5551 & -3,0688 \\ -4,5660 & -0,6766 & -1,8389 \\ -2,3064 & -0,2749 & -3,8253 \end{pmatrix}$	4283,9000
Teo.5.3.1. 5.4.4.	5	$\begin{pmatrix} -0,5396 & -0,1254 & -0,4335 \\ -0,5084 & 0,0207 & -0,5499 \\ -0,4391 & -0,0953 & -0,7165 \end{pmatrix}$	661,4516
Teo.5.3.1. 5.4.4.	10	$\begin{pmatrix} 0,1235 & -0,0652 & 0,2432 \\ 0,0474 & 0,1250 & -0,0775 \\ 0,1829 & -0,0109 & -0,1616 \end{pmatrix}$	69,4545
Teo.5.3.1. 5.4.4.	15	$\begin{pmatrix} 0,0374 & -0,0493 & 0,2078 \\ 0,0039 & 0,0972 & -0,1568 \\ 0,1657 & -0,0429 & -0,2638 \end{pmatrix}$	7,1796
Teo.5.3.1. 5.4.4.	20	$\begin{pmatrix} 0,0398 & -0,0417 & 0,2253 \\ 0,0124 & 0,0927 & -0,1565 \\ 0,1879 & -0,0478 & -0,2749 \end{pmatrix}$	0,7770
Teo.5.3.1. 5.4.4.	25	$\begin{pmatrix} 0,0369 & -0,0388 & 0,2292 \\ 0,0131 & 0,0902 & -0,1597 \\ 0,1941 & -0,0507 & -0,2828 \end{pmatrix}$	0,0813

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

$Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümü için BCR ve HSS algoritmaları sırasıyla Bölüm 3 ve Bölüm 4'te tanıtıldı. BCR [52] makalesinde genelleştirişmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisini çözmek için kullanıldı. Bu çalışmada ise HSS metodundan esinlenerek Bölüm 5'te ortaya konulan SSS metodu tanıtıldı ve bununla genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin çözümü ortaya konuldu. Bunun için önce SSS metodunun $Ax = b$ lineer denklem sistemindeki çözümü verildi. Ardından genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin $Ax = b$ lineer denklem sistemine Kronecker çarpım yardımıyla dönüştürülmesi işlemi yapıldı ve SSS metodu ile ilgili algoritma oluşturuldu. Algoritmanın etkinliğini resmetmek için örnekler verildi.

Dolayısıyla bu çalışmada genelleştirişmiş Sylvester transpoz matris denklemi için SSS metodu ile çözüm verildi. İkili genelleştirişmiş Sylvester transpoz matris denklemi,

$$A_1XB_1 + C_1XD_1 + E_1X^TF_1 = M_1$$
$$A_2XB_2 + C_2XD_2 + E_2X^TF_2 = M_2$$

için çözüm elde edilmeye çalışılabilir. Hatta böyle bir denklem, n sonlu bir sayı olmak üzere, n'lisi için çözüm aranabilir.

KAYNAKLAR

[1] Kangshen S., Crossley J. N., Lun A. W. C., Nine Chapters of the Mathematical Art, 2nd edition, Companion and Commentary, Oxford Univ. Press, 1999.

[2] Dossey J.A., Otto A.D., Spense L.E., Eynden C.V., Discrete Mathematics, 4th edition, Published by Addison Wesley, p. 564-565, October 10, 2001.

[3] Needham J., Ling W., Science and Civilisation in China, III. Cambridge, Cambridge Univ. Press. s. 117., 1959.

[4] Hawkins T., "Cauchy and the spectral theory of matrices", Historia Math., **2**:1–29, 1975.

[5] Merriam W., Merriam-Webster dictionary, retrieved April 20, 2009.

[6] Sylvester J.J., Baker H. F., The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, Cambridge Univ. Press, 1904.

[7] Cayley A., Memoir on the theory of matrices, also in Collected Papers, vol. II, London 148 17–37, pp. 475–496, 1858.

[8] Dieudonne J., Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900, Paris, FR: Hermann, 1978.

[9] Bocher M., Introduction to higher algebra, Dover Phoenix Ed., New York,NY, 2004.

[10] Mehra J., Rechenberg H., The Historical Development of Quantum Theory (1st ed.), Springer-Verlag, Berlin, DE; New York, 1978.

[11] Tirole J., Fudenberg D., Game Theory, MIT Press, 1983.

[12] Manning C.D., Schütze H., Foundations of statistical natural language processing, MIT Press, 1999.

[13] Ward J.P., Quaternions and Cayley numbers, Mathematics and its Applications, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 403, 1997.

[14] Stinson D.R., Cryptography, Discrete Math. Appl., Chapman & Hall/ CRC, 2005.

[15] Tata M.H., Computer Graphics, ACM, 1979.

[16] Godsil C., Royle G., Algebraic Graph Theory, Grad. Texts in Math, Springer-Verlag, Berlin, DE; New York,207, 2004.

[17] Punnen A., Gutin G., The traveling salesman problem and its variations, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2002.

[18] Lang S., Calculus of several variables (3rd ed.), Springer-Verlag, Berlin, DE; New York, 1987.

[19] Nocedal J., Wright S.J., Numerical Optimization (2nd ed.), Springer-Verlag, Berlin, DE, New York, p. 449, 2006.

[20] Gilbarg D., Trudinger N.S., Elliptic partial differential equations of second order (2nd ed.), Springer-Verlag, Berlin, DE, New York, 2001.

[21] Šolin P., Partial Differential Equations and the Finite Element Method, Wiley-Intersci, 2005.

[22] Latouche G., Ramaswamy V., Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling (1st ed.), Society for Industrial and Appl. Math., Philadelphia, 1999.

[23] Mehata K.M., Srinivasan S.K., Stochastic processes, McGraw –Hill, New York, 1978.

[24] Healy M., Matrices for Statistics, Oxford Univ. Press, 1986.

[25] Krzanowski W.J., Principles of multivariate analysis, Oxford Statistical Science Series, Oxford Univ. Press, 1988.

[26] Conrey J.B., Farmer D.W., Mezzadri F., Snaith N.C., Ranks of Elliptic Curves and Random Matrix Theory, Cambridge Univ. Press, 2007.

[27] Itzykson C., Zuber J.-B., Quantum Field Theory, McGraw–Hill, 1980.

[28] Burgess C.P., Moore G.D., The Standard Model. A Primer, Cambridge Univ. Press, 2007.

[29] Schiff L.I., Quantum Mechanics (3rd ed.), McGraw–Hil, 1968.

[30] Bohm A., Quantum Mechanics: Foundations and Appl., Springer, 2001.

[31] Weinberg S., The Quantum Theory of Fields. Volume I: Foundations, Cambridge Univ. Press, 1995.

[32] Wherrett B.S., Group Theory for Atoms, Molecules and Solids, Prentice–Hall International, 1987.

[33] Riley K.F., Hobson M.P., Michael J.S.B., Mathematical methods for physics and engineering, Cambridge Univ. Press, 1997.

[34] Guenther R.D., Modern Optics, John Wiley, 1990.

[35] Wang H., Jiang J., Solution of the system of linear algebraic equations by decreasing dimension, Appl. Math. Comput.,109:51-57, 2000.

[36] Zhang J., Comments on ‘Solution of the system of linear algebraic equations by decreasing dimension’, Appl. Math. Comput., 128:95-98, 2002.

[37] Bulgakov A.Y., Godunov S.K., The stability of stable matrices, Theory of cubature formulas and numerical mathematics, Pap. Conf. Differential equations and numerical mathematics, Novosibirsk 13-28, 1978.

[38] Bulgakov A. Ya., Godunov S.K., Allowance for computation errorsin a variant of the conjugate gradient method, Numerical Methods of Linear Algebra, Novosibirsk, Nauka, pp.38-55(Russian), 1985.

[39] Mukaidani H., Xu H., Mizukami K., New iterative algorithm for algebraic Riccati equation related to H infinity control problem of singularly perturbed systems, IEEE Transactions on Automatic Control 46(10) 1659-1666, 2001.

[40] Jiang T., Wei M., On solutions of the matrix equations $X - AXB = C$ and $X - A\bar{X}B = C$, Linear Algebra Appl., 367:225-233, 2003.

[41] Ding F., Chen T., Iterative least-squares solutions of coupled Sylvester matrix equations., Systems Control Lett.,54:95-107, 2005.

[42] Peng Y.X., Hu X.Y., Zhang L., An iteration method for the symmetric solutions and the optimal approximation solution of the matrix equation $AXB = C$, Appl. Math. Comput., 160:763-777, 2005.

[43] Peng Z., An iterative method fort the least squares symmetric solution of the linear matrix equation $AXB = C$, Appl. Math. Comput., 170:711-723, 2005.

[44] Sheng X., Chen G., A finite iterative method for solving a pair of linear matrix equation $(AXB, CXD) = (E, F)$, Appl. Math. Comput., 189:1350-1358, 2007.

[45] Fanliang L., Xiyan H., Lei Z., The generalized reflexive solution for a class of matrix equations $(AX = B, XC = D)$, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.,185-193, 2008.

[46] Ding F., Liu P.X., Ding J., Iterative solutions of the generalized Sylvester matrix equations by the hierarchical identification principle., Appl. Math. Comput., 197:41-50, 2008.

[47] Xu G., Wei M., Zheng D., On solutions of matrix equation $AXB + CYD = F$, Linear Algebra Appl., 279(1-3) 93-109, 1998.

[48] Wang M., Cheng X., Wei M., Iterative algorithms for solving the matrix equation $AXB + CX^TD = E$, Appl. Math. Comput., 187:622-629, 2007.

[49] Bai Z.Z., Golub G. H., Michael K.NG, Hermitian and Skew Hermitian Splitting Methods for Non-Hermitian Positive Definitive Linear Systems, Siam J. Matrix Analysis Appl., 24(3), 603-626,2003.

[50] Bai Z.Z., Benzi M., Chen F., On precenditioned MHSS iteration methods for complex symmetric linear systems, Numer. Algorithms, 56, 297-317,2011.

[51] Dehghan M, Shirilord A., A generalized modified Hermitian and Skew Hermitian splitting (GMHSS) method for solving complex Sylvester matrix equation, Appl. Math. Comput., 348, 632-651,2019.

[52] Hajarian M., Biconjugate residual algorithm for solving General Sylvester-transpoze matrix equations, Filomat, 32:15, 5307-5318,2018.

[53] Sabuncuoğlu A., Lineer Cebir , 3. baskı, Nobel Yayınları, Ankara, 2008.

[54] Horn R. A., Johnson C. R., Matrix Analysis, 2 edition, Cambridge University Press, New York, 2012.

[55] Graybill A.F., Matrices with applications in statistics, second edition, Duxbury Classic Series, 1999.

[56] Demmel J. W., Applied Numerical Linear Algebra, SIAM,1997.

[57] Chronopoulos A.T., Gear C.W., S-step iterative methods for (non)symmetric (in)definite linear systems, SIAM J. Numer. Anal., 28 1776-1789, 1991.

[58] Chronopoulos A.T., On the squared unsymmetric lanczos method, Int. J. Comput. Appl. Math.,54, 65-78, 1994.

[59] Chronopoulos A.T., Kincaid D., On the odir iterative method for non-symmetric indefinite linear systems, Numer. Linear Algebra Appl., 8, 71-82, 2001.

[60] Chronopoulos A.T., Kucherov A.B., Block S-step Krylov iterative methods, Numer. Linear Algebra Appl., 17, 3-15, 2010.

[61] Chronopoulos A.T., Swanson C.D, Parallel iterative s-step methods for unsymmetric linear systems, Parallel Computing, 22, 623-641, 1996.

[62] Broyden C.G., Vespucci M.T., Krylov Solvers for Linear Algebraic Systems, ELSEVIER Inc., San Diego, 2004.

[63] Saad Y., Iterative Methods for Sparse Linear Systems, SIAM, Philadelphia, 2nd. ed., 2003.

[64] Vespucci M.T., Broyden C.G., Implementation of different computational variations of biconjugate residual methods, Comput. Math. Appl., 42, 1239-1253, 2001.

[65] Zhou B., Lam J., Duan G.-R., Toward solution of matrix equation $X= Af(X)B + C$, Linear Algebra Appl., 435, 1370–1398, 2011.

[66] Sarduvan M., Kaplan E., Genelleştirilmiş Sylvester Transpoz Matris Denkleminin Simetrik ve Ters Simetrik Ayrışım Metodu ile Çözümü, dergipark, BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi, 319-328, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

Esra KAPLAN, 20.04.1985 tarihinde Adapazarı'nda doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 2003 yılında Kütahya'da tamamladı. 2004 yılında Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde birleştirilmiş tezsiz yüksek lisans eğitimine başladı. 2011 yılında lisans eğitimini tamamladı. Mezuniyetinden 2012 yılına kadar çeşitli kurumlarda dershanecilik yaptı 2013 yılında Çalışma ve Sosyal Politikalar Bakanlığı'na bağlı Tuzla İŞKUR bünyesinde büro personeli olarak çalıştı. Aynı yıl Millî Eğitim Bakanlığı'na öğretmen olarak atandı. 2016 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematiğin Temelleri ve Lojik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Millî Eğitim Bakanlığı'nda öğretmenlik görevine devam etmektedir.