T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL-HİPERBOLİK SAYILAR İÇİN DE-MOIVRE FORMÜLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elma KAHRAMANİ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**

Şubat 2020

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL-HİPERBOLİK SAYILAR İÇİN DE-MOIVRE FORMÜLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elma KAHRAMANİ

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**GEOMETRİ**

Bu tez 07 / 02 / 2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Doç. Dr.**	**Doç. Dr.**
Mehmet Ali GÜNGÖR	**Osman Zeki OKUYUCU**	**Mahmut AKYİĞİT**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Elma KAHRAMANİ

07.02.2020

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e en içten dileklerimle teşekkür ediyorum.

Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca bana yol gösteren, destek olan, en önemlisi bana eğitimin ne kadar önemli olduğu bilincini ve çalışma disiplinimi kazandıran babam Refet KAHRAMAN, her zaman yanımda olan annem Mediha KAHRAMAN ve çalışma süreci boyunca tüm zorlukları benimle göğüsleyen eşim Vehbi HAŞHANİ ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR ..…………………………………………………………..................... i

İÇİNDEKİLER ………………………………………………………...... ii

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ ……………………………........... iv

ŞEKİLLER LİSTESİ ………………………………………………….…..... v

TABLOLAR LİSTESİ …………………………………………………... vi

ÖZET ……………………………………………………………………….. vii

SUMMARY ………………………………………………………………... vii

BÖLÜM 1.

GİRİŞ…………………………………………………………......................... 1

BÖLÜM 2.

KOMPLEKS, HİPERBOLİK VE DUAL SAYILAR……………………………. 3

2.1. Kompleks Sayılar…………..…………..…………..…………..…….. 3

2.2. Hiperbolik Sayılar…………………………………………………….. 5

2.3. Dual Sayılar…………………….….…...…………………….…………. 12

BÖLÜM 3.

DUAL-HİPERBOLİK SAYILAR……………………………….……..………... 22

3.1. Dual-Hiperbolik Sayıların Yapısı….………..……………………….. 22

3.2. Dual-Hiperbolik Sayılarda Eşlenik ve Modül.………..……………… 24

3.3. Dual-Hiperbolik Sayıların Üstel Gösterimi…….………..…………… 26

3.4. Dual-Hiperbolik Sayılar için Euler ve De-Moivre Formülleri……….. 27

3.5. Dual-Hiperbolik Sayıların Logaritma Fonksiyonu ve Matris Gösterimi 32

BÖLÜM 4.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER……………………………...…………………. 34

KAYNAKLAR……………………………………………………………... 35
ÖZGEÇMİŞ ……………………………………………………………... 37

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\vec{e}$	: Birim vektör
ε	: Dual birim
$\mathbb{D}$	: Dual sayılar cümlesi
$\mathbb{DH}$	: Dual-Hiperbolik sayılar cümlesi
$w^{\dagger}$	: Dual-Hiperbolik sayıların eşleği
G^4	: Galilean uzayı
$[.]$	: Galilean uzayında dış işlem
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik sayı cümlesi
$\bar{z}$	: Hiperbolik sayıların eşleniği
$(\times)$	: Kuaterniyon çarpımı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
$(\cdot)$	: Öklid iç çarpım
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar cümlesi
$(\wedge)$	: Vektörel çarpım

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Karmaşık sayının gösterimi ……………………………………………. 3

Şekil 2.2. Hiperbolik sayıların koordinat düzleminde gösterimi………………….. 10

Şekil 2.3. Galilean birim çemberi………………………………..……………... 21

Şekil 2.4. Galilean açı ……………………………………………..................... 22

ÖZET

Anahtar kelimeler: Dual-Hiperbolik Sayılar, De-Moivre Formülü, Euler Formülü

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde kompleks, hiperbolik ve dual sayılar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Tezin orijinal kısmı beş alt bölüm halinde düzenlenmiştir. İlk bölümde dual-hiperbolik sayıların cebirsel yapıları tanıtılmış ve trigonometrik değerler verilmiştir. Daha sonra dual-hiperbolik sayıların üstel gösterimi türetilmiş ve bu gösterim ile Euler formülü verilmiştir. Ayrıca Euler formülü yardımıyla De-Moivre formülü bulunmuştur. Son olarak dual-hiperbolik sayıların logaritmik ve matris gösterimleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde bu tezin bir değerlendirilmesi yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

DE-MOIVRE FORMULA FOR DUAL-HYPERBOLIC NUMBERS

SUMMARY

Keywords: Dual-Hyperbolic Numbers, De-Moivre Formula, Euler Formula

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction. In the second part complex, hyperbolic and dual numbers are introduced.

The third part is the original part of the thesis. The original part of the thesis is organized in five sub-sections. In the first chapter, algebraic strutures of dual-hyperbolic numbers are introduced and trigonometric values are given. Then the exponential representation of the dual-hyperbolic numbers is derived and the Euler formula is given. Finally, logarithmic and matrix representations of dual-hyperbolic numbers are given.

In the fourth chapter of this thesis, the general evaluation of the study is given and a suggestion is proposed for further investigations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İtalyan matematikçi G. Carden kompleks sayılar için $a+\sqrt{-b}$ ifadesini ve R. Bombelli ise $\sqrt{-1}$ ifadesini kullandı. Fransız filozof R. Descartes kompleks sayıları ifade etmek için kartezyen koordinat sistemini geliştirdi ve ilk defa "imaginery" terimini kullandı. Fakat kompleks sayılar için ilk defa Leonard Euler $i=\sqrt{-1}$ ifadesini tanımlamıştır [1]. Daha sonra da Euler kompleks sayıların üstel gösterimi olarak $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ eşitliğini gösterdi. Abraham de Moivre kendi adı ile bilinen De-Moivre formülünü

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{n}=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

şeklinde geliştirmiştir.

17. yüzyılda Clifford $\varepsilon^{2}=0$ ve $\varepsilon\neq 0$ olan yeni bir sayı sistemi tanımlandı. Bu sayı sistemini geometrik araştırmalarda kullanmıştır. Clifford tarafından, kompleks sayı sistemine benzer olarak bir dual sayı $A=a+\varepsilon a^{*}$ $\left(a,a^{*}\in\mathbb{R}\right)$ şeklinde tanımlandı [2]. Daha sonra A. P. Kotelnikov ve E. Study tarafından çizgi geometrisinde ve mekaniğin uygulamalarında dual sayılar ve dual vektörleri kullanılmıştır, [3,4].

Kompleks sayılar ile 2-boyutlu düzlemin ilişkisini çok iyi bilen ve 4-boyutlu kuaterniyon cebirini tanımlayan W. R. Hamilton, bu ilişkiyi 3-boyutlu uzaylarla ilişkilendirmek amacıyla, 3-boyutlu bir cebirsel yapı aradı. Hamilton 19. yüzyılda "2-boyutlu uzaylarda dönme varsa neden 3-boyutlu uzaylarda?" diyerek başlattığı çalışmasında kuaterniyonları keşfetti. Bu keşfini, Brougham Köprüsü altında dinlenirken yaptı ve orada bulunan bir taşa yazdı. Daha sonrasında birim vektörleri

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk$$

şeklinde tanımlandı.

Bu olay herkes tarafından bilindiği için, dünyanın dört bir yanından insanlar bu köprüyü "Hamilton Köprüsü" olarak bilir. Kuaterniyonlar, bilim dünyasında çok büyük etkiye sahiptir. Matematik dışında fizik, kuantum fiziği, metafizik, mühendislik gibi birçok bilim dalında kullanılır.

Kompleks sayılara benzer olan bir diğer sayı sistemi de hiperbolik sayılardır. Hiperbolik sayı sistemi ilk defa J. Cockle tarafından kullanılmıştır. Hiperbolik sayılar $z = x + j\,y \quad (x, y \in \mathbb{R})$ şeklinde ifade edilir ve burada $j \quad (j^2 = 1,\ j \notin \mathbb{R})$ hiperbolik imajiner kısım olarak adlandırılır. 20. Yüzyılın sonunda O. Bodnar, A. Stakhov ve I. S. Tkachenko altın oran yarıdımı ile hiperbolik fonksiyon sınıfını ortaya koydu [5]. Son zamanlarda yapılan önemli çalışmalardan biri de A. Harkin ve J. Harkin tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada kompleks, hiperbolik ve dual sayıları içeren genelleştirilmiş trigonometri çalışılmıştır [6].

Bu çalışmanın amacı dual-hiperbolik sayıların için Euler ve De-Moivre formüllerini göstermektir. Öncelikle dual-hiperbolik sayılar kümesi ve cebirsel işlemleri üzerinde durulacaktır. Dual-hiperbolik sayılara karşılık gelen açının gösterimi ve buna bağlı olarak dual-hiperbolik sayıların üstel ifadesi ortaya konulacaktır. Ayrıca dual-hiperbolik sayılar için Euler ve De-Moivre formülleri verilerek bir dual-hiperbolik sayının kökleri bulunacaktır. Daha sonra dual-hiperbolik sayıların matris gösterimleri de verilecektir. Ayrıca bulunan teoremler örnekler ile desteklenecektir. Son bölümde ise bu çalışmanın sonuçları değerlendirilecektir.

BÖLÜM 2. KOMPLEKS, HİPERBOLİK VE DUAL SAYILAR

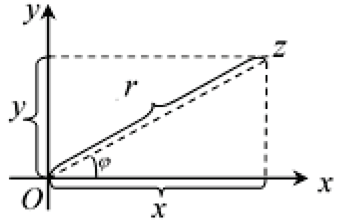
2.1. Kompleks Sayılar

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesini göstermek üzere, her x ve y reel sayısı için $z=(x,y)$ ifadesine bir sıralı ikili denir. Bu sıralı ikililerle tanımlanan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{C}$ olmak üzere

$$\mathbb{C}=\left\{z=x+iy : x,y\in\mathbb{R} \text{ ve } i^2=-1\right\}$$

olarak tanımlanan cümleye kompleks sayılar cümlesi ve bu cümlenin her bir elemanına kompleks sayı denir. Burada x reel sayısına kompleks sayının reel kısmı ve y reel sayısına kompleks sayının sanal (imajiner) kısmı denir [7].

Bir x reel sayısı ile $(x,0)$ kompleks sayısı $\mathbb{R}^2$ de aynı noktayı ifade ettiğinden $x=(x,0)$ yazılabilir. Böylece $\mathbb{R}=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$ olduğu görülüyor. $(0,1)$ kompleks sayısı ise $\mathbb{R}^2$ deki y ekseni üzerinde 1 birim uzaklıktaki noktaya karşılık gelir. Bu sayı tanım olarak $i=(0,1)$ simgesi ile gösterilir. Bu i sayısına $\mathbb{C}$ nin sanal (imajiner) birimi diyeceğiz (Şekil 2.1.).



Şekil 2.1. Karmaşık sayının gösterimi

Burada x ve y kompleks sayının reel ve imajiner kısmı olup $\operatorname{Re} z = x$ ve $\operatorname{Im} z = y$ şeklinde gösterilir. r uzaklığına ve φ açısına sırasıyla, kompleks sayının modülü ve argümenti denir. Ayrıca $\overline{z} = x - iy$ ifadesine z kompleks sayısının eşleniği denir. z kompleks sayısının modülü ise

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Böylece

$$\operatorname{Re} \overline{z} = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} \overline{z} = -\operatorname{Im} z, \quad |\overline{z}| = |z| \quad \text{ve} \quad \arg \overline{z} = \arg z$$

özellikleri verilebilir.

Tanım 2.1.2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_1 = x_1 + ix_2$ ve $z_2 = y_1 + iy_2$ için $x_1 = y_1$ ve $x_2 = y_2$ eşitlikleri sağlanıyor ise bu iki kompleks sayı eşittir denir ve $z_1 = z_2$ şeklinde gösterilir [7].

Tanım 2.1.3. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_1 = x_1 + ix_2$ ve $z_2 = y_1 + iy_2$ için $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ toplama işlemi

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2)$$

şeklinde tanımlanır [7].

Tanım 2.1.4. $z \in \mathbb{C}$ ve $z = x + iy$ olmak üzere

$$z + e = e + z = z$$

denkleminin çözümü olan e kompleks sayısına $\mathbb{C}$ cümlesi üzerinde $+$ işlemine göre etkisiz elemanı denir ve $0 = 0 + i0$ olarak gösterilir [7].

Tanım 2.1.5. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_1 = x_1 + ix_2$ ve $z_2 = y_1 + iy_2$ için $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ çarpma işlemi

$$z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 y_1 + x_2 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right)$$

şeklinde tanımlanır [7].

Kompleks sayının kutupsal gösterimi ise $z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ şeklindedir. Dolayısıyla bir kompleks sayısının eşleniği

$$\overline{z} = x - iy = r\left(\cos\left(-\varphi\right) + i\sin\left(-\varphi\right)\right) = r\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)$$

olarak da verilebilir. z kompleks sayısının argümenti için

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \cos\left(\arg z\right), \quad \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \sin\left(\arg z\right), \quad \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \tan\left(\arg z\right)$$

bağıntıları yazılabilir. Başka bir deyişle

$$\frac{x}{r} = \cos\varphi\ , \quad \frac{y}{r} = \sin\varphi\ , \quad \frac{y}{x} = \tan\varphi$$

olarak da verilir.

2.2. Hiperbolik Sayı Sistemi

Kompleks sayılar ile Öklid düzlemi arasındaki ilişkiye benzer bir ilişki de hiperbolik sayılar ile Lorentz düzlemi arasında vardır. Kompleks sayılar Öklid düzlemindeki koordinatlar ile temsil edilirken hiperbolik sayılarda Lorentz düzlemindeki koordinatlar ile temsil edilir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{H}$ olmak üzere

$$\mathbb{H}=\left\{z=x+jy \mid x,y\in\mathbb{R} \text{ ve } j^2=1 \ \left(j\neq\pm1\right)\right\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye hiperbolik sayılar cümlesi ve bu cümlenin her bir elemanına da hiperbolik sayı denir. Burada x ve y reel sayılarına sırasıyla, z hiperbolik sayısının reel ve sanal kısmı denir [8].

Tanım 2.2.2. $z_1, z_2\in\mathbb{H}$ olmak üzere $z_1=x_1+jx_2$ ve $z_2=y_1+jy_2$ iki hiperbolik sayıları için $x_1=y_1$ ve $x_2=y_2$ eşitlikleri varsa z_1 hiperbolik sayısı z_2 sayısına eşittir denir ve $z_1=z_2$ şeklinde gösterilir [8].

Tanım 2.2.3. $z_1, z_2\in\mathbb{H}$ olmak üzere $z_1=x_1+jx_2$ ve $z_2=y_1+jy_2$ iki hiperbolik sayıları için $+:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ toplama işlemi

$$z_1+z_2=\left(x_1+y_1\right)+j\left(x_2+y_2\right)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 2.2.4. $z\in\mathbb{H}$ ve $z=x+j\,y$ olmak üzere

$$z+e=e+z=z$$

denkleminin çözümünden elde edilen e hiperbolik sayısına toplama işlemine göre etkisiz eleman denir ve $0=0+j0$ şeklinde gösterilir [8].

Tanım 2.2.5. $z\in\mathbb{H}$ ve $z=x+j\,y$ olmak üzere

$$z+w=w+z=0$$

denkleminin çözümü olan w sayısına toplama işlemine göre ters eleman denir ve $w=-x+j(-y)$ şeklinde gösterilir [8].

Teorem 2.2.1. $(\mathbb{H},+)$ ikilisi bir abel grubudur [8].

Tanım 2.2.6. $z_1,\ z_2\in\mathbb{H}$ olmak üzere $z_1=x_1+jx_2$ ve $z_2=y_1+jy_2$ hiperbolik sayıları için $\cdot:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ çarpma işlemi

$$z_1\cdot z_2=(x_1+jy_1)\cdot(x_2+jy_2)=(x_1y_1+x_2y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 2.2.7. $z=x+jy$ hiperbolik sayısı için

$$z\cdot e=e\cdot z=z$$

denkleminin çözümü olan e sayısına çarpma işlemine göre etkisiz eleman denir ve $1=1+j0$ şeklinde gösterilir [8].

Tanım 2.2.8. $z=x+jy$ hiperbolik sayı olmak üzere

$$z\cdot w=w\cdot z=1$$

denkleminden elde edilen w hiperbolik sayısına, $(\cdot)$ işlemine göre ters eleman denir [8].

Tanım 2.2.9. Her $z=x+jy\in\mathbb{H}$ hiperbolik sayısı için $\bar{z}=x-jy\in\mathbb{H}$ hiperbolik sayısına z hiperbolik sayısının eşleniği denir [8].

Diğer taraftan $z_1 = x_1 + jy_1$ ve $z_2 = x_2 + jy_2$ iki hiperbolik sayı olmak üzere $\frac{z_1}{z_2}$ şeklindeki bölme işlemini yapmak için pay ve payda $\bar{z}_2$ hiperbolik sayısı ile çarpılır. Yani

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(x_1x_2 - y_1y_2\right)}{x_2^2 - y_2^2} + j\frac{\left(x_2y_1 - x_1y_2\right)}{x_2^2 - y_2^2}$$

olduğu görürülür. Burada son denklem göz önüne alındığında hiperbolik sayılarda $z_2 = 0 + j0$ sayısı ve $x_2 = \mp y_2$ olacak şekilde $z_2 = x_2 + j\,y_2$ hiperbolik sayısı için bölme işlemi yapılamaz.

Böylece herhangi bir z hiperbolik sayısının $|z|$ modülü

$$|z|^2 = |z\bar{z}| = \left|x^2 - y^2\right|$$

şeklinde tanımlanması dikkate alınırsa $z = x + jy$ hiperbolik sayısı için

$$|z| = \begin{cases} \mp\sqrt{x^2 - y^2} & ; \quad |x| \geq |y| \\ \mp\sqrt{y^2 - x^2} & ; \quad |x| \leq |y| \end{cases}$$

yazılabilir. Hiperbolik sayılar, sıfır bölen yani modülü $|z| = 0$ hiperbolik sayılara bölünemez. Bölme işlemini yapabilmek için $|x| > |y|$ ve $|y| > |x|$ durumlarını ayrı ayrı incelemek gerekir. O halde $|x| > |y|$ olmak üzere z hiperbolik sayısının modülü

$$r = |z| = \mp\sqrt{x^2 - y^2}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan x ve r aynı işaretli olacağından

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2-\left(\frac{y}{r}\right)^2=\frac{x^2-y^2}{r^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=1$$

ve φ sayısı için hiperbolik kosinüs, hiperbolik sinüs ve hiperbolik tanjant değerleri

$$\cosh\varphi=\frac{x}{r}=\frac{\operatorname{Re}z}{|z|},\quad \sinh\varphi=\frac{y}{r}=\frac{\operatorname{Im}z}{|z|},\quad \tanh\varphi=\frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}=\frac{y}{x}=\frac{\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan $|y|>|x|$ durumunda ise

$$r=|z|=\mp\sqrt{y^2-x^2}$$

eşitliği vardır ve burada y ve r reel sayılarının işaretleri aynıdır. Böylece

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2-\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2-x^2}{r^2}=\frac{y^2-x^2}{y^2-x^2}=1$$

bulunur. φ sayısı için hiperbolik açılar

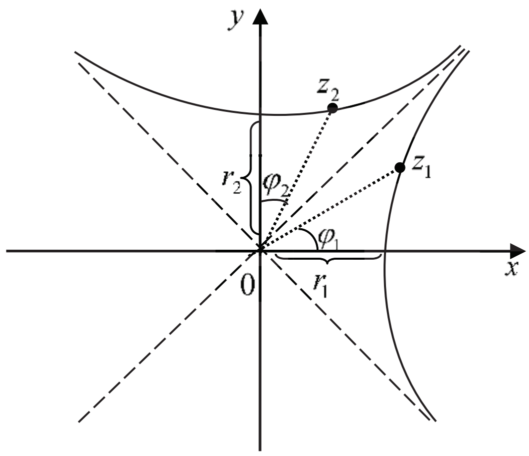
$$\sinh\varphi=\frac{x}{r}=\frac{\operatorname{Re}z}{|z|},\quad \cosh\varphi=\frac{y}{r}=\frac{\operatorname{Im}z}{|z|},\quad \tanh\varphi=\frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}=\frac{x}{y}=\frac{\operatorname{Re}z}{\operatorname{Im}z}$$

şeklinde elde edilir. φ sayısına z hiperbolik sayısının argümenti denir ve $\arg z$ ile gösterilir. Böylece z hiperbolik sayısı

a) $z=r(\cosh\varphi+j\sinh\varphi)$

b) $z=r(\sinh\varphi+j\cosh\varphi)$

denklemlerinden biriyle gösterilebilir. Burada a şıkkındaki sayılara birinci çeşit hiperbolik sayılar ve b şıkkındaki sayılara da ikinci çeşit hiperbolik sayılar denir (Şekil 2.2.).



Şekil 2.2. Hiperbolik sayıların koordinat düzleminde gösterimi

Birinci çeşit $z = x + jy$ hiperbolik sayısı için $\overline{z} = x - jy$ olup

$$|\overline{z}| = |z|, \quad \arg \overline{z} = -\arg z$$

formülleri elde edilir.

Ancak ikinci çeşit hiperbolik sayılar için bu formüller

$$|\overline{z}| = -|z|, \quad \arg \overline{z} = -\arg z$$

eşitlikleriyle ile elde edilir. Çünkü $z = x + j\,y = r(\sinh\varphi + j\cosh\varphi)$ ise $\overline{z} = x - jy = -r(\sinh(-\varphi) + j\cosh(-\varphi))$ eşitliği vardır.

Benzer şekilde birinci çeşit hiperbolik sayıların çarpımı için $z_1 = r_1\left(\cosh\varphi_1 + j\sinh\varphi_1\right)$ ve $z_2 = r_2\left(\cosh\varphi_2 + j\sinh\varphi_2\right)$ iki hiperbolik sayı olmak üzere,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cosh\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + j\sinh\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

şeklinde elde edilir. ikinci çeşit hiperbolik sayıların çarpımı için $z_1 = r_1\left(\sinh\varphi_1 + j\cosh\varphi_1\right)$ ve $z_2 = r_2\left(\sinh\varphi_2 + j\cosh\varphi_2\right)$ iki hiperbolik sayı olmak üzere

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cosh\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + j\sinh\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan farklı bölgelerdeki hiperbolik sayıların çarpımı için $z_1 = r_1\left(\cosh\varphi_1 + j\sinh\varphi_1\right)$ ve $z_2 = r_2\left(\sinh\varphi_2 + j\cosh\varphi_2\right)$ iki hiperbolik sayı olmak üzere

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\sinh\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + j\cosh\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.2. Her $z = x + jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısı $r = \mp\sqrt{x^2 - y^2}$, $\varphi = \arg jz$ ve $k \in \{1, -1, j, -j\}$ olmak üzere $z = kr\left(\cosh\varphi + j\sinh\varphi\right)$ formunda yazılabileceğinden $n \in \mathbb{Z}$ sayısı için

$$z^n = k^n r^n\left(\cosh\left(n\varphi\right) + j\sinh\left(n\varphi\right)\right)$$

dir [9].

Teorem 2.2.3. $n \in \mathbb{N}$ için $\cosh\left(n\varphi\right)$ ve $\sinh\left(n\varphi\right)$ ifadeleri,

$$\cosh(n\varphi) = \binom{n}{0}\cosh^{n}\varphi + \binom{n}{2}\cosh^{n-2}\varphi\sinh^{2}\varphi + \ldots$$
$$\sinh(n\varphi) = \binom{n}{1}\cosh^{n-1}\varphi\sinh^{1}\varphi + \binom{n}{3}\cosh^{n-3}\varphi\sinh^{3}\varphi + \ldots$$

şeklinde ifade edilir [9].

Tanım 2.2.10. $w \in \mathbb{H}$ ve $n \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $z^{n} = w$ eşitliğini sağlayan hiperbolik sayılarına w hiperbolik sayısının n-inci dereceden kökleri denir [9].

Teorem 2.2.4. Her $z = x + jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısı $r = \mp\sqrt{x^{2} - y^{2}}$, $\varphi = \ln\left|\dfrac{x+y}{r}\right|$ ve $k \in \{1, -1, j, -j\}$ olmak üzere $w = kr(\cosh\varphi + j\sinh\varphi)$ hiperbolik sayısının n-inci dereceden kökleri

$$z = \sqrt[n]{k}\sqrt[n]{r}\left(\cosh\frac{\varphi}{n} + j\sinh\frac{\varphi}{n}\right)$$

şeklindedir [9].

Teorem 2.2.5. $z = x + jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısının karekökü

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + jy} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{2} + j\,\frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}{2}$$

şeklinde hesaplanır [9].

Teorem 2.2.6. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $M = \left\{ A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \right\}$ formundaki matrislerin cümlesi $\mathbb{H}$ hiperbolik sayılar halkasına izomorftur [9].

2.3. Dual Sayılar

Bu bölümde dual sayılar halkası hakkında genel bilgiler verilecektir. Kompleks sayılardan yola çıkılarak sanal kısmı $i=\sqrt{-1}$ 'den farklı alınıp farklı tanımlar yapılmıştır. Bunlardan biri de $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde 17. yüzyılda Clifford birimi $\varepsilon^2=0$ ve $\varepsilon\neq 0$ olan yeni bir sayı sistemi tanımladı. Bu sayı sitemi dual sayı sistemi olarak isimlendirilmiştir ve $A=a+\varepsilon a^*$ $\left(a,a^*\in\mathbb{R}\right)$ şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.1. Her $x, x^*\in\mathbb{R}$ için $X=\left(x, x^*\right)$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterelim, o halde

$$\mathbb{D}=\left\{\left(x, x^*\right):\ x, x^*\in\mathbb{R}\right\}$$

cümlesi üzerinde tanımlanan;

1-) $\oplus:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{D}$; $X\oplus Y=\left(x, x^*\right)\oplus\left(y, y^*\right)=\left(x+y, x^*+y^*\right)$

2-) $\odot:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{D}$; $X\odot Y=\left(x, x^*\right)\odot\left(y, y^*\right)=\left(xy, xy^*+x^*y\right)$

3-) $X=\left(x, x^*\right)$ ve $Y=\left(y, y^*\right)\in\mathbb{D}$ için $x=y$, $x^*=y^*$

işlemleriyle birlikte $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar cümlesi ve her $\left(x, x^*\right)\in\mathbb{D}$ sıralı ikilisine ise bir dual sayı denir [10].

Teorem 2.3.1. $\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesi olmak üzere $\left(\mathbb{D},\oplus,\odot\right)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halka belirtir [10].

Teorem 2.3.2. $\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesi üzerinde tanımlanan $(\oplus)$ ve $(\odot)$ işlemleriyle birlikte bir cisim değildir [10].

Tanım 2.3.2. $(\mathbb{D},\oplus)$ grup yapısının birimi $0=(0,0)$ olup halkanın sıfırı ve $(\mathbb{D},\odot)$ yapısının birimi $1=(1,0)$ olup halkanın reel birimi olarak adlandırılır. $(0,1)=\varepsilon$ halkanın dual birimi olup $\varepsilon^2=0$ dır [10].

Tanım 2.3.3. Her $X=\left(x,x^*\right)\in\mathbb{D}$ dual sayısında "x" reel sayısına X dual sayısının reel kısmı, "x^*" reel sayısına da X dual sayısının dual kısmı denir ve sırasıyla $\operatorname{Re}X=x$ ve $\operatorname{Du}X=x^*$ şeklinde ifade edilir [10].

Teorem 2.3.3. Her $X=\left(x,x^*\right)\in\mathbb{D}$ dual sayısı $X=x+\varepsilon x^*$ şeklinde yazılabilir [10].

Tanım 2.3.4. X bir dual sayı olmak üzere $X=x+\varepsilon x^*$ dual sayısının mutlak değeri $|x|$ reel sayısına karşılık gelir ve

$$|X|=\left|x+\varepsilon x^*\right|=|x|$$

eşitliği ile ifade edilir. Fakat bu tanım $\mathbb{D}$ dual sayı cümlesinde bir metrik vermez [10].

Teorem 2.3.4. X bir dual sayı olmak üzere

$$|X|=\left|x+\varepsilon x^*\right|=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$$

dır [10].

Teorem 2.3.5. İki dual sayısının çarpımının mutlak değeri, mutlak değerlerinin çarpımına eşittir. Yani

$$\left|X_1\cdot X_2\right|=\left|\left(x_1+\varepsilon x_1^*\right)\cdot\left(x_2+\varepsilon x_2^*\right)\right| \quad\Rightarrow\quad \left|X_1\right|\left|X_2\right|=\left|x_1+\varepsilon x_1^*\right|\left|x_2+\varepsilon x_2^*\right|$$

dir [10].

Teorem 2.3.6. $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{D}$ dual sayıları için

$$|X_1 + X_2| \leq |X_1| + |X_2|$$

eşitsizliği sağlanır [10].

Tanım 2.3.5. Her $X = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısı için $\overline{X} = x - \varepsilon x^*$ dual sayısına X dual sayısının eşleniği denir [10].

Teorem 2.3.7. $\forall X \in \mathbb{D}$ olmak üzere

i. $\forall X \in \mathbb{D}$ için $\overline{X}$ 'nin dual eşleniği X , yani $\overline{\left(\overline{X}\right)} = X$,

ii. $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{X_1 + X_2} = \overline{X_1} + \overline{X_2}$,

iii. $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_1}\,\overline{X_2}$ ve $X_2 \neq \left(0, x^*\right)$ için $\overline{\left(\dfrac{X_1}{X_2}\right)} = \dfrac{\overline{X_1}}{\overline{X_2}}$,

iv. $\forall X \in \mathbb{D}$ için $X \cdot \overline{X} = |X|^2$,

v. $\forall X \in \mathbb{D}$ için $X + \overline{X} = 2\,\mathrm{Re}\,X$, $X - \overline{X} = 2\varepsilon \mathrm{Du} X$ ve $X = \overline{X}$ ise $X \in \mathbb{R}$

özellikleri sağlanır [10].

İspat:

Doğrudan doğruya hesaplamalar ile ispatı yapmak mümkündür.

Teorem 2.3.8. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonu $f : X \to \overline{X}$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde f bir izomorfizim (permütasyon) dir.

Dual sayılar hakkındaki birçok teorem dual sayıların eşleniklerinin kullanılması ile kolayca ispatlanabilir. Örneğin iki dual sayının bölümü eşlenik dual sayıların kullanılması ile elde edilebilir. $X_2 \neq (0, x_2^*)$ olmak üzere,

$$X_3 = \frac{X_1}{X_2} = \frac{(x_1+\varepsilon x_1^*)(x_2-\varepsilon x_2^*)}{(x_2+\varepsilon x_2^*)(x_2-\varepsilon x_2^*)} = \frac{x_1x_2+\varepsilon(x_1^*x_2-x_1x_2^*)}{x_2^2}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\frac{1}{X} = \frac{x-\varepsilon x^*}{(x+\varepsilon x^*)(x-\varepsilon x^*)} = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon x^*}{x^2}$$

bulunur. Bir diğer örnek olarak $|X_1X_2| = |X_1||X_2|$ verilebilir. Buradan

$$\begin{aligned} |X_1 \cdot X_2|^2 &= (X_1 \cdot X_2)(\overline{X_1 \cdot X_2}) \\ &= (X_1 \cdot X_2)(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2}) \\ &= (X_1\overline{X_1})(X_2\overline{X_2}) \\ &= |X_1|^2|X_2|^2 \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad |X_1 \cdot X_2| = |X_1| \cdot |X_2|$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.9. Her $X = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere $X = \begin{bmatrix} x & x^* \\ 0 & x \end{bmatrix}$ formundaki matrislerin cümlesi $\mathbb{M}$ ile $\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesi izomorftur [10].

İspat:

$$f: \mathbb{D} \to \mathbb{M}$$

fonksiyonu

$$f(x, x^*) = \begin{pmatrix} x & x^* \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

olarak tanımlandığına göre f nin bir izomorfizim olduğu gösterilecektir.

f lineerdir: $X = (x, x^*)$, $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(X+\lambda Y)=f(X)+\lambda f(Y)$$

dir. Böylece,

$$f(X+\lambda Y)=\begin{pmatrix} x+\lambda y & x^*+\lambda y^* \\ 0 & x+\lambda y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x & x^* \\ 0 & x \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} y & y^* \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca

$$f\left(\lambda X\cdot Y\right)=\lambda f\left(X\right)\cdot f\left(Y\right)$$

oduğundan

$$f(\lambda X+Y)=\lambda\begin{pmatrix} xy & xy^*+x^*y \\ 0 & xy \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x & x^* \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & y^* \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

elde edllir.

f birebirdir: $\forall X\neq Y\in\mathbb{D}$ için $f(X)\neq f(Y)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $X=(x,x^*)$, $Y=(y,y^*)\in\mathbb{D}$ için $X\neq Y$ ise $x\neq y$ ve $\mathrm{x}^*\neq y^*$ olacağından

$$\begin{pmatrix} x & x^* \\ 0 & x \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} y & y^* \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla $f(X)\neq f(Y)$ dir.

f örtendir: $\mathbb{M}$ deki her bir $f(X)$ matrisi $\mathbb{D}$ deki bir tek $X=(x,x^*)$ dual sayısının f ile elde edilmiş bir görüntüsüdür. O halde $\mathbb{D}$ ile $\mathbb{M}$ izomorftur.

$\mathbb{M}$ deki elemanların toplamı matris toplamı ve çarpımı da matris çarpımı olarak sırası ile $\mathbb{D}$ deki toplama ve çarpma işlemlerine karşılık tutulursa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3.10. $x,\, x^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(X) = \begin{pmatrix} x & x^* \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

formundaki matrislerin cümlesi $\mathbb{M}$ ise $(\mathbb{M},+,\cdot)$ birimli ve değişimli bir halkadır.

$(\mathbb{M},+,\cdot)$ ve $(\mathbb{D},\oplus,\odot)$ halkaları izomorf olduğundan literatürde dual sayılar halkası $(\mathbb{M},+,\cdot)$ olarak ve dual sayılar da $f(X) = \begin{pmatrix} x & x^* \\ 0 & x \end{pmatrix}$ formundaki matrisler olarak tanımlanır.

$(\mathbb{D},\oplus,\odot)$ halkasının toplama işlemine göre etkisiz elemanı olan $(0,0)$, $(\mathbb{M},+,\cdot)$ halkasının

$$f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrisine izomorftur. Benzer şekilde çarpma işleminin etkisiz elemanı $(1,0)$ 'a izomorf olan matris

$$f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\varepsilon = (0,1)$ 'ın izomorfu ise

$$f(0,1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

matrisidir.

Teorem 2.3.11. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$X^n=\left(x+\varepsilon x^*\right)^n=x^n+\varepsilon\, n\, x^{n-1}x^*$$

dır [10].

Teorem 2.3.12. $X=x+\varepsilon x^*\in\mathbb{D}$ dual sayısının $0=\left(0,0\right)$ daki Taylor açılımı

$$f\left(x+\varepsilon x^*\right)=f\left(0\right)+\frac{x}{1!}f'\left(0\right)+\frac{x^2}{2!}f''\left(0\right)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}\left(0\right)+...$$

dir [10].

Buradan herhangi bir dual sayı için $F\left(x\right)=f'\left(x\right)$ in $x=0$ anındaki Taylor açılımı göz önüne alınırsa

$$f\left(x+\varepsilon x^*\right)=f\left(x\right)+\varepsilon\, x^* f'\left(x\right)$$

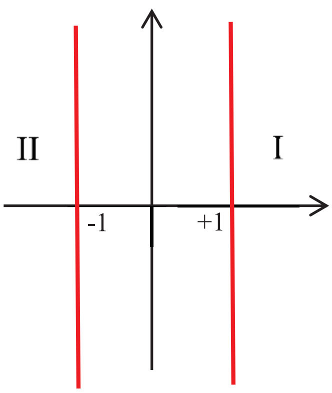
bağıntısı elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\varepsilon x^*\right)&=\cos x-\varepsilon x^*\sin x\\ \sin\left(x+\varepsilon x^*\right)&=\sin x+\varepsilon x^*\cos x\\ \tan\left(x+\varepsilon x^*\right)&=\tan x+\varepsilon x^*\left(1+\tan^2 x\right)\end{aligned}$$

bağıntıları yazılabilir.

$\{\mathbb{D}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ dual sayıların vektör uzayı, $\{G^2, [+], \mathbb{R}, +, \cdot, [\cdot]\}$ Galilean vektör uzayına izomorftur. Burada $[+]$ işlemi G^2 uzayında iki vektörün toplama işlemi, $[\cdot]$ işlemi ise bir skalerle G^2 uzayında bir vektörün çarpımı olan dış işlemidir $(\mathbb{D} \cong G^2)$ [11]. Galile geometrisi, Öklid dışı geometrilerdendir ve Galile hareketleri denildiğinde shear (makas) hareketleri akla gelmektedir. Bu konuda düzlemsel Galile hareketleri Yaglom tarafından geniş bir şekilde incelenmiştir, [11].

Galilean düzlemde birim çemberler $\|z\| = 1$ ifadesiyle karakterize edilir, yani $x = \pm 1$ dir. Ayrıca Şekil 2.3 ten de görüleceği gibi Galilean düzlem iki bölgeye ayrılır.



Şekil 2.3 Galilean birim çemberi

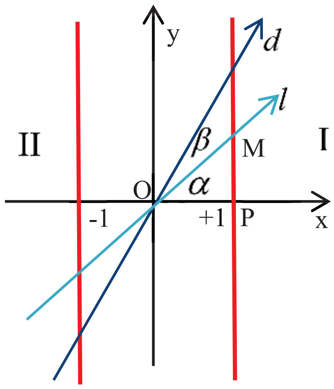
Galilean düzlemde l, OM doğrusunu ve α açısını göstersin.

Buradan,

$$\operatorname{cosg}(\alpha) = \frac{|OP|}{|OM|} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\operatorname{sing}(\alpha) = \frac{(MP)}{(OM)} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

bulunur.

l doğrusu ile aralarındaki açı β olacak şekilde d doğrusu verilsin. Bu durumda



Şekil 2.4. Galilean açı

$$\operatorname{cosg}(\alpha+\beta)=1 \qquad \text{ve} \qquad \operatorname{sing}(\alpha+\beta)=\alpha+\beta=\alpha 1+\beta 1$$

olduğundan

$$\operatorname{cosg}(\alpha+\beta)=\operatorname{cosg}(\alpha)\operatorname{cosg}(\beta)$$
$$\operatorname{sing}(\alpha+\beta)=\operatorname{sing}(\alpha)\operatorname{cosg}(\beta)+\operatorname{cosg}(\alpha)\operatorname{sing}(\beta)$$

yazılabilir [11].

BÖLÜM 3. DUAL-HİPERBOLİK SAYILAR

V. Majernik çok bileşenli sayı sistemi üzerinde çalışmıştır. Dört bileşenli sayı sisteminin üzerinde kompleks, dual ve ikili (binary) kuaterniyonlar üzerine cebirsel özellikleri incelemiştir. Bu çalışmalarında Euler ve de Moivre formüllerini vermiştir [12]. Daha sonra F. Messelmi dual-kompleks sayılar ve onların holomorfik fonksiyonları üzerine çalışmıştır [13]. Bu tezde yukarıdaki çalışmalar dikkate alınarak ilk önce dual-hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri verilecek. Daha sonra bu cebirsel özellikleri kullanılarak dual-hiperbolik sayılar için Euler ve de Moivre formülleri elde edilecektir. Herhangi bir dual-hiperbolik sayının kökünü bulup örnekler ile bulunanlar desteklenecektir.

3.1. Dual-Hiperbolik Sayıların Yapısı

Tanım 3.1.1. $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ iki hiperbolik sayı olmak üzere (z_1, z_2) sıralı ikilisinin hiperbolik birimi 1 ve dual birimi ε olmak üzere

$$\omega = z_1 + \varepsilon z_2$$

sayısına dual-hiperbolik sayı denir ve dual-hiperbolik sayılar cümlesi

$$\mathbb{DH} = \left\{ \omega = z_1 + \varepsilon z_2 \,\middle|\, z_1, z_2 \in \mathbb{H} \text{ ve } \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0 \right\}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $z_1 = x_1 + jx_2$, $z_2 = y_1 + jy_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\omega = x_1 + x_2 j + y_1 \varepsilon + y_2 j \varepsilon$$

şeklinde dual-hiperbolik sayısı yazılabilir [14].

Tanım 3.1.2. $\omega = x_1 + x_2 j + y_1 \varepsilon + y_2 j\varepsilon \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayısı için

$$\operatorname{Re}\omega = x_1$$

reel sayısı, ω dual-hiperbolik sayısının reel kısmı olarak adlandırılır [14].

Tanım 3.1.3. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2$ dual-hiperbolik sayısı için z_1 ve z_2 hiperbolik sayıları sırasıyla hiperbolik ve dual kısım olarak adlandırılır [14].

Tanım 3.1.4. $\omega_1 = z_1 + \varepsilon z_2$, $\omega_2 = z_3 + \varepsilon z_4 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar olmak üzere dual-hiperbolik sayılarda toplama ve çıkarma işlemi

$$\omega_1 \mp \omega_2 = (z_1 + \varepsilon z_2) \mp (z_3 + \varepsilon z_4) = (z_1 \mp z_3) + \varepsilon (z_2 \mp z_4)$$

eşitliği ile tanımlanır [14].

Tanım 3.1.5. $\omega_1 = z_1 + \varepsilon z_2$, $\omega_2 = z_3 + \varepsilon z_4 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar olmak üzere dual-hiperbolik sayılarda çarpma işlemi

$$\omega_1 \times \omega_2 = (z_1 + \varepsilon z_2) \times (z_3 + \varepsilon z_4) = z_1 z_3 + \varepsilon (z_1 z_4 + z_2 z_3)$$

şeklinde tanımlanır [14].

Tanım 3.1.6. $\omega_1 = z_1 + \varepsilon z_2$, $\omega_2 = z_3 + \varepsilon z_4 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar ve $\operatorname{Re}\omega_2 \neq 0$ olmak üzere dual-hiperbolik sayılarda bölme işlemi

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_1 + \varepsilon z_2}{z_3 + \varepsilon z_4}$$

$$\frac{(z_1+\varepsilon z_2)(z_3-\varepsilon z_4)}{(z_3+\varepsilon z_4)(z_3-\varepsilon z_4)}=\frac{z_1}{z_3}+\varepsilon\frac{z_2 z_3-z_1 z_4}{z_3^2}$$

şeklindedir [14].

3.2. Dual-Hiperbolik Sayıların Eşlenik ve Modül

Tanım 3.2.1. $\mathrm{A}=\left\{\varepsilon z_2 \mid z_2\in\mathbb{H},\ \varepsilon^2=0\right\}$ cümlesini $\mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayı cümlesinin sıfır bölen cümlesi olarak tanımlayalım. O halde $\omega=z_1+\varepsilon z_2\in\mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayısı için beş farklı eşlenik

$$\begin{aligned}
&\omega^{\dagger_1}=\overline{z_1}+\varepsilon\overline{z_2}, && (\text{hiperbolik eşlenik})\\
&\omega^{\dagger_2}=z_1-\varepsilon z_2, && (\text{dual eşlenik})\\
&\omega^{\dagger_3}=\overline{z_1}-\varepsilon\overline{z_2}, && (\text{çift eşlenik})\\
&\omega^{\dagger_4}=\overline{z_1}\left(1-\varepsilon\frac{z_2}{z_1}\right)\quad(\omega\in\mathbb{DH}-\mathrm{A}), && (\text{dual-hiperbolik eşlenik})\\
&\omega^{\dagger_5}=z_2-\varepsilon z_1 && (\text{anti-dual eşlenik})
\end{aligned}$$

şeklinde verilir ve buradaki "$-$" sembolü hiperbolik eşleniği temsil eder [14].

Tanım 3.2.2 $\omega=z_1+\varepsilon z_2\in\mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayısını göz önüne alalım. O halde ω dual-hiperbolik saysının modülü $|\omega|_{\dagger_i}$ $(1\le i\le 5)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
|\omega|^2_{\dagger_1}&=\omega\times\omega^{\dagger_1}=|z_1|^2+2\varepsilon\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)\in\mathbb{D},\\
|\omega|^2_{\dagger_2}&=\omega\times\omega^{\dagger_2}=z_1^2\in\mathbb{H},\\
|\omega|^2_{\dagger_3}&=\omega\times\omega^{\dagger_3}=|z_1|^2-2j\varepsilon\,\mathrm{Im}\left(z_1\overline{z_2}\right)\in\mathbb{DH},\\
|\omega|^2_{\dagger_4}&=\omega\times\omega^{\dagger_4}=|z_1|^2\in\mathbb{R}\quad(\omega\in\mathbb{DH}-\mathrm{A}),\\
|\omega|^2_{\dagger_5}&=\omega\times\omega^{\dagger_5}=z_1z_2+\varepsilon\left(z_2^2-z_1^2\right)\in\mathbb{DH},
\end{aligned}$$

beş farklı modül tanımlanır [14].

Teorem 3.2.1. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayısı için

i. $\omega + \omega^{\dagger_1} = 2\operatorname{Re}(z_1) + \varepsilon 2\operatorname{Re}(z_2) \in \mathbb{D}$,

ii. $\omega + \omega^{\dagger_2} = 2(z_1) \in \mathbb{H}$,

iii. $\omega + \omega^{\dagger_3} = 2\operatorname{Re}(z_1) + \varepsilon j 2\operatorname{Im}(z_2)$,

iv. $\omega + \omega^{\dagger_4} = \left(z_1 + \overline{z_1}\right) + \varepsilon\left(z_2 - \dfrac{z_2\overline{z_1}}{z_1}\right)(z_1 \neq 0)$,

v. $\omega + \omega^{\dagger_5} = (z_1 + z_2) + \varepsilon(z_2 - z_1)$

eşitlikleri sağlanır [14].

Teorem 3.2.2. $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar olmak üzere

i. $\left(\omega^{\dagger_i}\right)^{\dagger_i} = \omega$, $\left(i = 1,...,4 \quad \text{ve} \quad \omega^{\dagger_4} \text{ için } z_1 \neq 0\right)$

ii. $\left(\omega^{\dagger_5}\right)^{\dagger_5} = -\omega$,

iii. $(\omega_1 + \omega_2)^{\dagger_i} = \omega_1^{\dagger_i} + \omega_2^{\dagger_i}$, $(i = 1,...,5)$

iv. $(\omega_1\omega_2)^{\dagger_i} = \omega_1^{\dagger_i}\omega_2^{\dagger_i}$, $\left(i = 1,...,4 \quad \text{ve} \quad \omega^{\dagger_4} \text{ için } z_1 \neq 0\right)$

v. $\overline{\left(\dfrac{1}{\omega}\right)}^{\dagger_i} = \dfrac{1}{\omega^{\dagger_i}}$, $(z_1 \neq 0)$, $(i = 1,...,4)$

eşitlikleri sağlanır [14].

3.3. Dual-Hiperbolik Sayıların Üstel Gösterimi

Tanım 3.3.1. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2$ dual–hiperbolik sayısını alalım, dual-hiperbolik sayılar için kuvvet alma işlemi

$$\omega^n = \left(z_1 + \varepsilon z_2\right)^n = \binom{n}{0} z_1^{\,n} + \binom{n}{1} z_1^{\,n-1}\left(\varepsilon z_2\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\varepsilon z_2\right)^n$$

$$= z_1^{\,n} + \varepsilon n z_1^{\,n-1} z_2 \qquad \left(\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \ldots = 0\right)$$

şeklinde yazılır.

Diğer taraftan tüm $z_1 = x_1 + j\,y_1 \in \mathbb{H}$ için tanımlanan e^{z_1} üstel fonksiyonu, $\mathbb{DH}$ cebirine $e^{\omega} = e^{z_1 + \varepsilon z_2} = e^{z_1} + \varepsilon e^{z_1} z_2 = e^{z_1}\left(1 + \varepsilon z_2\right)$ şeklinde genişletilebilir. Buradan e^{ω} üstel fonksiyonunun $\dfrac{d^n e^{\omega}}{dz_1} = e^{\omega}$ olduğu görülür. Böylece herhangi bir $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}$ dual-hiperbolik sayısı için

$$\omega = z_1\, e^{\frac{z_2}{z_1}\varepsilon}$$

yazılabilir. Burada $|x_1| > |y_1|$ ve $r = |z| = \mp\sqrt{x_1^{\,2} - y_1^{\,2}}$ için $z_1 = r\left(\cosh\varphi + j\sinh\varphi\right)$, $|y_1| > |x_1|$ ve $r = |z| = \mp\sqrt{y_1^{\,2} - x_1^{\,2}}$ için $z_1 = r\left(\sinh\varphi + j\cosh\varphi\right)$ şekildedir.

Tanım 3.3.2. $\omega = z_1 + z_2\varepsilon$ dual-hiperbolik sayısının üstel gösterimi $\omega = z_1\, e^{\varepsilon\frac{z_2}{z_1}}$ olmak üzere buradaki $\dfrac{z_2}{z_1}$ dual hiperbolik açısına dual hiperbolik sayısının argümenti denir ve $\arg\omega = \dfrac{z_2}{z_1} = \varphi$ olarak gösterilir.

3.4. Dual-Hiperbolik Sayılar için Euler ve De-Moivre Formülleri

Teorem 3.4.1. Herhangi $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}$ dual-hiperbolik sayısı ve φ açısı ω dual-hiperbolik sayısının esas argümenti olmak üzere

$$\begin{aligned} \omega &= z_1 e^{\varepsilon\varphi} \\ &= z_1\left(\operatorname{cosg}(\varphi) + \varepsilon \operatorname{sing}(\varphi)\right) = \begin{cases} r\left(\cosh\varphi + j\sinh\varphi\right)\left(\operatorname{cosg}(\varphi) + \varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)\right), & |x_1| > |y_1| \text{ ise} \\ r\left(\sinh\varphi + j\cosh\varphi\right)\left(\operatorname{cosg}(\varphi) + \varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)\right), & |y_1| > |x_1| \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

dir.

İspat. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}$ dual–hiperbolik sayısının üstel gösterimi $\omega = z_1 e^{\varepsilon \frac{z_2}{z_1}}$ olduğunu ve buradaki $\frac{z_2}{z_1}$ dual-hiperbolik açısının $\arg\omega = \frac{z_2}{z_1} = \varphi$ esas argümentine karşılık geldiğinden dolayı

$$\omega = z_1 e^{\varepsilon\varphi} = z_1\left(1 + \varepsilon\varphi + \frac{(\varepsilon\varphi)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon\varphi)^3}{3!} + \ldots\right)$$

açılımı yapılabilir. Diğer taraftan Galilean açı tanımları göz önüne alınıra $\operatorname{cosg}(\varphi) = 1$ ve $\operatorname{sing}(\varphi) = \varphi$ olduğundan

$$\begin{aligned} \omega = z_1 e^{\varepsilon\varphi} &= z_1\left(1 + \varepsilon\varphi\right) \\ &= z_1\left(\operatorname{cosg}(\varphi) + \varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Son olarak $|x_1| > |y_1|$ veya $|y_1| > |x_1|$ durumları için ayrı ayrı $z_1 = x_1 + j\,y_1 \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısının değerleri yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}$ dual-hiperbolik sayı ve $\arg\omega = \frac{z_2}{z_1} = \varphi$ olmak üzere

$$\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} = e^{\varepsilon(-\varphi)}$$

dir.

İspat. $e^{\varepsilon\varphi}$ ifadesi için Euler formülüne göre açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} &= \frac{1}{\left(1+\varepsilon\varphi+\frac{(\varepsilon\varphi)^2}{2!}+\frac{(\varepsilon\varphi)^3}{3!}+\ldots\right)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{cosg}(\varphi)+\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)}\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} &= \frac{1}{\operatorname{cosg}(\varphi)+\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)}\frac{\left(\operatorname{cosg}(\varphi)-\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)\right)}{\left(\operatorname{cosg}(\varphi)-\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)\right)} \\ &= \frac{\operatorname{cosg}(\varphi)-\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)}{\operatorname{cosg}^2(\varphi)}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\operatorname{cosg}(\varphi)=1$ eşitliğinden

$$\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} = \operatorname{cosg}(\varphi)-\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} &= \operatorname{cosg}(\varphi)-\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi) \\ &= \operatorname{cosg}(-\varphi)+\varepsilon\operatorname{sing}(-\varphi) = e^{\varepsilon(-\varphi)}\end{aligned}$$

yazılabilir.

Teorem 3.4.3. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}$ dual-hiperbolik sayısı

$$\omega = z_1 e^{\varepsilon\varphi} = z_1\left(\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(\varphi)\right)$$

formunda yazılabileceğinden $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\omega^n = \left(z_1 e^{\varepsilon\varphi}\right)^n = \left(z_1(\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(\varphi)\right)^n = z_1^{\,n}\left(\mathrm{cosg}(n\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(n\varphi)\right)$$

dir.

İspat. Öncelikli olarak $n \in \mathbb{N}$ için De-Moivre formülünün doğru olduğunu gösterelim. Bunun için Galelian trigonometrik özdeşlikler göz önüne alınırsa, $\omega = z_1 e^{\varepsilon\varphi} \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}$ dual-hiperbolik sayısı $n = 2$ için

$$\begin{aligned}
\left(z_1 e^{\varepsilon\varphi}\right)^2 &= z_1\left(\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(\varphi)\right) z_1\left(\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(\varphi)\right) \\
&= z_1^{\,2}\left(\mathrm{cos}^2\mathrm{g}(\varphi) + \varepsilon\left(\mathrm{cosg}(\varphi)\mathrm{sing}(\varphi) + \mathrm{sing}(\varphi)\mathrm{cosg}(\varphi)\right)\right) \\
&= z_1^{\,2}\left(\mathrm{cosg}(2\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(2\varphi)\right)
\end{aligned}$$

dir. $n = k$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani;

$$\left(z_1(\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(\varphi)\right)^k = z_1^{\,k}\left(\mathrm{cosg}(k\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(k\varphi)\right)$$

olsun. Şimdi $n = k + 1$ için

$$\begin{aligned}
\left(z_1(\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(\varphi)\right)^{k+1} &= z_1\left(\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(\varphi)\right)^k \left(z_1(\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(\varphi)\right) \\
&= z_1^{\,k}\left(\mathrm{cosg}(k\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(k\varphi)\right) z_1\left(\mathrm{cosg}(k\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}(k\varphi)\right) \\
&= z_1^{\,k}\left(\mathrm{cosg}(k\varphi)\mathrm{cosg}(\varphi) + \varepsilon\left(\mathrm{cosg}(k\varphi)\mathrm{sing}(\varphi) + \mathrm{sing}(k\varphi)\mathrm{cosg}(\varphi)\right)\right) \\
&= z_1^{\,k+1}\left(\mathrm{cosg}((k+1)\varphi) + \varepsilon \mathrm{sing}((k+1)\varphi)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|x_1| > |y_1|$ ve $r = |z_1| = \mp\sqrt{x_1^{\,2} - y_1^{\,2}}$ için $z_1^k = r^k\left(\cosh\left(k\varphi\right) + j\sinh\left(k\varphi\right)\right)$, $|y_1| > |x_1|$ ve $r = |z_1| = \mp\sqrt{y_1^{\,2} - x_1^{\,2}}$ için

$z_1^k = r^k\left(\sinh\left(k\varphi\right) + j\cosh\left(k\varphi\right)\right)$ şekildedir. Diğer taraftan $\omega = z_1 e^{\varepsilon\varphi} \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}$ dual-hiperbolik sayısı için $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\omega^{-n} &= z_1^{-n}\left(\cos g(n\varphi) - \varepsilon \sin g(n\varphi)\right)\\ &= z_1^{-n}\left(\cos g(-n\varphi) + \varepsilon \sin g(-n\varphi)\right)\end{aligned}$$

yazılabileceğinden her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\omega^n = \left(z_1 e^{\varepsilon\varphi}\right)^n = \left(z_1(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi))\right)^n = z_1^{\,n}\left(\cos g(n\varphi) + \varepsilon \sin g(n\varphi)\right)$$

olduğu görülür.

Örnek 3.4.1. $\omega = 1 + j + 2\varepsilon + 2\varepsilon j$ dual-hiperbolik sayısı için ω dual-hiperbolik sayısının dördüncü kuvvetini $\left(\omega^4\right)$ göstermeye çalışalım. Burada ω dual-hiperbolik sayısını

$$\omega = z_1 + \varepsilon z_2$$

şeklinde yazılırsa $z_1 = 1 + j$ ve $z_2 = 2 + 2j$ hiperbolik sayıları olur. w dual-hiperbolik sayısının argümenti $\frac{z_2}{z_1} = 2\varphi$ olarak alınır ω dual-hiperbolik sayısının kutupsal formu

$$\omega = z_1\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$$

olarak yazılabilir. Buradan Teorem 3.4.3. gereğince

$$\omega^4 = z_1^{\,4}\left(\cos g(4\varphi) + \varepsilon \sin g(4\varphi)\right)$$

olur. Burada Galilean trigonometrik fonksiyonların özellikleri kullanılırsa

$$\omega^4 = (1+j)^4 (1+\varepsilon 8)$$

$$= (8+8j)(1+\varepsilon 4) = (8+8j) + \varepsilon(32+32j)$$

bulunur.

Örnek 3.4.2. $\omega = 1+j+\varepsilon+3\varepsilon j$ dual-hiperbolik sayısı için ω^2 ve ω^{10} değerlerini bulalım. $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ ve $z_1 = 1+j, z_2 = 1+3j$ alınsın. $\omega = z_1 + z_2\varepsilon$ şeklinde yazılan dual-hiperbolik sayı için $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+3j}{1+j} = \varphi$ argümenti alınır. Doyısıyla ω dual-hiperbolik sayısının kutupsal formu $\omega = z_1(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi))$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}\omega^2 &= z_1^{\,2}(\mathrm{cosg}(2\varphi) + \varepsilon\mathrm{sing}(2\varphi)) \\ &= (1+j)^2\left(1+\varepsilon\frac{2(1+3j)}{(1+j)}\right) \\ &= 2+2j\end{aligned}$$

ve

$$\omega^{10} = z_1^{\,10}(\mathrm{cosg}(10\varphi) + \varepsilon\mathrm{sing}(10\varphi))$$

$$= (1+j)^{10}\left(1+\varepsilon 10\frac{(1+3j)}{(1+j)}\right)$$

$$= 512+512j$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4.8. $\omega = z_1 + z_2\varepsilon$ bir dual-hiperbolik sayı olmak üzere, ω dual-hiperbolik sayısının $n.$ dereceden kökü

$$\sqrt[n]{\omega}=\sqrt[n]{z_1}\left(\operatorname{cosg}\left(\frac{\varphi}{n}\right)+\varepsilon\operatorname{sing}\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

şeklindedir.

İspat. $\omega=z_1+z_2\varepsilon$ dual-hiperbolik sayısının kutupsal gösterimi $\omega=z_1\left(\operatorname{cosg}(\varphi)+\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi)\right)$ şeklindedir. Burada

$$\omega^n=\left(z_1(\operatorname{cosg}(\varphi)+\varepsilon\operatorname{sing}(\varphi))\right)^n=z_1{}^n\left(\operatorname{cosg}(n\varphi)+\varepsilon\operatorname{sing}(n\varphi)\right)$$

olduğunu Teorem 3.4.3. te gösterdik. Dolayısıyla

$$\sqrt[n]{\omega}=\omega^{\frac{1}{n}}=z_1{}^{\frac{1}{n}}\left(\operatorname{cosg}\left(\frac{1}{n}\varphi\right)+\varepsilon\operatorname{sing}\left(\frac{1}{n}\varphi\right)\right)=\sqrt[n]{z_1}\left(\operatorname{cosg}\left(\frac{\varphi}{n}\right)+\varepsilon\operatorname{sing}\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

eşitliği gösterilmiş olur.

3.5. Dual-Hiperbolik Sayıların Logaritma Fonksiyonu ve Matris Gösterimi

Tanım 3.5.1. Her $\omega=z_1+\varepsilon z_2=z_1e^{\varepsilon\frac{z_2}{z_1}}$ dual-hiperbolik sayısının logaritma fonksiyonu

$$\begin{aligned}\ln\omega&=\ln\left(z_1e^{\varepsilon\frac{z_2}{z_1}}\right)=\left(\ln z_1+\ln e^{\varepsilon\frac{z_2}{z_1}}\right)\\&=\ln z_1+\varepsilon\frac{z_2}{z_1}=\ln z_1+\varepsilon\left(\arg\omega\right)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.5.2 x_1,x_2,x_3 ve x_4 reel sayılar olmak üzere $\omega=x_1+x_2j+x_3\varepsilon+x_4\varepsilon j$ dual-hiperbolik sayısı olsun. Her $r\in\mathbb{DH}$ için sol lineer dönüşüm

$$L_\omega : \mathbb{DH} \to \mathbb{DH}$$
$$r \to L_\omega(r) = r\omega$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüm bire bir ve örtendir. $\mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar kümesinin $\{1, j, \varepsilon, \varepsilon j\}$ baz vektörleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}
L_\omega(1) &= 1(x_1 + x_2 j + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon j) = x_1 + x_2 j + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon j \\
L_\omega(j) &= j(x_1 + x_2 j + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon j) = x_1 j + x_2 + x_3\varepsilon j + x_4\varepsilon \\
L_\omega(\varepsilon) &= \varepsilon(x_1 + x_2 j + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon j) = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon j \\
L_\omega(\varepsilon j) &= \varepsilon j(x_1 + x_2 j + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon j) = x_1\varepsilon j + x_2\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tanımlanan L_ω dönüşümünün temel matris temsili,

$$L_\omega = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buradan

$$\det(L_\omega) = x_1 \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} - (x_2) \begin{vmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(L_\omega) &= (x_1^2 - x_2^2)^2 \\
&= |z_1|^2 \\
&= \omega \times \omega^{\dagger_4}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

bulunur.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yapılan bu tezde “Dual sayıların bileşenleri hiperbolik sayı olursa ne olur?” sorusu üzerine duruldu. Böylece yapılan araştırmalar sonucunda dual-hiperbolik sayılar tanımlandı ve cebirsel yapısıyla ilgili teoremler verildi. Daha sonra bilinen De-Moivre ve Euler formülleri açıklanarak dual-hiperbolik sayılardaki karşılıkları araştırıldı.

Bu tezde yapılan dual-hiperbolik sayılar sistemi sayesinde bilinen teoremler daha geniş sayı sistemlerine taşınmış oldu. Ayrıca yapmış olduğumuz çalışma genel nitelikte olup, bundan sonraki çalışmalara temel olacak niteliktedir.

KAYNAKLAR

[1] Mandic, D.P., Goh, V.S.L., Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters: Noncircularity, Widely Linear and Neural Models. John Wiley & Sons, 2009.

[2] Clifford, W.K., Preliminary Sketch of Biquaternions. Proceedings of the London Mathematical Society, 4(64), 381–395, 1873.

[3] Kotelnikov, A.P., Screw Calculus and Some of Its Applications to Geometryand Mechanics. Magister Dissertation, Kazan. Gos. Univ., Russian, 1895.

[4] Study, E., Geometrie der Dynamen. Verlag Teubner, Leipzig, 1903.

[5] Stakhov, A.P., Tkachenko, I.S., The Golden Shofar. Chaos Soliton. Fract., 26(3), 677-684, 2005.

[6] Harkin, A.A., Harkin, J.B., Geometry of generalized complex numbers. Mathematics Magazine, 77(2), 118-129, 2004.

[7] Yaglom, I.M., Complex Numbers in Geometry. Academic Press, 1968.

[8] Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P., Geometry of Minkowski Space-Time. Springer Briefs in Physics, 1-99, 2011.

[9] Çakır, H., Hiperbolik Sayılar ve Hiperbolik Sayı Matrislerinin Cebirsel ve Geometrik Uygulamaları. Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2017.

[10] Hacısalihoğlu, H.H., Hareket Geometri ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 1983.

[11] Yaglom, I. M., A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis. Springer-Verlag New York, 1979.

[12] Majernik, V., Multicomponent Number Systems. Acta Phys. Pol. A, 90(3) 491-498, 1996.

[13] Messelmi, F., Dual-Complex Numbers and Their Holomorphic Functions. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114178, 2015.

[14] Cihan A., Azak A.Z., Güngör M.A. Tosun M., A Study on Dual Hyperbolic Fibonacci and Lucas Numbers. An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 27(1), 34-48, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

Elma Kahramani, 19.10.1989 tarihinde Zagreb'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini Prizren'de tamamladı. 2009 yılında Priştine Üniversitesi Prizren Eğitim Fakültesi Matematik-Enformatik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2013 yılında birincilikle tamamladı. 2014 yılında Mamuşa Atatürk lisesinde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2017 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik anabilim dalı Geometri bilim dalında yüksek lisansa başladı. Halen Atatürk lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.