

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YOĞUNLUKLU ÖKLİD UZAYINDA PARALEL
WEİNGARTEN YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hande KORMALI

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT

Eylül 2020

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Hande KORMALI
08.09.2020



TEŞEKKÜR

Yoğunluklu Öklid uzayında paralel Weingarten yüzeyler adlı çalıőmamda lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca, değerli bilgi ve görüőleriyle beni yönlendiren, her türlü olanağı sağlayan, tez çalıőmamın her aőamasında incelikle çalıőan danıőmanım sayın Doç. Dr. Mahmut AKYİğİT'e teşekkür ederim

Çalıőmam esnasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Murat TOSUN'a, Prof. Dr. Soley ERSOY'a ve Dr. Öęr. Üyesi Hidayet Hüda KÖSAL'a teşekkür ederim.

Bugüne kadar hiçbir zaman benden desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1. E^3 de Eğriler	6
2.2. E^3 de Yüzeyley	10
2.2.1. E^3 de regle yüzeyley.....	14
2.2.2. E^3 de paralel yüzeyley.....	18
2.2.3. E^3 de Weingarten yüzeyley.....	23
2.2.4. E^3 de regle Weingarten yüzeyleylerin paralel yüzeyleyleri.....	25
BÖLÜM 3.	
YOĞUNLUKLU UZAYDA YÜZEYLEY	28
BÖLÜM 4.	
YOĞUNLUKLU UZAYDA REGLE WEİNGARTEN YÜZEYLEY.....	33

4.1. e^z Yoğunluklu Uzayda Regle Weingarten Yüzeyler.....	33
4.2. e^z Yoğunluklu Uzayda Paralel Regle Weingarten Yüzeyler.....	41

BÖLÜM 5.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER	57
----------------------------	----

KAYNAKLAR	58
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ	60
----------------	----

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{R}	: Reel sayılar cümlesi
\mathbb{R}^3	: 3– boyutlu Reel uzay
E^3	: 3– boyutlu Öklid uzay
E, F, G	: Birinci temel formun katsayıları
L, M, N	: İkinci temel formun katsayıları
c	: Striksiyon eğrisi
e	: Küresel eğri
e^ϕ	: Pozitif yoğunluk fonksiyonu
$\varphi(u, v)$: Regle yüzey
$\varphi^r(u, v)$: $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin paralel yüzeyi
κ	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin burulması
k_g	: Geodezik eğrilik
k_n	: Normal eğrilik
K_ϕ	: Yoğunluklu yüzeyin Gauss ϕ – eğriliği
H_ϕ	: Yoğunluklu yüzeyin ortalama ϕ – eğriliği
K_ϕ^r	: Yoğunluklu paralel yüzeyin Gauss ϕ – eğriliği
H_ϕ^r	: Yoğunluklu paralel yüzeyin ortalama ϕ – eğriliği

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. $\varphi(u, v)$ açılmaz regle yüzeyin grafiği.....	38
---	----

ÖZET

Anahtar kelimeler: Paralel Yüzey, Yoğunluklu Uzay, Weingarten Yüzey, Regle Yüzey

Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Giriş kısmı yer almaktadır. İkinci bölümde ise 3–boyutlu Öklid uzayında eğriler teorisi, yüzeylerin karakteristik özellikleri ve yüzeylerle ilgili tanım ve teoremlere yer ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde e^ϕ yoğunluklu uzayda yüzeylerin karakteristik özelliklerine değinilmiş, yüzeyin Gauss ϕ –eğriliği ve ortalama ϕ –eğriliği hesaplanmıştır. Bununla ilgili Teorem ve sonuçlar ifade edilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Orijinal bölüm iki kısımda incelenmiştir. Dördüncü bölümün birinci kısmında e^z yoğunluklu uzayda bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyin Weingarten yüzey olma şartı incelenmiş, ilgili teoremler ve sonuçlar gösterilmiştir. Dördüncü bölümün ikinci kısmında ise e^z yoğunluklu uzaydaki bir $\varphi(u, v)$ regle Weingarten yüzeye ait paralel yüzey $\varphi^r(u, v)$ nin Gauss ve ortalama ϕ –eğrilikleri hesaplanarak $\varphi^r(u, v)$ nin de Weingarten olma durumu incelenmiş, teoremler, sonuçlar ve örnek verilmiştir.

Son bölümde ise tüm çalışmanın geniş bir özeti yapılmış ve bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin Weingarten olma şartı ile ilgili bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

PARALLEL WEINGARTEN SURFACE IN EUCLIDEAN SPACE WITH DENSITY

SUMMARY

Keywords: Parallel surface, Space with density, Weingarten surface, Ruled surface

This study consists of five sections. The first part contains literature review and fundamental facts. In the second section, the theory of curves in 3-dimensional Euclidean space, the characteristic features of surfaces and the definitions and theorems about surfaces are reviewed.

In the third section, the characteristic features of surfaces in e^ϕ density space were discussed while Gaussian ϕ -curvature and mean ϕ -curvature of the surface were calculated. Related theorems and results are expressed.

The fourth chapter generates the original part of this study and it is divided by two subsections. In the first subsection of this chapter, the condition for a $\varphi(u, v)$ ruled surface to be a Weingarten surface in density with e^z space has been studied, related theorems and results are shown. In the second subsection, the Gaussian and mean ϕ -curvature of the parallel surface $\varphi^r(u, v)$ of a ruled surface $\varphi(u, v)$ in a density with e^z space was calculated and the Weingarten condition of $\varphi^r(u, v)$ is examined, the related theorem, result and examples are given.

In the final section, an extensive summary of the entire work was made and suggestions for future research on the condition of the parallel surface of a ruled surface to be Weingarten surface have been made.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Eğri ve yüzey teorileri birçok gerçek hayat probleminin çözümünde kullanılmasından dolayı bilimsel metotlarla ele alınan ilk çalışma alanlarının başında yer almaktadır. Diferansiyel ve integral hesabının kullanılması ile diferansiyel geometri gelişim göstermiştir. 1736 yılında Euler düzlem eğrisini koordinatlar ile ifade etmiş aynı zamanda geodezikler ve yüzeyler teorisine büyük katkı sağlamıştır. Ardından Gaspard Monge uzay eğrileri teorisini ortaya atmış ve 1807 de ilk diferansiyel geometri kitabını kaleme alıp yayınlamıştır.

Diferansiyel geometrinin gelişiminde hatırı sayılır öncü matematikçilerden biri de Carl Friedrich Gauss (1777-1865)'dir. Gauss birinci temel formun önemini vurgulamış ve Egregium teoremi ile verilen Gauss eğriliğinin ifadesinin sadece birinci temel formun katsayıları ve onların türevleri ile yapılabileceğini göstermiştir.

Yüzey teorisi, matematik başta olmak üzere fizik, mühendislik, mimari gibi birçok bilim alanında geniş bir yere sahiptir. Mimariyi, matematik ile ilişkilendiren esas nokta oran ve simetridir. Mimaride geometri sadece antik Yunanda kullanılmamıştır. Eski Mısır, Hindistan ve İslam dünyasında, piramitler, tapınaklar, camiler, saraylar ve türbeler dâhil binalar dini nedenlerle belirli oranlarda düzenlenmiştir. İslam mimarisinde, hem iç hem de dış cepheleri süslemek için geometrik şekiller ve geometrik döşeme desenleri kullanılmıştır. Yüzey sınıflarından, açılabilir yüzeyler gerilmeden ve yırtılmadan düzleme serilebilen yüzeylerdir ve bu özelliğinden ötürü mühendislikte, sheet-metal ve plate-metal temelli endüstrilerde, deniz araçlarının yüzeyinde, uçak yüzeylerinde ve mimari yapılarda yaygın olarak kullanılır, (Boersma ve Molenaar, 1995), (Pegna ve Wolter, 1992). Yüzeyler içinde önemli kullanım alanına sahip regle yüzeyler ilk defa G. Monge tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaya ait detaylı bilgiye (Carmo, 1976) kitabından sahip olunabilmektedir. Bir regle yüzey

E^3 de bir doğrunun dayanak eğrisi boyunca yaptığı sürekli hareket sonucu meydana gelir ve $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ parametrik denklemi ile ifade edilir. Burada α dayanak eğrisi, X ise doğrultman vektörüdür. Regle yüzeyler, açılabilir ve açılmaz regle yüzeyler olarak iki farklı sınıfta incelenmiştir. Açılabilir regle yüzeylerin yoğun ve açık alt kümelerinin elemanlarını silindir, koni ve tanjant yüzeyleri olarak ifade edilir. Tüm açılabilir yüzeyler regle yüzey olmasına rağmen, tüm regle yüzeyler açılabilir değildir, (Ushakow, 1999). Regle yüzeyler, bilgisayar destekli imalat (CAM), bilgisayar destekli geometrik tasarım (CAGD), geometrik modelleme ve kinematik gibi birçok bilim alanında çok kullanılmaktadır, (Şentürk ve Yüce, 2019).

Regle yüzeyleri birçok mimari yapıda da görmek mümkündür. On dokuzuncu yüzyılda Rusya'da Vladimir Shukhov ve Barselona'da Antoni Gaudi hiperboloid yapıların kullanımına öncülük etmektedir. Gaudi'nin Sagrada Familia bazilikasında hiperbolik paraboloidler, mozaikler, katener kemerleri, katenoidler, helikoidler ve regle yüzeyleri de görmek mümkündür. Bir yüzeyin iç metriği Gauss eğriliğini belirler, yüzeydeki tüm uzunluklar ve açılar üretimde değişmez kalır. Bu nedenle, açılabilir yüzeyler mühendislik, mimari ve tasarımda sıklıkla kullanılır.

Diğer taraftan, Öklid uzayındaki birçok değişmez sonucun Minkowski uzayında da bir karşılığı vardır. Bu bağlamda regle yüzey teorisinin Minkowski uzayındaki kurulumu ve geliştirilmesi birçok matematikçinin uğraş alanı olmuştur. Dillen ve Kühnel, Minkowski uzayında regle Weingarten yüzeyleri incelemişlerdir, (Dillen ve Kühnel, 1999). Minkowski uzayında birinci temel formun determinantı pozitif tanımlı ise yüzey spacelike, birinci temel formun determinantı indefinit ise yüzey timelike olarak adlandırılır. Günümüzde de regle yüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Izumiya regle yüzeyleri beş sınıfa ayırır,

1. Açılabilir yüzeyler
2. Asli ve Binormal yüzeyler
3. Darboux açılabilir yüzeyler
4. Rektifyan açılabilir yüzeyler
5. Uzay eğrilerinin odak yüzeyleri, (Izumiya, 2005).

Yüzey teorisinde, matematikçilerin özel olarak ilgilendiği regle yüzeyler, minimal yüzeyler, paralel yüzeyler gibi bazı yüzeyler vardır. Bunların içerisinde paralel yüzeyler birçok çalışmaya konu olmuştur. Craig elipsoidin paralel yüzeyi ile ilgilenmiş, (Craig, 1883). Nizamoğlu ise paralel regle yüzeyleri birim dual küre üzerindeki bir parametreye bağlı dual eğriler olarak hesaplamıştır, (Nizamoğlu, 1986). (Park ve Kim, 1998) de 3–boyutlu Öklid uzayında açılmaz bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin regle yüzey olmadığı, ancak açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin açılabilir bir regle yüzey olduğunu göstermiştir.

İlk olarak J. Weingarten tarafından 1861 ve 1863 yılları arasında yapmış olduğu çalışmalarla karşımıza çıkan yüzeyler Weingarten yüzeyler olarak adlandırılır. Bu yüzeyler, Weingarten tarafından 1861’de, belirli bir dönel yüzeye izometrik tüm yüzeyleri bulma sorunu bağlamında tanımlanmıştır, (Fu ve Li, 2013). 1857 yılında doktora tezinin de bir bölümü olan bir yüzeyin eğrilik çizgileri hususundaki çalışmasından dolayı ödül almıştır. 1863’de w –yüzeyler diye geçen teorisini geliştiren Weingarten (Weingarten, 1863), bu tezinin 3–boyutlu Öklid uzayında bir yüzeyin Weingarten yüzey veya w –yüzey olmasını, yüzeye ait asli eğriliklerin ya da Gauss ve ortalama eğriliklerinin lineer bağımlı olması ile açıklamıştır. Lokal olarak Weingarten yüzeyler beş ana sınıfa ayrılır;

1. Dönel yüzeyler,
2. Asli eğriliklerinden biri sabit olan bir eğrinin kanal yüzleri,
3. Helikoidsel yüzeyler,
4. Sabit Gauss eğrilikli yüzeyler,
5. Sabit ortalama eğrilikli yüzeyler, (Kühnel ve Steller, 2005).

Weingarten ile başlayan bu çalışmalar (Beltrami, 1865), (Darboux, 1894) gibi isimlerin katkısı ile devam etmiştir. Bir eğrinin helisel hareketi sonucu oluşan yüzeye helikoid denir. Beltrami ve Dini, 3–boyutlu Öklid uzayında açılmaz regle yüzeyler cümlesine karşılık geldiğini ispatlamış, helikoidsel regle yüzeyler 1– parametrelili hareketi grubu altındaki, doğrunun yörüngesidir ve α dayanak eğrisi ile X doğrultman vektörü arasındaki ilişki $\langle X, X \rangle = \langle X', X' \rangle = 1$ ve $\langle \alpha', X' \rangle = 0$ koşulları

ile karakterize edilmiştir. Helikoidsel yüzey (regle olması şart değil) Weingarten yüzeydir, çünkü Gauss ve ortalama eğrilikleri yalnızca bir parametreye bağlıdır, (Beltrami, 1865; Dini, 1865). Bu çalışma Öklid uzayında Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntı ile Weingarten yüzeyleri sınıflandırmıştır. Kühnel, Weingarten yüzey olma şartına bağlı olarak yüzeyin yapı fonksiyonlarının sabit olması şeklindeki Weingarten yüzey olma şartını vererek Weingarten yüzey sınıflandırmasını bir adım öteye taşımıştır. Günümüz çalışmalarına da bakacak olursak Kalkan, 3–boyutlu Öklid uzayında lineer Weingarten yüzeyleri ve bunların özel halleri olan cyclic yüzeyleri incelemiştir, (Kalkan, 2010). Cyclic yüzeyler, çember parçalarının foliasyonu ile elde edilen yüzeylerdir. German ise 3–boyutlu Öklid uzayında Weingarten öteleme yüzeylerinin sınıflandırılmasını yapmıştır, (German, 2010).

Günümüzde yeni bir çalışma konusu olan yoğunluk fonksiyonu matematikçilerin ilgisini çekmiş ve konuya dair birçok çalışma bilim dünyasına sunulmuştur. Yoğunluk fonksiyonu bazı matematikçiler tarafından minimal yüzeyler için çalışılmıştır. Belarbi, yoğunluklu Öklid uzayındaki lineer minimal yüzeylerle ilgili eşitlikleri ifade etmiş ve bazı minimal grafiklerin çözümlerini karakterize etmiştir, (Belarbi, 2012). Hieu, e^z yoğunluklu uzayda regle minimal yüzeyleri sınıflandırarak silindirik ve silindirik olmayan regle minimal yüzey ailesini göstermiştir, (Hieu, 2009).

Diferansiyel geometri de yoğunluklu uzaylarda eğri ve uzay yapıları son zamanda sık çalışılan konular arasında yerini almaktadır, özellikle Morgan ve Corwin'in yoğunluklu uzaylarda çalışmaları mevcuttur, (Morgan, 2005), (Corwin ve ark., 2006). Bu çalışmalardan esinlenerek yoğunluklu farklı uzaylarda, farklı yüzeylerin yapıları incelenmeye başlanmıştır.

Bu çalışmada, e^z yoğunluklu 3–boyutlu Öklid uzayında $\varphi(u,v)$ regle yüzeyi tanımlanarak, Weingarten olma şartı incelenmiştir. $\varphi(u,v)$ regle yüzeyinin Weingarten olduğu ispat edilerek, bu regle yüzeyin Weingarten yüzey olmasına bağlı

olarak bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir. e^z yoğunluklu 3–boyutlu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle Weingarten yüzeye paralel olan yüzey $\varphi^r(u, v)$ olarak ifade edilmiş ardından regle Weingarten yüzeye paralel olan yüzeyin, Weingarten olma şartı incelenmiştir. Burada; e^z yoğunluklu 3–boyutlu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle Weingarten yüzeyinin açılabilir olma ve açılabilir olmama duruma göre regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeyi ile ilgili teorem, sonuç ve örnek verilmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, 3–boyutlu Öklid uzayında temel kavram ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. E^3 de Eğriler

Bu başlıkta diferansiyel geometride önemli bir yere sahip olan eğriler ile ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. Boştan farklı bir A cümlesi ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu var ise A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$(1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır, (Hacısalıhoğlu, 1993).}$$

Tanım 2.1.2. 3–boyutlu standart reel vektör uzayı \mathbb{R}^3 ile birleştirilmiş, A afin uzayını ele alalım. Bu \mathbb{R}^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanırsa A afin uzayına 3–boyutlu Öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir, (Hacısalıhoğlu, 1993).

Bir reel A afin uzayında tanımlanabilen bütün kavramlar, bir Öklid uzayında anlam kazanır. Çünkü bir V reel vektör uzayı ile birleşen A afin uzayındaki metrik, V uzayında seçilecek olan iç çarpımdan doğar.

Tanım 2.1.3. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$d: E^3 \times E^3 \rightarrow \square$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanmış d fonksiyonuna E^3 de uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^3$ noktaları arasındaki uzaklık, tanımlanan d fonksiyonuna E^3 de Öklid metriği denir, (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.4. $\forall x, y, z \in E^3$ için xyz açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \overline{xy}, \overline{yz} \rangle}{\|\overline{xy}\| \|\overline{yz}\|}$$

ile tanımlanan θ reel sayısıdır, (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.5. E^3 de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne, \square^3 de karşılık gelen $\{P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$ vektör üçlüsü \square^3 için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine E^3 ün bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir, (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.6. $f : E^3 \rightarrow \square$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon ve $v_p \in T_p(E^3)$ olsun.

Burada $v_p = PQ$ olmak üzere

$$v_p[f] = \frac{d}{dt} \left(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), P_2 + t(Q_2 - P_2), P_3 + t(Q_3 - P_3)) \right) \Big|_{t=0}$$

reel sayısına f fonksiyonunun v_p vektörü yönündeki türevi denir, (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.1.7. $I \subset \square$ bir açık aralık ve

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu halde $\alpha(I) \subset E^3$ alt cümlesine Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan bir eğri denir, (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.8. α , E^3 de bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise yani E^3 de her noktadaki hız vektörü sıfırdan farklı ise α eğrisine regüler eğri denir, (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.9. E^3 Öklid uzayında M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall t \in I$ için

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğri ve $t \in I$ yay parametresi olarak adlandırılır, (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.10. $I \subset \mathbb{R}$ de tanımlı E^3 Öklid uzayında bir α eğrisi verilsin. $a, b \in I$ iken

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına a dan b ye α eğrisinin yay-uzunluğu denir, (Carmo, 1976).

Tanım 2.1.11. 3–boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için $T(t) = \alpha'(t)$ vektörüne α eğrisinin birim teğet vektörü, T 'ye α eğrisi üzerinde bir vektör alanı ve bu vektör alanına aynı zamanda birim teğet vektör alanı denir.

$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ vektörüne α eğrisinin asli normal vektörü, N 'ye α eğrisi üzerinde

bir vektör alanı ve bu vektör alanına asli vektör alanı denir. $B(t) = T(t) \wedge N(t)$ vektörüne α eğrisinin binormal vektörü, B 'ye de α eğrisinin binormal vektör alanı denir, (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.1.12. α , $\kappa > 0$ eğriliğine sahip Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\{T, N, B\}$ vektör alanları α eğrisinin her noktasında ortonormal vektör alanıdır ve α eğrisi üzerinde Frenet çatı alanı olarak adlandırılır, (O'Neill, 1997).

Teorem 2.1.1. E^3 de α birim hızlı eğrisi $\kappa > 0$ eğriliğine ve τ torsiyonuna sahip olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

biçimindedir, (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.13. M , E^3 de bir yüzey ve bu yüzey üzerinde (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset E^3$$

birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatası $\{T, N, B\}$ ve $T(t) = \alpha'(t)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \kappa: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \kappa(t) = \|T'(t)\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği adı verilir, (Ru, 1999).

$$\begin{aligned} \tau: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \tau(t) = \langle N'(t), B(t) \rangle \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonuna da α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(t)$ sayısına da eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki burulması adı verilir, (Sabuncuoğlu, 2004).

2.2. E^3 de Yüzeyler

Bu başlıkta ilk olarak yüzeyler hakkında temel kavramlardan bahsedilecektir. Daha sonra çalışmamızın orijinal kısmını oluşturacak olan ve günlük yaşantımızda örneklerine rastladığımız regle yüzey kavramından bahsedilecek, bu yüzey yardımıyla oluşturulabilen paralel ve Weingarten yüzeyleri hakkında temel kavram ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.2.1. $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ koordinat komşuluğu $M \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\forall P \in M$ için M nin içinde görüntüsü P nin bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat

komşuluğu var ve $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ sürekli ise M ye bir yüzey denir, (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.2.2. M , E^3 de bir yüzey olsun. M nin bir P noktasından geçen bütün eğrilerin bu noktadaki teğetleri aynı düzlem içinde kalır. Bu düzleme M nin P noktasındaki teğet düzlemi denir, (Hacısalıhoğlu, 1994).

Teğet düzlemi, parametre eğrilerinin φ_u ve φ_v teğet vektörlerine paralel olduğundan

$$N_0 = \varphi_u \wedge \varphi_v$$

vektörü, M nin P noktasındaki teğet düzlemine diktir. Bu vektöre M nin P noktasındaki normal vektörü ve

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

vektörüne de birim normal vektörü denir, (Carmo, 1976).

Tanım 2.2.3. M , E^3 de bir yüzey ve N de M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı olmak üzere $\forall v_p \in T_p(M)$ için M nin bir P noktasında

$$S(v_p) = D_{v_p} N$$

eşitliği ile tanımlı $S_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna M yüzeyinin P noktasında N vektör alanına bağlı şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir, (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.2.4. E^3 de bir yüzey M ve bu yüzeyin şekil operatörü S olsun. M yüzeyinin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik değerlerine M

yüzeyinin bu noktasındaki asli eğrilikleri denir. Asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M yüzeyinin P noktasındaki asli eğrilik vektörleri veya asli eğrilik doğrultuları adı verilir, (Struik, 1988).

Tanım 2.2.5. E^3 Öklid uzayında bir M yüzeyi üzerinde, $1 \leq q \leq 3$ olmak üzere q . temel form

$$\begin{aligned} I^q : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \square) \\ (X, Y) &\rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \end{aligned}$$

olarak tanımlanır, (Hiks, 1974).

Tanım 2.2.6. M , E^3 de $\varphi = \varphi(u, v)$ parametrik ifadesi ile verilen bir yüzey olsun. M yüzeyi üzerindeki bir

$$\varphi(t) = \varphi(u(t), v(t))$$

eğrisinin yay uzunluğu parametresi t ise

$$I = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

yazılabilir. Bu ifadeye M yüzeyinin birinci temel formu denir ve I ile gösterilir. Burada birinci temel formun katsayıları E, F, G olmak üzere

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

dir. Eğer M nin birim normal vektörü N ise

$$L = \langle N, \varphi_{uu} \rangle, \quad M = \langle N, \varphi_{uv} \rangle, \quad N = \langle N, \varphi_{vv} \rangle$$

ifadesine M yüzeyinin ikinci temel formu denir ve II ile gösterilir. Burada ikinci temel formun katsayıları L, M, N olmak üzere, birinci temel formda olduğu gibi ikinci temel formda II ile gösterilir, (O'Neil, 1997).

E^3 Öklid uzayının bir M yüzeyine ait Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplamak için birden fazla farklı yöntem kullanılabilir. Aşağıda bunlarından bahsedilmiştir.

Tanım 2.2.7. E^3 Öklid uzayının bir M yüzey olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M yüzeyinin P noktasındaki Gauss eğriliği denir, (Gray, 1997).

Tanım 2.2.8. E^3 Öklid uzayında bir yüzey M olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = \frac{1}{2} \text{tr}(S(P)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Burada $H(P)$ değerine de M yüzeyinin P noktasındaki ortalama eğriliği denir, (Gray, 1997).

M yüzeyinin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 olmak üzere, K Gauss eğriliği ve H ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = k_1 k_2 \text{ ve } H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (2.1)$$

dir, (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.9. M , E^3 Öklid uzayında bir yüzey olsun. E, F, G ve L, M, N sırasıyla M yüzeyine bağlı birinci ve ikinci temel formun katsayıları iken bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \quad (2.2)$$

dir, (Sabuncuoğlu, 2004).

2.2.1. E^3 de regle yüzeyler

Tanım 2.2.10. E^3 Öklid uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferansiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha: I &\rightarrow E^3 \\ u &\rightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u)) \end{aligned}$$

olsun. Her $u \in I$ için $\alpha(u)$ noktasındaki T teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l: \mathbb{R} &\rightarrow E^3 \\ v &\rightarrow l(v) = (\alpha_i(u) + vX_i(u)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $X_i(u) \in \mathbb{R}$ skalerleri $\alpha(u)$ noktasındaki doğrultman vektörün bileşenleridir. l doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen

$$\begin{aligned} \varphi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\alpha_i(u) + vX_i(u)) \end{aligned}$$

regle yüzey elde edilir, (Gray, 1997).

Burada $\alpha(u)$ regle yüzeyin dayanak eğrisi, $X(u)$ doğrultman vektörüdür.

Tanım 2.2.11. Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyine ait komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir, (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.2.12. Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyine ait doğrultman dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken striksiyon noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin striksiyon eğrisi denir, (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.2.13. Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyine ait komşu iki doğrultman arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu doğrultman arasındaki açığa bölümüne regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir ve yüzeyin dralinin diferansiyel denklemi

$$\lambda = \frac{\det(T, X, X')}{\langle X', X' \rangle}$$

şeklinde ifade edilir, (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.2.14. E^3 Öklid uzayında bir regle yüzeye ait ana doğruların her birini dik olarak kesen bir eğri var ise bu eğriye regle yüzeyin bir ortogonal yörüngesi denir, (Hacısalihoglu, 1994).

Tanım 2.2.15. Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir, (Hacısalihoglu, 1994).

Teorem 2.2.1. Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyi açılabilir ancak ve ancak dağılma parametresi sıfırdır, (Hacısalihoglu, 1994).

Şimdi küresel Frenet çatısı yardımıyla oluşturulan regle yüzeyin yapısından bahsedelim;

$\varphi(u, v)$, E^3 de açılmayan bir regle yüzey olsun. $\varphi(u, v) = c(u) + ve(u)$ parametrizasyonu ile verilen $\varphi(u, v)$ yüzeyi, Öklid uzayında açılmayan regle yüzeyin standart denklemi olarak adlandırılır. Burada $\langle e(u), e(u) \rangle = 1$, $\langle e'(u), e'(u) \rangle = 1$ ve $c(u)$ doğrultmanı $\varphi(u, v)$ açılmayan regle yüzeyinin boğaz (striksiyon) eğrisidir. E^3 de bir küresel eğri $e(u)$ nun u parametresi yay uzunluğu parametresidir. Böylece $e(u)$ da bir vektör olarak alınabilir ve $e(u)$, $\varphi(u, v)$ nin küresel gösterge vektörü olarak isimlendirilir. $c(u)$, $\varphi(u, v)$ nin striksiyon eğrisi olduğu için $\langle c'(u), e'(u) \rangle = 0$ dır, (Yoon, 2016). Kısalık adına u parametresi buradan sonra yazılmayacaktır.

e küresel gösterge vektörünün küresel Frenet çatısı $\{e, t, g\}$ olmak üzere, $t = e'$ ve $g = e \times e'$ dir. Burada t , $\varphi(u, v)$ açılmayan regle yüzeyinin merkez normalidir, g ise $\varphi(u, v)$ açılmayan regle yüzeyinin asimptotik normalidir. $\{e, t, g\}$ küresel çatısı için türev vektörleri

$$\begin{aligned}
e' &= t \\
t' &= -e - Jg \\
g' &= Jt
\end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak ifade edilir. Burada $J = \langle e'', e' \times e \rangle$ küresel gösterge eğrisi e vektörünün geodezik eğriliğini belirtir. Öte yandan c striksiyon eğrisinin türevi,

$$c' = Fe + Qg \tag{2.4}$$

olup $F = \langle c', e \rangle$, $Q = \langle c', e \times e' \rangle$ dir. Burada Q, F, J fonksiyonları 3–boyutlu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ açılabilir regle yüzeyin yapı fonksiyonlarıdır. Aynı zamanda u parametresi $\varphi(u, v)$ ye ait c striksiyon eğrisinin yay uzunluğu parametresi olduğundan dolayı $F^2 + Q^2 = 1$ eşitliği vardır, (Yoon, 2016).

E^3 de $\varphi(u, v)$ açılabilir bir regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri, yapı fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde hesaplanır.

(2.3) ve (2.4) ile verilen denklemler göz önüne alınarak $\varphi(u, v)$ yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= F^2 + Q^2 + v^2 \\
F &= \langle c', e \rangle \\
G &= 1
\end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak ifade edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörü

$$N = \frac{1}{D}(c' \times e + ve' \times e) = \frac{1}{D}(Qt - vg) \tag{2.6}$$

dir. Burada $D = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{Q^2 + v^2}$ olarak alınmıştır. İkinci temel formun katsayıları L, M, N olmak üzere

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{D} (Q(F + QJ) - Q'v + Jv^2) \\ M &= \frac{Q}{D} \\ N &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

dir. Bu nedenle $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin sırasıyla Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği

$$K = -\frac{Q^2}{D^4} \quad (2.8)$$

$$H = \frac{1}{2D^2} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) \quad (2.9)$$

dir, (Yoon, 2016).

Açılabilir yüzeyler, sıfır Gauss eğriliğine sahip pürüzsüz yüzeylerdir. Yukarıda ele alınan $\varphi(u, v)$ regle yüzeyi açılabilir bir yüzey olduğundan $K \neq 0$ olup Q fonksiyonu her yerde sıfırdan farklıdır, (Yoon, 2016).

2.2.2. E^3 de paralel yüzeyler

Tanım 2.2.16. M_1 ve M_2 , E^3 de iki yüzey ve M_1 in birim normal vektör alanı

$$N_1 = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olmak üzere eğer bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve her $P \in M_1$ noktası için

$$f(P) = (P_1 + ra_1(P), P_2 + ra_2(P), P_3 + ra_3(P))$$

olacak biçimde bir

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

fonksiyonu varsa M_2 yüzeyine M_1 yüzeyinin paralel yüzeyi denir. Burada E^3 yüzeylerinin cümlesinde paralel yüzey olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır, (Hacısalıhoğlu, 1994).

Bundan sonra E^3 ün M yüzeyine paralel olan yüzey M^r ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.17. E^3 de M yüzeyine paralel M^r yüzeyi verilsin. E^3 Öklid uzayının $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemine göre, $X \in \chi(M)$, $\bar{X} \in \chi(M^r)$ vektör alanları $\forall P \in M$ için $b_i(P) = \bar{b}_i(f(P))$, $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^3 \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 1) f_*(X) &= \bar{X} + r\overline{S(X)} \\ 2) S^r(f_*(X)) &= \overline{S(X)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

eşitlikleri geçerlidir, (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.2.18. $f : M \rightarrow M^r$ ve M yüzeyinin bir paralel yüzeyi M^r olsun. Bu durumda

- 1) f üçüncü temel form olma özelliğini korur.

- 2) f umbilik nokta olma özelliğini korur.
- 3) f asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.
- 4) I, II, III, M yüzeyinin temel formları olmak üzere $\forall P \in M$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle|_{f(P)} = I(X_p, Y_p) + 2rII(X_p, Y_p) + r^2III(X_p, Y_p)$$

ifadeleri sağlanır, (Hacısalihoglu, 1994).

Teorem 2.4.2. $M \subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M^r olsun. $P \in M$ noktasında M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri K ve H , $f(P) \in M^r$ noktasında M^r yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri K^r ve H^r olsun. O halde

$$K^r = \frac{K}{1 + 2rH + r^2K} \quad (2.11)$$

$$H^r = \frac{H + rK}{1 + 2rH + r^2K} \quad (2.12)$$

dır.

İspat. $P \in M$ noktasında M yüzeyinin asli eğrilikleri k_1, k_2 ve bu asli eğriliklere karşı gelen asli eğrilik doğrultuları da sırasıyla X_1, X_2 olsun. M^r nin $f(P)$ noktasındaki asli eğrilik doğrultuları da $f_*(X_1), f_*(X_2)$ olur. (2.10) eşitlikleri dikkate alınarak M^r paralel yüzeyinin asli doğrultuları yardımıyla şekil operatörü

$$S_r(f_*(X_1)) = \frac{k_1}{1 + rk_1} f_*(X_1)$$

$$S_r(f_*(X_2)) = \frac{k_2}{1 + rk_2} f_*(X_2)$$

şeklindedir. Buna göre $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ bazı ile S_r şekil operatörü matrisi

$$S_r = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{1+rk_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+rk_2} \end{pmatrix}$$

dir. Bu matris yardımıyla paralel yüzeyin Gauss eğriliği

$$K^r = \det S_r = \left(\frac{k_1}{1+rk_1} \right) \cdot \left(\frac{k_2}{1+rk_2} \right)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$K^r = \frac{k_1 k_2}{1+r(k_1+k_2)+r^2(k_1 k_2)}$$

bulunur. Son eşitlikte (2.1) eşitlikleri dikkate alınırsa M^r paralel yüzeyin Gauss eğriliği, M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri cinsinden ifade edilirse

$$K^r = \frac{K}{1+2rH+r^2K} \quad (2.13)$$

elde edilir. Şekil operatörünün matrisi yardımıyla paralel yüzeyin ortalama eğriliği

$$H^r = \frac{1}{2} \text{iz}(S_r) = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2} \right)$$

olarak elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$H^r = \frac{\frac{k_1+k_2}{2} + 2r \frac{k_1 k_2}{2}}{2 \left(\frac{1}{2} + r \left(\frac{k_1+k_2}{2} \right) + r^2 \left(\frac{k_1 k_2}{2} \right) \right)}$$

bulunur. Son eşitlikte, (2.1) eşitlikleri dikkate alınırsa paralel yüzeyin ortalama eğriliği, M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri cinsinden ifadesi

$$H^r = \frac{H + rK}{1 + 2rH + r^2K} \quad (2.14)$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.1. $M \subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M^r olsun. M yüzeyine ait $P \in M$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri sırası ile K, H ve M^r yüzeyinin $f(P) \in M^r$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri sırası ile K^r, H^r olsun. Bu durumda

$$K = \frac{K^r}{1 - 2rH^r + r^2K^r} \quad (2.15)$$

$$H = \frac{H^r - rK^r}{1 - 2rH^r + r^2K^r} \quad (2.16)$$

eşitlikleri vardır.

$M \subset E^3$ yüzeyinin paralel bir yüzeyi M^r olmak üzere sırasıyla (2.13) eşitliğiyle verilen K^r Gauss eğriliği ve (2.14) eşitliğiyle verilen H^r ortalama eğriliği yüzeyin Q, F, J yapı fonksiyonları yardımıyla tekrar düzenlenirse

$$K^r = \frac{-Q^2}{2D^4 + 4Dr(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2r^2Q^2} \quad (2.17)$$

$$H^r = \frac{D(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2rQ^2}{2D^4 + 2Dr(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2r^2Q^2} \quad (2.18)$$

elde edilir.

Sonlu boyutlu bir vektör uzayı V ve $T:V \rightarrow V$ bir lineer dönüşüm olsun. λ karakteristik değeri için $T(v) = \lambda v$ ise $\det(T - \lambda I) = 0$ olur. Bu ifade $T(v) = \lambda v$ ile denktir. Tersine $\det(T - \lambda I) = 0$ ise λ öz değer iken $T(v) = \lambda v$ dir. Aynı zamanda A matrisine karakteristik değer verebilmek için

$$\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.19)$$

olması gerekir. Bu ifadeye denk olarak,

$$\det(xI - A) = f(x) = 0$$

ifadesine de A matrisinin karakteristik çok terimli (karakteristik polinomu) denir, (Greub, 1975).

2.2.3. E^3 de Weingarten yüzeyler

Weingarten'ın çalışmalarına kadar yalnızca açılabilir yüzeyler biliniyordu. Öte yandan 1865 de Beltrami ve Dini E^3 de açılabilir olmayan yegâne regle Weingarten yüzeyin helikoidal regle yüzey olduğunu ispatlamışlardır. E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında bir $\varphi(u, v)$ yüzeyinin asli eğrilikleri k_1, k_2 ve yüzeye ait K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği olmak üzere, $a, b, c \in \mathbb{R}$ iken

$$ak_1 + bk_2 = c \text{ veya } aH + bK = c$$

bağıntısını sağlayan $\varphi(u, v)$ yüzeyine lineer Weingarten yüzey adı verilir. Burada $a^2 + b^2 \neq 0$ 'dır, (Lopez, 2008). Bunun ilk örnekleri umbilik yüzeyler, sabit ortalama eğrilikli ($b = 0$) ve sabit Gauss eğrilikli ($a = 0$) yüzeylerdir, (Kalkan, 2010).

Öklid uzayında yüzeyleri incelemek için kullanılan asli eğrilikler arasındaki fonksiyonel bağıntı ile Weingarten yüzeylerin elde edilmiştir. Böylece Gauss ve ortalama eğrilikler arasındaki fonksiyonel bir bağıntı mevcuttur. Bu bağıntıya ilişkin tanım, teorem ve sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Weingarten yüzeyler ile ilgili tarihsel süreçte birçok çalışılma yapılmıştır. Ancak Kühnel, 1994 de regle yüzeyin belirlenmesin de kullanılan Q, F, J büyüklüklerin sabit olma şartını H ve K_{II} arasındaki bağıntıyı vererek Weingarten yüzeylere farklı bir bakış açısı kazandırmıştır. O halde yerel olarak Weingarten yüzeyleri beş ana sınıfta ifade edelim:

- 1- Dönel yüzeyler,
- 2- Asli eğriliklerden biri sabit olan bir eğrinin kanal yüzeyleri,
- 3- Helikoidsel yüzeyler,
- 4- Sabit Gauss eğrilikli yüzeyler,
- 5- Sabit ortalama eğrilikli yüzeyler, (Kühnel and Steller, 2005).

Tanım 2.2.19. $\varphi(u, v) \subset E^3$ yüzeyinin Weingarten yüzey olması için yüzeyin K Gauss ve H ortalama eğriliklerinin arasında

$$\sigma(K, H) = 0 \quad (2.20)$$

olacak şekilde fonksiyonel bir bağıntının var olması ya da bunla özdeş olarak bu eğriliklerin değişimleri lineer bağımsız ise $\varphi(u, v)$ yüzeyine Weingarten yüzey denir, (Sipus, 2008).

Teorem 2.2.3. $\varphi(u, v) \subset E^3$ bir yüzey olsun. Bu yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği olmak üzere

$$K_u H_v - K_v H_u = 0 \quad (2.21)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\varphi(u, v)$ yüzeyi Weingarten yüzeydir, (Sipus, 2008).

Sonuç 2.2.2. 2×2 tipindeki bir $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \text{Tr}(A) + \det(A)$$

olarak yazılır. Burada $\text{Tr}(A)$, A matrisinin asli köşegen elemanlarının toplamıdır, (Greub, 1975).

Sonuç 2.2.3. k_1 ve k_2 asli eğrilikleri

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

kuadratik denkleminin kökleridir. k_1 ve k_2 eşitlikleri

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{ve} \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dir, (Kuhnel, 1994).

2.2.4. E^3 de regle Weingarten yüzeylerin paralel yüzeyleri

Park ve Kim tarafından E^3 de açılabilir olmayan regle yüzeyin, paralel yüzeyinin regle yüzey olmadığı ancak açılabilir regle yüzeyin, paralel yüzeyinin açılabilir bir regle yüzey olduğu ifade edilmiştir, (Park ve Kim, 1998). Lopez, 2008'de yaptığı bir

çalışmada $aH + bK = c$ lineer bağıntısını sağlayan Weingarten yüzeyleri çalışmıştır. 1785'de Meusnier, E^3 de bulunan tek minimal döneel yüzeyin katenoid olduğunu ispatlamıştı, döneel yüzeyler cyclic yüzeylerin en iyi bilinen örneklerindendir. Lopez, döneel yüzey hariç $aH + bK = c$ bağıntısını sağlayan cyclic yüzeylerin, minimal yüzeylerin Riemann örnekleri ($H = 0$) ve genelleştirilmiş koniler ($K = 0$) olduğunu vermiştir.

Lopez tarafından 2008 yılında yapılan bir diğer çalışmada E^3 de $m, n \in \mathbb{Z}$ ve yüzeyin asli eğrilikleri k_1, k_2 olmak üzere

$$k_1 = mk_2 + n$$

bağıntısını sağlayan lineer Weingarten yüzeyleri ele alınmıştır. Bu çalışmada $(m, n) = (m, 0)$ olmak üzere bir cyclic lineer Weingarten yüzeyin foliasyon düzlemlerinin paralel olduğu kısaca yüzeyin Riemann tipli olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bir Riemann tipli Weingarten yüzeyin ya bir döneel yüzey ya da minimal yüzeylerin ($H = 0$) klasik Riemann örnekleri olduğu gösterilmiştir, (Lopez, 2008).

Teorem 2.2.4. Parametrik olarak verilen $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ regle yüzeyinden elde edilen $\varphi^r(u, v) = \alpha(u) + r(\alpha_u(u) \wedge X(u)) + v[X(u) + r(X_u(u) \wedge X(u))]$ paralel yüzeyine ait birinci temel formun katsayıları E^r, F^r, G^r ve ikinci temel formun katsayıları L^r, M^r, N^r olsun. $\varphi^r(u, v)$ paralel regle yüzeyinin yüzeyine ait birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E^r &= E - 2rL + r^2 \langle N_u, N_u \rangle \\ F^r &= F - 2rM + r^2 \langle N_u, N_v \rangle \\ G^r &= G + r^2 \langle N_v, N_v \rangle \end{aligned}$$

ve ikinci temel formun katsayıları ise

$$L^r = L - r \langle N_u, N_u \rangle$$

$$M^r = M - r \langle N_u, N_v \rangle$$

$$N^r = -r \langle N_v, N_v \rangle$$

dir, (Savcı, 2011).

BÖLÜM 3. YOĞUNLUKLU UZAYDA YÜZEYLER

Yoğunluklu manifoldlar, farklı fiziksel yoğunluğa sahip yüzeyler veya bölgeler göz önüne alındığında ortaya çıkmaktadır. Yoğunluklu yüzeylere en iyi örneklerden biri iki boyutlu Gauss düzlemidir. Gauss düzlemi, $(2\pi)^{-1} e^{-r^2/2}$ ile ağırlıklandırılan hacim ve uzunluklu Öklid düzlemidir. Burada r orijine olan uzaklığı temsil etmektedir. Hacim, çevre ve alan için kullanılan e^ϕ pozitif yoğunluklu diferansiyellenebilir manifold için Riemann hacmi dV , çevre dP ve alan dA olmak üzere yoğunluklu hacim, çevre ve alan sırası ile

$$dV_\phi = e^\phi dV$$

$$dP_\phi = e^\phi dP$$

$$dA_\phi = e^\phi dA$$

şeklindedir. Bir eğrinin eğriliğini veya bir yüzeyin ortalama eğriliğini, yoğunluğu olan manifoldlara genelleşirebiliriz. Genellemeler, manifoldların standart eğrilik kavramına uygun biçimde tanımlanmıştır, (Corwin ve ark, 2006).

Tanım 3.1. Yoğunluğu e^ϕ olan \square^n uzayındaki bir hiperyüzey için $k_{1\phi}, \dots, k_{(n-1)\phi}$ asli eğrilikler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} k_{1\phi} &= k_1 - \frac{d\phi}{dN} \\ &\vdots \\ k_{(n-1)\phi} &= k_{(n-1)} - \frac{d\phi}{dN} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada $k_{1\phi}, \dots, k_{(n-1)\phi}$ Riemann asli eğrilikleri ve N hiperyüzeyin normalidir.

Özel olarak 2–boyutlu yoğunluklu Riemann manifoldları için N birim normal vektörü, κ Riemann eğriliği olmak üzere yoğunluklu Riemann eğriliği

$$\kappa_\phi = \kappa - \frac{d\phi}{dN} \quad (3.2)$$

dir, (Corwin ve ark, 2006).

e^ϕ yoğunluklu n –boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde, H Riemann ortalama eğriliği, N birim normal vektör olmak üzere bir hiperyüzeyin H_ϕ yoğunluklu ortalama eğriliği

$$H_\phi = H - \frac{1}{n-1} \frac{d\phi}{dN}$$

dir. Özel olarak e^ϕ yoğunluklu 3–boyutlu Öklid uzayında bir ϕ regle yüzeyin ortalama eğriliği

$$H_\phi = H - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dN} \quad (3.3)$$

biçimindedir, (Hieu, 2009). Bu şekilde tanımlanmış H_ϕ ortalama eğriliğine yoğunluklu ortalama ϕ –eğrilik denir.

(3.3) denklemi ile verilen $\frac{d\phi}{dN}$ nin geometrik hareketi, uzayın yoğunluğu ve bazı basit minimal yüzeylerin ($H = 0$) varlığını anlamamızı sağlar. Örneğin, Gauss uzayında $\frac{d\phi}{dN}$ yüzey üzerinde bir noktanın tanjant hiperdüzlemine orijinden olan uzaklığıdır. Yani G^3 Gauss uzayında bunu görmek kolaydır.

- a) Düzlemler sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve orijin boyunca geçen düzlem minimaldir.
- b) Orijindeki küreler sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve $\frac{1}{\sqrt{2}}$ yarıçaplı olan küreler minimaldir.
- c) Eksenleri orijinden geçen dairesel silindir sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve 1 yarıçaplı olan dairesel silindirler minimaldir.

$\phi(x)$, E^n Öklid uzayında $\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ biçiminde lineer bir fonksiyon ve $e^{\phi(x)}$ log-lineer yoğunluk olsun. Sabit yoğunluklu E^n Öklid uzayında her bir noktalar kümesine bir hiperdüzlem denir. Uygun koordinatlar seçilerek yoğunluğu e^{x_n} formunda varsayabiliriz. Böylece E^{n-1} , $(n-1)$ -boyutlu Öklid uzayı ve E_ϕ , e^{x_n} yoğunluklu reel doğrular olmak üzere $E^{n-1} \oplus E_\phi$ üretiliyor iken $e^{\phi(x)}$ yoğunluklu E^n uzayını inceleyebiliriz. $\nabla\phi = (0, 0, \dots, 1)$ olmak üzere

$$\frac{d\phi}{dN} = \langle \nabla\phi, N \rangle = \|\nabla\phi\| \cdot \|N\| \cdot \cos\theta(\nabla\phi, N) = \cos\theta(\nabla\phi, N)$$

dir ve $\frac{d\phi}{dN} = \langle \nabla\phi, N \rangle$, z eksenini ile N arasındaki açının kosinüsüdür, (Hieu, 2009).

e^z yoğunluklu Öklid uzayında $K \neq 0$ olmak üzere, $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ parametrik denklemi ile verilen regle yüzeyi açılmayan bir yüzey olsun.

$$\|X\| = \|X'\| = 1, \quad \langle \alpha', X' \rangle = 0$$

eşitlikleri sağlanmak üzere Q, F, J yapı fonksiyonlarını

$$\begin{aligned} F &= \langle \alpha', X \rangle & Q &= \det(\alpha', X, X') \\ J &= \det(X'', X', X) & D &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

olarak kabul edelim.

e^ϕ yoğunluklu n -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde K Riemann Gauss eğriliği olmak üzere, K_ϕ yoğunluklu Gauss eğriliği arasında

$$K_\phi = K - \Delta\phi$$

ilişkisi mevcuttur, (Corwin ve ark, 2006).

e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\frac{d\phi}{dN} = \langle \nabla\phi, N \rangle$ olduğu dikkate alınarak (3.3) denklemi tekrar düzenlenirse

$$H_\phi = H - \frac{1}{2} \langle \nabla\phi, N \rangle \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada açılmaz regle yüzeyinin birim normali

$$N = \frac{1}{D} (Qt - vg)$$

olup

$$D = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{Q^2 + v^2}$$

biçimindedir. (2.9) eşitliğini ve yukarıda elde edilen birim normal vektörün eşitini (3.4) eşitliğinde yerine yazarsak e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\phi(u, v)$ regle yüzeyin yoğunluklu ortalama eğriliği

$$H_\phi = \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) - \frac{1}{2D} \langle \nabla\phi, Qt - vg \rangle \quad (3.5)$$

elde edilir, (Ulucan, 2019).

e^z yoğunluklu 3–boyutlu Öklid uzayında $\nabla\phi=(0,0,1)$ ve $\Delta\phi=0$ olduğu göz önüne alınarak gerekli hesaplamalar yapıldığında yoğunluklu Gauss eğriliği

$$K_\phi = K = -\frac{Q^2}{D^4} \quad (3.6)$$

olarak bulunur, (Yoon, 2016).

BÖLÜM 4. YOĞUNLUKLU UZAYDA REGLE WEINGARTEN YÜZEYLER

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda e^z yoğunluklu E^3 Öklid uzayında $\varphi(u,v)$ regle yüzeyinin Weingarten olma durumu incelenecek, bununla ilgili teorem ve sonuçlar verilecektir. İkinci kısımda ise e^z yoğunluklu E^3 Öklid uzayında $\varphi(u,v)$ regle yüzeyinin paralel yüzeyi $\varphi^r(u,v)$ nin Weingarten olma durumu incelenecek, bununla ilgili teorem, sonuç ve örnek verilecektir.

4.1. e^z Yoğunluklu Uzayda Regle Weingarten Yüzeyler

İkinci bölümde bir $\varphi(u,v) \subset E^3$ yüzeyinin Weingarten yüzey olması için (2.20) bağıntısının var olmasının gerekliliğinden bahsedilmişti. Buradan yola çıkılarak bu bölümde, e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi(u,v)$ regle yüzeyinin ortalama ϕ -eğriliği ile Gauss ϕ -eğriliğinden faydalanarak yüzeyin Weingarten olma durumu incelenecektir.

Tanım 4.1.1. e^z yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında $\varphi(u,v)$ regle yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için yüzeye ait K_ϕ Gauss ve H_ϕ ortalama ϕ -eğrilikleri arasında

$$\sigma(K_\phi, H_\phi) = 0$$

olacak şekilde fonksiyonel bir σ bağıntısının var olması veya buna eş olarak, K_ϕ ve H_ϕ ϕ -eğriliğinin değişimlerinin lineer bağımsız olması durumunda $\varphi(u, v)$ regle yüzeyi Weingarten yüzey olarak adlandırılır.

(2.21) eşitliğiyle verilen Weingarten yüzey olma şartını dikkate alarak bu yüzeyin Gauss ϕ -eğriliği ile ortalama ϕ -eğriliğinin u ve v parametrelerine göre türevlerini bulalım.

İlk olarak (3.6) denkleminin verilen K_ϕ fonksiyonun u parametresine göre kısmi türevini hesaplayalım.

$$(K_\phi)_u = \frac{2QQ'(Q^2 + v^2)}{D^6} \quad (4.1)$$

ve v parametresine göre kısmi türevi de

$$(K_\phi)_v = \frac{4vQ^2}{D^6} \quad (4.2)$$

olarak elde edilir.

Şimdi de ortalama ϕ -eğriliğinin u ve v parametrelerine göre kısmi türevlerini sırayla elde edelim.

e^z yoğunluklu Öklid uzayındaki $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin merkez ve asimptotik normalleri sırasıyla $t = (t_1, t_2, t_3)$ ve $g = (g_1, g_2, g_3)$ vektörleri ve $\nabla\phi = (0, 0, 1)$ olduğu dikkate alınarak (3.5) denkleminin düzenlenirse

$$H_\phi = \frac{Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF - Q^3t_3 - Qv^2t_3 + Q^2vg_3 + v^3g_3}{2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3)$$

bulunur, (Ulucan, 2019).

(4.3) denklemi ile verilen H_ϕ fonksiyonun u parametresine göre kısmi türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} (H_\phi)_u &= \left(\frac{Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF - Q^3t_3 - Qv^2t_3 + Q^2vg_3 + v^3g_3}{2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_u \\ &= \frac{\left[\begin{aligned} &(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF - Q^3t_3 - Qv^2t_3 + Q^2vg_3 + v^3g_3)' \cdot 2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \\ &- \left(2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \right)' \cdot (Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF - Q^3t_3 - Qv^2t_3 + Q^2vg_3 + v^3g_3) \end{aligned} \right]}{\left(2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \right)^2} \end{aligned}$$

eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$(H_\phi)_u = \frac{S_u}{2D^5} \quad (4.4)$$

elde edilir. Burada

$$S_u = \left[\begin{aligned} &(g_3')v^5 + (J' - Q't_3 - Qt_3')v^4 + (-Q' + Q^2g_3' + Q^2g_3' - QQ'g_3)v^3 \\ &+ (2Q^2J' - Q'F - QF' - Q^2t_3' - Q^2Q't_3 - Q^3t_3' - QQ'J)v^2 \\ &+ (-Q^2Q' + 2Q^3Q'g_3 + Q^4g_3' + 3QQ'^2 - 3Q'Q^3g_3)v + Q^4J' - Q^3F' - Q^4t_3' - Q'Q^3J + 2Q^2Q'F \end{aligned} \right]$$

dir.

Şimdi de (4.3) denklemiyle verilen H_ϕ fonksiyonun v parametresine göre kısmi türevini hesaplayalım.

$$(H_\phi)_v = \left(\frac{Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF - Q^3t_3 - Qv^2t_3 + Q^2vg_3 + v^3g_3}{2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_v$$

$$= \frac{\left[\begin{aligned} &(2Jv - Q' - 2Qvt_3 + Q^2g_3 + 3v^2g_3)2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \\ &- \left(2\frac{3}{2}(Q^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} 2v \right) (Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF - Q^3t_3 - Qv^2t_3 + Q^2vg_3 + v^3g_3) \end{aligned} \right]}{\left(2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \right)^2}$$

eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$(H_\phi)_v = \frac{S_v}{2D^5} \quad (4.5)$$

elde edilir. Burada

$$S_v = (-Q^2Q' + Q^4g_3) + (-Q^2J + 3QF + Q^3t_3)v + (2Q' + Q^2g_3)v^2 + (-J + 3Qt_3)v^3$$

dir. Gauss ϕ -eğrilikleri ve Ortalama ϕ -eğriliğinin u ve v parametrelerine kısmi türevleri yardımıyla aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.1.2. e^z yoğunluklu E^3 Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin K_ϕ Gauss ϕ -eğriliği ve H_ϕ ortalama ϕ -eğriliği olmak üzere

$$(K_\phi)_u (H_\phi)_v - (K_\phi)_v (H_\phi)_u = 0 \quad (4.6)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\varphi(u, v)$ regle yüzeyi bir Weingarten yüzeydir.

İspat. Bir e^z yoğunluklu 3–boyutlu bir Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle yüzeyin Weingarten yüzey olması için (4.1),(4.2),(4.4),(4.5) eşitlikleri yardımıyla (4.6) eşitliğinin sağlandığını göstereyim.

$$\begin{aligned} (K_\phi)_u (H_\phi)_v - (K_\phi)_v (H_\phi)_u &= \left(\frac{2QQ'(Q^2 + v^2)}{D^6} \right) \left(\frac{S_v}{2D^5} \right) - \left(\frac{4vQ^2}{D^6} \right) \left(\frac{S_u}{2D^5} \right) \\ &= \frac{\left(\begin{aligned} &(4Q^2 g_3') v^6 + (-4Q^2 J' + 4Q^2 Q' t_3 + 4Q^3 t_3' - 4(Q')^2 Q^4 J + 12(Q')^2 Q^5 t_3) v^5 \\ &+ (4Q^2 Q' - 4Q^4 g_3' - 4Q^4 g_3' + 4Q^3 Q' g_3 + 8(Q')^3 Q^4 + 4(Q')^2 Q^6 g_3) v^4 \\ &+ \left(-8Q^4 J' + 4Q^2 Q' F + 4Q^3 F' + 4Q^4 t_3' + 4Q^4 Q' t_3 + 4Q^5 t_3' \right) v^3 \\ &+ \left(+4Q^3 Q' J - 4J (Q')^2 Q^6 + 12F (Q')^2 Q^5 + 4(Q')^2 Q^7 t_3 \right) v^2 \\ &+ (4Q^4 Q' - 8Q^5 Q' g_3 - 4Q^6 g_3' - 12Q^3 Q'^2 + 12Q' Q^5 g_3 - 4Q^6 (Q')^3 + 4(Q')^2 Q^8 g_3) v \\ &+ (-4Q^6 J' + 4Q^5 F' + 4Q^6 t_3' + 4Q' Q^5 J - 8Q^4 Q' F) v \end{aligned} \right)}{2D^{11}} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(K_\phi)_u (H_\phi)_v - (K_\phi)_v (H_\phi)_u = \frac{(2QQ'v^2 + 2Q'Q^3)S_v - 4vQ^2S_u}{2D^{11}} \quad (4.7)$$

sonucu elde edilir. (2.8) denklemi ile verilen K Gauss eğriliği sıfırdan farklı olduğu için $Q \neq 0$ şartını sağlayan herhangi bir nokta komşuluğunda $Q' = F' = J' = 0$ ve $t_3' = g_3' = 0$ olmalıdır. Bu durumda (4.7) denklemi sıfıra eşit olacağından e^z yoğunluklu 3–boyutlu bir Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle yüzeyi bir Weingarten yüzeydir.

Buna bağlı olarak $K \neq 0$ olduğu herhangi bir regle Weingarten yüzey için Q, F, J, t_3, g_3 büyüklükleri sabit olmalıdır. Özel olarak $J = F = 0$ iken $H = 0$ olur. Bu durumda yüzey helikoidal yüzeydir.

Sonuç 4.1.3. e^z yoğunluklu Öklid uzayında açılabilir olmayan bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyi için aşağıdaki koşullar bir birine denktir.

- i) $\varphi(u, v)$ bir Weingarten yüzeydir.
- ii) Q, F, J, t_3, g_3 büyüklükleri sabittir.

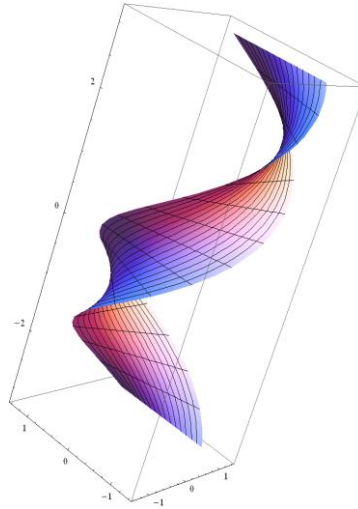
Örnek 4.1.4. E^3 Öklid uzayında

$$\varphi(u, v) = (-\cos(u) + v \sin(u), -\sin(u) - v \cos(u), u)$$

parametrik denklemi ile verilen bir helikoidal yüzey,

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= (-\cos(u), -\sin(u), u) + v(\sin(u), -\cos(u), 0) \\ &= \alpha(u) + vX(u) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir regle yüzey belirtir. Burada e^z yoğunluklu E^3 Öklid uzayında bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin Weingarten yüzey olduğunu gösterelim.



Şekil 4.1. $\varphi(u, v)$ açılabilir regle yüzeyin grafiği

$\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin u ve v ye göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevleri

$$\varphi_u = (v \cos(u) + \sin(u), -\cos(u) + v \sin(u), 1)$$

$$\varphi_v = (\sin(u), -\cos(u), 0)$$

$$\varphi_{uu} = (\cos(u) - v \sin(u), v \cos(u) + \sin(u), 0)$$

$$\varphi_{uv} = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

$$\varphi_{vv} = 0$$

dir. Yüzeyin N birim normal vektörü olmak üzere

$$N = \frac{(\cos(u), \sin(u), -v)}{\sqrt{1+v^2}}$$

olarak elde edilir. Elde edilen kısmi türevler yardımıyla $\varphi(u, v)$ regle yüzeyine ait birinci temel formun katsayıları

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 2 + v^2,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 1,$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1$$

ve ikinci temel formun katsayıları

$$L = \langle N, \varphi_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}},$$

$$M = \langle N, \varphi_{uv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}},$$

$$N = \langle N, \varphi_{vv} \rangle = 0$$

olarak bulunur. Temel formun katsayıları, (2.2) ifadesinde yerine yazılırsa, $\varphi(u, v)$ açılabilir regle yüzeyine ait K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = -\frac{1}{(1+v^2)^2} \quad (4.8)$$

ve

$$H = -\frac{1}{2(1+v^2)^{3/2}} \quad (4.9)$$

olarak bulunur. K ve H eğriliklerinin u ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplar, (2.21) denkleminde yerlerine yazdığımızda

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

bulunur. O halde $\phi(u, v)$ açılmaz helikoidal yüzeyi regle Weingarten yüzeydir.

Şimdi de bu yüzeyin e^z yoğunluklu E^3 Öklid uzayında Weingarten yüzey olduğunu gösterelim.

$\nabla\phi = (0, 0, 1)$ olmak üzere (4.8) ve (4.9) denklemleri sırayla (3.4) ve (3.6) denklemlerinde yerine yazıldığında, e^z yoğunluklu Öklid uzayına ait yüzeyin Gauss ϕ – eğriliği ve ortalama ϕ – eğriliği sırasıyla

$$K_\phi = -\frac{1}{(1+v^2)^2}$$

ve

$$H_\phi = \frac{-1+v+v^3}{2(1+v^2)^{3/2}}$$

olarak bulunur. K_ϕ ve H_ϕ eğriliklerinin u ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplar, (4.6) denkleminde yerine yazarsak,

$$(K_\phi)_u (H_\phi)_v - (K_\phi)_v (H_\phi)_u = 0$$

bulunur. O halde e^z yoğunluklu 3– boyutlu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ açılmaz regle yüzeyi Weingarten yüzeydir.

Sonuç 4.1.5. E^3 Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle Weingarten yüzey, e^z yoğunluklu E^3 Öklid uzayında da yine bir Weingarten yüzeydir.

4.2. e^z Yoğunluklu Uzayda Paralel Regle Weingarten Yüzeyler

Bu bölümde e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle Weingarten yüzeye ait paralel yüzeyin Gauss ϕ – eğriliği ve ortalama ϕ – eğriliğinden faydalanarak yüzeyin Weingarten olma durumu incelenecektir.

Burada, $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinden elde edilen $\varphi^r(u, v)$ paralel yüzeyinin denklemi Teoremden 2.6.1 de verilen bilgilerin bir genellemesi olmak üzere, $E_\phi^r, F_\phi^r, G_\phi^r$ birinci ve $L_\phi^r, M_\phi^r, N_\phi^r$ ikinci temel formların katsayıları esas alınarak işlemler yapılacaktır.

Teorem 4.2.1. e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi^r(u, v)$ yüzeyinin birinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} E_\phi^r &= E_\phi - 2rL_\phi + r^2 \langle N_u, N_u \rangle \\ F_\phi^r &= F_\phi - 2rM_\phi + r^2 \langle N_u, N_v \rangle \\ G_\phi^r &= G_\phi + r^2 \langle N_v, N_v \rangle \end{aligned}$$

ve ikinci temel formun katsayıları,

$$\begin{aligned}
L_\phi^r &= L_\phi - r \langle N_u, N_u \rangle \\
M_\phi^r &= M_\phi - r \langle N_u, N_v \rangle \\
N_\phi^r &= -r \langle N_v, N_v \rangle
\end{aligned}$$

dir.

İspat. e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle Weingarten yüzeye ait birinci temel formunun katsayıları $\varphi^r(u, v)$ paralel yüzeyinin kısmi türevleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
E_\phi^r &= \langle \varphi_u^r, \varphi_u^r \rangle \\
&= \left\langle \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)], \right. \\
&\quad \left. \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)] \right\rangle \\
&= \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle + r \langle \alpha_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + v \langle \alpha_u, X_u \rangle + rv \langle \alpha_u, X_{uu} \wedge X \rangle \\
&\quad + r \langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_u \rangle + r^2 \langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + r^2 \langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_u \wedge X \rangle \\
&\quad + rv \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_u \rangle + r^2 v \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle \\
&\quad + r^2 \langle \alpha_u \wedge X_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + r^2 \langle \alpha_u \wedge X_u, \alpha_u \wedge X_u \rangle \\
&\quad + r^2 v \langle \alpha_u \wedge X_u, X_{uu} \wedge X \rangle + v \langle X_u, \alpha_u \rangle + vr \langle X_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle \\
&\quad + v^2 \langle X_u, X_u \rangle + v^2 r \langle X_u, X_{uu} \wedge X \rangle + rv \langle X_{uu} \wedge X, \alpha_u \rangle \\
&\quad + r^2 v \langle X_{uu} \wedge X, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + r^2 v \langle X_{uu} \wedge X, \alpha_u \wedge X_u \rangle \\
&\quad + v^2 r \langle X_{uu} \wedge X, X_u \rangle + r^2 v^2 \langle X_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\phi^r &= \langle \varphi_u^r, \varphi_v^r \rangle \\
&= \langle \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)], X + r(X_u \wedge X) \rangle \\
&= \langle \alpha_u, X \rangle + r \langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle + r^2 \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \\
&\quad + r \langle \alpha_u \wedge X_u, X \rangle + r^2 \langle \alpha_u \wedge X_u, X_u \wedge X \rangle \\
&\quad + v \langle X_u, X \rangle + vr^2 \langle X_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_\phi^r &= \langle \varphi_v^r, \varphi_v^r \rangle \\
&= \langle X + r(X_u \wedge X), X + r(X_u \wedge X) \rangle \\
&= \langle X, X \rangle + r \langle X, X_u \wedge X \rangle + r \langle X_u \wedge X, X \rangle + r^2 \langle X_u \wedge X, X_u \wedge X \rangle
\end{aligned}$$

olup Teorem 2.6.1. deki ifadelere göre düzenlenir ise

$$E_\phi^r = E_\phi - 2rL_\phi + r^2 \langle N_u, N_u \rangle$$

$$F_\phi^r = F_\phi - 2rM_\phi + r^2 \langle N_u, N_v \rangle$$

$$G_\phi^r = G_\phi + r^2 \langle N_v, N_v \rangle$$

elde edilir. Aynı şekilde ikinci temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned} L_\phi^r &= -\langle \varphi_u^r, N_u \rangle \\ &= -\left\langle \begin{aligned} &\alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)], \\ &\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u + v(X_{uu} \wedge X) \end{aligned} \right\rangle \\ &= -\left(\begin{aligned} &\langle \alpha_u, a_{uu} \wedge X \rangle + v \langle \alpha_u, X_{uu} \wedge X \rangle + r \langle a_{uu} \wedge X, a_{uu} \wedge X \rangle \\ &+ r \langle a_{uu} \wedge X, a_u \wedge X_u \rangle + rv \langle a_{uu} \wedge X, a_u \wedge X_u \rangle \\ &+ rv \langle a_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle + r \langle a_u \wedge X_u, a_{uu} \wedge X \rangle \\ &+ r \langle a_u \wedge X_u, a_u \wedge X_u \rangle + rv \langle a_u \wedge X_u, X_{uu} \wedge X \rangle \\ &+ v \langle X_u, a_{uu} \wedge X \rangle + v^2 \langle X_u, X_{uu} \wedge X \rangle + vr \langle X_{uu} \wedge X, a_{uu} \wedge X \rangle \\ &+ vr \langle X_{uu} \wedge X, a_u \wedge X_u \rangle + v^2 r \langle X_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle \end{aligned} \right) \\ M_\phi^r &= -\langle \varphi_u^r, N_v \rangle \\ &= -\langle \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)], X_u \wedge X \rangle \\ &= -\left(\begin{aligned} &\langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle + r \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \\ &+ r \langle \alpha_u \wedge X_u, X_u \wedge X \rangle + vr \langle X_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \end{aligned} \right) \\ N_\phi^r &= -\langle \varphi_v^r, N_v \rangle \\ &= -\langle X + r(X_u \wedge X), X_u \wedge X \rangle \\ &= -\langle X_u \wedge X, X_u \wedge X \rangle \end{aligned}$$

olup Teorem 2.6.1. deki ifadelerle göre düzenlenir ise

$$L_\phi^r = L_\phi - r \langle N_u, N_u \rangle$$

$$M_\phi^r = M_\phi - r \langle N_u, N_v \rangle$$

$$N_\phi^r = -r \langle N_v, N_v \rangle$$

elde edilir. Buradan e^z yoğunluklu 3–boyutlu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin de regle yüzey olması için yüzey normalinin v parametresinden bağımsız olması gerektiği elde edilir.

e^z yoğunluklu 3–boyutlu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin paralel yüzeyi $\varphi^r(u, v)$ olmak üzere, bu yüzeyin Gauss ϕ –eğriliği

$$K_\phi^r = K^r - \Delta\phi$$

olarak ifade edilir. (2.17) denklemi ve $\Delta\phi = 0$ olduğu dikkate alınıp paralel yüzeyin Gauss ϕ –eğriliği hesaplanırsa,

$$K_\phi^r = K^r = \frac{-Q^2}{2D^4 + 4Dr(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2r^2Q^2} \quad (4.10)$$

elde edilir. Ayrıca paralel yüzeye ait ortalama ϕ –eğriliği

$$H_\phi^r = H^r - \frac{1}{2}\langle \nabla\phi, N \rangle$$

olarak ifade edilir. (2.18) denklemi ve $\nabla\phi = (0, 0, 1)$ olduğu dikkate alınıp ortalama ϕ –eğriliği hesaplanırsa

$$H_\phi^r = \frac{D(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2rQ^2}{2D^4 + 2Dr(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2r^2Q^2} - \frac{Qt_3 - vg_3}{2D} \quad (4.11)$$

bulunur.

Teorem 4.2.2. $\varphi^r(u, v)$, e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ açılabilir regle yüzeyin paralel yüzeyi olsun.

$$\|X\| = \|X'\| = 1, \quad \langle \alpha', X' \rangle = 0, \quad K \neq 0$$

$$F = \langle \alpha', X \rangle, \quad Q = \det(\alpha', X, X'), \quad J = \det(X'', X', X)$$

eşitlikleri sağlandığı takdirde, $\varphi(u, v)$ bir Weingarten yüzey ise $\varphi'(u, v)$ bir Weingarten yüzeydir.

İspat. $\varphi(u, v)$ Weingarten yüzey olsun. Bu durumda Q, F, J, t_3 ve g_3 değerleri sabittir. (4.10) denkleminde verilen Gauss ϕ -eğriliğinin kısmi türevleri u ve v parametrelerine göre alınırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\left(K_{\phi}^r\right)_u = \frac{\psi_u}{D(Q^4 + v^4 + 2Q^2v^2 + Dr(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2Q^2r^2)} \quad (4.12)$$

dir. Burada

$$\psi_u = \left[\begin{array}{l} \left(-2Q'Q^5D - 2Q'D^2rQ^3J + 2Q^2Q'D^2rF + 4Q'Q^3r^2D - 4DQ^5Q' - Q^5Q'Jr \right) \\ \left(+Q^4Q'Fr - 2Q^3Q'JD^2r - Q^4J'D^2r + Q^2Q'FD^2r + Q^3F'D^2r + 2Q^3Q'r^2D \right) \\ + \left(2Q(Q')^2D^2r + Q^3(Q')^2r - D^2Q^2Q''r \right)v \\ + \left(-4Q'Q^3D - 2QQ'D^2rJ - 4DQ^3Q' - rQ^3Q'J \right)v^2 \\ + \left(-2QQ'D \right)v^4 \end{array} \right]$$

ve

$$\left(K_{\phi}^r\right)_v = \frac{\psi_v}{D(Q^4 + v^4 + 2Q^2v^2 + Dr(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2Q^2r^2)} \quad (4.13)$$

dir. Burada

$$\psi_v = \left[\begin{array}{l} Q^4Q'r + \left(-4Q^4D - rQ^4J + rQ^3F - 2Q^2JD^2r \right)v \\ + \left(rQ^2Q' + Q^2Q'r \right)v^2 + \left(-4DQ^2 - Q^2Jr \right)v^3 \end{array} \right]$$

dir.

(4.11) denkleminle verilen $\varphi^r(u, v)$ paralel yüzeyinin ortalama ϕ -eğriliğinin u ve v parametresine göre kısmi türevi alınırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\left(H_{\phi}^r\right)_u = \frac{\mu_u}{D(2D^4 + 2Dr(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2Q^2r)^2} - \frac{\varpi_u}{4D^3} \quad (4.14)$$

dir. Burada

$$\mu_u = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} 2Q^7Q'J - 2Q^6Q'F + 2Q^8J' - 2Q^7F' + 4Q^7Q'J - 2Q^6Q'F - 8Q^5Q'rD \\ + 2DrQ^5Q'J^2 - 2DrJQ^4Q'F - 2DrJQ^4Q'F + 2DrQ^6JJ' + 4DrQ^5Q'J^2 \\ - 2DrJQ^5F' - 8r^2Q^5JQ' - 2DrFQ^4Q'J + 2DrQ^3Q'F^2 - 2DrFQ^5J' \\ - 4DrFQ^4Q'J + 2DrQ^3Q'F^2 + 2DrQ^4FF' + 8r^2FQ^3Q' - 2rQ^5Q'J \\ + 2rQ^4Q'F - 2rQ^6J' - 4rQ^5Q'J + 2rQ^4Q'F + 2rQ^5F' + 8Q^3r^2Q'D \\ + 8D^2Q^5Q'J + 2Q'rQ^5J^2D - 2Q^4Q'rFDJ + 4D^3rQ^3Q'J^2 + 2D^3rQ^4JJ' \\ - 2D^3rQ'FQ^2J - 2D^3rF'Q^3J - 4D^2Q'rQ^3J - 8D^2Q^4Q'F - 2Q'rQ^4JDF \\ + 2Q^3Q'rF^2D - 4D^3rQ^2Q'JF - 2D^3rQ^3JF + 2D^3rQ'F^2Q + 2D^3rQ^2F'F \\ + 4D^2Q^2Q'rF - 8DQ^5Q'2r - 8D^2Q'JQ^3r^2 - 4D^2J'Q^4r^2 + 4D^2r^2Q'FQ^2 \\ + 4D^2F'Q^3r^2 + 8DQ'Q^3r^2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} -2Q^5(Q')^2 - 2Q^6Q'' - 2DrQ^3(Q')^2J \\ + 2DrQ^2(Q')^2F - 2DrQ'Q^4J' - 4DrQ^3(Q')^2J \\ + 2Dr(Q')^2Q^2F + 2DrQ'Q^3F' + 8r^2(Q')^2Q^3 \\ - 2DrQ^3J(Q')^2 - 2DrJQ^4Q'' + 2DrFQ^2(Q')^2 \\ + 2DrFQ^3Q'' + 2Q^3r(Q')^2 + 2rQ^4Q'' \\ - 8D^2Q^3(Q')^2 - 2r(Q')^2Q^3JD + 2Q^2(Q')^2rFD \\ - 4D^3rQ(Q')^2J - 2D^3rQ^2J'Q' \\ + 2D^3r(Q')^2F + 2D^3rF'QQ' + 4D^2Q(Q')^2r \\ - 2Q^3(Q')^2rDJ - 2D^3rQ'Q^2J \\ + 2Q^2(Q')^2DFr + 2D^3rQ'QF + 4(Q')^2r^2Q^3 \\ - 4Q'r^2Q^5J + 4Q^4Q'r^2F \\ + 4D^2r^2Q''Q^2 \end{array} \right) v \\ \left(\begin{array}{l} 2Q^5Q'J + 2Q^6J' + 2Q^6J' + 4Q^5Q'J - 2Q^4Q'F - 2Q^5F' + 4Q^5Q'J - 4Q^4Q'F \\ + 4Q^6J' + 8Q^5Q'J - 4Q^4Q'F - 4Q^5F' - 16Q^3Q'rD + 2DrQ^3Q'J^2 - 2DrJQ^2Q'F \\ + 2DrQ^4JJ' + 4DrQ^3Q'J^2 - 2DrJQ^2Q'F - 2DrJQ^3F' - 8r^2JQ^3Q' + 2DrQ(Q')^3 \\ + 2DrQ'Q^2Q'' + 2DrQ^3J^2Q' + 2DrQ^4JJ' + 2DrQ^4JJ' + 4DrQ^3J^2Q' \\ - 2DrQ^2Q'JF - 2DrQ^3JF' - 8r^2Q^3JQ' - 2DrFQ^2Q'J - 2DrFQ^3J' \\ - 2DrFQ^3J' - 4DrFJQ^2Q' + 2DrQF^2Q' + 2DrQ^2FF' + 8r^2FQ^2Q' - 2Q^3rQ'J \\ - 2rQ^4J' - 2rQ^4J' - 4Q^3Q'r + 2Q^2rQ'F + 2Q^3rF' + 8JQ^5Q' + 2Q'Q^3J^2Dr \\ - 2Q^2Q'rFJD + 4D^3rQQ'J^2 + 2D^3rQ^2JJ' - 2D^3rQ'JF - 2D^3rQJF' - 4Q^3Q'rJ \\ + 2Q(Q')^3rD + 2D^3rQ''Q' + 8D^2Q^3Q'J + 2DQ^3Q'rJ^2 + 2D^3rQ^2JJ' - 8D^2Q^2FQ' \\ - 2Q^2Q'rJDF - 2D^3rJ'QF - 16DQ'Q^3r - 4Q'rJQ^3r - 4D^2r^2JQ^2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} -2Q^4Q'' - 4Q^3(Q')^2 - 4Q^4Q'' \\ - 2DrJQ(Q')^2 - 2DrJQ^2Q'' \\ - 2DrQ(Q')^2J - 2DrQ'Q^2J' \\ - 2DrQ'Q^2J' - 4Dr(Q')^2QJ \\ + 2Dr(Q')^2F + 2DrQ'QF' \\ + 8r^2(Q')^2Q - 2DrQ^2JQ'' \\ + 2DrFQQ'' + 2Q^2rQ'' - 2Q(Q')^2rJD \\ - 2D^3rQ'J - 8D^2Q(Q')^2 \\ - 2DQ(Q')^2rJ - 2D^3rJ'Q' \end{array} \right) v^2 + \left(\begin{array}{l} 2Q^4J' + 2Q^3Q'J - 2Q^2Q'F + 2Q^4J' + 4Q^3Q'J - 2Q^2Q'F \\ - 2Q^3F' - 8QQ'rD + 4Q^3Q'J + 4Q^4J' + 4Q^4J' + 8Q^3Q'J - 4Q^2Q'F - 4Q^3F' \\ + 2DrQQ'J^2 + 2DrQ^2JJ' + 2DrQ^2JJ' + 4DrQQ'J^2 - 2DrJQ'F - 2DrJQF' \\ - 8r^2JQQ' + 2DrQ'Q'' + 2DrQ^2JJ' - 2DrQFJ' - 2Q^2rJ' + 8JQ^3Q' + 8Q^3Q'J \\ + 2DQQ'rJ^2 + 2D^3rJJ' - 4QQ'rJ \end{array} \right) v^4 + \left(\begin{array}{l} -2Q(Q')^2 - 2Q^2Q'' - 4Q^2Q'' \\ - 2DrJQ'' - 2DrQ'J' \end{array} \right) v^5 \\ + \left(2QQ'J + 2Q^2J' + 2Q^2J' + 4QQ'J - 2Q'F - 2QF' + 4Q^2J' + 2DrJJ' + 8QQ'J \right) v^6 + (-2Q'')v^7 + (2J')v^8 \end{array} \right)$$

ve

$$\varpi_u = 2D^2Q't_3 + 2D^2Q't'_3 - 2D^2vg'_3 + Q^2Q't_3 - QQ'vg_3$$

dir.

$$\left(H'_{\phi}\right)_v = \frac{\mu_v}{D(2D^4 + 2Dr(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF) - 2Q^2r)^2} + \frac{Dg_3}{v} \quad (4.15)$$

dir. Burada

$$\mu_v = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} -2Q^6Q' - 2rQ^2JQ'D^3 + 2rFQQ'D^3 + 2rQ^4Q' - 2D^3rQ'Q^2J + 2D^3rQ'QF \\ +4D^2r^2Q'Q^2 \end{array} \right) \\ + \left(\begin{array}{l} 2Q^6J - 2Q^5F + 4Q^6J + 2r(Q')^2D^3 + 2DrQ^4J^2 - 2DrQ^3JF + 4rQ^2J^2D^3 \\ -2DrFQ^3J + 2DrQ^2F^2 - 4rQFJD^3 - 2rQ^4J + 2rQ^3F - 4rQ^4J \\ +8Q^4D^2J - 8Q^3D^2F - 16Q^4Dr + 2rQ^4J^2D - 2rQ^3JFD - 4r^2Q^4J \\ -2rFQ^3JD + 2rQ^2F^2D + 4r^2FQ^3 + 4D^3rJQ^2J - 4D^3rJQF - 8D^2r^2JQ^2 \\ +2D^3r(Q')^2 \end{array} \right) v \\ + \left(\begin{array}{l} -2Q^4Q' - 2Q^4Q' - 4Q^4Q' - 2rJQ'D^3 - 2DrQ'Q^2J + 2DrQ'QF - 4rQ'JD^3 \\ -2DrQ^2JQ' + 2DrQFQ' + 2rQ^2Q' + 2rQ^2Q' - 8Q^2D^2Q' - 2rQ'Q^2JD \\ +2rQ'QFD + 4r^2Q'Q^2 - 2rQ^2JDQ' + 2rFDQQ' - 4D^3rJQ' - 2D^3rQ'J \end{array} \right) v^2 \\ + \left(\begin{array}{l} 2Q^4J + 4Q^4J + 4Q^4J - 4Q^3F + 8Q^4J + 2DrJ^2Q^2 - 2DrJQF + 4DrJ^2Q^2 \\ +2Dr(Q')^2 + 2DrQ^2J^2 - 2DrQFJ - 2rQ^2J - 4rQ^2J + 8D^2Q^2J \\ -8D^2QF - 16DQ^2r + 8Q^2D^2J + 2rJ^2Q^2D - 2rJQFD - 4r^2JQ^2 + 2r(Q')^2D \\ 2rQ^2J^2D - 2rQFDJ + 4D^3rJ^2 \end{array} \right) v^3 \\ + (-2Q'Q^2 - 4Q^2Q' - 4Q^2Q' - 2DrJQ' - 2DrQ'J - 8D^2Q' - 2rJDQ' - 2rQ'DJ) v^4 \\ + (4JQ^2 + 2Q^2J - 2QF + 4Q^2J + 8Q^2J + 2DrJ^2 + 4DrJ^2 + 8D^2J + 2rJ^2D) v^5 \\ + (-2Q' - 2Q') v^6 \\ + (4J + 2J) v^7 \end{array} \right)$$

dır.

(4.6) denkleminde benzer olarak paralel yüzeyin Weingarten olma şartını

$$\left(K'_{\phi}\right)_u \left(H'_{\phi}\right)_v - \left(K'_{\phi}\right)_v \left(H'_{\phi}\right)_u = 0 \quad (4.16)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

(4.16) denkleminde, (4.12)-(4.15) denklemleri yerlerine yazılır ve Sonuç 4.1.3'deki ii) koşulu dikkate alınır, $K \neq 0$ olan herhangi bir regle Weingarten yüzey için $Q \neq 0$ şartını sağlayan herhangi bir nokta komşuluğunda, Q, F, J ve t_3, g_3 büyüklükleri sabit olduğundan $Q' = F' = J' = 0$ ve $t_3' = g_3' = 0$ olmalıdır. Buna bağlı olarak (4.16) denklemi,

$$\left(K_{\phi}^r\right)_u \left(H_{\phi}^r\right)_v - \left(K_{\phi}^r\right)_v \left(H_{\phi}^r\right)_u = 0$$

olup e^z yoğunluklu Öklid uzayında Weingarten regle yüzeyin paralel yüzeyi de Weingarten yüzeydir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ açılabilir regle Weingarten yüzeyinin e^z yoğunluklu uzayda paralel yüzeyi $\varphi^r(u, v)$ de açılabilir regle Weingarten yüzeydir.

İspat. e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ açılabilir regle Weingarten yüzey olmak üzere

$$\|X(u)\| = 1 \quad \text{ve} \quad \|X_u(u)\| = 1$$

olsun. Açılabilir regle yüzeyin normalleri bir doğrultman boyunca sabit ve v parametresinden bağımsızdır. $\varphi(u, v)$ nin normal vektörü

$$N_1 = \alpha_u(u) \wedge X(u) + v(X_u(u) \wedge X(u))$$

olduğundan $\alpha_u(u) \wedge X(u)$ ve $X_u(u) \wedge X(u)$ lineer bağımlıdır. Böylece $\alpha_u(u) \wedge X(u) = \varepsilon(X_u(u) \wedge X(u))$ yazılabilir, (Park and Kim, 1998).

Ayrıca, N_1 eşitliğinden $N_1 = (\varepsilon + \nu)X_u \wedge X$ bulunur ve yoğunluklu yüzeyin birim normali

$$\begin{aligned} N &= \frac{N_1}{\|N_1\|} \\ &= \frac{(\varepsilon + \nu)X_u \wedge X}{(\varepsilon + \nu)} \\ &= X_u \wedge X \end{aligned}$$

bulunur.

e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi(u, v) = \alpha(u) + \nu X(u)$ regle yüzeyinin paralel yüzeyi $X_u \wedge X$ göz önüne alınarak yazılırsa,

$$\varphi^r(u, v) = \alpha(u) + r(X_u(u) \wedge X(u)) + \nu X(u)$$

olarak elde edilir. Yoğunluklu uzayda paralel yüzeyin dağılma parametresi

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\det(T, X, X')}{\langle X', X' \rangle} \\ &= \langle \alpha_u + rX_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \\ &= \langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle + r \langle X_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \end{aligned}$$

dir. Burada

$$X_{uu} = aX + bX_u \wedge X$$

ve

$$\begin{aligned}
X_{uu} \wedge X &= (\alpha X + bX_u \wedge X) \wedge X \\
&= \alpha X \wedge X + b(X_u \wedge X) \wedge X \\
&= -bX_u
\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınır, dağılma parametresi tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\lambda &= \langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle + r \langle X_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \\
&= -rb \langle X_u, X_u \wedge X \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi^r(u, v)$ paralel yüzeyi de açılabilir regle yüzeydir.

Teorem 4.2.4. 3–boyutlu e^z yoğunluklu uzayındaki bir $\varphi(u, v)$ yüzeyinin $k_{1\phi}$ ve $k_{2\phi}$ asli eğrilikleri

$$\lambda^2 - \lambda \left(2H_\phi - \frac{d\phi}{dN} \right) + \left(K_\phi - 2H_\phi \frac{d\phi}{dN} + \nabla\phi \right) = 0$$

kuadratik denkleminin kökleridir. Burada $k_{1\phi}$ ve $k_{2\phi}$ asli eğrilikleri

$$k_{1\phi} = \frac{\left(2H_\phi - \frac{d\phi}{dN} \right) + \sqrt{4H_\phi^2 + \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 - 4K_\phi + 4H_\phi \frac{d\phi}{dN} - 4\nabla\phi}}{2}$$

$$k_{2\phi} = \frac{\left(2H_\phi - \frac{d\phi}{dN} \right) - \sqrt{4H_\phi^2 + \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 - 4K_\phi + 4H_\phi \frac{d\phi}{dN} - 4\nabla\phi}}{2}$$

dir.

İspat. $\varphi(u, v)$, 3–boyutlu e^z yoğunluklu uzayda bir yüzey ve $k_{1\phi}$, $k_{2\phi}$ de bu yüzeyin asli eğrilikleri olsun. $A = \begin{pmatrix} k_{1\phi} & 0 \\ 0 & k_{2\phi} \end{pmatrix}$ bir matris ve λ bir reel sayı olmak üzere $\det(A - \lambda I) = 0$ eşitliği λ ya göre bir karakteristik denklem oluşturur.

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} k_{1\phi} & 0 \\ 0 & k_{2\phi} \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} k_{1\phi} - \lambda & 0 \\ 0 & k_{2\phi} - \lambda \end{pmatrix}$$

olup karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \lambda(k_{1\phi} + k_{2\phi}) + k_{1\phi}k_{2\phi} = 0 \quad (4.17)$$

olarak bulunur. Bu denklemin e^z yoğunluklu Öklid uzayında $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin yoğunluklu Gauss ve ortalama eğriliği cinsinden eşitini bulalım.

Burada ilk olarak ortalama ϕ – eğriliğini $k_{1\phi}$ ve $k_{2\phi}$ asli eğrilik fonksiyonları cinsinden hesaplayalım,

$$H_\phi = \frac{k_1 + k_2}{2} - \frac{d\phi}{2dN}$$

eşitliğinde (3.1) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{\left(k_{1\phi} + \frac{d\phi}{dN}\right) + \left(k_{2\phi} + \frac{d\phi}{dN}\right) - \frac{d\phi}{dN}}{2} = \frac{k_{1\phi} + k_{2\phi}}{2} + \frac{d\phi}{2dN} \\ &= \frac{1}{2} \left(k_{1\phi} + k_{2\phi} + \frac{d\phi}{dN}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten kökler toplamının

$$k_{1\phi} + k_{2\phi} = 2H_\phi - \frac{d\phi}{dN} \quad (4.18)$$

olduğu görülür.

Şimdi de Gauss ϕ -eğriliğini $k_{1\phi}$ ve $k_{2\phi}$ asli eğrilik fonksiyonları cinsinden hesaplayalım.

$$K_\phi = k_1 k_2 - \nabla \phi$$

eşitliğinde (3.1) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} K_\phi &= \left(k_{1\phi} + \frac{d\phi}{dN} \right) \left(k_{2\phi} + \frac{d\phi}{dN} \right) - \nabla \phi \\ &= k_{1\phi} k_{2\phi} + \frac{d\phi}{dN} (k_{1\phi} + k_{2\phi}) + \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 - \nabla \phi \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte (4.18) eşitliği yerine yazılırsa

$$k_{1\phi} k_{2\phi} = K_\phi - \frac{d\phi}{dN} \left(2H_\phi - \frac{d\phi}{dN} \right) - \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 + \nabla \phi$$

kökler çarpımı elde edilir. Son eşitlik sadeleştirilirse

$$k_{1\phi} k_{2\phi} = K_\phi - 2H_\phi \frac{d\phi}{dN} + \nabla \phi \quad (4.19)$$

bulunur. Elde edilen (4.18) ve (4.19) denklemleri (4.17) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\lambda^2 - \lambda \left(2H_\phi - \frac{d\phi}{dN} \right) + \left(K_\phi - 2H_\phi \frac{d\phi}{dN} + \nabla \phi \right) = 0$$

kuadratik denklemin elde edilir. Bu kuadratik denklemin kökleri

$$k_{1\phi} = \frac{\left(2H_\phi - \frac{d\phi}{dN}\right) + \sqrt{4H_\phi^2 + \left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 - 4K_\phi + 4H_\phi \frac{d\phi}{dN} - 4\nabla\phi}}{2}$$

ve

$$k_{2\phi} = \frac{\left(2H_\phi - \frac{d\phi}{dN}\right) - \sqrt{4H_\phi^2 + \left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 - 4K_\phi + 4H_\phi \frac{d\phi}{dN} - 4\nabla\phi}}{2}$$

dir.

Buradan aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

Sonuç 4.2.5. e^z yoğunluklu Öklid uzayında Gauss ϕ - eğriliği ve ortalama ϕ - eğriliği sırasıyla

$$K_\phi = k_{1\phi}k_{2\phi} + \frac{d_{\phi\phi}}{dN}(k_{1\phi} + k_{2\phi}) + \left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 - \nabla\phi,$$

$$H_\phi = \frac{1}{2}\left(k_{1\phi} + k_{2\phi} + \frac{d\phi}{dN}\right)$$

olmak üzere

$$K_\phi \leq 4\left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 \quad (4.20)$$

eşitliği mevcuttur.

Bu sonucu görmek oldukça kolaydır. Teorem 4.2.4 de kuadratik denklemin kökleri $k_{1\phi}$ ve $k_{2\phi}$ asli eğrilikleri olmak üzere

$$k_{1\phi,2\phi} = \frac{\left(2H_\phi - \frac{d\phi}{dN}\right) \pm \sqrt{4H_\phi^2 + \left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 - 4K_\phi + 4H_\phi \frac{d\phi}{dN} - 4\nabla\phi}}{2}$$

ile verilmişti. Kökün içinin pozitif olma şartı ile

$$4H_\phi^2 + \left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 - 4K_\phi + 4H_\phi \frac{d\phi}{dN} - 4\nabla\phi \geq 0$$

olup, dörde bölüp düzenlendiğinde

$$H_\phi^2 + H_\phi \frac{d\phi}{dN} + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 - K_\phi - \nabla\phi\right) \geq 0$$

bulunur. e^z yoğunluklu Öklid uzayında ortalama ϕ - eğriliği

$$H_\phi = \frac{-\frac{d\phi}{dN} \mp \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 - K_\phi - \nabla\phi\right)}}{2}$$

ikiye bölünüp kökün içi tekrar düzenlendiğinde

$$H_\phi = -\frac{d\phi}{2dN} \mp \frac{1}{2}\sqrt{4(K_\phi + \nabla\phi)}$$

elde edilir. O halde

$$4\left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 \geq K_\phi$$

olduğu gör÷lmektedir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Öklid uzayında temel kavramlar ve teoremlere yer verildi. Regle yüzey üzerindeki bir eğrinin eğrilik tanımları verildi ve ayrıca Frenet çatısı tanımlandı. e^z yoğunluklu Öklid uzayında bir regle yüzeye ait temel formlar ve bu regle yüzeye ait paralel yüzeyin temel formları hesaplandı. Hesaplanan temel formların katsayıları yardımı ile Gauss ϕ - eğriliği ve ortalama ϕ - eğriliği bulundu. e^z yoğunluklu Öklid uzayındaki regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzey olduğu teorem ifade ve ispat edildi. e^z yoğunluğu yerine $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu alınarak Öklid uzayındaki regle yüzeylerin ve paralel regle yüzeyin Weingarten olup olmama durumları da araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Belarbi, L. 2015. Some result in Riemannian manifolds with density. *Analele Univ. Oradea Fasc. Matematica*, Tom XXII (2), 81-86.
- Beltrami, E. 1865-1866. Risoluzione di un Problema Relativo alla Teoria delle Superficie. *Gobbe, Ann. Mat. Pura App.*, 7, 139-150.
- Boersma, J. Molenaar, J. 1995. Geometry of the shoulder of a packaging machine. *SIAM Review*, 37(3), 406-422.
- Carmo, M.P. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc, New Jersey.
- Corwin, I. Hoffman, N, Hurder, Sesum, V. Xu, Y. 2006. Differential geometry of manifolds with density. *Rose-Hulman Undergrad. Math. J.*, 7(11), Article 2.
- Dillen, F. Kühnel, W. 1999. Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space. *Manuscripta Math.*, 98, 307-320.
- Dini, U. 1865. Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatures principali e una funzione dell'altro. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 7(1), 205-210.
- Gray, A. 1997. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 431-457.
- Greub, W.H. 1975. *Graduate Texts in Mathematics Linear Algebra*, Springer, 120-126.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1993. *Diferensiyel Geometri, 1.Cilt.* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1994. *Diferensiyel Geometri, 2.Cilt.* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hicks, N.J. 1971. *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold Company, 38-49.
- Hieu, D.T. Hoang, N.M. 2009. Ruled minimal surfaces in R^3 with density e^z . *Pac. J. Appl. Math.*, 243(2), 277-285.
- Izumiya, S. Sji, K. Takecunı, N. 2007. Circular surfaces. *Advances in Geometry*, 7(2), 295-313.
- Kalkan, Ö. 2010. Weingarten yüzeyleri üzerine, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora Tezi.
- Kuhnel, W. 1994. Ruled W-surfaces. *Arch. Math. (Basel)*, 62, 475-480.

- Kuhnel, W. Steller, M. 2005. On closed Weingarten surfaces. *Monatsh. Math.*, 146, 113-126.
- Lopez, R. 2008. Special Weingarten surfaces foliated by circles. *Monatsh. Math.*, 154(4), 289-302.
- Morgan, F. 2005. Manifolds with density. *Notices Amer. Math. Soc.* 52(8), 853-858.
- O'Neil, B. 1997. *Elementary Differential Geometry Revised Second Edition*, Academic Press, 1-386.
- Park, K.R. Kim, G.I. 1998. Offsets of ruled surfaces. *J. Korean Comput. Graphics Society*, 4, 69-75.
- Pegna, J. Wolter, E.E. 1992. Geometrical criteria to guarantee curvature continuity of blend surfaces. *ASME J. Mech. Des.*, 114, 201-210.
- Ru, M. 1999. *Lecture on Differential Geometry Part I*, Huston University.
- Sabuncuoğlu, A. 2004. *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, 1-348.
- Savcı, Ü.Z. 2011. 3-boyutlu Öklid uzayında paralel Weingarten yüzeyler üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora Tezi.
- Şentürk, G.Y. Yüce, S. 2019. On the evolute offsets of ruled surfaces using the Darboux frame, *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A1 Math. Stat.*, 68(2), 1256-1264.
- Sipus, Z.M. 2008. Ruled Weingarten surfaces in the Galilean space. *Period. Math. Hungar.*, 56(2), 213-225.
- Struik, D.J. 1988. *Lectures on Classical Differential Geometry Second Edition*, Dover Publications.
- Ulucan, N. 2019. Yoğunluklu offset regle yüzeyler, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi.
- Ushakow, V. 1999. Developable surfaces in Euclidean space. *J. Austral. Math. Soc.*, 66(3), 388-402.
- Yoon, D.W. 2019. On the offsets of ruled surfaces in Euclidean space. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 108(4), 985-997.
- Yu, F. Lan, L. 2013. A class of Weingarten surfaces in Euclidean 3-space. Article 398158.

ÖZGEÇMİŞ

Hande KORMALI, 30.05.1993'de Bursa'da doğdu. İlköğretimini Yalova'nın Gaziosmanpaşa İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Ardından Yalova Fatih Sultan Mehmet Anadolu Lisesi'nden 2011 yılında mezun oldu. Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2016 yılında bitirdi. 2017 Ocak ayında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek lisans eğitimine başladı. 2019 yılında Yalova'da Rahmiye Palabıyık İmam-Hatip Ortaokulu'nda Matematik Öğretmenliği 'ne başladı.