T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇGENSEL MATRİS HALKALARINDA İNVOLUTİF MATRİSLERİN KARAKTERİZASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Leman HOCAOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Eylül 2020

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Leman HOCAOĞLU
09/09/2020

ÖNSÖZ

Lisansüstü öğrenimim süresince bilgi, tecrübe ve yardımlarını esirgemeyen, akademik ortamda olduğu kadar insani ilişkilerde de örnek olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca lisansüstü öğrenimim boyunca hem bilgi ve tecrübesini hem de manevi desteğini eksik etmeyen, sabırla ilgilenen Sayın Arş. Gör. Dr. Tuğba PETİK'e çok teşekkür ederim.

Son olarak maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan annem, babam ve kardeşlerime sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{m\times n}$	: mxn boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}_n$	: $n\times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}^n$	: n boyutlu karmaşık vektörler kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
I	: Uygun boyutlu birim matris
$\mathbf{0}$	: Uygun boyutlu sıfır matrisi
M^T	: M matrisinin devriği
$\varnothing$	: Boş küme
$\in$	: Elemanıdır
$\subset$	: Alt kümesidir
$(a,\ b)$	: a,b sıralı ikilisi
$\sum$	: Toplam
$\neq$	:Eşit değildir
$a\circ b$	: a işlem b
bkz.	: Bakınız
vs.	: Vesaire
■	: İspat sonu

ÖZET

Anahtar Kelimeler: İdempotent matris, involutif matris, üçgensel matrisler, matris halkaları

İlk bölümde, matris halkaları ile ilgili kısa bir literatür araştırması sunulmaktadır. Çalışmanın geri kalan kısmında kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve özellikler ikinci bölümde verilmektedir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, sonlu ya da sonsuz boyutlu üçgensel matris halkalarındaki idempotentlerin yapısını karakterize eden ve halka sonlu boyutlu olduğunda bu matrislerin biçimlerinin sayısını veren literatürdeki bir çalışma detaylı olarak incelenmektedir.

Dördüncü bölümde ise çalışmanın esas amacı olan üçgensel matris halkalarında involutif matrislerin yapısı genel olarak karakterize edilmektedir. Sonra, halkanın sonlu boyutlu olması durumunda bu tip matrislerin biçimlerinin sayısını ortaya koyan bir sonuç verilmektedir.

Son bölümde konu ile ilgili tartışmalar ve öneriler yer almaktadır.

INVOLUTIVE MATRICES IN TRIANGULAR MATRIX RINGS

SUMMARY

Keywords: Idempotent matrix, involutive matrix, triangular matrices, matrix rings

In the first chapter, a brief literature research on the matrix rings is presented. Some basic concepts and features that will be used in the rest of the study are given in the second part.

In the third part of the study, a study that characterizes the structure of idempotents in finite or infinite dimensional triangular matrix rings and gives the number of these matrices when the ring is finite dimensional is examined in detail.

In the fourth section, the structure of involutive matrices in the triangular matrix rings, which is the main purpose of the study, is generally characterized. Then, in case the ring is finite dimensional, a result indicated the number of such matrices is given.

The last section includes discussions and suggestions on the subject.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın İçeriği ve Önemi

Matematiğin uygulamalı bilimlerin neredeyse bütün alanlarındaki önemi aşikardır. Bu alanlarda özellikle matrislerin önemi büyüktür. Mesela; fizikle ilgili uygulamalarda elektrik devreleri ve batarya güç çıkışlarının hesaplanmasında ve elektrik enerjisinin başka bir yararlı enerjiye dönüştürülmesinde matrisler kullanılır. Ayrıca robotik ve otomasyonda ise matrisler, robot hareketleri için temel bileşenlerdir. Robotların hareketleri matris satır ve sütunlarının hesaplanmasıyla programlanır. Robotların kontrolüne yönelik girdiler, matrislerden yapılan hesaplamalara dayanılarak elde edilir. Buna ek olarak birçok BT şirketi, kullanıcı bilgilerini izlemede, arama sorgularını incelemede ve veri tabanlarını yönetmede, veri yapıları olarak matrisleri kullanır. Jeolojide sismik etütler yapmak için de matrisler kullanılır. Şifrelemede ise verileri şifrelemek ve bu şifreleri çözmek için de yine matrislere ihtiyacımız vardır [1].

Bununla birlikte, karşılaşılan çok değişkenli bir lineer denklem sisteminin çözümü için, bu denklem sistemi matris formuna dönüştürülür. Ayrıca bazı özel tipli matrisler yardımıyla matematik ve fizik gibi alanlardaki problemler kolaylıkla çözülebilmektedir. Mesela; kuantum mekaniğinde kullanılan Pauli spin ve Dirac spin matrisleri involutif matrislerdir [2].

Matlab, Mathematica gibi programlar mühendisliklerde çok kullanılmakla birlikte, bunların temelinde yine matris kavramı bulunmaktadır. Ayrıca istatistik teorisi, karar teorisi, kontrol teorisi gibi alanlarda karşılaşılan çoğu problem, matrisler yardımıyla matematiksel olarak ifade edilerek çözüme kavuşturulur [3,4].

1.2. Literatür Araştırması

Matris teorisinde çalışılan özel tipli matrislerin (idempotent, involutif, nilpotent, tripotent vs.) lineer bileşimlerinin karakterizasyonu ile ilgili çalışmalara benzer olarak, halka teorisinde de özel tipli matrislerin yapılarının karakterizasyonu ile ilgili çalışmalar son yıllarda ilgi görmeye başlamıştır.

1991'de Hannah ve O'Meara, matris halkalarında, eş zamanlı üçgenselleştirilebilir idempotent matrislerin çarpımını karakterize ettiler [5]. 2005'de Fošner, keyfi bir F cismi üzerinde $n\times n$ boyutlu tüm üst üçgensel idempotent matrislerin kısmi sıralı kümelerinin otomorfizmalarını koruyarak ortogonalliğin genel formunu elde ettiler [6]. 2009'da Chen ve arkadaşları, elemanları, değişmeli olan bir idempotent ve bir birimin toplamı olarak tek türlü ifade edilebilen halkalar üzerinde çalıştılar [7]. 2016 yılında Ying ve arkadaşları, ilk olarak bir R halkasının her elemanının, değişmeli olan bir idempotent matris ve bir tripotent matrisin toplamı olmasının gerek ve yeter koşulları; daha sonra her elemanın, değişmeli iki idempotent matrisin toplamı veya farkı olması için gerek ve yeter koşulları ve son olarak her elemanın, değişmeli iki tripotent matrisin toplamı olması için gerek ve yeter koşullarını araştırdılar [8]. 2017'de Sheibani ve Chen, her elemanı bir tripotent matris ve bir nilpotent matrisin toplamı olan bir matris halkası üzerinde çalışmalar yaptılar [9]. 2018'de Zhou, her elemanı, biri diğerleri ile değişmeli olan bir nilpotent matris, bir idempotent matris ve bir tripotent matrisin toplamı olan halkalar, daha sonra da her elemanı, biri diğerleri ile değişmeli olan bir nilpotent matris ve iki tripotent matrisin toplamı olan halkalar üzerinde çalışmalar yaptılar [10]. 2018'de Danchev, elemanları, üç tane değişmeli idempotent matrisin toplamı veya iki tane değişmeli idempotent negatif toplamı olan halkalar üzerinde çalıştı [11]. 2019'da Cheraghpour ve Ghosseiri, sonlu bir F cismi üzerindeki bir matris halkasının idempotentlerinin ve sıfır bölenlerinin sayısını hesapladılar [12].

Yine 2019'da Tang ve arkadaşları, Hirano-Tomigana'nın her elemanı iki idempotent matrisin toplamı olan halkalar üzerindeki çalışması (bkz: [15]) ve Seguins Pazzis'in pozitif karakteristikli bir cisim üzerindeki her matrisin, idempotent matrislerinin toplamına ayrıştırılması ile ilgili çalışmasından (bkz: [16]) esinlenerek bir değişmeli halka üzerinde üç idempotent ve üç involutif matrisin toplamı olan matrisleri incelediler [13]. Yine 2019'da Hou, üst üçgensel matris halkalarında idempotent matrislerin yapısını inceleyerek, halkanın sonlu boyutlu olması durumunda bu tip matrislerin sayısını belirleyen bir sonuç elde ettiler [14].

Bu çalışmada ise önce, üst üçgensel matris halkalarında idempotent matrislerin karakterizasyonuna benzer şekilde, üst üçgensel matris halkalarında involutif matrislerin yapısı karakterize edilmektedir. Sonra, halkanın sonlu boyutlu olması durumunda bu tip matrislerin biçimlerinin sayısını ortaya koyan bir sonuç verilmektedir.

BÖLÜM 2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere hazırlık niteliğinde olmak üzere bazı kavramlar, tanımlar ve teoremler (ispatsız olarak) verilmektedir.

2.1. Grup ve Halka

$G \neq \emptyset$ olmak üzere $\circ : G \times G \to G$ dönüşümüne, G ' de bir *ikili işlem* denir. Üzerinde ikili işlemin tarif edildiği kümeye *ise cebirsel yapı* denir ve genellikle $(G,\circ)$ ile gösterilir. Tariften anlaşılacağı gibi $(G,\circ)$ bir cebirsel yapı ise G , $\circ$ işlemine göre kapalıdır. Yani her $a,b \in G$ için $a \circ b \in G$ ' dir [17].

Tanım 2.1. $(G,\circ)$ bir cebirsel yapı olsun. $(G,\circ)$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa G 'ye $\circ$ işlemine göre bir *grup* denir.

i. Her $a,b,c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ' dir.
ii. Her $a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.
iii. Her $a \in G$ için $a \circ a' = a' \circ a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır [17].

Tanım 2.2. $(G,\circ)$ grubundaki '$\circ$' ikili işlemi değişmeli ise yani her $a,b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ oluyorsa bu gruba *değişmeli (Abel veya komütatif) grup* denir [17].

Tanım 2.3. $R \neq \emptyset$ ve R ' de toplama $(+)$ ve çarpma $(.)$ denilen iki tane ikili işlem verilmiş olsun. Bu $(R,+,.)$ üçlüsüne, eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bir *halka* denir.

i. $(R,+)$ değişmeli bir gruptur.

ii. $(R,+,.)$ deki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani her $a,b,c \in R$ için $(a.b).c = a.(b.c)$' dir.

$(R,+,.)$ deki çarpma, toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir. Yani her $a,b,c \in R$ için $(a+b).c = a.c + b.c$' dir [17].

R halkasındaki çarpma işleminin birim elemanı varsa yani her $a \in R$ için $1_R.a = a.1_R = a$ olacak şekilde R de 1_R ile gösterilen bir eleman varsa $(R,+,.)$'ye *birim elemanlı halka* denir Şayet bu $(R,+,.)$ çarpma işlemine göre değişmeli ise yani her $a,b \in R$ için $a.b = b.a$ oluyorsa $(R,+,.)$'ya *değişmeli halka* denir [17].

2.2. Bazı Temel Matris Kavramları

Tanım 2.4. a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots n)$ karmaşık sayılarının

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

biçiminde düzenlenmesine m satırlı n sütunlu bir *karmaşık matris* veya kısaca $m \times n$ boyutlu bir *matris* denir. Böyle bir matris $A = [a_{ij}]$ ile gösterilir [18]. Çalışma boyunca $m \times n$ boyutlu karmaşık matrisler $\mathbb{C}_{m\times n}$ ile gösterilecektir.

$n = m$ olduğunda A matrisine, $n \times n$ boyutlu kare matris veya bunun yerine kısaca n mertebeli *matris* denir. n mertebeli karmaşık matrisler $\mathbb{C}_n$ ile gösterilir. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_n$ matrisinin a_{ii}, $(i = 1,2,\ldots,n)$ elemanlarına A matrisinin *esas köşegenini* oluşturur denir [19].

Tez boyunca, i. satır ve j. sütundaki elemanı a_{ij} ile gösterilen bir A matrisi $A=[a_{ij}]$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.5. Bir $M\in\mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise M *matrisinin devriği* denir. Bu matris M^T ile gösterilir. M matrisi $m\times n$ boyutlu ise M^T matrisi $n\times m$ boyutludur [19].

Tanım 2.6. Bir kare matrisin esas köşegeninin solunda ve aşağısında yer alan tüm elemanları sıfır ise, bu matrise bir *üst üçgensel matris* denir. Bir $M\in\mathbb{C}_n$ üst üçgensel matrisinin genel biçimi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, bir kare matrisin esas köşegeninin sağında ve üstünde yer alan tüm elemanları sıfır ise, bu matrise bir *alt üçgensel matris* denir. Bir $M\in\mathbb{C}_n$ alt üçgensel matrisinin genel biçimi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Daha genel olarak, bir $M\in\mathbb{C}_n$ matrisine, eğer $j<i=1,2,...,n$ için $m_{ij}=0$ ise bir *üst üçgensel matris,* $j>i=1,2,...,n$ için $m_{ij}=0$ ise bir *alt üçgensel matris* denir [2].

Tanım 2.7. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin bazı satır ve/veya sütunlarının silinmesi ile elde edilen matrise M matrisinin bir *alt matrisi* denir [2].

Tanım 2.8. Bir matris, satırları veya sütunları arasına yatay veya dikey çizgiler çizilerek alt matrislere parçalanabilir. Bu durumda matrise bir *parçalanmış matris* ve alt matrislere de *bloklar* denir. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ parçalanmış matrisinin genel biçimi

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kc} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada, M_{ij} $(i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,c)$; $m_1,\ldots,m_k$ ve $n_1,\ldots,n_c$ sayıları $m_1+\cdots+m_k=m$ ve $n_1+\cdots+n_c=n$ olacak şekildeki pozitif tamsayılar olmak üzere $m_i \times n_j$ boyutlu bir matristir. Eğer bir matris,

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kc} \end{pmatrix}$$

şeklinde parçalanmış bir matris ise, i. satırdaki $M_{i1},...,M_{ic}$ alt matrislerinin her biri aynı sayıda satır içerir ve benzer şekilde j. sütundaki $M_{1j},...,M_{kj}$ alt matrislerinin her biri aynı sayıda sütun içerir. Bir parçalanmış matriste blokların her birini, görünen blokların satırlarını ve sütunlarını işaret ederek tanımlamak gelenek haline gelmiştir. Böylece M_{ij} alt matrisi,

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kc} \end{pmatrix}$$

parçalanmış matrisinin $i, j-$*bloğu* olarak tanımlanır. $k=c$ olmak üzere $i=j$ ise, M_{ij} alt matrisine M matrisinin bir *köşegen bloğu* denir [2].

Tanım 2.9. $M_{ii} \in \mathbb{C}_{n_i}$ $(i=1,\ldots,k)$ ve $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1k} \\ \mathbf{0} & M_{22} & M_{23} & \cdots & M_{2k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{33} & \cdots & M_{3k} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & M_{kk} \end{pmatrix}$$

şeklinde köşegen bloklarının aşağısındaki tüm blokları sıfır matrisi olan bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisine bir *blok üst üçgensel matris* denir. Bir matrise, devriği bir blok üst üçgensel matris ise, bir *blok alt üçgensel matris* denir. Blok üst üçgensel veya blok alt üçgensel matrisler kısaca *blok üçgensel matrisler* olarak adlandırılır [20].

Tanım 2.10. $M \in \mathbb{C}_n$ verilmiş olsun. Eğer bir λ skaleri ve sıfırdan farklı bir x vektörü

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

denklemini sağlıyorsa, λ skalerine M matrisinin bir *özdeğeri* ve $\mathbf{x}$ vektörüne de M matrisinin λ özdeğeri ile ilişkili bir *özvektörü* denir [19].

Tanım 2.11. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesine, M matrisinin *spektrumu* denir ve $\sigma(M)$ ile gösterilir [19].

2.3. Bazı Özel Tipli Matrisler ve Bu Matrislerin Bazı Özellikleri

Bu kısımda, matrislerin kuvvetlerinin sağladığı özelliklere göre tanımlanan bazı özel tipli matrisler tanıtılmakta ve onlarla ilgili bazı temel teoremler ispatsız olarak verilmektedir.

Tanım 2.12. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi $M^2 = M$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *idempotent matris* denir [21].

Tanım 2.13. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi $M^2 = I_n$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *involutif matris* denir [20].

Tanım 2.14. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi $M^3 = M$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *tripotent matris* denir [21].

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında, idempotent ve involutif matrislerin aynı zamanda birer tripotent matris oldukları ve ayrıca, involutif matrislerin aslında tersinir tripotent matrisler olduğu görülmektedir.

Teorem 2.15. M matrisi bir idempotent matris ise, onun spektrumu $\sigma(M) \subset \{0,1\}$, M matrisi bir involutif matris ise, onun spektrumu $\sigma(M) \subset \{-1,1\}$ 'dir [21].

Teorem 2.16. Eğer $A \in \mathbb{C}_n$, B_{ii} matrisleri kare matrisler olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots \\ & B_{22} & B_{23} & \cdots \\ & & B_{33} & \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklindeki bir blok matris ve A idempotent ise bu durumda tüm i indisleri için B_{ii} matrisleri de idempotenttir [14].

Bu teoremin involutif matrisler için de geçerli olacağına dikkat edelim.

BÖLÜM 3. ÜÇGENSEL MATRİS HALKALARINDA İDEMPOTENTLER

3.1. Giriş

Bu bölümde, tezde çalışılacak problem için esinlendiğimiz, literatürdeki [14] çalışması detaylı bir şekilde ele alınacaktır. Bu bölüm boyunca $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesini, R, 1 birimli ve idempotentleri sadece 0 ve 1 olan değişmeli bir halkayı ve $|R|$, R'nin eleman sayısını gösterecektir. Ayrıca $\mathcal{T}(n,R)$ ve $\mathcal{T}(\infty,R)$ sırasıyla, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere elemanları R halkasından alınan $n \times n$ boyutlu ve sonsuz boyutlu matrislerden oluşan üst üçgensel matris halkalarını gösterecektir.

Konuya geçmeden önce şu açıklamayı yapmak uygun olacaktır. İdempotent matrislerin karakterizasyonu ile ilgili olan bu bölümde, gelenekselleşmiş 'halka' kavramı yerine 'birleşmeli halka' kavramı kullanılmıştır. Ancak çalışma boyunca halkanın değişmeli olma özelliği kullanılmaktadır. Dolayısıyla kullanılan tabirin ya 'değişmeli halka' olması gerekiyordu ya da halkanın değişmeli olduğu vurgulanmalıydı. Bu sebeple bu çalışma irdelenirken de bu düzeltme dikkate alınarak ve değişmeli halka yazılarak ilerlenmiştir.

M, elemanları R halkası üzerinden alınan üst üçgensel matrisler halkası olsun. Bu bölümde M halkasından alınan bir elemanın idempotent olması için gerek ve yeter koşullar ortaya koyulmaktadır. Ayrıca, R sonlu olduğunda, $\mathcal{T}(n,R)$'deki idempotentlerin biçimlerinin sayısını belirleyen bir sonuç verilmekte ve bu sonucu destekleyen örnekler sunulmaktadır.

3.2. Üst Üçgensel Matris Halkalarında İdempotentler

Aşağıdaki teorem, sonlu veya sonsuz boyutlu üst üçgensel matris halkalarındaki bir elemanın idempotent olması için sağlaması gereken gerekli ve yeterli özellikleri ortaya koymaktadır.

Teorem 3.1. R, 1 birimli ve idempotentleri sadece 0 ve 1 olan bir değişmeli halka olsun. M, $\mathcal{T}(\infty, R)$ ya da $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{T}(n, R)$ matris halkası olsun. Bu durumda M halkasından alınan bir A matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter koşulu, A'nın aşağıdaki gibi karakterize edilmesidir.

i) Tüm i ler için $a_{ii} \in \{0,1\}$ dir.

ii) $i < j$ için eğer $a_{ii} = a_{jj}$ ise $a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad j = i+1 \\ (1 - a_{ii} - a_{jj}) \sum_{l=i+1}^{j-1} a_{il} a_{lj} & , \quad j > i+1 \end{cases}$ dir.

iii) $i < j$ için eğer $a_{ii} \neq a_{jj}$ ise a_{ij} keyfidir.

İspat. A elemanı, M'nin bir idempotenti olsun. $A^2 = A$ eşitliğinden aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$a_{ii}^2 = a_{ii}$$
$$a_{ii} a_{i,i+1} + a_{i,i+1} a_{i+1,i+1} = a_{i,i+1}$$
$$a_{ii} a_{i,i+2} + a_{i,i+1} a_{i+1,i+2} + a_{i,i+2} + a_{i+2,i+2} = a_{i,i+2}$$
$$\vdots$$
$$\sum_{l=0}^{k} a_{i,i+l} a_{i+l,l+k} = a_{i,i+k}$$
$$\vdots$$

Bu denklem sistemlerinin ise aşağıdakilere denk olduğu açıktır.

$$
\begin{aligned}
& a_{ii}^2 = a_{ii} \\
& \left(a_{ii} + a_{i+1,i+1} - 1\right) a_{i,i+1} = 0 \\
& \left(a_{ii} + a_{i+2,i+2} - 1\right) a_{i,i+2} + a_{i,i+1} a_{i+1,i+2} = 0 \\
& \vdots \\
& \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k} - 1\right) a_{i,i+k} + \sum_{l=1}^{k-1} a_{i,i+l} a_{i+l,l+k} = 0 \\
& \vdots
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

R halkasının idempotentleri sadece 0 ve 1 olduğundan (3.1) denklem sisteminin ilk denkleminden $a_{ii} \in \{0,1\}$ elde edilir. Böylece teoremin (i) şıkkı sağlanır.

$k = j - i$, esas köşegen yukarısındaki A matrisinin üst köşegen sayısı olsun. Esas köşegenin yukarısında $i > j$ olduğundan $k \geq 1$ olduğu açıktır. (ii) ve (iii) şıklarının ispatı için, $k = 1$ ve $k > 1$ olması durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

$k = 1$ ***olması durumu:***

(3.1) denklem sisteminin ikinci denkleminden

$$\left(a_{ii} + a_{i+1,i+1} - 1\right) a_{i,i+1} = 0 \tag{3.2}$$

eşitliğine sahibiz. $a_{ii} = a_{i+1,i+1}$ ise, (3.2) eşitliğinden $a_{i,i+1} = 0$ olmalıdır. Çünkü $a_{ii} \in \{0,1\}$ idi. Öte yandan $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$ ise, $a_{ii} + a_{i+1,i+1} = 1$ olduğundan (3.2) eşitliğine göre $a_{i,i+1}$ keyfi seçilebilir. Dolayısıyla $k = 1$ için (ii) ve (iii) sağlanır.

$k > 1$ ***olması durumu:***

(3.1) denklem sisteminin $(k+1)$. denklemini ele alalım:

$$\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}-1\right)a_{i,i+k}+\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}=0 \tag{3.3}$$

$a_{ii}\in\{0,1\}$ ve R'nin birim elemanı 1 olduğundan, eğer $a_{ii}=a_{i+k,i+k}$ ise,

$$a_{ii}+a_{i+k,i+k}-1=\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}-1\right)^{-1}=\begin{cases}-1, & a_{ii}=a_{i+k,i+k}=0 \text{ ise}\\ 1, & a_{ii}=a_{i+k,i+k}=1 \text{ ise}\end{cases}$$

dir. Böylece (3.3) eşitliğinin her iki tarafı $\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}-1\right)^{-1}$ ile çarpılarak $a_{i,i+k}=\left(1-a_{ii}-a_{i+k,i+k}\right)\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}$ elde edilir. Dolayısıyla (ii) şıkkı sağlanır.

Eğer $a_{ii}\neq a_{i+k,i+k}$ ise, bu durumda $a_{ii}+a_{i+k,i+k}-1=0$ olmalıdır. Dolayısıyla (3.3)'ten $\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}=0$ elde edilir.

Şimdi, $A(k,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,i+k}\\ & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,i+k}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{i+k,i+k}\end{pmatrix}$ matrisi, A matrisinin bir alt matrisi olsun. Bu matrisi,

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,i+k-1}\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}a_{i+1,i+k}\\ a_{i+2,i+k}\\ \vdots\\ a_{i+k-1,i+k}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} & \cdots & a_{i+1,i+k-1}\\ 0 & a_{i+2,i+2} & \cdots & a_{i+2,i+k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{i+k-1,i+k-1}\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A(k,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha & a_{i,i+k}\\ \mathbf{0} & \beta & \gamma\\ 0 & \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

şeklindeki bir blok matris olarak yazalım. A idempotent bir matris olduğundan, A matrisinin esas köşegeni üzerindeki bir bloğu olan $A(k,i)$ matrisi de idempotenttir. Dolayısıyla, $A(k-1,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}$ ve $A(k-1,i+1)=\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}$ blok matrislerinin de idempotent olduğu açıktır. Çünkü bu iki matris te $A(k,i)$ matrisinin esas köşegeni üzerindeki birer matristir. $\left(A(k-1,i)\right)^2=A(k-1,i)$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}$$

veya denk olarak

$$\begin{pmatrix} a_{ii}{}^2 & a_{ii}\alpha+\alpha\beta \\ \mathbf{0} & \beta^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}$$

olduğundan, buradan

$$a_{ii}\alpha+\alpha\beta=\alpha \quad \text{ve} \quad \beta^2=\beta \tag{3.5}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\left(A(k-1,i+1)\right)^2=A(k-1,i+1)$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}$$

veya denk olarak

$$\begin{pmatrix} \beta^2 & \beta\gamma+\gamma a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}{}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$\beta\gamma + \gamma a_{i+k,i+k} = \gamma \quad \text{ve} \quad \beta^2 = \beta \tag{3.6}$$

denklemleri elde edilir. Böylece, $a_{ii}^2 = a_{ii}$ ve $a_{i+k,i+k}^2 = a_{i+k,i+k}$ olduğu dikkate alınarak, (3.5) ve (3.6)'dan

$$A(k,i) = \left(A(k,i)\right)^2 = \begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha & a_{ii}a_{i,i+k} + \alpha\gamma + a_{i,i+k}a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & \beta & \gamma \\ 0 & \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

bulunur.

Hatırlayalım ki $a_{ii} \neq a_{i+k,i+k}$ olduğundan $a_{ii} + a_{i+k,i+k} = 1$ dir ve bununla birlikte (3.3) 'ten $\sum_{l=1}^{k-1} a_{i.i+l}a_{i+l,i+k} = 0$ idi. Bu toplam $\alpha\gamma$ çarpımına eşittir yani $\sum_{l=1}^{k-1} a_{i,i+l}a_{i+l,i+k} = \alpha\gamma$ dir. Buradan $\alpha\gamma = 0$ olur. Dolayısıyla (3.7)'deki matrisin $(1,k+1)$. elemanı $\left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i.i+k}$ ifadesine eşit olur. Fakat $a_{ii} + a_{i+k,i+k} = 1$ olduğundan bu eleman doğrudan $a_{i,i+k}$ olur. Böylece $\left(A(k,i)\right)^2 = A(k,i)$ elde edilir.

Sonuç olarak, $a_{i,i+k}$'nın değeri ne olursa olsun, $A(k,i)$ matrisi idempotenttir. Böylece, (iii) şıkkı sağlanır.

Teoremin tersinin ispatına geçelim. Yani A elemanı teoremin (i), (ii) ve (iii) şıklarını sağlasın. A'nın idempotent olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için k üzerinden tümevarım uygulayacağız.

Önce tüm $A(2,i)$ alt matrislerinin idempotent olduğunu gösterelim.

$$\left(A(2,i)\right)^2=\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & a_{i,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & a_{i,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}a_{i,i+1}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+1} & a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1}^2 & a_{i+1,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i+1,i+2}a_{i+2,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2}^2 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

olup, (i) şıkkından dolayı tüm i ler için $a_{ii}\in\{0,1\}$ olduğundan $a_{ii}^2=a_{ii}$, $a_{i+1,i+1}^2=a_{i+1,i+1}$, $a_{i+2,i+2}^2=a_{i+2,i+2}$ olduğu açıktır.

Halka değişmeli olduğundan, $\left(A(2,i)\right)^2$ matrisinin $(1,2)$. elemanı $\left(a_{ii}+a_{i+1,i+1}\right)a_{i,i+1}$ şeklinde yazılabilir. $a_{ii}=a_{i+1,i+1}$ ise, (ii) şıkkından $a_{i,i+1}=0$ dir. Dolayısıyla $a_{ii}a_{i,i+1}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+1}=0$ dır. Eğer $a_{ii}\neq a_{i+1,i+1}$ ise $a_{ii}+a_{i+1,i+1}=1$, dolayısıyla $a_{ii}a_{i,i+1}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+1}=a_{i,i+1}$ olur. Böylece (3.8) in $(1,2)$. elemanı $A(2,i)$ matrisinin $(1,2)$. elemanına eşit olur.

Benzer şekilde $a_{i+1,i+1}=a_{i+2,i+2}$ ise (ii) şıkkından $a_{i+1,i+2}=0$ ve dolayısıyla $a_{i+1,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i+1,i+2}a_{i+2,i+2}=0$ olur. $a_{i+1,i+1}\neq a_{i+2,i+2}$ ise $a_{i+1,i+1}+a_{i+2,i+2}=1$, dolayısıyla $\left(a_{i+1,i+1}+a_{i+2,i+2}\right)a_{i+1,i+2}=a_{i+1,i+2}$ olur. Böylece (3.8) in $(2,3)$. elemanı $A(2,i)$ matrisinin $(2,3)$. elemanına eşit olduğu görülür. Şimdi $(1,3)$. elemanı için inceleme yapalım. $a_{ii}=a_{i+2,i+2}$ ve $a_{ii}\neq a_{i+2,i+2}$ durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

$a_{ii}=a_{i+2,i+2}$ *olması durumu:*

Bu durumda, (ii) şıkkından,

$$a_{i,i+2}=\left(1-a_{ii}-a_{i+2,i+2}\right)\sum_{l=i+1}^{i+1}a_{il}a_{l,i+2}=\left(1-a_{ii}-a_{i+2,i+2}\right)a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} \tag{3.9}$$

olur. Şimdi $a_{ii} = a_{i+2,i+2} = 1$ ise (3.9)'den

$$a_{i,i+2} = -a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} \tag{3.10}$$

elde edilir. Öte yandan

$$a_{ii}a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+2} = \left(a_{ii} + a_{i+2,i+2}\right)a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = 2a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$$

dir. Buradan (3.10) dikkate alınırsa

$$a_{ii}a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+2} = \left(-2\right)a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = \left(-1\right)a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = a_{i,i+2}$$

olur.

Benzer şekilde $a_{ii} = a_{i+2,i+2} = 0$ ise (3.9) dan $a_{i,i+2} = a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$ elde edilir. Ayrıca,

$$a_{ii}a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+2} = \left(a_{ii} + a_{i+2,i+2}\right)a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = a_{i,i+2}$$

bulunur. Böylece (3.8) in $(1,3)$. elemanının $A(2,i)$ matrisinin $(1,3)$. elemanı ile aynı olduğu görülür.

$a_{ii} \neq a_{i+2,i+2}$ *olması durumu:*

Bu durumda, $a_{ii} + a_{i+2,i+2} = 1$ olmakla birlikte iki durum söz konusudur.

1) $a_{ii} = a_{i+1,i+1}$ *olması durumu*:

Bu durumda (ii) şıkkından $a_{i,i+1} = 0$ olduğunda (3.8) matrisinin $(1,3)$. elemanı $\left(a_{ii} + a_{i+2,i+2}\right)a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = a_{i,i+2}$ şeklinde olur.

2) $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$ *olması durumu:*

Bu durumda $a_{i+1,i+1} = a_{i+2,i+2}$ ise (ii) şıkkından dolayı $a_{i+1,i+2} = 0$ olduğundan $\left(a_{ii} + a_{i+2,i+2}\right)a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = a_{i,i+2}$ olur.

Ayrıca not edelim ki $a_{ii} \neq a_{i+2,i+2}$ ve $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$ iken $a_{i+1,i+1} \neq a_{i+2,i+2}$ durumu imkansızdır. Böylece, her durumda (3.8) matrisinin $(1,3)$. elemanının $A(2,i)$ matrisinin $(1,3)$. elemanına eşit olduğu görülür. Yani $\left(A(2,i)\right)^2 = A(2,i)$ elde edilir. Sonuç olarak, $A(2,i)$ matrisi idempotenttir.

Şimdi, kabul edelim ki $A(2,i), A(3,i), ..., A(k-1,i)$ matrisleri tüm i ler için idempotent matrislerdir. İspatlamak istediğimiz $A(k,i)$ matrisinin de her i için idempotent olduğudur.

$A(k,i)$ matrisi, (3.4) biçiminde yazılabildiğinden,

$$\left(A(k,i)\right)^2 = \begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}\alpha + \alpha\beta & \alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} \\ \mathbf{0} & \beta^2 & \beta\gamma + a_{i+k,i+k}\gamma \\ 0 & \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}^2 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

olur. Kabulümüze göre

$$\left(A(k-1,i)\right)^2 = \begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}\alpha + \alpha\beta \\ \mathbf{0} & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}$$

ve (3.12)

$$\left(A(k-1,i+1)\right)^2 = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta\gamma + \gamma a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris eşitliklerinden,

$$a_{ii}\alpha + \alpha\beta = \alpha$$
$$\beta\gamma + \gamma a_{i+k,i+k} = \gamma \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) eşitliklerinin ilki γ ile sağdan, ikincisi α ile soldan çarpılırsa,

$$a_{ii}\alpha\gamma + \alpha\beta\gamma = \alpha\gamma$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma a_{i+k,i+k} = \alpha\gamma$$

bulunur. Buradan

$$\alpha\beta\gamma = \left(1 - a_{ii}\right)\alpha\gamma = \left(1 - a_{i+k,i+k}\right)\alpha\gamma \tag{3.14}$$

olur. $a_{ii} \neq a_{i+k,i+k}$ ise, (3.14) eşitliğine göre $\alpha\gamma = 0$ ve $a_{ii} + a_{i+k,i+k} = 1$ olmalıdır. Böylece $\left(A\left(k,i\right)\right)^2$ matrisinin $\left(1,k+1\right)$. elemanı

$$\alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} = a_{i,i+k} \tag{3.15}$$

olur. Öte yandan $a_{ii} = a_{i+k,i+k}$ ise, teoremin (ii) şıkkının ikinci durumundan $a_{ii} = a_{i+k,i+k} = 1$ ise $a_{i,i+k} = -\alpha\gamma$ .ve $a_{ii} = a_{i+k,i+k} = 0$ ise $a_{i,i+k} = \alpha\gamma$ olur. Yani $a_{ii} = a_{i+k,i+k} = 1$ ise

$$\alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} = \alpha\gamma + 2a_{i,i+k} = \alpha\gamma + 2(-\alpha\gamma) = -\alpha\gamma \tag{3.16}$$

ve $a_{ii} = a_{i+k,i+k} = 0$ ise

$$\alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} = \alpha\gamma + 0a_{i,i+k} = \alpha\gamma \tag{3.17}$$

olur. Böylece, (3.11)'deki matris ile birlikte (3.13), (3.15), (3.16) ve (3.17) eşitlikleri dikkate alınarak $\left(A(k,i)\right)^2 = A(k,i)$ bulunur.

Sonuç olarak $A(k,i)$ matrisinin üst üçgensel bir matris halkasında idempotent olması için gerek ve yeter koşullar kümesinin (i), (ii) ve (iii) olması gerektiği görülmüş olur. ■

Aşağıda Teorem 3.1'i sağlayan üç örnek verilmiştir.

Örnek 3.2. $A^2 = A$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{T}(2,R)$**'**deki tüm idempotent matrisler, $a \in R$ keyfi olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimlerinden birine sahiptir.

Örnek 3.3. $A^2 = A$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{T}(3,R)$'deki tüm idempotent matrisler, a ve b elemanları R halkasının keyfi elemanları olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & -ab \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimlerinden birine sahiptir.

Örnek 3.4. $A^2 = A$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{T}(4,R)$'deki tüm idempotent matrisler a,b,c ve d elemanları, R halkasının keyfi elemanları olmak üzere,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&a&b&c\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&a&-ab&-ac\\0&0&b&c\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&b&-bd\\0&1&c&-cd\\0&0&0&d\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&a&b\\0&0&c&d\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&a&ab&d\\0&1&b&-bc\\0&0&0&c\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&a&b&ac+bd\\0&1&0&c\\0&0&1&d\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&a&b&-ac-bd\\0&0&0&c\\0&0&0&d\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&a&-ab&c\\0&0&b&bd\\0&0&1&d\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&a\\0&0&0&b\\0&0&0&c\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&a&ac\\0&0&b&bc\\0&0&1&c\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&a&ab&ac\\0&1&b&c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&a&b&c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&a&b\\0&1&c&d\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu tip matrislerin alabileceği biçimlerin tamamı bunlardan ibarettir.

İstenilen boyuttaki ve türdeki matris sayısı aşağıdaki formül yardımıyla belirlenir.

Sonuç 3.5. R, 1 birimli, idempotentleri sadece 1 ve 0 olan bir değişmeli halka olsun. $|R|$, R halkasındaki eleman sayısını göstersin. Bu durumda, n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\mathcal{T}(n,R)$ matris halkasındaki üst üçgensel idempotent matrislerin biçimlerinin sayısı,

$$\mathcal{N}(n,R) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{\mathrm{k}!(n-k)!} |R|^{k(n-k)}$$

dır.

İspat. Teorem 3.1'e göre, $\mathcal{T}(n,R)$ 'deki üst üçgensel idempotent matrislerin sayısı, tam olarak $a_{ii} \neq a_{jj}$ olan köşegen eleman çift sayısına bağlıdır. Bu olasılıkları hesaplamak için, $d_i \in \{0,1\}$, $i=1,...,n$ olmak üzere, $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ vektörünü göz önüne alalım. Δ ile, $i<j$ ve $d_i \neq d_j$ olmak üzere (d_i, d_j) çiftlerinin sayısını gösterelim. D, i. satır ve j. sütundaki elemanı,

$$d_i(1-d_j)+(1-d_i)d_j = \begin{cases} 1, & \mathrm{d}_i \neq d_j \\ 0, & \mathrm{d}_i = d_j \end{cases} \tag{3.18}$$

olan $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. (3.18)'nin sol tarafı, e vektörü, tüm elemanları 1 olan $n-$boyutlu bir vektör olmak üzere, $D = d(e-d)^T + (e-d)d^T$ olarak yazılabileceğini gösterir. $e^T De$ ifadesi D matrisinin elemanları toplamı, $k = e^T d$ ifadesi d 'deki elemanların toplamı ve $n = e^T e$ olduğu açıktır.

Δ, D'deki elemanların toplamının yarısına eşit olduğundan,

$$\begin{aligned}
\Delta = \frac{e^T De}{2} &= \frac{e^T[d(e-d)^T + (e-d)d^T]e}{2} \\
&= \frac{(e^T d)[(e-d)^T e] + [e^T(e-d)](d^T e)}{2} \\
&= \frac{k[e^T e - d^T e] + [e^T e - e^T d]}{2} \\
&= \frac{k[n-k] + [n-k]k}{2} = k(n-k)
\end{aligned}$$

olur. Δ, d 'de görünen 0 ve 1'lerin sırasından bağımsızdır. Sonuç olarak, köşegen üzerinde k tane 1'in ve $n-k$ tane 0'ın her bir düzenlemesi, $|R|^{k(n-k)}$ tane üst üçgensel idempotent matrise götürür. Böyle bir düzenlemeyi seçmek için $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ tane yol olduğundan ispat tamamlanmış olur. ■

Bu sonucun, alt üçgensel matris halkaları üzerinde çalışılması durumunda da geçerli olacağı yukarıdaki açıklamalardan dolayı açıktır.

Şimdi ise Sonuç 3.5 ile Örnek 3.2'deki matrisleri değerlendirelim:

Örnek 3.2'de esas köşegen üzerinde 2 tane 1 içeren 1 tane; 2 tane 0 içeren 1 tane ve 1 tane 1 içerip, 1 tane de 0 içeren 2 tane matris vardır. Fakat bu son iki matris, üst köşegen üzerinde 1 tane keyfi eleman içerir. Yani toplamda $2+2|R|$ tane 2×2 boyutlu üst üçgensel idempotent vardır.

Diğer yandan, Sonuç 3.5'e göre, 2×2 boyutlu üst üçgensel idempotent matrislerin biçimlerinin sayısının

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(2,R) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{2!}{k!(2-k)!}|R|^{k(2-k)} \\
&= \frac{2!}{0!.2!}|R|^{0} + \frac{2!}{1!.1!}|R|^{1.1} + \frac{2!}{2!.0!}|R|^{0} \\
&= 1+2|R|+1 \\
&= 2+2|R|
\end{aligned}
$$

olduğu aşikardır. Dolayısıyla verilen örneğin, Sonuç 3.5 ile uyumlu olduğu görülür. Benzer şekilde, Örnek 3.2'de, esas köşegen üzerinde 2 tane 0 ve 1 tane 1 içeren matris sayısı 3 (üst köşegenler üzerinde ikişer tane keyfi değişken içeren); 1 tane 0 ve 2 tane 1 içeren matris sayısı 3 (üst köşegenler üzerinde ikişer tane keyfi değişken içeren); 3 tane 1 içeren matris sayısı 1 ve 3 tane 0 içeren matris sayısı 1'dir. Yani, 3×3 boyutlu üst üçgensel idempotentlerin sayısı $3|R|^2+3|R|^2+1+1=2+6|R|^2$ dir.

Öte yandan, Sonuç 3.5'e göre,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(3,R) &= \sum_{k=0}^{3}\frac{3!}{k!(3-k)!}|R|^{k(3-k)}\\ &= \frac{3!}{0!.3!}|R|^{0}+\frac{3!}{1!.2!}|R|^{1.2}+\frac{3!}{2!.1!}|R|^{2.1}+\frac{3!}{3!.0!}|R|^{0}\\ &= 1+3|R|^{2}+3|R|^{2}+1\\ &= 2+6|R|^{2}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, verilen örneğin yine, Sonuç 3.5'i doğruladığı görülmektedir.

Ayrıca şu notu da eklemek isteriz ki Sonuç 3.5'deki $k(n-k)$ ifadesi, esas köşegen üzerinde k tane 1'in, $n-k$ tane 0'in bulunduğu matrislerin üst köşegenleri üzerindeki keyfi değişken sayısını ifade eder. Ayrıca 2×2 boyutlu üst üçgensel idempotentlerin 4 farklı biçimi, 3×3 boyutlu üst üçgensel idempotentlerin 8 farklı biçiminin mevcut olduğu görülmektedir. Biz biliyoruz ki bu sayılar, 2^2 ve 2^3 sayılarından ibarettir. Burada, tabandaki 2 sayısı $\{0,1\}$ kümesinin eleman sayısını, kuvvetlerdeki sayılar ise, matrislerin mertebesini belirtir.

BÖLÜM 4. ÜÇGENSEL MATRİS HALKALARINDA İNVOLUTİF MATRİSLERİN KARAKTERİZASYONU

4.1. Giriş

Önceki bölümde verilen sonuçlar, üçgensel matris halkalarında idempotent matrislerle ilgiliydi. Bu bölümde ise yine üçgensel matris halkalarında, involutif matrisler için benzer sonuçlar ortaya koyulacaktır. Yani R sonlu veya sonsuz boyutlu, 1 birimli ve involutifleri sadece -1 ve 1 olan bir değişmeli halka ve M, elemanları R halkası üzerinden alınan üst üçgensel matrisler halkası olsun. M halkasından alınan bir elemanın involutif matris olmasının gerek ve yeter koşulları ortaya koyulacaktır. Ayrıca, R sonlu boyutlu olduğunda, M halkasındaki involutif elemanların sayısını belirleyen bir sonuç verilecek ve bu sonuçlar sayısal örneklerle desteklenecektir.

Bu bölüm boyunca da, $\mathcal{T}_U(n,R)$ ve $\mathcal{T}_U(\infty,R)$ sırasıyla, elemanları R halkasından alınan $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \times n$ boyutlu üst üçgensel matrisler halkasını ve sonsuz boyutlu üst üçgensel matris halkasını; $\mathcal{T}_L(n,R)$ ve $\mathcal{T}_L(\infty,R)$ de sırasıyla elemanları R halkasından alınan $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \times n$ boyutlu alt üçgensel matrisler halkasını ve sonsuz boyutlu alt üçgensel matris halkasını göstermektedir.

4.2. Üst Üçgensel Matris Halkalarında İnvolutif Matrislerin Karakterizasyonu

M halkası, $\mathcal{T}_U(n,R)$ veya $\mathcal{T}_U(\infty,R)$ olmak üzere, $A=[a_{ij}]\in M$ bir involutif eleman olsun. $A^2 = \mathrm{I}$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&a_{ii}^2 = 1, \\
&a_{ii}a_{i,i+1} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+1} = 0, \\
&a_{ii}a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+2} = 0, \\
&a_{ii}a_{i,i+3} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+3} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+3} + a_{i,i+3}a_{i+3,i+3} = 0, \\
&\vdots \\
&\sum_{l=0}^{k} a_{i,i+l}a_{i+l,i+k} = 0, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

elde edilir. R halkası değişmeli olduğundan, bu denklem sisteminin aşağıdakilere denk olduğu açıktır.

$$
\begin{aligned}
&a_{ii}^2 = 1, \\
&\left(a_{ii} + a_{i+1,i+1}\right)a_{i,i+1} = 0, \\
&\left(a_{ii} + a_{i+2,i+2}\right)a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = 0, \\
&\left(a_{ii} + a_{i+3,i+3}\right)a_{i,i+3} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+3} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+3} = 0, \\
&\vdots \\
&\left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} + \sum_{l=1}^{k-1} a_{i,i+l}a_{i+l,i+k} = 0, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Aşağıdaki teorem, sonlu veya sonsuz boyutlu üst üçgensel matris halkalarındaki bir elemanın involutif olması için sağlaması gereken özellikleri ortaya koyar.

Teorem 4.1. R, 1 birimli ve involutifleri sadece -1 ve 1 olan bir değişmeli halka olsun. M halkası, $\mathcal{T}_U(\infty, R)$ veya $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{T}_U(n, R)$ matris halkası olsun. Bu durumda, bir $A = [a_{ij}] \in M$ matrisinin involutif olması için gerek ve yeter koşulları;

i) Tüm i ler için $a_{ii} \in \{-1,1\}$ ’ dir,

ii) $i < j$ için eğer $a_{ii} = a_{jj}$ ise, bu durumda

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad j = i+1 \\ -\frac{1}{4}\left(a_{ii} + a_{jj}\right)\sum\limits_{l=i+1}^{j-1} a_{il}a_{lj} & , \quad j > i+1 \end{cases} \quad \text{dir,}$$

iii) $i < j$ için eğer $a_{ii} \neq a_{jj}$ ise, bu durumda a_{ij} keyfi seçilebilir

özelliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. $A = [a_{ij}]$, M halkasının bir involutif elemanı olsun. Öncelikle gereklilik şartını ispatlayalım. A matrisinin elemanlarının (4.1) denklem sistemini sağladığı açıktır. R ’nin involutifleri sadece -1 ve 1 olduğundan (4.1) denklem sisteminin ilk denkleminden $a_{ii} \in \{-1,1\}$ elde edilir. Böylece teoremin (i) şıkkı sağlanır.

A matrisinin ana köşegeninin üzerindeki üst köşegenlerin sayısı $k = j - i$ olsun. Üst köşegenlerde $i > j$ olduğundan $k \geq 1$ olduğu açıktır. (ii) ve (iii) şıklarının ispatı için, $k = 1$ ve $k > 1$ olması durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

$k = 1$ ***olması durumu:***

(4.1) denklem sisteminin ikinci denkleminden

$$\left(a_{ii} + a_{i+1,i+1}\right)a_{i,i+1} = 0 \tag{4.2}$$

eşitliğine sahibiz. $a_{ii} \in \{-1,1\}$ olduğu dikkate alınırsa (4.2) eşitliğinden; $a_{ii} = a_{i+1,i+1}$ ise, $a_{i,i+1} = 0$ olduğu ve $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$ ise, $a_{ii} + a_{i+1,i+1} = 0$ olduğundan dolayı $a_{i,i+1}$ elemanının keyfi seçilebileceği görülür. Dolayısıyla $k = 1$ için (ii) ve (iii) sağlanır.

$k>1$ ***olması durumu:***

(4.1) denklem sisteminin $(k+1)$. denklem ailesini ele alalım:

$$\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k}+\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}=0 \tag{4.3}$$

$a_{ii}\in\{-1,1\}$ ve R'nin birim elemanı 1 olduğundan, eğer $a_{ii}=a_{i+k,i+k}$ ise,

$$a_{ii}+a_{i+k,i+k}=4\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)^{-1}=\begin{cases}2, & a_{ii}=a_{i+k,i+k}=1 \text{ ise}\\ -2, & a_{ii}=a_{i+k,i+k}=-1 \text{ ise}\end{cases}$$

dir. Böylece (4.3)'ün her iki tarafı $\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)^{-1}$ ile çarpılarak $a_{i,i+k}=-\frac{1}{4}\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}$ elde edilir. Dolayısıyla teoremin (ii) şıkkı sağlanır.

Eğer $a_{ii}\neq a_{i+k,i+k}$ ise, bu durumda $a_{ii}+a_{i+k,i+k}=0$ olmalıdır. Dolayısıyla (4.3)' ten $\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}=0$ elde edilir.

Şimdi, $A(k,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,i+k}\\ & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,i+k}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{i+k,i+k}\end{pmatrix}$ matrisi, A matrisinin bir alt matrisi olsun. Bu matrisi

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,i+k-1}\end{pmatrix}\ ,\quad \gamma=\begin{pmatrix}a_{i+1,i+k}\\ a_{i+2,i+k}\\ \vdots\\ a_{i+k-1,i+k}\end{pmatrix}\ ,\quad \beta=\begin{pmatrix}a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} & \cdots & a_{i+1,i+k-1}\\ 0 & a_{i+2,i+2} & \cdots & a_{i+2,i+k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{i+k-1,i+k-1}\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A(k,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha & a_{i,i+k} \\ \mathbf{0} & \beta & \gamma \\ 0 & \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

şeklinde bir blok matris olarak yazalım. A involutif bir matris olduğundan, A'nın esas köşegeni üzerindeki bir bloğu olan $A(k,i)$ matrisi de involutiftir. Dolayısıyla, $A(k-1,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}$ ve $A(k-1,i+1)=\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}$ blok matrislerinin de involutif olduğu açıktır. Çünkü bu iki matris de $A(k,i)$ matrisinin esas köşegen üzerindeki birer bloğudur. $\left(A(k-1,i)\right)^2=\mathrm{I}$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

veya denk olarak

$$\begin{pmatrix} a_{ii}^{\ 2} & \alpha_{ii}\alpha+\alpha\beta \\ \mathbf{0} & \beta^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

olup, buradan,

$$a_{ii}\alpha+\alpha\beta=\mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \beta^2=\mathrm{I} \tag{4.5}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\left(A(k-1,i+1)\right)^2=\mathrm{I}$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

veya denk olarak

$$\begin{pmatrix} \beta^2 & \beta\gamma + \gamma a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

olup, buradan

$$\beta\gamma + \gamma a_{i+k,i+k} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \beta^2 = \mathrm{I} \tag{4.6}$$

elde edilir. Böylece, $a_{ii}^2 = a_{i+k,i+k}^2 = 1$ olduğu dikkate alınarak, (4.5) ve (4.6)'dan

$$\mathrm{I} = \left(A(k,i)\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & a_{ii}a_{i,i+k} + \alpha\gamma + a_{i,i+k}a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

bulunur.

Hatırlanırsa, $\sum_{l=1}^{k-1} a_{i.i+l}a_{i+l,i+k} = 0$ idi. Bu eşitliğin sol yanındaki toplam $\alpha\gamma$ çarpımına eşittir. Dolayısıyla, (4.7)'nin $(1, k+1)$. elemanı $(a_{ii} + a_{i+k,i+k})a_{i,i+k}$ ifadesine eşittir. Fakat $a_{ii} + a_{i+k,i+k} = 0$ olduğundan, bu eleman doğrudan 0 olur. Böylece, $a_{i,i+k}$'nın değeri ne olursa olsun, $A(k,i)$ matrisi involutif olur. Böylece, Teorem 4.1'in (iii) şıkkı sağlanır.

Teoremin yeterlilik kısmının ispatına geçelim. A elemanı teoremin (i), (ii) ve (iii) şıklarındaki koşulları sağlasın. Gösterilmesi gereken, A matrisinin involutif olduğudur. Bunun için k üzerinde tümevarım uygulayacağız.

Önce tüm $A(2,i)$ alt matrislerinin involutif olduğunu gösterelim.

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & a_{i,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & a_{i,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}a_{i,i+1}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+1} & a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1}^2 & a_{i+1,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i+1,i+2}a_{i+2,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2}^2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

olup, teoremin (i) şıkkından dolayı $a_{ii}^2=1$, $a_{i+1,i+1}^2=1$, $a_{i+2,i+2}^2=1$ olduğu açıktır. $a_{ii}=a_{i+1,i+1}$ ise, teoremin (ii) şıkkından $a_{i,i+1}=0$ dır, dolayısıyla $a_{ii}a_{i,i+1}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+1}=0$ dır. $a_{ii}\neq a_{i+1,i+1}$ ise, $a_{ii}+a_{i+1,i+1}=0$ dır, dolayısıyla $\left(a_{ii}+a_{i+1,i+1}\right)a_{i,i+1}=0$ olur. Böylece (4.8)'in (1,2). elemanı 0 olur.

Benzer şekilde, $a_{i+1,i+1}=a_{i+2,i+2}$ ise, teoremin (ii) şıkkından, $a_{i+1,i+2}=0$ ve dolayısıyla $a_{i+1,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i+1,i+2}a_{i+2,i+2}=0$ olur. $a_{i+1,i+1}\neq a_{i+2,i+2}$ ise, $a_{i+1,i+1}+a_{i+2,i+2}=0$ ve buradan yine, $\left(a_{i+1,i+1}+a_{i+2,i+2}\right)a_{i+1,i+2}=0$ olur. Böylece (4.8)'in (2,3). elemanı 0 olur.

Şimdi, (1,3). elemanı için inceleme yapalım. $a_{ii}=a_{i+2,i+2}$ ve $a_{ii}\neq a_{i+2,i+2}$ durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

$a_{ii}=a_{i+2,i+2}$ *olması durumu:*

Bu durumda, teoremin (ii) şıkkından,

$$a_{i,i+2}=-\frac{1}{4}\left(a_{ii}+a_{i+2,i+2}\right)\sum_{l=i+1}^{i+1}a_{il}a_{l,i+2}=-\frac{1}{4}\left(a_{ii}+a_{i+2,i+2}\right)a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} \quad (4.9)$$

olur. Şimdi, $a_{ii}=a_{i+2,i+2}=1$ ise, (4.9)'dan $a_{i,i+2}=-\frac{1}{4}2a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$ yani

$$a_{i,i+2}=-\frac{1}{2}a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} \quad (4.10)$$

elde edilir. Öte yandan

$$a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2}=(a_{ii}+a_{i+2,i+2})a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=2a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$$

dir. Buradan (4.10) dikkate alınırsa,

$a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2}=-a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=0$ olur.

Benzer şekilde, $a_{ii}=a_{i+2,i+2}=-1$ ise, (4.9)'dan $a_{i,i+2}=-\frac{1}{4}(-2)a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$ yani,

$$a_{i,i+2}=\frac{1}{2}a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} \tag{4.11}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2}=(a_{ii}+a_{i+2,i+2})a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=-2a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$$

olup, (4.11) dikkate alınırsa,

$a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2}=-a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=0$ bulunur. Böylece, (4.8)'in (1,3). elemanının 0 olduğu görülür.

$a_{ii}\neq a_{i+2,i+2}$ *olması durumu:*

Bu durumda, $a_{ii}+a_{i+2,i+2}=0$ olmakla birlikte iki durum söz konusudur:

1. $a_{ii}=a_{i+1,i+1}$ *olması durumu:*

Bu durumda, teoremin (ii) şıkkından $a_{i,i+1}=0$ olduğundan, (4.8)'in (1,3). elemanı $(a_{ii}+a_{i+2,i+2})a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=0$ şeklinde olur.

2. $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$ *olması durumu:*

Bu durumda, $a_{i+1,i+1} = a_{i+2,i+2}$ ise teoremin (ii) şıkkından $a_{i+1,i+2} = 0$ olduğundan $(a_{ii} + a_{i+2,i+2})a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} = 0$ olur.

Not edelim ki $a_{ii} \neq a_{i+2,i+2}$ ve $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$ iken $a_{i+1,i+1} \neq a_{i+2,i+2}$ durumu imkansız durumdur. Böylece, her durumda, (4.8)'in (1,3). elemanı daima sıfırdır. Sonuç olarak, $A(2,i)$ matrisi involutiftir.

Şimdi, $A(2,i), A(3,i), ..., A(k\text{-}1,i)$ matrisleri tüm i ler için involutif matrisler olsun. İspatlamak istediğimiz $A(k,i)$ matrisinin de her i için involutif olduğudur. $A(k,i)$ matrisi, (4.4) biçiminde yazabildiğinden,

$$\left(A(k,i)\right)^2 = \begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}\alpha + \alpha\beta & \alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} \\ \mathbf{0} & \beta^2 & \beta\gamma + a_{i+k,i+k}\gamma \\ 0 & \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}^2 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

olur. Kabulümüze göre

$$\left(A(k-1,i)\right)^2 = \begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}\alpha + \alpha\beta \\ \mathbf{0} & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$$

ve (4.13)

$$\left(A(k-1,i+1)\right)^2 = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta\gamma + \gamma a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} a_{ii}\alpha + \alpha\beta &= \mathbf{0} \\ \beta\gamma + \gamma a_{i+k,i+k} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) eşitliklerinin ilki γ ile sağdan, ikincisi α ile soldan çarpılırsa, sırasıyla

$$a_{ii}\alpha\gamma + \alpha\beta\gamma = \mathbf{0}$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma a_{i+k,i+k} = \mathbf{0}$$

bulunur. Buradan

$$\alpha\beta\gamma = -a_{ii}\alpha\gamma = -\alpha\gamma a_{i+k,i+k} \tag{4.15}$$

olur. $a_{ii} \neq a_{i+k,i+k}$ ise, (4.15)'e göre $\alpha\gamma = 0$ olmalıdır. Ayrıca $a_{ii} + a_{i+k,i+k} = 0$ dır. Böylece $\left(A(k,i)\right)^2$ matrisinin $(1,k+1)$. elemanı

$$\alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} = 0 \tag{4.16}$$

olur. Ayrıca, (4.13)'ten

$$\beta^2 = \mathrm{I},\ a_{ii}^2 = 1 \text{ ve } a_{i+k,i+k}^2 = 1 \tag{4.17}$$

dir. Öte yandan $a_{ii} = a_{i+k,i+k}$ ise, teoremin (ii) şıkkının ikinci durumundan,

$$a_{ii} = a_{i+k,i+k} = 1 \text{ ise } a_{i,i+k} = \frac{\alpha\gamma}{-2}$$

ve

$$a_{ii} = a_{i+k,i+k} = -1 \text{ ise } a_{i,i+k} = \frac{\alpha\gamma}{2}$$

olur. Yani, $a_{ii} = a_{i+k,i+k} = 1$ ise

$$\alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} = \alpha\gamma + 2a_{i,i+k} = \alpha\gamma + 2\frac{\alpha\gamma}{-2} = 0 \tag{4.18}$$

ve $a_{ii} = a_{i+k,i+k} = -1$ ise

$$\alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right) a_{i,i+k} = \alpha\gamma - 2a_{i,i+k} = \alpha\gamma - 2\frac{\alpha\gamma}{2} = 0 \tag{4.19}$$

olduğu görülür. Böylece, (4.12)'deki matris ile birlikte, (4.14), (4.16), (4.17), (4.18) ve (4.19) eşitlikleri dikkate alınarak $\left(A(k,i)\right)^2 = \mathrm{I}$ bulunur.

Sonuç olarak, A'nın üst üçgensel bir matris halkasında involutif matris olması için gerek ve yeter koşullar kümesinin (i), (ii) ve (iii) olması gerektiği görülür. ■

Yukarıdaki teorem, aslında herhangi bir alt üçgensel matris halkasında geçerlidir. Çünkü bir B matrisi alt üçgensel matris ise B^T matrisi üst üçgensel matris olup, Teorem 4.1'e göre B^T matrisinin involutif olması için, elemanların sağlaması gereken sonuçlar bellidir. Buradan da B matrisi yorumlanabilir. Dolayısıyla burada ele alınan problemin tamamen üçgensel matris halkaları ile ilgili olduğu söylenebilir. Bu söylenilenin, bu çalışmaya ilham veren çalışmada vurgulanmamasına rağmen, orada da geçerli olduğu aşikardır.

Sonuç olarak Teorem 4.1'in alt üçgensel halka durumundaki ifadesi aşağıdaki gibi olup ispatı ise tamamen denktir.

Sonuç 4.2. R, 1 birimli ve involutifleri sadece -1 ve 1 olan bir değişmeli halka olsun. M, $\mathcal{T}_L(\infty, R)$ veya $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{T}_L(n, R)$ matris halkası olsun. Bu durumda, bir $B = [b_{ij}] \in M$ matrisinin involutif matris olması için gerek ve yeter koşullar,

i) Tüm i ler için $b_{ii} \in \{-1, 1\}$ dir,

ii) $i > j$ için eğer $b_{ii} = b_{jj}$ ise $b_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad \mathrm{i} = j+1 \\ -\frac{1}{4}\left(b_{ii} + b_{jj}\right) \sum\limits_{l=j+1}^{j-1} b_{il} b_{lj} & , \quad \mathrm{i} > j+1 \end{cases}$ dir,

iii) $i > j$ için eğer $b_{ii} \neq b_{jj}$ ise b_{ij} keyfidir

özelliklerinin sağlanmasıdır.

Aşağıda Teorem 4.1'e ilişkin örnekler verilmiştir.

Örnek 4.3. $A^2 = \mathrm{I}$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{T}_U(2,R)$'deki tüm matrisler, $a \in R$ keyfi olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

biçimlerinden birine sahiptir.

Örnek 4.4. $A^2 = \mathrm{I}$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{T}_U(3,R)$'deki tüm involutif matrisler, a ve b, R halkasının keyfi elemanları olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & a & \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{ab}{-2} \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

biçimlerinden birine sahiptir. Bu çalışmada yöntem geneldir. Daha açıklayıcı olması adına $n = 4$ için de aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.5. $A^2 = \mathrm{I}$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{T}_U(4,R)$'deki tüm involutif matrisler a,b,c ve d, R halkasının keyfi elemanları olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{ab}{-2} & \frac{ac}{-2} \\ 0 & -1 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & \frac{ac}{-2} \\ 0 & 1 & b & \frac{bc}{-2} \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & a & b \\ 0 & -1 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & a & \frac{ab}{2} & d \\ 0 & 1 & b & \frac{-bc}{2} \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & a & b & \frac{ac+bd}{2} \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & \frac{(ac+bd)}{-2} \\ 0 & -1 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{ab}{-2} & d \\ 0 & -1 & b & \frac{bc}{2} \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a & \frac{ac}{2} \\ 0 & -1 & b & \frac{bc}{2} \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & a & \frac{ab}{2} & \frac{ac}{2} \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

biçimlerinden birine sahiptir.

Şimdi, ise R halkası sonlu boyutlu olduğunda, $\mathcal{T}_U(n,R)$ matris halkadaki involutif matrislerin biçimlerinin sayısını belirleyen sonucu verelim.

Sonuç 4.6. R, 1 birimli, involutifleri sadece -1 ve 1 olan bir değişmeli halka olsun. $|R|$, R halkasındaki eleman sayısını göstersin. Bu durumda, n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\mathcal{T}_U(n,R)$ matris halkasındaki üst üçgensel involutif matrislerin biçimlerinin sayısı,

$$\mathcal{N}(n,R)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{\mathrm{k}!(n-k)!}|R|^{k(n-k)}$$

dır.

İspat. Teorem 4.1'e göre, $\mathcal{T}_U(n,R)$'deki üst üçgensel involutif matrislerin sayısı, tam olarak $a_{ii}\neq a_{jj}$ olan köşegen eleman çiftlerinin sayısına bağlıdır. Bu olasılıkları hesaplamak için, $d_i\in\{-1,1\}$, $i=1,\dots,n$ olmak üzere, $d=\begin{bmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}$ vektörünü göz önüne alalım. Δ ile, $i<j$ ve $d_i\neq d_j$ olmak üzere (d_i,d_j) çiftlerinin sayısını gösterelim. $f=\begin{bmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}$, g=$\begin{bmatrix} g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}$, i=$1,\dots,n$ için $f_i,g_i\in\{0,1\}$ ve $f_i\neq g_i$ olmak üzere $d=f-g$ olarak yazılabilir. Δ'nın aynı zamanda $i<j$ ve $f_i\neq f_j$ olan (f_i,f_j) ikililerinin sayısına da eşit olduğunu görmek kolaydır.

F matrisi, i. satır ve j. sütundaki elemanı,

$$f_i(1-f_j)+(1-f_i)f_j=\begin{cases}1, & f_i\neq f_j\\ 0, & f_i=f_j\end{cases} \tag{4.20}$$

olan $n\times n$ boyutlu bir matris olsun. (4.20)'nin sol tarafı, e vektörü, tüm elemanları 1 olan $n-$ boyutlu bir vektör olmak üzere, $F = f(e-f)^T + (e-f)f^T$ olarak yazılabileceğini gösterir. $e^T Fe$ ifadesi, F matrisinin elemanları toplamı, $k = e^T f$ ifadesi f 'deki elemanların toplamı ve $n = e^T e$ olduğu açıktır.

Δ, F 'deki elemanların toplamının yarısına eşit olduğundan,

$$\Delta = \frac{e^T Fe}{2} = \frac{e^T[f(e-f)^T + (e-f)f^T]e}{2} = \frac{(e^T f)[(e-f)^T e] + [e^T(e-d)](d^T e)}{2} = k(n-k)$$

olur. Δ, f 'de görünen 0 ve 1 elemanlarının; dolayısıyla d 'de görünen 1 ve -1 elemanlarının sırasından bağımsızdır. Sonuç olarak, esas köşegen üzerinde k tane 1 elemanının ve $n-k$ tane -1 elemanının her bir düzenlemesi, $|R|^{k(n-k)}$ tane üst üçgensel involutif matrise götürür. Böyle bir düzenlemeyi seçmek için $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ tane yol olduğundan ispat tamamlanır. ■

Bu sonucun, alt üçgensel halkalar üzerinde çalışılması durumunda da değişmeyeceği kolaylıkla söylenebilir. Dolayısıyla burada ele alınan problemin tüm üçgensel halkalar için geçerli olduğu açıktır.

Şimdi ise bulduğumuz bu sonuç ile Örnek 4.3, Örnek 4.4 ve Örnek 4.5'deki matrisleri yeniden değerlendirelim.

Örnek 4.3'de verilen 2×2 boyutlu matrislere bakıldığında, ana köşegen üzerinde 2 tane 1 elemanını içeren 1 tane matris; 2 tane -1 elemanını içeren 1 tane matris ve 1 tane 1 elemanını içerip, 1 tane de -1 elemanını içeren 2 tane matris vardır. Fakat bu son iki matris, üst köşegen üzerinde 1 tane keyfi eleman içerir. Yani toplamda $2+2|R|$ tane 2×2 boyutlu üst üçgensel involutif matris vardır.

Öte yandan, Sonuç 4.6’ e göre, 2×2 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin biçimlerinin sayısının

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(2,R) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{2!}{k!(2-k)!}|R|^{k(2-k)} \\
&= \frac{2!}{0!.2!}|R|^{0} + \frac{2!}{1!.1!}|R|^{1.1} + \frac{2!}{2!.0!}|R|^{0} \\
&= 1+2|R|+1 \\
&= 2+2|R|
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır. Bu durum, Örnek 4.3’ün Sonuç 4.6 ile uyumlu olduğunu ortaya koymaktadır.

Benzer şekilde, Örnek 4.4’te verilen 3×3 boyutlu matrislere bakıldığında, ana köşegen üzerinde 2 tane -1 elemanı ve 1 tane 1 elemanı içeren matris sayısı 3 (üst köşegenler üzerinde ikişer tane keyfi değişken içeren); 1 tane -1 elemanını ve 2 tane 1 elemanını içeren matris sayısı 3 (üst köşegenler üzerinde ikişer tane keyfi değişken içeren); 3 tane 1 elemanını içeren matris sayısı 1 ve 3 tane -1 elemanını içeren matris sayısı 1 dir. Yani, 3×3 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin biçimlerinin sayısı $3|R|^2+3|R|^2+1+1=2+6|R|^2$ dir.

Öte yandan, Sonuç 4.6’e göre,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(3,R) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{3!}{k!(3-k)!}|R|^{k(3-k)} \\
&= \frac{3!}{0!.3!}|R|^{0} + \frac{3!}{1!.2!}|R|^{1.2} + \frac{3!}{2!.1!}|R|^{2.1} + \frac{3!}{3!.0!}|R|^{0} \\
&= 1+3|R|^2+3|R|^2+1 \\
&= 2+6|R|^2
\end{aligned}
$$

olduğu görülmektedir.

Yine benzer şekilde Örnek 4.5'te verilen 4×4 boyutlu matrislere bakıldığında, ana köşegen üzerinde 1 tane -1 elemanı ve 3 tane 1 elemanı içeren matris sayısı 4 (üst köşegenler üzerinde üçer tane keyfi değişken içeren); 2 tane -1 elemanını ve 2 tane 1 elemanını içeren matris sayısı 6 (üst köşegenler üzerinde dörder tane keyfi değişken içeren); 3 tane -1 elemanını ve 0 tane 1 elemanını içeren matris sayısı 4 (üst köşegenler üzerinde üçer tane keyfi değişken içeren); 4 tane 1 elemanını içeren matris sayısı 1 ve 4 tane -1 elemanını içeren matris sayısı 1 dir. Yani, 4×4 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin sayısı $1+4|R|^3+6|R|^4+4|R|^3+1=2+8|R|^3+6|R|^4$ dir.

Öte yandan, Sonuç 4.6'e göre,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(4,R) &= \sum_{k=0}^{4}\frac{4!}{k!(4-k)!}|R|^{k(4-k)} \\
&= \frac{4!}{0!.4!}|R|^{0}+\frac{4!}{1!.3!}|R|^{1.3}+\frac{4!}{2!.2!}|R|^{2.2}+\frac{4!}{3!.1!}|R|^{3.1}+\frac{4!}{4!.0!}|R|^{0} \\
&= 1+4|R|^3+6|R|^4+4|R|^3+1 \\
&= 2+8|R|^3+6|R|^4
\end{aligned}
$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, verilen örnekler, Sonuç 4.6'yı doğrulamaktadır.

Not edelim ki Sonuç 4.6'daki $k(n-k)$ ifadesi, köşegen üzerinde k tane 1 elemanının, $n-k$ tane -1 elemanının bulunduğu matrislerin üst köşegenleri üzerindeki keyfi değişken sayısını ifade etmektedir. Ayrıca 2×2 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin 4 farklı biçiminin, 3×3 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin 8 farklı biçiminin, 4×4 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin 16 farklı biçiminin mevcut olduğu görülmektedir. Bu sayıların, 2^2, 2^3 ve 2^4 sayılarından ibaret olduğu aşikardır. Ayrıca burada, tabandaki 2 sayısı ise $\{-1,1\}$ kümesinin eleman sayısını, kuvvetlerdeki sayılar ise, matrislerin mertebesini belirtir. Bu tip örneklerin $n>4$ tamsayıları için de genişletilebileceği açıkça görülmektedir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMALAR VE ÖNERİLER

İdempotent, involitif ve tripotent gibi özel tipli matrislerin istatistik teorisi, atom ve molekül fiziği gibi birçok alanda uygulamalara sahiptir. Örneğin, istatistik teorisinde ki-kare dağılımı olarak bilinen dağılım bu tip matrisler ile doğrudan ilişkilidir Ayrıca bu tür matrisler lineer modellerde ortaya çıkan normal denklemlerin çözümlerinde de ortaya çıkmaktadır [3,21]. Bundan başka bu türden matrislerle ilgili olan birçok problem alınmış, bu türden açıklamalar da o çalışmalarda not edilmiştir [24,25].

Bu çalışma ve çalışmanın ilham kaynağı olan çalışmanın tam olarak nasıl bir uygulama alanına sahip olabileceği konusu üzerinde durulmamıştır. Her şeyden önce, bu ve benzeri çalışmaların bu yönü ile de ele alınabileceği göz ardı edilmemelidir.

Bu çalışmada ele alınan problem, üçgensel matrisler ile ilgilidir. Öte yandan iyi bilinmektedir ki her matris bir üçgensel matrise denktir. Bu nedenle, çalışmada ele alınan problem, herhangi bir karesel matris için de kullanılışlı olabilir. Ancak çalışmanın sadece üçgensel matrislerin ilgili probleme ilişkin yapı üzerinde teorik bir çalışma olduğunu, uygulanabilirliği üzerinde durulmamış olduğunu vurgulamakta yarar vardır.

Bu tez çalışması aşağıdaki plan çerçevesinde tasarlanarak tamamlanmıştır:

Birinci bölümde, öncelikle üst üçgensel matrislerle ilgili olarak ele alınacak problemin içeriğine ve önemine vurgu yapılmıştır. Sonra ilgili literatür araştırmasının kısa bir özeti verilmiştir. İkinci bölümde, temel tanım, kavram ve bazı temel teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tez konusunun belirlenmesinde esinlenilen [14] çalışması detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Üst üçgensel matris halkalarında idempotent matrislerin karakterizasyonu için bir teorem ve halkanın sonlu boyutlu olması durumunda bu tip matrislerin biçimlerinin sayısını veren bir sonuç verilmiştir. Ayrıca not etmek gerekirse [14] çalışmasında 'birleşmeli halka' kavramı yazar tarafından gelenekselleşmiş 'halka' ifadesi yerine kullanılmıştır. Ancak çalışma boyunca halkanın değişmeli olma özelliği kullanılmıştır. Dolayısıyla kullanılan ifade ya 'değişmeli halka' olmalıydı ya da halkanın değişmeli olduğu vurgulanmalıydı. Bu sebeple, hem [14] çalışmasının anlatıldığı bu bölümünde ve hem de kendi çalışmamızın anlatıldığı sonraki bölümde 'değişmeli halka' tabirinin kullanılması uygun görülmüştür.

Dördüncü bölümde ise çalışmanın esas amacı olan, üçgensel matris halkalarında involutif matrislerin karakterizasyonu problemi, esinlendiğimiz çalışmaya benzer bir yöntemle ele alınmıştır. Tekrar yinelemek isteriz ki, yaptığımız çalışma aslında alt üçgensel halkalar için de geçerlidir. Çünkü alınan bir B matrisi alt üçgensel bir matris ise, transpozesi olan B^T matrisi üst üçgensel olur. Teorem 4.6'e göre B^T matrisinin involutif olması için, elemanların sağlaması gereken koşullar bellidir. Buradan da B matrisinin elemanları yorumlanabilir. Böylece rahatlıkla söyleyebiliriz ki burada ele alınan problem tamamen üçgensel matris halkalarıyla ilgilidir.

Halkanın sonlu olması durumunda involutif matrislerin sayısını bulmak için elde edilen formül ise Sonuç 4.6' da verilmiştir. Bu ifadede yer alan $k(n-k)$ ifadesi, ana köşegen üzerinde k tane 1'in, $n-k$ tane -1'in bulunduğu matrislerin üst köşegenleri üzerindeki keyfi değişken sayısını ifade etmektedir. Ayrıca alt üçgensel matris halkalarında çalışılması durumunda da bu sayının da değişmeyeceği aşikardır. Dolayısıyla burada elde edilen sonucun da tamamen üçgensel matris halkalarıyla ilgili olduğu söylenebilir. Bu ifade [14] çalışmasında vurgulanmamasına rağmen, bu düşüncenin orada da geçerli olduğu açıktır.

Ayrıca Örnek 4.2, Örnek 4.3, Örnek 4.4'e baktığımızda, 2×2 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin 4 farklı biçiminin, 3×3 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin 8 farklı biçiminin, 4×4 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin 16

farklı biçiminin mevcut olduğu görülmektedir. Bu sayıların, $2^2, 2^3$ ve 2^4 sayılarından ibaret olduğu aşikardır. Ayrıca burada, tabandaki 2 sayısı ise $\{-1,1\}$ kümesinin eleman sayısını, kuvvetlerdeki sayılar ise, matrislerin mertebesini belirtmektedir. Verilen örnekler n tamsayısının 4'ten büyük olduğu durumlar için de genişletilebilir.

İyi bilinir ki, bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin bir tripotent matris olması için gerek ve yeter koşul $M = X - Y$ olacak şekilde iki ayrık idempotent X ve Y matrislerinin mevcut olmasıdır. Ayrıca, bu matrisler $X = \frac{1}{2}(M^2 + M)$ ve $Y = \frac{1}{2}(M^2 - M)$ şeklinde tek türlü olarak belirlidir [22]. Bu gerçekler göz önüne alındığında, tezde ele alınan çalışmanın tripotent $(A^3 = A)$ matrislere de genişletilebileceğine dikkat edilmelidir. Aynı problem quadri-potent $(A^4 = A)$ matrisler için de ele alınabilir Ancak bu durumlarda, benzer şekilde ilerlendiğinde, işlemlerde daha kabalık olacağı muhakkaktır. Belki farklı bir yaklaşımla yaklaşılabilmesi durumunda bu kabalıktan da kurtulmak mümkün olabilir. Bu yönüyle de benzer problemler incelemeye değerdir.

Bu çalışmada elde edilmiş ve yukarıda belirtilen durumlarda elde edilebilecek sonuçlar teorik açıdan önemlidir. Bütün bunların reel problemlere uygulanabilirliği ve sağlayacağı yararlar da ayrıca araştırmaya değerdir.

KAYNAKLAR

[1] Essays, UK. Application of Matrices in Real-Life. https://www.ukessays.com/essays/mathematics/application-of-mathices-in-real-life-problems.php Erişim Tarihi:13.07.2020

[2] Harville, D. A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer-Verlag,New York, 1997.

[3] Johnson, R. A. ve Wichern, D. W., Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.

[4] Brogan, W., Modern Control Theory, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1991

[5] Hannah J., O'Meara K.C., Products of Simultaneously Triangulable Idempotent Matrices, Linear Algebra and its Applications, 149, 185-190, 1991.

[6] Fošner, A., Automorphisms of the poset of upper triangular idempotent matrices, Linear and Multilinear Algebra, 53(1), 27-44, 2005.

[7] Chen, J., Wang, Z., Zhou, Y., Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit that commute, Journal of Pure and Applied Algebra, 213, 215–223, 2009.

[8] Ying, Z., Koşan, T., and Zhou,Y., Rings in which Every Element is a Sum of Two Tripotents, Canad. Math. Bull., 59(3), 661–672, 2016.

[9] Sheibani, M. and Huanyin, C., Rings over which every matrix is the sum of a tripotent and a nilpotent, https://arxiv.org/abs/1702.05605

[10] Zhou, Y., Rings in which elements are sums of nilpotents, idempotents and tripotents, Journal of Algebra and Its Applications, 17(1), 1850009 (7 pages), 2018.

[11] Danchev, P.V., Rings whose elements are sums of three or minus sums of two commuting idempotents, Albanian Journal of Mathematics,12(1), 3–7, 2018.

[12] Cheraghpour, H. and Ghosseiri, Nader M., On the idempotents, nilpotents, units and zerodivisors of finite rings, Linear and Multilinear Algebra, 67(2), 327–336, 2019.

[13] Tang, G., Zhou, Y.,and Su, H., Matrices over a commutative ring as sums of three idempotents or three involutions, Linear and Multilinear Algebra, 67(2), 267–277, 2019.

[14] Hou, X., Idempotents in Triangular Matrix Rings, Linear and Multilinear Algebra, https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1596223 Erişim Tarihi: 14.03.2020

[15] Hirano, Y. and Tominaga, H., Rings in which every element is the sum of two idempotents, Bull. Austral. Math. Soc., 37(2),161-164, 1988.

[16] de Seguins C. Pazzis, On sums of idempotent matrices over a field of positive characteristic, Linear Algebra Appl.,433(4), 856–866, 2010.

[17] Bayraktar, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Gazi Kitabevi, 2006

[18] Zhang, F., Matrix Theory, Basic Results and Techniques, Springer, New York, 2011

[19] Venit, S., W., Elementary Linear Algebra, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1985.

[20] Horn, R. A. ve Jhonson, C. R., Matrix Analysis, 2. Baskı, Cambrige University Press, New York, 2013

[21] Graybill, F. A., Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company, California, 1983.

[22] Rao, C. R. ve Mitra, S. K., Generalized Inverse of Matrices and its Applications, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1971.

[23] Seber, G. A. F., A Matrix Handbook for Statisticians, John Wiley & Sons. Inc., Hoboken, New Jersey, 2008.

[24] Özdemir, H., Sarduvan, M., Özban, A. Y. ve Güler, N., On Idempotency and Tripotency of Linear Combinations of Two Commuting Tripotent Matrices, Appl. Math. Comput., 207(1): 197-201, 2009.

[25] Sarduvan, M. ve Özdemir, H., On Linear Combinations of Two Tripotent, Idempotent, and Involutive Matrices, Appl. Math. Comput., 200(1): 401-406, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Leman HOCAOĞLU, 01.08.1980 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Ankara'da tamamladı. 2003 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimini tamamlayarak mezun oldu. 2004 yılında Başkent Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Orta Öğretim Alan Öğretmenliğinde Matematik Öğretmenliği tezsiz yüksek lisans programından mezun oldu. Özel eğitim kurumlarında bir süre matematik öğretmenliği yaptıktan sonra Milli Eğitim Bakanlığı'nda kadrolu matematik öğretmeni olarak görevine başladı. 2017 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kaydoldu. Halen Sakarya'da matematik öğretmenliği görevini sürdürmektedir.