

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**REGÜLER YÜZEY EĞRİSİ ÜZERİNDEKİ  
HAREKETTE JERK KAVRAMI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Merve HIZARCIOĞLU**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Murat TOSUN**

**Ağustos 2020**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REGÜLER YÜZEY EĞRİSİ ÜZERİNDEKİ  
HAREKETTE JERK KAVRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve HIZARCIOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 12.08.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.  
Murat TOSUN  
Jüri Başkanı

Prof. Dr.  
Mehmet Ali GÜNGÖR  
Üye

Doç. Dr.  
Osman Zeki OKUYUCU  
Üye

## **BEYAN**

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Merve HIZARCIOĞLU

12.08.2020

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimin boyunca bilgi ve tecrübesiyle bana destek olan, tezimin planlama aşamasından yazım aşamasına kadar yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Murat TOSUN'a Őükran ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam sırasında bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e ve bağımsız araştırmacı Dr. Kahraman Esen ÖZEN'e teşekkür ederim.

Hayatımın her anında desteklerini yanımda hissettiğim, benim için her zaman en iyisini isteyen değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR .....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	iv
ÖZET .....	v
SUMMARY .....	vi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR .....	4
BÖLÜM 3.	
UZAY EĞRİSİ BOYUNCA HAREKETTE JERK VEKTÖRÜ.....	18
BÖLÜM 4.	
REGÜLER YÜZEY EĞRİSİ BOYUNCA HAREKETTE JERK VEKTÖRÜ.....	24

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$E^n$	: n-boyutlu Öklid uzay
$\langle , \rangle$	: Öklid iç çarpımı
$\  \ $	: Norm
<b>T</b>	: Teğet vektör
<b>N</b>	: Asli normal vektör
<b>B</b>	: Binormal vektör
$\kappa$	: Eğrilik
$\tau$	: Burulma
$\omega$	: Darboux vektörü
$H_O$	: $O$ noktasında açısal momentum
$I$	: Reel Öklid uzayında bir açık aralık
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$k_n$	: Normal eğrilik
$k_g$	: Jeodezik eğrilik
$\tau_g$	: Jeodezik torsiyon
$T_t$	: Teğet bileşen
$T_r$	: Birinci radyal bileşen
$T_{r^*}$	: İkinci radyal bileşen

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Eğri .....	5
Şekil 2.2. Parametre değişimi .....	5
Şekil 2.3. Yay uzunluğu .....	6
Şekil 2.4. Yönlü açı .....	13
Şekil 2.5. Maddesel noktanın yer vektörü .....	14
Şekil 2.6. Maddesel noktanın hız vektörü .....	15
Şekil 2.7. Hız değişimi .....	15
Şekil 2.8. Moment .....	16
Şekil 2.9. Açısal momentum vektörü .....	17
Şekil 3.1. P parçacığının bir uzay eğrisi boyunca hareketi.....	19
Şekil 4.1. P parçacığının regüler yüzey eğrisi boyunca hareketi .....	27
Şekil 4.2. P parçacığının dairesel helis boyunca hareketi .....	32

## ÖZET

Anahtar kelimeler: Siacci Teoremi, Regüler Yüzey Eğrisi, Darboux Çatısı, Jerk Vektörü

Bu tez dört bölüm içermektedir. İlk bölüm giriş bölümü olup, literatür bilgisine ayrılmıştır.

İkinci bölümde matematiksel ve fiziksel temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir uzay eğrisi boyunca harekette jerk vektörü üzerine [11] de verilen teori tanıtılmıştır.

Son bölüm tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde jerk vektörü üzerine [11] de verilen teori regüler yüzey eğrileri için çalışılmıştır. Ayrıca, aydınlatıcı bir örneğe de yer ayrılmıştır.



# **THE CONCEPT OF JERK IN MOTION ALONG REGULAR SURFACE CURVE**

## **SUMMARY**

Keywords: Siacci's theorem, Regular surface curve, Darboux frame, Jerk vector

This study includes four sections. The first section is an introduction devoted to the literature knowledge.

In the second section, mathematical and physical basic concepts are given.

In the third chapter, the theory, which is given in [11] about the jerk vector in motion along a space curve, is introduced.

The last section constitutes the original part of the thesis. In this section, the theory given on the jerk vector in [11] is studied for regular surface curves. In addition, an illustrative example is given.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kinematikte, 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın zaman parametresine göre hızının değişimi ivmeyi verir. İvme vektörü genellikle teğet ve normal bileşenlerinin toplamı şeklinde yazılır. Bu yazım şekli pek çok uygulamada yarar sağlar. Fakat açısal momentumun korunduğu hareketlerde durum biraz farklıdır. Bu defa ivme vektörünü birbirine dik olması gerekmeyen teğet ve radyal bileşenlerinin toplamı şeklinde yazmak daha faydalı ve kullanışlıdır. İvme vektörünü bu şekilde teğet ve radyal bileşenler boyunca elde etme başarısı italyan matematikçi Francesco Siacci'ye aittir [1]. F. Siacci bu çalışmasında kendinden sonra Siacci teoremi olarak adlandırılacak olan ünlü teoremini vermiş ve ispatlamıştır.

F. Siacci'nin ardından bu konu üzerine eğilen ilk isim E. T. Whittaker olmuştur. E. T. Whittaker 1937 yılında gerçekleştirdiği çalışmasında düzlemde Siacci teoremini geometrik olarak ispatlamıştır [2]. N. Grossman 1996 yılında [3] de E. T. Whittaker'ın ispatından daha modern bir ispat sunmayı başarmıştır. Daha sonra, F. Siacci'nin formüllerinin ve ispatının oldukça ağır olduğunu düşünen İngiliz fizikçi James Casey ifadeleri basitleştirmek adına Siacci teoremini Serret-Frenet formüllerine dayalı uzayda ele almıştır [4]. Günümüze en yakın çalışmalardan birini ise türk matematikçiler Z. Küçükarslan, M. Y. Yılmaz ve M. Bektaş gerçekleştirmiştir [5]. Yazarlar bu çalışmada Finsler manifoldu üzerinde yatan eğriler için Siacci teoremini ifade ve ispat etmişlerdir. Onların ardından bu konuya türk matematikçiler eğilmeye devam etmiştir. İlk olarak K. E. Özen [6] da, 1. ve 2. tip Bishop çatıları için Siacci teoremini ele almıştır. İkinci olarak, K. E. Özen, M. Tosun ve M. Akyiğit [7] de, bir parçacığın regüler yüzey eğrisi boyunca hareketi için Siacci teoremini Darboux çatısına göre incelemiştir. Daha sonra, [8] de K. E. Özen, M. Güner ve M. Tosun Siacci teoremini modifiye ortogonal çatı ile donatılmış uzayda

ele almıştır. Son olarak, K. E. Özen [9] da 3 boyutlu Minkowski uzayında Frenet eğrileri için Siacci teoremini ifade ve ispat etmiştir.

Kinematikte, en az ivme vektörü kadar önemli olan kavramlardan biri de jerk vektörüdür. Jerk vektörü, ivme vektörünün zamana göre türevinin alınmasıyla elde edilir. Bu durumun bir sonucu olarak, jerkin büyümesi ivmede ve kuvvette kısa sürede büyük bir değişime neden olur. Bu değişim makinalarda darbe yükü veya şok meydana getirir. Dolayısıyla, ulaştırma yapılarının genel tasarımında hız ve konforun artmasını sağlayan önemli faktörlerden biri jerk'tir.

Fiziğin mekanik alanında, dinamik hareketler incelenirken jerk hesaplamalarına gerek duyulmaktadır. Bunun sebebi, bir hareketin yıkıcı etkisini hesaplarken ivmenin büyük oranda değişmesinin bu hareket etkisindeki tüm cisimlerin üzerine etkileyen kuvveti de büyük ölçüde değiştirmesidir. Hareketli araçların tasarımını yapan mühendislerin bu nedenle belirli jerk değerleri tanımlamaları gerekir. Hareket halindeki bir aracın ivme değişiminin yolcuların konforuna etkisinin hesaplanması gibi özel durumlarda da jerk değeri kullanılır. Bir tren tasarlarken mühendisler yolcuların konforu için jerk değerini  $2\text{m/s}^3$ 'ten daha az bir değerde tutmak ister ve trenin yüksek değerde jerk ile hareket etmemesi için ivme artış limitleri belirler. Diğer yandan, hassas aletlerin zarar görmemesi için de jerkin belirlenen limitler arasında tutulması gerekir [10]. Havacılık endüstrisinde bu nedenle jerkmeter adı verilen jerk ölçen bir alet kullanılmaktadır. Araç ve makinaların hızlarının giderek arttığı günümüzde jerkin önemi de giderek artmaktadır.

3-boyutlu Öklid uzayında, bir eğri boyunca hareket eden parçacığın jerk vektörü genellikle teğet, normal ve binormal bileşenlerinin toplamı şeklinde yazılır [11]. Ancak, F. Siacci'nin ivme vektörünü teğet ve radyal doğrultularda elde ederken izlediği yolu takip eden K. E. Özen, M. Tosun ve F. S. Dünder yakın geçmişte jerk vektörünü teğet ve radyal doğrultular boyunca elde etmeyi başarmıştır [12]. F. Siacci'nin ivme vektörü üzerine öne sürdüğü teoremin ardından gerçekleştirilen çalışmalardan esinlenen bazı yazarlar, jerk vektörü üzerine öne sürülen bu son

teorinin ardından benzer yaklaşımlar ile bir çok çalışma gerçekleştirmiştir. Bu teori üzerine çalışmalar [8], [13] ve [14] de sırasıyla, modifiye ortogonal çatı ile donatılmış uzay üzerinde, Bishop çatısı ile donatılmış uzay üzerinde ve Darboux çatısı ile donatılmış regüler yüzey üzerinde gerçekleştirilmiştir.

Regüler bir eğrinin, belirli bir noktasındaki teğet, asal normal ve binormal birim vektörlerinden oluşan çatıya Serret-Frenet çatısı adı verilir. Bir çok araştırmacı regüler eğrilerin özelliklerini incelemek için Serret-Frenet çatısını kullanır. Fakat, söz konusu olan regüler eğri regüler bir yüzey üzerinde yatıyorsa, bu defa bu incelemeyi Darboux çatısını kullanarak yapmak Serret-Frenet çatısına göre fazladan pek çok imkan sunar.

Regüler bir yüzey üzerinde alınan regüler bir eğrinin herhangi bir noktasında tanımlanan Serret-Frenet çatısına ilaveten, o noktada, eğrinin birim teğet vektörünün, yüzeyin birim normal vektörünün ve jeodezik birim normal vektörün oluşturduğu Darboux çatısı tanımlıdır. Teğetleri ortak olan bu iki çatının diğer vektörleri aynı düzlemedir. Bu iki çatının ayrıtlarını teşkil eden birim vektörler, eğrinin o noktadaki teğeti ve türevlerinden meydana gelse de, diğer taraftan her bir ayrıtlın türevi, bu ayrıtlın Darboux ani dönme vektörü ile vektörel çarpımına eşittir.

Darboux çatısı üzerine günümüze değin pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların bazıları [15-21] de bulunabilir.

Bu tezde, Serret-Frenet ve Darboux çatıları arasında var olan, yukarıda kısaca bahsedilen ilişkiden yararlanılmış ve jerk vektörü üzerine [12] de verilen teori regüler yüzey eğrileri için çalışılmıştır. Ayrıca, teoriyi aydınlatıcı bir örneğe de yer verilmiştir.

## BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde temel geometrik kavramlara ve çalışmanın orjinal kısmı için faydalı olacağı öngörülen bazı fiziksel kavramlara değinilmiştir.

**Tanım 2.1.**  $A$  boş olmayan bir cümle,  $V$  ise  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir  $f : A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu

- (i)  $\forall P, Q, R \in A$  için  $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$
- (ii)  $\forall P \in A$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $f(P, Q) = \alpha$  olacak biçimde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır.

önergelerini sağlıyorsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş afin uzay denir [22].

**Tanım 2.2.**  $A$  bir reel afin uzay ve  $A$  nın birleştiği vektör uzayı da  $V$  olsun.  $V$  uzayında bir iç çarpım işlemi

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \{x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)\}$$

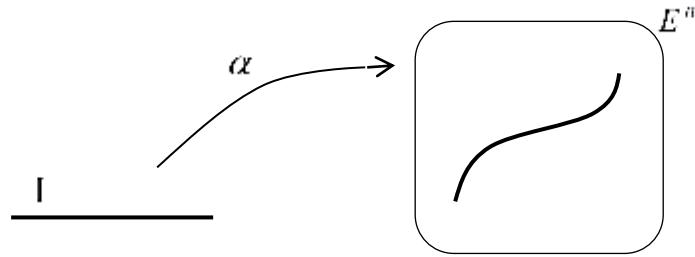
şeklinde tanımlanırsa  $A$  afin uzayına  $n$ -boyutlu Öklid uzayı adı verilir ve  $E^n$  ile gösterilir. Buradaki iç çarpıma da Öklid iç çarpımı denir [22].

**Tanım 2.3.**  $E^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında  $X, Y, Z$  gibi üç farklı nokta seçilsin.  $\overrightarrow{XY}$  ve  $\overrightarrow{XZ}$  vektörleri arasındaki  $\theta \in R$  açısı,  $0 \leq \theta \leq \pi$  olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \|\overrightarrow{XZ}\|}$$

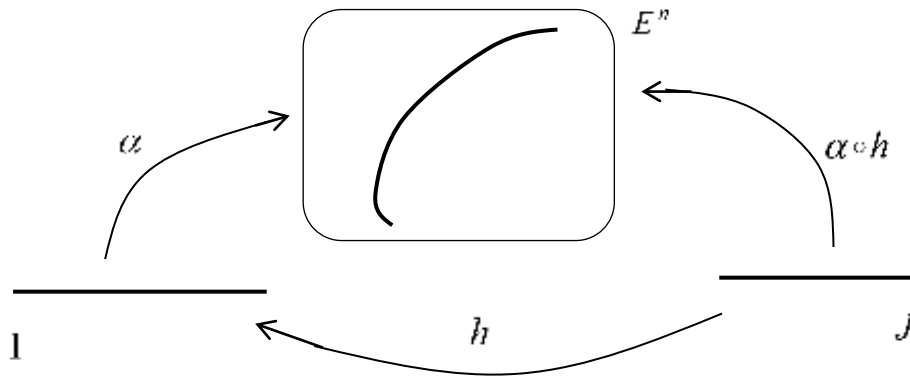
eşitliği yardımıyla tanımlanır [23].

**Tanım 2.4.**  $I, R$  nin bir açık aralığı olmak üzere  $\alpha: I \rightarrow E^n$  biçiminde düzgün ( $C^\infty$  sınıfından) bir  $\alpha$  dönüşümüne,  $E^n$  de bir eğri  $(I, \alpha)$  ya da eğrinin koordinat komşuluğu denir [24].



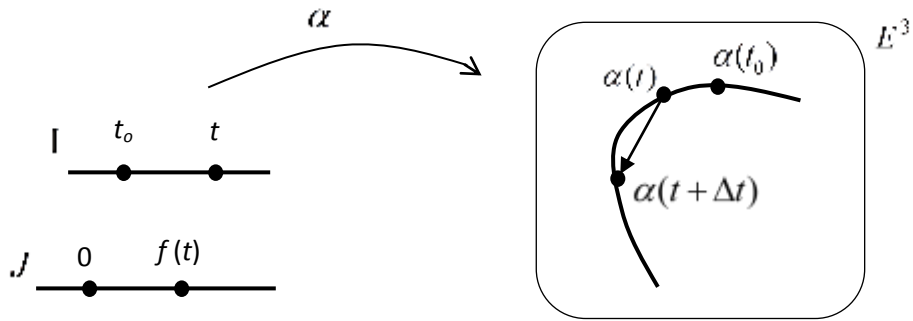
Şekil 2.1. Eğri (Sabuncuoğlu, 2010)

**Tanım 2.5.**  $\alpha: I \rightarrow E^n$  bir eğri olsun.  $J$  bir açık aralık olmak üzere, bir  $h: J \rightarrow I$  difeomorfizmine,  $\alpha$  eğrisi için bir parametre dönüşümü denir. Diğer yandan  $\alpha \circ h$  eğrisine de  $\alpha$  eğrisinin  $h$  ile yeniden parametrelendirilmiş denir [24].



Şekil 2.2. Parametre değişimi (Sabuncuoğlu, 2010)

**Tanım 2.6.**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisi verilsin.  $t_0 \in I$  için eğri üstünde  $\alpha(t_0)$  noktasından başlayarak yay uzunluğunu ölçmeye başlayalım.  $t < t_0$  olmak üzere  $\alpha(t_0)$  ve  $\alpha(t)$  noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğunun negatifi  $f(t)$  olsun.  $t=0$  için  $f(t)=0$  olarak tanımlayalım.  $t_0 < t$  olmak üzere  $\alpha(t_0)$  ve  $\alpha(t)$  noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğunu  $f(t)$  ile gösterelim. Böylece  $I$  aralığından  $R$  ye giden  $f : t \rightarrow f(t)$  fonksiyonu tanımlanmış olur ve  $f$  fonksiyonu,  $\alpha$  eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu olarak adlandırılır [24].



Şekil 2.3. Yay uzunluğu (Sabuncuoğlu, 2010)

**Teorem 2.7.**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu  $f$  ile verilmek üzere

$$f' = \|\alpha'\|$$

eşitliği sağlanır [24].

**Teorem 2.8.**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu  $f$  ile verilmek üzere

$$f(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

eşitliği sağlanır [24]

**Teorem 2.9.**  $\alpha: I \rightarrow E^n$  eğrisi düzenli bir eğri ise her bir  $s \in J$  için  $\|(\alpha \circ h)'\| = 1$  olacak biçimde bir  $h: J \rightarrow I$  parametre dönüşümü vardır [24].

**Sonuç 2.10.**  $E^n$  uzayındaki düzenli bir eğri, birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendirilebilir [24].

**Tanım 2.11.**  $\alpha: I \rightarrow E^n$  eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu  $f$  ile verilsin.

$$f'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1$$

ise  $\alpha$  eğrisine birim hızlı eğri,  $t$  yay parametresine de yay parametresi adı verilir [24].

**Tanım 2.12.**  $E^3$  uzayındaki  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisi için

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle tanımlı  $\mathbf{T}(s)$  vektörü  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birim teğet vektörü olarak adlandırılır [24].

**Tanım 2.13.**  $E^3$  uzayındaki  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisi için

$$\begin{aligned} \kappa: I &\rightarrow R, \\ s &\rightarrow \kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| \end{aligned}$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu adı verilir.  $\kappa(s)$  sayısına da eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği adı verilir [25].



**Tanım 2.14.**  $E^3$  uzayındaki  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisi için

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{T}'(s)$$

eşitliğiyle tanımlı  $\mathbf{N}(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birinci dik vektörü (asli normal) denir [24].

**Tanım 2.15.**  $E^3$  uzayında  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisi için

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s)$$

eşitliğiyle verilen  $\mathbf{B}(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki ikinci dik vektörü (binormal) denir [24].

**Tanım 2.16.**  $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$  vektörlerine  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri denir. Diğer yandan,  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$  vektör kümesine  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet çatısı denir [24].

**Tanım 2.17.**  $E^3$  uzayındaki  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları  $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$  ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} \tau : I &\rightarrow R \\ s &\rightarrow \tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu,  $\tau(s)$  reel sayısına da eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki burulması denir [25].

**Teorem 2.18.**  $E^3$  uzayındaki  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$  olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır [25]:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -\tau \mathbf{N}\end{aligned}$$

**Tanım 2.19.**  $E^3$  uzayındaki  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$  olsun.  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$  vektör kümesinin gerdiği düzleme  $\alpha(s)$  noktasındaki oskulator düzlem veya dokunum düzlemi,  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s)\}$  vektör kümesinin gerdiği düzleme  $\alpha(s)$  noktasındaki rektifiyan düzlem veya doğrultma düzlemi,  $\{\mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$  vektör kümesinin gerdiği düzleme  $\alpha(s)$  noktasındaki normal düzlem veya dik düzlem denir [24].

**Teorem 2.20.** Genel parametreyle parametrelendirilmiş bir  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ \mathbf{B} &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}\end{aligned}$$

dir. Eğrilik ve burulma fonksiyonları  $\kappa$  ve  $\tau$  ise aşağıdaki gibi tanımlıdır [24]:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\ \tau &= \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}.\end{aligned}$$

**Tanım 2.21.** Eğer bir eğrinin tüm noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye düzlemseldir denir [26].

**Teorem 2.22.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisi düzlemsel ise  $\tau=0$  dır ve eğrinin her bir noktasındaki dokunum (oskültör) düzlemi, eğrinin içinde bulunduğu  $E$  düzlemidir [24].

**Tanım 2.23.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisi verilsin.  $\forall s \in I$  için  $\alpha'(s)$  hız vektörü, bir  $U$  sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa,  $\alpha$  eğrisine bir genel helis (eğilim çizgisi),  $S_p \{U\}$  ya da  $\alpha$  nın eğilim eksenini denir [22].

**Tanım 2.24.**  $\alpha: I \rightarrow E^n$  eğrisi verilsin.  $\forall s \in I$  ya karşılık gelen  $\alpha(s)$  noktasında  $\alpha$  nın eğriliği ve burulması  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$  ise

$$H: I \rightarrow R$$

$$s \rightarrow H(s) = \frac{\kappa(s)}{\tau(s)}$$

biçiminde tanımlanan  $H$  fonksiyonuna,  $\alpha$  nın  $\alpha(s)$  noktasındaki birinci harmonik eğriliği denir [22].

**Teorem 2.25.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisi verilsin. Bu durumda

$$\alpha \text{ bir genel helisdir} \Leftrightarrow \forall s \in I \text{ için } H(s) = \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \text{sabittir}$$

Özel olarak  $\kappa$  ve  $\tau$  değerleri sabit ise eğri bir silindirik helistir [27].

Buraya kadar verilen bütün kavramlar Öklid uzayında ele alındı. Buradan itibaren verilecek kavramlar  $E^3$  te bir  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha: I \rightarrow M$  birim hızlı eğrisi için verilecektir.

**Tanım 2.26.**  $U, R^2$  uzayının irtibatlı (bağlantılı) bir açık alt kümesi ve  $\varphi: U \rightarrow R^3$  düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun.  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  dönüşümü bir homeomorfizm ise  $R^3$  uzayında  $\varphi(U)$  kümesine basit yüzey adı verilir [24].

**Tanım 2.27.**  $R^3$  uzayının bir  $M$  alt kümesi verilsin.  $M$  nin her bir  $p$  noktası için  $p \in \varphi(U)$  ve  $\varphi(U) \subset M$  olacak şekilde bir  $\varphi(U)$  basit yüzeyi mevcutsa  $R^3$  uzayında  $M$  kümesine yüzey adı verilir [24].

**Tanım 2.28.**  $E^3$  te bir  $M$  yüzeyi üzerinde bir  $\alpha: I \rightarrow M$  birim hızlı eğrisi verilsin. Yüzeyin birim dik vektör alanı  $\mathbf{U}$  olsun.  $\alpha$  eğrisinin birim teğet vektör alanı  $\mathbf{T}$  olmak üzere

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{Y}$$

eşitliğiyle belirli  $\mathbf{Y}$  vektör alanını dikkate alalım. Vektörel çarpımın sağladığı özellikler gereğince  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{Y}(s), \mathbf{U}(s)\}$  kümesi,  $T_{\alpha(s)}E^3$  uzayının bir tabanı olur. Bu tabana,  $(\alpha, M)$  eğri yüzey ikilisinin Darboux çatısı adı verilir [24].

**Tanım 2.29.**  $E^3$  uzayındaki  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrinin Frenet vektör alanları  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  ve Darboux vektör alanları  $\{\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{U}\}$  olmak üzere bu iki çatı arasındaki ilişki matris formunda

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

ile verilir. Burada  $\varphi$  açısı,  $\mathbf{Y}$  ile  $\mathbf{N}$  arasındaki ve  $\mathbf{U}$  ile  $\mathbf{B}$  arasındaki açıdır [28].

**Tanım 2.30.**  $\alpha : I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$k_n(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{U}(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli  $k_n(s)$  sayısına,  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki normal eğriliği denir [28].

**Tanım 2.31.**  $\alpha : I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{Y}(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli  $k_g(s)$  sayısına,  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki jeodezik eğriliği denir [28].

**Tanım 2.32.**  $\alpha : I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$\tau_g(s) = -\langle \mathbf{U}'(s), \mathbf{Y}(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli  $\tau_g(s)$  sayısına,  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki jeodezik torsiyonu denir [28].

**Tanım 2.33.**  $\alpha: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olmak üzere  $k_n, k_g, \tau_g$  fonksiyonları  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri olarak adlandırılır [24].

**Teorem 2.34.**  $\alpha, M$  üzerinde birim hızlı bir eğri olsun.  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri  $k_g, k_n, \tau_g$  olduğuna göre

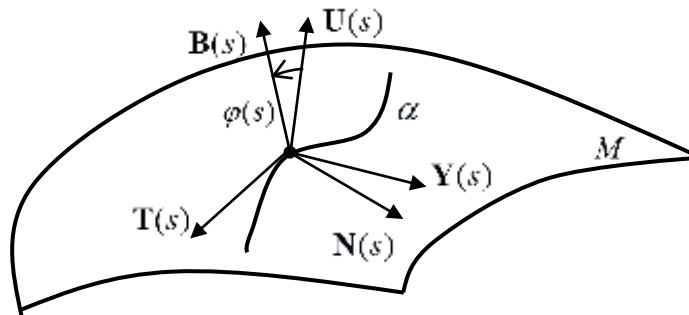
$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= k_g \mathbf{Y} + k_n \mathbf{U} \\ \mathbf{Y}' &= -k_g \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{U} \\ \mathbf{U}' &= -k_n \mathbf{T} - \tau_g \mathbf{Y}\end{aligned}$$

dir [28].

**Teorem 2.35.** Birinci kenarı  $\mathbf{U}(s)$  ikinci kenarı  $\mathbf{B}(s)$  olan yönlü açının ölçüsü  $\varphi(s)$  olsun (Şekil 2.4.). Bu durumda

$$\begin{aligned}k_n &= k \sin \varphi \\ k_g &= k \cos \varphi \\ \tau_g &= \tau - \varphi'\end{aligned}$$

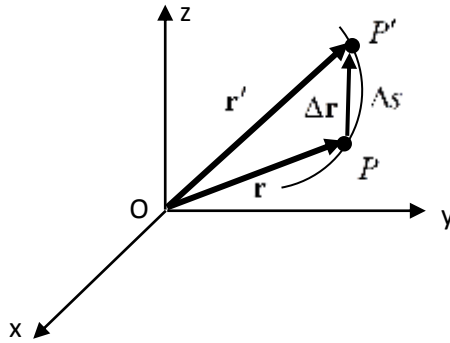
dir [24].



Şekil 2.4. Yönlü açı (Sabuncuoğlu, 2010)

Bir maddesel nokta, doğrusal olmayan bir çizgi üzerinde hareket ediyorsa nokta eğrisel hareket yapıyor denir. Noktanın verilen bir  $t$  zamanında bulunduğu  $P$  yerini tanımlamak için Şekil 2.5.'deki gibi eksenleri sabit bir dik koordinat sistemi seçilir ve  $O$  başlangıç noktasını  $P$  ye bağlayan  $\mathbf{r}$  vektörü çizilir.  $\mathbf{r}$  vektörü,  $r$  şiddeti ile ve koordinat eksenlerine göre doğrultusu ve yönü ile tanımlandığından noktanın yerini bu eksenlere göre tam belirtmiş olur. Bu  $\mathbf{r}$  vektörüne, noktanın  $t$  anındaki yer vektörü denir.

Şimdi aynı noktanın,  $t + \Delta t$  zamanında bulunduğu  $P'$  yerini tanımlayan  $\mathbf{r}'$  vektörünü göz önüne alalım.  $P$  ile  $P'$  noktalarını birleştiren  $\Delta \mathbf{r}$  vektörü, yer vektörünün  $\Delta t$  zaman aralığındaki değişimini gösterebilir (Şekil 2.5.).



Şekil 2.5. Maddesel noktanın yer vektörü (Tameroğlu ve Özbek, 1972)

Maddesel noktanın  $t$  anındaki ani hızı,  $\Delta t$  zaman aralıklarını ve  $\Delta \mathbf{r}$  vektör artımlarını gittikçe küçülterek elde edilir. Böylece ani hız;

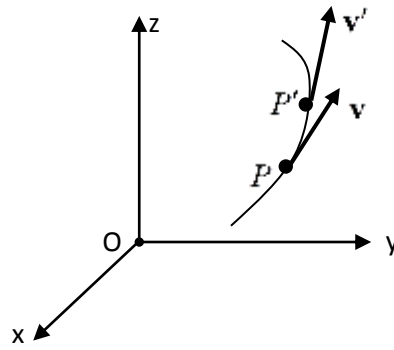
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

vektörü ile elde edilir.  $\Delta t$  ve  $\Delta \mathbf{r}$  küçüldükçe,  $P$  ve  $P'$  noktaları birbirine yaklaşır. Bu durumda  $\mathbf{v}$  vektörü limitte maddesel noktanın yörüngesine teğet olur.  $\mathbf{v}$  vektörünün şiddeti olan  $v$  ye maddesel noktanın yörünge hızı adı verilir ve yörünge

hızı denkleminde  $\Delta \mathbf{r}$  vektörünün yerine,  $PP'$  kirişinin uzunluğunu koyarak elde edilebilir.  $\Delta t$  azaldıkça,  $PP'$  kirişinin boyu  $PP'$  yayının  $\Delta s$  boyuna yaklaşır (Şekil 2.5.). Dolayısıyla

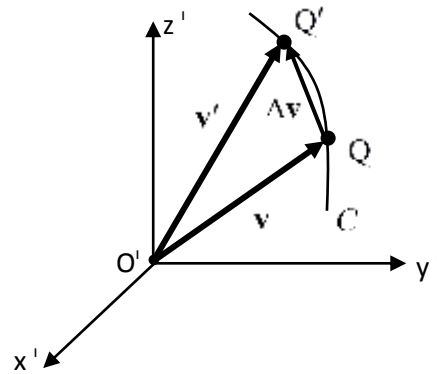
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

yazılabilir.



Şekil 2.6. Maddesel noktanın hız vektörü (Tameroglu ve Özbek, 1972)

Maddesel noktanın  $t$  anındaki  $\mathbf{v}$  hızı ile  $t + \Delta t$  anındaki  $\mathbf{v}'$  hızını göz önüne alalım (Şekil 2.6.).  $\mathbf{v}$  ve  $\mathbf{v}'$  vektörlerini aynı  $O'$  başlangıç noktasına taşıyalım (Şekil 2.7.).  $Q$  ve  $Q'$  noktalarını birleştiren  $\Delta \mathbf{v}$  vektörü,  $\Delta t$  zaman aralığında maddesel noktanın hızındaki değişmeyi gösterir. Şekil 2.7.' de gösterilen  $C$  eğrisi maddesel noktanın ani hız vektörlerinin uçlarının çizdiği eğridir.



Şekil 2.7. Hız değişimi (Tameroglu ve Özbek, 1972)



Maddesel noktanın  $t$  zamanındaki ani ivmesi,  $\Delta t$  ve  $\Delta \mathbf{v}$  yi gittikçe küçülterek elde edilir. Böylece ani ivme

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

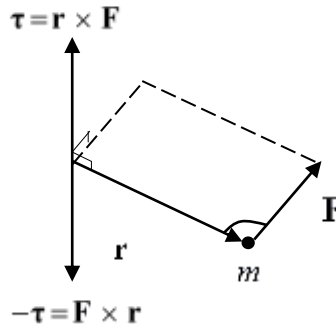
vektörü ile verilir [29].

**Tanım 2.36.** Bir  $\mathbf{F}$  kuvvetinin etkisinde bulunan bir  $m$  maddesel noktasını göz önüne alalım. Newton'un ikinci kanunu olan  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  formülünde  $\mathbf{a}$  ivme vektörü yerine  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  yazılırsa,  $\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  elde edilir.  $m$  kütlesi sabit olduğundan son eşitlikten

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

yazılabilir.  $m\mathbf{v}$  vektörüne, maddesel noktanın doğrusal momentumu veya yalnızca momentumu denir [29].

**Tanım 2.37.** Bir  $\mathbf{F}$  kuvvetinin seçilen bir eksene göre döndürme etkisine moment adı verilir. Matematiksel ifadelere göre moment, yer vektörü ile kuvvet vektörünün vektörel çarpımı  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$  olarak da tanımlanır. Burada  $\mathbf{r}$  yer vektörü, cismin dönme eksenini ile cisme uygulanan kuvvet vektörü  $\mathbf{F}$  arasındaki vektördür [30].



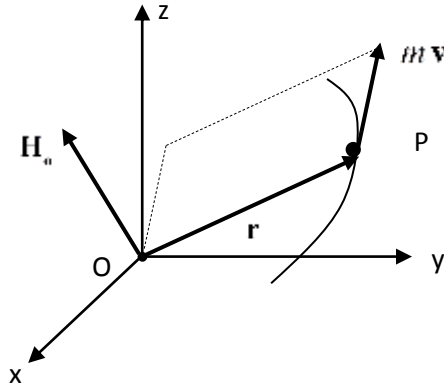
Şekil 2.8. Moment (Tameroglu ve Özbek, 1972)

**Tanım 2.38.**  $XYZ$  sabit koordinat sistemine göre hareket halindeki  $m$  kütleli bir  $P$  maddesel noktası göz önüne alınsın. Maddesel noktanın herhangi bir andaki momentumu olan  $m\mathbf{v}$  vektörünün  $O$  noktasına göre momentine, maddesel noktanın o anda  $O$  ya göre momentumunun momenti veya açısal momentumu adı verilir ve  $H_o$  ile gösterilir [29].

$P$  nin yer vektörü  $\mathbf{r}$  ile gösterilmek üzere bir vektörün momentini tanımlayarak

$$H_o = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$$

yazılır. Buradan  $H_o$  vektörünün  $\mathbf{r}$  ile  $m\mathbf{v}$  nin bulunduğu düzleme dik olduğu görülür (Şekil 2.9.) [29].



Şekil 2.9. Açısal momentum vektörü (Tameröğlü ve Özbek, 1972)

### BÖLÜM 3. UZAY EĞRİSİ BOYUNCA HAREKETTE JERK VEKTÖRÜ

Jerk vektörü, ivme vektörünün zamana göre türevidir. Yani konum vektörünün zamana göre üçüncü türevidir. Bu bölümde [12] de verilen teori üzerinde durulacaktır. Yani, 3-boyutlu Öklid uzayında hareketli bir parçacık ele alınacak ve bu parçacığın jerk vektörü, teğet bileşen, oskülatör düzlemdeki radyal bileşen ve rektifiyan düzlemdeki diğer radyal bileşen boyunca ifade edilecektir.

Uzayda herhangi bir  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisi üzerinde hareketli bir  $P$  parçacığı alalım ve  $E^3$  te keyfi bir  $O$  orjini seçelim. Ayrıca  $P$  nin  $t$  zamanındaki konum vektörü  $\mathbf{x}$  ve  $C$  eğrisinin  $t$  zamanına bağlı yay parametresi de  $s$  olsun. Bu takdirde

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\alpha(s)} = \alpha(s)$$

eşitliği yazılabilir. Bu  $\alpha(s)$  eğrisinin birinci türevi bize Serret-Frenet çatısındaki  $\mathbf{T}$  vektörünü verir:

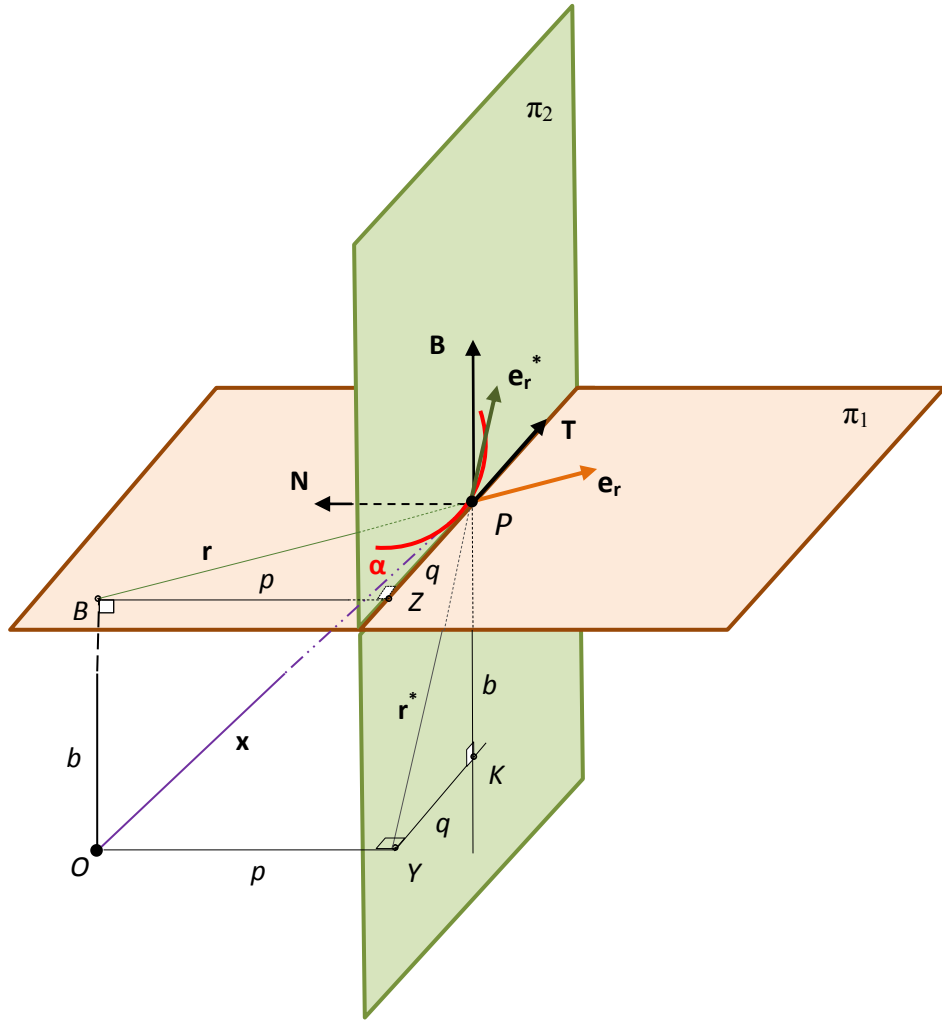
$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds}.$$

$P$  parçacığının hız ve ivme vektörleri son denklem ve Frenet türev formülleri göz önüne alınarak aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left( \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right) \mathbf{N} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N} \quad (3.2)$$

Yani  $P$  parçacığının ivme vektörü  $Sp\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$  oskulator düzleminde yatar [4].



Şekil 3.1.  $P$  parçacığının bir uzay eğrisi boyunca hareketi (Özen ve ark., 2019)

Şimdi ivmenin zamana göre türevi olan jerk vektörünü ele alalım:

$$\mathbf{J} = \frac{d^3s}{dt^3} \mathbf{T} + \kappa \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{N} + \frac{d\kappa}{ds} \frac{ds}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N} + 2 \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \kappa \mathbf{N} + \frac{ds}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \kappa (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B})$$

olup buradan

$$\mathbf{J} = \left[ \frac{d^3s}{dt^3} - \kappa^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{T} + \left[ 3\kappa \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\kappa}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{N} + \left[ \kappa \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{B} \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilir [31].

$\alpha$  eğrisi boyunca hareket eden  $P$  parçacığı  $\alpha$  eğrisinin bir noktası olarak görülebilir. Yani  $P$  parçacığı Serret-Frenet çatısına göre bir konum vektörüne sahiptir. Bu konum vektörü

$$\mathbf{x} = q\mathbf{T} - p\mathbf{N} + b\mathbf{B} \quad (3.4)$$

olsun. Böylece,

$$q = \langle \mathbf{x}, \mathbf{T} \rangle, \quad -p = \langle \mathbf{x}, \mathbf{N} \rangle, \quad b = \langle \mathbf{x}, \mathbf{B} \rangle \quad (3.5)$$

eşitlikleri sağlanır.

Oskülatör düzlemde, yani  $\pi_1$  düzleminde yatan  $\mathbf{r}$  vektörü

$$\mathbf{r} = -p\mathbf{N} + q\mathbf{T} \quad (3.6)$$

eşitliğiyle belirlidir. Bu durumda  $r$ ,  $\mathbf{r}$  vektörünün uzunluğunu belirtmek üzere

$$r^2 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = p^2 + q^2 \quad (3.7)$$

yazılabilir.

Ayrıca  $P$  parçacığının açısal momentumu konum vektörü ile lineer momentum vektörünün vektörel çarpımı ile elde edilir:

$$\begin{aligned} H_o &= (q\mathbf{T} - p\mathbf{N} + b\mathbf{B}) \wedge \left( m \frac{ds}{dt} \mathbf{T} \right) \\ &= qm \frac{ds}{dt} (\mathbf{T} \wedge \mathbf{T}) - pm \frac{ds}{dt} (\mathbf{N} \wedge \mathbf{T}) + bm \frac{ds}{dt} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{T}) \\ &= mb \frac{ds}{dt} \mathbf{N} + mp \frac{ds}{dt} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Diğer yandan açısal momentumun binormal bileşeninin sıfır olmadığı fiziksel varsayımı gereğince  $p \neq 0$  dır. Böylece, (3.7) denkleminde  $r \neq 0$  olduğu görülür. O halde

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{r} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{p} (-r \mathbf{e}_r + q \mathbf{T}) \quad (3.10)$$

eşitlikleri yazılabilir [4].

Şimdi, rektifiyan düzlemde, yani  $\pi_2$  düzleminde yatan

$$\mathbf{r}^* = q \mathbf{T} + b \mathbf{B} \quad (3.11)$$

vektörünü göz önüne alalım.  $r^*$ ,  $\mathbf{r}^*$  vektörünün uzunluğunu belirtmek üzere

$$(r^*)^2 = \langle \mathbf{r}^*, \mathbf{r}^* \rangle = q^2 + b^2 \quad (3.12)$$

olduğu gayet açıktır.

Amacımız jerk vektörünü teğet doğrultu,  $\pi_1$  düzlemindeki  $BP$  radyal doğrultu ve  $\pi_2$  düzlemindeki  $YP$  radyal doğrultu boyunca elde etmektir. Bu yüzden,  $\mathbf{B}$  vektörünü  $\mathbf{r}^*$  ve  $\mathbf{T}$  cinsinden ifade etmeye çalışalım. (3.11) denklemine göre bu ifadeye ulaşabilmenin sadece  $b \neq 0$  ise mümkün olduğunu söyleyebiliriz. Açısal momentumun binormal bileşeninin sıfırdan farklı olduğunu ilk varsayım gereğince biliyoruz. Açısal momentumun normal bileşeninin de sıfırdan farklı olduğu yönünde ikinci bir varsayım yaparsak  $b$  nin sıfıra eşit olduğu durumu ihtimal dışı bırakabiliriz. Bu varsayımı dikkate alarak

$$\mathbf{B} = \frac{1}{b} (-q \mathbf{T} + \mathbf{r}^*) \quad (3.13)$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.12) denkleminde  $b \neq 0$  iken  $r^* \neq 0$  olacaktır. Böylece

$$\mathbf{e}_{\mathbf{r}^*} = \frac{1}{r^*} \mathbf{r}^* \quad (3.14)$$

birim vektörünü tanımlayabiliriz. Buradan (3.13) ve (3.14) denklemleri yardımıyla

$$\mathbf{B} = \frac{1}{b} (-q\mathbf{T} + r^* \mathbf{e}_{\mathbf{r}^*}) \quad (3.15)$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak, (3.15) ve (3.10) denklemleri (3.3) denkleminde yerine yazılırsa  $P$  parçacığının jerk vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \left[ \frac{d^3 s}{dt^3} - \kappa^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{T} + \left[ 3\kappa \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d\kappa}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{N} + \left[ \kappa\tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{B} \\ &= \left[ \frac{d^3 s}{dt^3} - \kappa^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{T} + \left[ 3\kappa \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d\kappa}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \left[ \frac{1}{p} (-r\mathbf{e}_{\mathbf{r}} + q\mathbf{T}) \right] \\ &\quad + \left[ \kappa\tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \left[ \frac{1}{b} (-q\mathbf{T} + r^* \mathbf{e}_{\mathbf{r}^*}) \right] \\ &= \left[ \frac{d^3 s}{dt^3} - \kappa^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 3\kappa \frac{q}{p} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{q}{p} \frac{d\kappa}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 - \kappa\tau \frac{q}{b} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{T} \\ &\quad + \left[ -3\kappa \frac{r}{p} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{r}{p} \frac{d\kappa}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \\ &\quad + \left[ \kappa\tau \frac{r^*}{b} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \mathbf{e}_{\mathbf{r}^*} \\ &= T_t \mathbf{T} + T_r \mathbf{e}_{\mathbf{r}} + T_{r^*} \mathbf{e}_{\mathbf{r}^*} \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemde yer alan  $T_t$  bileşeni  $\alpha$  eğrisinin teğet doğrusu boyunca uzanır,  $T_r$  bileşeni orjinden  $\pi_1$  düzlemine atılan dikmenin ayağını  $P$  parçacığıyla birleştiren doğru boyunca uzanır,  $T_{r^*}$  bileşeni ise orjinden  $\pi_2$  düzlemine atılan dikmenin ayağını  $P$  parçacığıyla birleştiren doğru boyunca uzanır [12].

**Teorem 3.1.** 3-boyutlu Öklid uzayında kütlesi  $m > 0$  olan bir  $P$  parçacığı  $\alpha$  eğrisi boyunca hareket etsin.  $P$  parçacığının açısal momentumunun hem normal hem de binormal bileşeni sıfırdan farklı olsun. Bu durumda  $P$  nin jerk vektörü, (3.16) denkleminde olduğu gibi ifade edilebilir [12].



## BÖLÜM 4. REGÜLER YÜZEY EĞRİSİ BOYUNCA HAREKETTE JERK VEKTÖRÜ

Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde jerk vektörü üzerine üçüncü bölümde verilen teori regüler yüzey eğrileri için çalışılmış ve bir örnek verilmiştir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset E^3$  eğrisi  $M$  regüler yüzeyi üzerinde bulunan birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu durumda  $\alpha$  eğrisi hem  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  Frenet çatısına hem de  $\{\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{U}\}$  Darboux çatısına sahiptir [28].

$\mathbf{U}$  ve  $\mathbf{B}$  vektörleri arasındaki açı  $\varphi$  ile belirtmek üzere bu iki çatı arasında Tanım 2.29’ da verilen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

geçişini mevcuttur. Ayrıca Darboux çatısı için türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{Y}' \\ \mathbf{U}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

biçiminde verilir [28]. Burada  $k_g, k_n$  ve  $\tau_g$  fonksiyonları sırasıyla jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik torsiyon fonksiyonlarıdır. Öte yandan, Darboux çatısı için

$$\begin{aligned}
k_g(s) &= \kappa(s) \cos \varphi \\
k_n(s) &= \kappa(s) \sin \varphi \\
\tau_g(s) &= \tau(s) - \varphi'(s) \\
\kappa^2(s) &= k_g^2(s) + k_n^2(s) \\
\varphi(s) &= \arctan(k_n/k_g)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitlikleri geçerlidir [24].

$P$ , kütlesi  $m$  olan ve  $M$  regüler yüzeyi üzerindeki  $\alpha$  eğrisi boyunca hareket eden bir parçacık olsun.  $E^3$  te keyfi bir  $O$  orjini seçelim. Ayrıca  $P$  nin  $t$  zamanındaki konum vektörü  $\mathbf{x}$  ve  $\alpha$  eğrisinin  $t$  zamanına bağlı yay parametresi  $s$  olsun. Bu nedenle  $\alpha$  eğrisi için birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

biçimindedir. (4.2) denklemi yardımıyla  $P$  nin  $t$  zamanındaki hız ve ivme vektörlerini bulalım:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \mathbf{T} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left( \frac{ds}{dt} \right) (k_g \mathbf{Y} + k_n \mathbf{U}) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + k_g \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{Y} + k_n \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{U}$$

yazılabilir. Diğer yandan (4.3) denkleminden  $k_g = \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \cos \varphi$  ve  $k_n = \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \sin \varphi$  eşitliklerine kolayca ulaşabiliriz. Bu iki ifade yukarıdaki son denklemde yerine yazılırsa

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \cos \varphi \mathbf{Y} + \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \sin \varphi \mathbf{U} \tag{4.4}$$

elde edilir [7].

(4.4) denklemi üzerinden zamana göre türev alınırsa,  $P$  nin  $t$  anındaki jerk vektörü

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbf{T}} &= \frac{d^3 s}{dt^3} - \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 (k_g^2 + k_n^2) \\
 C_{\mathbf{Y}} &= \cos \varphi \left[ \left( 3 \left( \frac{ds}{dt} \right) \left( \frac{d^2 s}{dt^2} \right) \sqrt{k_n^2 + k_g^2} + \frac{d \sqrt{k_n^2 + k_g^2}}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sin \varphi \left[ \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \left( \tau_g + \frac{d\varphi}{ds} \right) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \right] \\
 C_{\mathbf{U}} &= \sin \varphi \left[ \left( 3 \left( \frac{ds}{dt} \right) \left( \frac{d^2 s}{dt^2} \right) \sqrt{k_n^2 + k_g^2} + \frac{d \sqrt{k_n^2 + k_g^2}}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cos \varphi \left[ \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \left( \tau_g + \frac{d\varphi}{ds} \right) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] \right]
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{J} = C_{\mathbf{T}} \mathbf{T} + C_{\mathbf{Y}} \mathbf{Y} + C_{\mathbf{U}} \mathbf{U} \quad (4.5)$$

şeklinde elde edilir. Son denklem paranteze alma işlemleri uygulanır ve yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &= \left[ \frac{d^3 s}{dt^3} - \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 (k_n^2 + k_g^2) \right] \mathbf{T} \\
 &\quad + \left[ 3 \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} \sqrt{k_n^2 + k_g^2} + \frac{d \sqrt{k_n^2 + k_g^2}}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] (\cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U}) \\
 &\quad + \left[ \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \left( \tau_g + \frac{d\varphi}{ds} \right) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right] (-\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U})
 \end{aligned} \quad (4.6)$$



$$\begin{aligned}
q &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{T} \rangle \\
p &= -\langle \mathbf{x}, \cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U} \rangle \\
b &= \langle \mathbf{x}, -\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U} \rangle
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitlikleri sağlanır.  $W_1 = Sp\{\mathbf{T}, \cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U}\}$  ve  $W_2 = Sp\{\mathbf{T}, -\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U}\}$  düzlemlerinde yatan  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{r}^*$  vektörleri

$$\mathbf{r} = q\mathbf{T} - p(\cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U}) \tag{4.9}$$

$$\mathbf{r}^* = q\mathbf{T} + b(-\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U}) \tag{4.10}$$

eşitlikleriyle belirlidir. Dolayısıyla,  $r$  ve  $r^*$  sırasıyla  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{r}^*$  vektörlerinin uzunluklarını belirtmek üzere

$$\begin{aligned}
r^2 &= \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \langle q\mathbf{T} - p(\cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U}), q\mathbf{T} - p(\cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U}) \rangle \\
&= q^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle - qp \langle \mathbf{T}, \cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U} \rangle - pq \langle \cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U}, \mathbf{T} \rangle \\
&\quad + p^2 \langle \cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U}, \cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U} \rangle \\
&= p^2 + q^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(r^*)^2 &= \langle \mathbf{r}^*, \mathbf{r}^* \rangle = \langle q\mathbf{T} + b(-\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U}), q\mathbf{T} + (-\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U}) \rangle \\
&= q^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + bq \langle \mathbf{T}, -\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U} \rangle + bq \langle -\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U}, \mathbf{T} \rangle \\
&\quad + b^2 \langle -\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U}, -\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U} \rangle \\
&= q^2 + b^2
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlar.

Ayrıca,  $P$  parçacığının açısal momentumu konum vektörü ile lineer momentum vektörünün vektörel çarpımı ile elde edilir:

$$\begin{aligned}
 H_o &= (q\mathbf{T} - p(\cos\varphi\mathbf{Y} + \sin\varphi\mathbf{U}) + b(-\sin\varphi\mathbf{Y} + \cos\varphi\mathbf{U})) \wedge \left( m \frac{ds}{dt} \mathbf{T} \right) \\
 &= mq \frac{ds}{dt} (\mathbf{T} \wedge \mathbf{T}) - mp \frac{ds}{dt} ((\cos\varphi\mathbf{Y} + \sin\varphi\mathbf{U}) \wedge \mathbf{T}) + mb \frac{ds}{dt} ((-\sin\varphi\mathbf{Y} + \cos\varphi\mathbf{U}) \wedge \mathbf{T}) \\
 &= mb \frac{ds}{dt} (\cos\varphi\mathbf{Y} + \sin\varphi\mathbf{U}) + mp \frac{ds}{dt} (-\sin\varphi\mathbf{Y} + \cos\varphi\mathbf{U}).
 \end{aligned}$$

Şimdi jerk vektörünü teğet doğrultu,  $W_1$  düzlemindeki  $BP$  radyal doğrultu ve  $W_2$  düzlemindeki  $YP$  radyal doğrultu boyunca elde edelim. Bu yüzden,  $\mathbf{B}$  vektörünü  $\mathbf{r}^*$  ve  $\mathbf{T}$  cinsinden ifade etmeye çalışalım. Bunun için  $\cos\varphi\mathbf{Y} + \sin\varphi\mathbf{U}$  vektörünü  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{T}$  vektörleri cinsinden  $-\sin\varphi\mathbf{Y} + \cos\varphi\mathbf{U}$  vektörünü ise  $\mathbf{r}^*$  ve  $\mathbf{T}$  vektörleri cinsinden elde etmeliyiz. (4.9) ve (4.10) denklemleri dikkate alındığında bunun  $p \neq 0$  ve  $b \neq 0$  iken mümkün olduğu görülmektedir. Açısal momentumun  $\cos\varphi\mathbf{Y} + \sin\varphi\mathbf{U}$  ve  $-\sin\varphi\mathbf{Y} + \cos\varphi\mathbf{U}$  vektörleri boyunca uzanan bileşenlerinin sıfırdan farklı olduğu fiziksel varsayımı yapılırsa  $p$  nin ve  $b$  nin hiçbir zaman sıfıra eşit olmayacağı garanti edilebilir. Bu varsayım dikkate alınarak

$$\cos\varphi\mathbf{Y} + \sin\varphi\mathbf{U} = \frac{1}{p}(-\mathbf{r} + q\mathbf{T}) \quad (4.11)$$

$$-\sin\varphi\mathbf{Y} + \cos\varphi\mathbf{U} = \frac{1}{b}(-q\mathbf{T} + \mathbf{r}^*) \quad (4.12)$$

denklemleri yazılabilir. Ayrıca,  $p \neq 0$  ve  $b \neq 0$  iken  $r \neq 0$  ve  $r^* \neq 0$  olacağından aşağıdaki birim vektörler tanımlanabilir:

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{r} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{e}_{r^*} = \frac{1}{r^*} \mathbf{r}^*. \quad (4.14)$$

Bu son iki denklem (4.11) ve (4.12) denklemlerinde kullanılırsa

$$\cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U} = \frac{1}{p} (-r \mathbf{e}_r + q \mathbf{T}) \quad (4.15)$$

$$-\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U} = \frac{1}{b} (-q \mathbf{T} + r^* \mathbf{e}_{r^*}) \quad (4.16)$$

denklemleri elde edilir.

Sonuç olarak, (4.15) ve (4.16) denklemleri (4.6) denkleminde yerine yazılırsa  $P$  parçacığının jerk vektörü

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{d^3 s}{dt^3} - (k_n^2 + k_g^2) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{q}{p} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \\ &+ \frac{q}{p} \frac{d(\sqrt{k_n^2 + k_g^2})}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 - \frac{q}{b} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \left( \tau_g + \frac{d\varphi}{ds} \right) \end{aligned}$$

$$T_r = -3 \frac{r}{p} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} \sqrt{k_n^2 + k_g^2} - \frac{r}{p} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}{ds}$$

$$T_{r^*} = \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \frac{r^*}{b} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \left( \tau_g + \frac{d\varphi}{ds} \right)$$

olmak üzere

$$\mathbf{J} = T_t \mathbf{T} + T_r \mathbf{e}_r + T_{r^*} \mathbf{e}_{r^*} \quad (4.17)$$

biçiminde elde edilir. Bu denklemde yer alan  $T_t$  bileşeni  $\alpha$  eğrisinin teğet doğrusu boyunca uzanır,  $T_r$  bileşeni orjinden  $W_1$  düzlemine atılan dikmenin ayağını  $P$  parçacığıyla birleştiren doğru boyunca uzanır,  $T_{r^*}$  bileşeni ise orjinden  $W_2$  düzlemine atılan dikmenin ayağını  $P$  parçacığıyla birleştiren doğru boyunca uzanır.

**Teorem 4.1.** 3-boyutlu Öklid uzayında kütlesi  $m > 0$  olan bir  $P$  parçacığı bir regüler yüzey eğrisi olan  $\alpha$  eğrisi boyunca hareket etsin.  $P$  parçacığının açısız momentumunun  $\cos \varphi \mathbf{Y} + \sin \varphi \mathbf{U}$  ve  $-\sin \varphi \mathbf{Y} + \cos \varphi \mathbf{U}$  vektörleri boyunca uzanan bileşenleri sıfırdan farklı olsun. Bu durumda  $P$  nin jerk vektörü, (4.17) denkleminde olduğu gibi ifade edilebilir.

**Örnek 4.2.** Bir  $P$  parçacığının  $R$  yarıçaplı bir silindirin üzerinde yatan dairesel bir helis boyunca hareket ettiğini ve açısız frekans  $\omega$  nın zamana bağlı olmadığını varsayalım.  $V_z$  pozitif bir sabit olmak üzere,  $P$  parçacığının Kartezyen koordinatlarda konum vektörü

$$\mathbf{x} = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), V_z t) \quad (4.18)$$

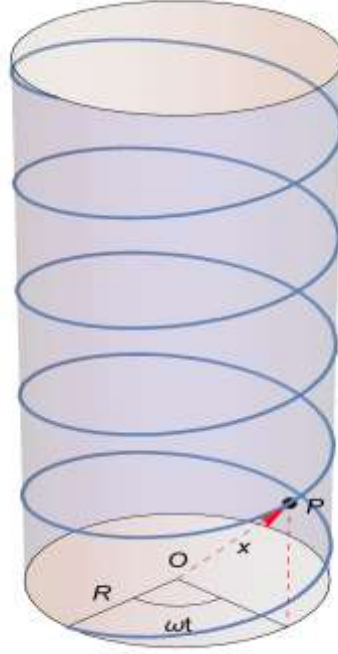
şeklinde verilsin. Ayrıca, helis açısı  $\alpha$  ve  $\tan \alpha = \frac{R\omega}{V_z}$  olsun.

Bu parçacığın hız, ivme ve jerk vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), V_z) \\ \mathbf{a} &= (-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t), 0) \\ \mathbf{J} &= (R\omega^3 \sin(\omega t), -R\omega^3 \cos(\omega t), 0) \end{aligned} \quad (4.19)$$

biçimindedir.





Şekil 4.2.  $P$  parçacığının dairesel helis boyunca hareketi (Özen ve ark., 2019)

Uzayda koordinat fonksiyonları  $x, y, z$  ile gösterilirse

$$\mathbf{x} = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), V_z t) = (x, y, z)$$

için

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), V_z)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} dx &= -R\omega \sin(\omega t) dt \\ dy &= R\omega \cos(\omega t) dt \\ dz &= V_z dt \end{aligned} \tag{4.20}$$

bağıntısı elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\
&= (-R\omega \sin(\omega t) dt)^2 + (R\omega \cos(\omega t) dt)^2 + (V_z dt)^2 \\
&= R^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) (dt)^2 + R^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) (dt)^2 + V_z^2 (dt)^2 \\
&= [R^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] + V_z^2] (dt)^2 \\
&= [R^2 \omega^2 + V_z^2] (dt)^2
\end{aligned}$$

olup

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{R^2 \omega^2 + V_z^2}$$

eşitliği sağlanır. Böylece

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3 s}{dt^3} = 0 \quad (4.21)$$

olduğu görülür.

$\beta = \sqrt{R^2 \omega^2 + V_z^2}$  olmak üzere  $P$  arçacığının izlediği yönlendirilmiş eğri  $s = s(t) = \beta t$  yay parametresi ile

$$\gamma(s) = \left( R \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), R \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \frac{V_z s}{\beta} \right) \quad (4.22)$$

biçiminde yeniden parametrelendirilebilir. (4.22) denklemini üzerinden türev alınırsa

$$\gamma'(s) = \left( -\frac{R\omega}{\beta} \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \frac{R\omega}{\beta} \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \frac{V_z}{\beta} \right) = \left( -\sin \alpha \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \sin \alpha \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \cos \alpha \right)$$

$$\gamma''(s) = \left( -R \frac{\omega^2}{\beta^2} \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), -R \frac{\omega^2}{\beta^2} \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), 0 \right)$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi  $\gamma(s)$  birim hızlı eğrisinin Frenet elemanlarını bulalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) = \gamma'(s) &= \left( -R \frac{\omega}{\beta} \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), R \frac{\omega}{\beta} \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \frac{V_z}{\beta} \right) \\ &= \left( -\sin \alpha \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \sin \alpha \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} &= \frac{\left( -R \frac{\omega^2}{\beta^2} \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), -R \frac{\omega^2}{\beta^2} \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), 0 \right)}{R \frac{\omega^2}{\beta^2}} \\ &= \left( -\cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), -\sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \alpha \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) & \sin \alpha \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) & \cos \alpha \\ -\cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) & -\sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( \cos \alpha \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), -\cos \alpha \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \left\| \left( -\sin \alpha \frac{\omega}{\beta} \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), -\sin \alpha \frac{\omega}{\beta} \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), 0 \right) \right\| \\
&= \sqrt{\sin^2 \alpha \frac{\omega^2}{\beta^2} \cos^2\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) + \sin^2 \alpha \frac{\omega^2}{\beta^2} \sin^2\left(\frac{\omega s}{\beta}\right)} \\
&= \sin \alpha \frac{\omega}{\beta} \\
&= R \frac{\omega^2}{\beta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau(s) &= -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \\
&= -\left\langle \left( \frac{\omega}{\beta} \cos \alpha \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \frac{\omega}{\beta} \cos \alpha \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), 0 \right), \left( -\cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), -\sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), 0 \right) \right\rangle \\
&= -\left( -\cos \alpha \frac{\omega}{\beta} \cos^2\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) - \cos \alpha \frac{\omega}{\beta} \sin^2\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) \right) \\
&= \cos \alpha \frac{\omega}{\beta} \\
&= \frac{V_z}{\beta} \frac{\omega}{\beta} \\
&= \frac{\frac{V_z}{\omega}}{R^2 \omega^2 + V_z^2} \\
&= \omega \frac{\cos^2 \alpha}{V_z}.
\end{aligned}$$

$\gamma(s) = \left( R \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), R \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right), \frac{V_z s}{\beta} \right)$  eğrisinin yukarıda bulunan  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$

Frenet eğrilikleri (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_g = \frac{R\omega^2}{\beta^2} \cos \varphi$$

$$k_n = \frac{R\omega^2}{\beta^2} \sin \varphi$$

$$\tau_g = \frac{V_z \omega}{\beta^2} - \frac{d\varphi}{ds}$$

eğrilikleri elde edilir. Benzer şekilde,  $\mathbf{T}(s)$ ,  $\mathbf{N}(s)$ ,  $\mathbf{B}(s)$  Frenet vektörleri (4.1)

denkleminde yerine yazılırsa  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  olmak üzere

$$\mathbf{T} = -\sin \alpha \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) \mathbf{i} + \sin \alpha \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) \mathbf{j} + \cos \alpha \mathbf{k}$$

$$\mathbf{Y} = \left( -\cos \varphi \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) - \sin \varphi \cos \alpha \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) \right) \mathbf{i}$$

$$+ \left( -\cos \varphi \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) + \sin \varphi \cos \alpha \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) \right) \mathbf{j}$$

$$+ (-\sin \varphi \sin \alpha) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{U} = \left( -\sin \varphi \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) + \cos \varphi \cos \alpha \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) \right) \mathbf{i}$$

$$+ \left( -\sin \varphi \sin\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) - \cos \varphi \cos \alpha \cos\left(\frac{\omega s}{\beta}\right) \right) \mathbf{j}$$

$$+ (\cos \varphi \sin \alpha) \mathbf{k}$$

baz vektörlerine ulaşılır.  $\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{U}$  baz vektörleri, (4.8) denklemi ve (4.22) denklemi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} q &= \frac{sV_z \cos \alpha}{\beta} = tV_z \cos \alpha \\ p &= R \\ b &= \frac{sV_z \sin \alpha}{\beta} = tV_z \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. (4.7) denklemiyle verilen konum vektöründe bulduklarımızı yerine yazarsak;

$$\mathbf{x} = (tV_z \cos \alpha)\mathbf{T} - (R \cos \varphi + tV_z \sin \alpha \sin \varphi)\mathbf{Y} + (-R \sin \varphi + tV_z \sin \alpha \cos \varphi)\mathbf{U} \quad (4.24)$$

denklemine ulaşırız. Bu denklemden  $\mathbf{x}$  konum vektörünün Darboux bileşenleri görülmektedir. Diğer yandan

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{R^2 + t^2 V_z^2 \cos^2 \alpha} \quad (4.25)$$

$$r^* = \sqrt{q^2 + b^2} = \sqrt{t^2 V_z^2 \cos^2 \alpha + t^2 V_z^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{t^2 V_z^2} = tV_z \quad (4.26)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Sonuç olarak, yukarıda elde edilenler Teorem 4.1 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_t &= -\frac{R^2 \omega^4}{(R^2 \omega^2 + V_z^2)^2} (R^2 \omega^2 + V_z^2)^{3/2} - \frac{R \omega^2}{(R^2 \omega^2 + V_z^2)} \frac{\omega V_z}{R^2 \omega^2 + V_z^2} \frac{tV_z \cos \alpha}{tV_z \sin \alpha} (R^2 \omega^2 + V_z^2)^{3/2} \\ &= -\frac{R^2 \omega^4}{\sqrt{(R^2 \omega^2 + V_z^2)}} - \frac{R \omega^2 \omega V_z}{(R^2 \omega^2 + V_z^2)^2} \frac{V_z}{R \omega} (R^2 \omega^2 + V_z^2)^{3/2} \\ &= \frac{-R^2 \omega^4 - \omega^2 V_z^2}{\sqrt{R^2 \omega^2 + V_z^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_r &= \left( -3 \frac{r}{p} \sqrt{R^2 \omega^2 + V_z^2} R \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{r}{p} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d}{ds} \left( R \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) \\
&= \left( -3 \frac{r}{p} \sqrt{R^2 \omega^2 + V_z^2} R \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) \cdot 0 - \left( \frac{r}{p} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{r^*} &= \frac{t V_z}{t V_z \sin \alpha} (R^2 \omega^2 + V_z^2)^{3/2} \frac{R \omega^2}{R^2 \omega^2 + V_z^2} \frac{\omega V_z}{R^2 \omega^2 + V_z^2} \\
&= \frac{\sqrt{R^2 \omega^2 + V_z^2}}{R \omega} (R^2 \omega^2 + V_z^2)^{3/2} \frac{R \omega^2}{R^2 \omega^2 + V_z^2} \frac{\omega V_z}{R^2 \omega^2 + V_z^2} \\
&= \frac{(R^2 \omega^2 + V_z^2)^2 V_z \omega^2}{(R^2 \omega^2 + V_z^2)^2} \\
&= V_z \omega^2
\end{aligned}$$

olup,  $P$  parçacığının jerk vektörü için

$$\begin{aligned}
T_t &= \frac{-R^2 \omega^4 - \omega^2 V_z^2}{\sqrt{R^2 \omega^2 + V_z^2}} \\
T_r &= 0 \\
T_{r^*} &= \omega^2 V_z
\end{aligned} \tag{4.27}$$

bileşenleri elde edilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Siacci, F., Moto per una linea gobba. Atti R Accad Sci. Torino 14, 946-951, 1879.
- [2] Whittaker, E. T., A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. 4th edition, Cambridge University Press, 1944.
- [3] Grossman, N., The Sheer Joy of Celestial Mechanics. Birkhauser, Basel, 1996.
- [4] Casey, J., Siacci's resolution of the acceleration vector for a space curve. Meccanica, 46, 471-476, 2011.
- [5] Küçükarslan, Z., Yılmaz, M. Y., Bektaş, M., Siacci's theorem for curves in Finsler manifold  $F^3$ . Turkish Journal of Science and Technology, 7, 181-185, 2012.
- [6] Özen, K. E., 1. ve 2. tip Bishop çatıları için Siacci teoremi. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2015.
- [7] Özen, K. E., Tosun, M., Akyiğit, M., Siacci's theorem according to Darboux frame. An. St. Univ. Ovidius Constanta, 25, 155-165, 2017.
- [8] Özen, K. E., Güner, M., Tosun, M., A note on the acceleration and jerk in motion along a space curve. An. St. Univ. Ovidius Constanta, 28, 151-164, 2020.
- [9] Özen, K. E., Siacci's theorem for Frenet curves in Minkowski 3-space. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 8, 159-167, 2020.
- [10] [www.muhendisbeyinler.net](http://www.muhendisbeyinler.net), İvmenin zamana göre türevi-sarsım nedir, Erişim Tarihi: 08.02.2018.
- [11] Resal, H., Traite de Cinematique Pure. Mallet-Bachelier, 1862.



- [12] Özen, K. E., Dündar, F. S., Tosun, M., An alternative approach to jerk in motion along a space curve with applications. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 57, 435-444, 2019.
- [13] Güner, M., On the jerk in motion along a space curve. *Math Meth Appl Sci.*, <https://doi.org/10.1002/mma.6094>, 1-9, 2020.
- [14] Tosun, M., Hızarcıoğlu, M., On the jerk in motion along a regular surface curve. *TBILISI-MATHEMATICS. Sciendo*, 67-75, 2020.
- [15] Doğan, F., Yaylı, Y., Tubes with Darboux frame. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 7, 751-758, 2012.
- [16] Babaarslan, M., Tandogan, Y. A., Yaylı, Y., A note on Bertrand curves and constant slope surfaces according to Darboux frame. *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 5, 87-97, 2012.
- [17] Bektaş, O., Yüce, S., Special Smarandache curves according to Darboux frame in  $E^3$ . *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, 3, 48-59, 2013.
- [18] Bas, S., Körpınar, T., Inextensible flows of spacelike curves with timelike principal normal according to Darboux frame in  $M_1^3$ . *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 31, 9-17, 2013.
- [19] Şentürk, G. Y., Yüce, S., Bertrand offsets of ruled surfaces with Darboux frame. *Results in Mathematics*, 72, 1151-1159, 2017.
- [20] Gürbüz, N., Three classes of non-lightlike curve evolution according to Darboux frame and geometric phase. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15, 1850023, 2018.
- [21] Kızıltuğ, S., Dede, M., Ekici, C., Tubular surfaces with Darboux frame in Galilean 3-space. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 34, 253-260, 2019.
- [22] Hacısalihoğlu, H. H., *Diferansiyel Geometri*, 1. Cilt. Ankara Üniversitesi, 1998.
- [23] Hacısalihoğlu, H. H., *İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*. Ankara Üniversitesi, 1998.
- [24] Sabuncuoğlu, A., *Diferansiyel Geometri*. Nobel Yayınları, Ankara, 2010.

- [25] Shifrin, T., Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces, University of Georgia, Preliminary Version, 2008.
- [26] Karger, A., Novak, J., Space kinematics, Lie groups, Gordon and Breach Science Publishers, 1985.
- [27] İzumiya, S., Tkeuchi, N., Generic properties of helices and Bertnard curves. Journal of Geometry 74, 97-109, 2002.
- [28] O' Neill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1966.
- [29] Tameroğlu, S. S., Özbek, T., Mühendisler için Mekanik, 2. Cilt. İnkılap ve Anka Basımevi, 1972.
- [30] Güney, Y., Okur, İ., Fizik I (Mekanik), Değişim Yayınları, 2009.
- [31] Tsirlin M., Jerk by axes in motion along a space curve. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 55, 1437-1441, 2017.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Merve Hızarcıoğlu, 02.08.1992 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2016 yılında tamamladı. 2017 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Bilim Dalında yüksek lisans programına kaydoldu. Halen aynı üniversitede öğrenimini sürdürmektedir.