T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Ekber GİRGİN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK**

Eylül 2020

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ekber GİRGİN

30.09.2020

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez süresince gerekli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Erdal KARAPINAR ve Prof. Dr. Soley ERSOY hocalarıma teşekkürlerimi arz ederim.

Eğitim hayatım boyunca her türlü desteği veren annem Mergül GİRGİN ve babam Nedim GİRGİN, yalnızca tezimin değil hayatımın her aşamasında beni yüreklendiren, güçlendiren ve destekleyen eşim Figen Özbay GİRGİN'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

M_Q	: Asimetrik modüler metrik uzay
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
(M,d)	: Metrik uzay
M_ρ	: Modüler uzay
M_κ	: Modüler metrik uzay
$\lVert\cdot\rVert$	: Normlu uzay
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$C(I,\mathbb{R})$	: Reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi
$\text{Fix}(S)$	: S dönüşümünün sabit noktaları kümesi
$\text{Fix}(S,T)$	: S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktaları kümesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sabit nokta teorisi, Modüler uzaylar, Simülasyon fonksiyonu, Suzuki daralma dönüşümü, Berinde dönüşümü, Geçişli dönüşüm, Graf teorisi, Ulam $-$ Hyers kararlılık problemi.

Bu tez çalışmasında ilk olarak sabit nokta teorisinin tarihsel gelişimi, temel tanımlar ve teoremler, Banach daralma dönüşümünün genişlemeleri, graf teorisi, asimetrik metrik uzaylar, modüler uzaylar ve modüler metrik uzaylar kavramlarından bahsedilmiştir.

Daha sonra modüler metrik uzayın simetriği özelliği kaldırılarak asimetrik modüler metrik uzay tanımlanıp bazı topolojik özellikleri verilmiştir.

Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda Suzuki $-$ Berinde daralma dönüşümleri, genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)-$simülasyon daralma dönüşümleri tanımlanmış ve ortak sabit nokta teoremleri ispat edilmiştir. $\alpha-$kapalı daralma dönüşümleri kullanılarak Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen sabit nokta teoremlerinin graf teorisine, integral denklemlere, iyi konumlanmışlık problemine ve Ulam $-$ Hyers kararlılık problemine uygulamaları verilmiştir.

Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzaylarda rasyonel ifade içeren $(\alpha,\beta)_{\psi}-$daralma dönüşümleri ve genelleştirilmiş Suzuki simülasyon daralma dönüşümleri tanmlanmış ve ilgili sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Bu teoremlerin genelleştirilmiş Ulam $-$ Hyers kararlılık problemine ve graf teorisine uygulamaları verilmiştir.

FIXED POINT THEORY AND APPLICATIONS IN MODULAR SPACES

SUMMARY

Keywords: Fixed point theory, Modular spaces, Simulation function, Suzuki contraction, Berinde contraction, Admissible mapping, Graph theory, Ulam – Hyers stability.

In this thesis, firstly, the historical development of fixed point theory, basic definitions and theorems, extensions of Banach contraction, graph theory, quasi metric spaces, modular spaces and modular metric spaces are mentioned.

Then, by removing the symmetry property of modular metric space, quasi modular metric space is defined and some topological properties are given.

Suzuki – Berinde contraction mappings and generalized (α, β) – simulation contraction mappings are defined and common fixed point theorems are proved in non-Archimedean modular metric spaces. Fixed point theorems are obtained by using α – implicit contractions in non-Archimedean modular metric spaces. Also, applications of obtained fixed point theorems to graph theory, Ulam – Hyers stability, well – posedness problem and integral equations are given.

Containing rational expressions $(\alpha, \beta)_{\psi}$ – contractions and generalized simulation contractions are defined and related fixed point theorems are obtained in non-Archimedean quasi modular metric spaces. Applications of these theorems to the generalized Ulam – Hyers stability and graph theory are given.

BÖLÜM 1. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

1.1. Giriş

Analizde bazı problemlerin çözümleri, uygun bir S dönüşümü için $S(x)=x$ şeklindeki bir problemin çözümünü bulmaya dönüşür. Bu tür denklemlerin çözümüne sabit nokta ve sabit noktaların varlığını inceleyen teoremlere ise sabit nokta teoremleri denir. Sabit nokta teorisi matematiğin temel konularından biri olup sadece matematiğin alt dallarında değil birçok bilim dalında da uygulama sahasına sahip bir araştırma ve geliştirme alanıdır. Örneğin, sabit nokta teorisi diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek için kullanılmıştır. Ayrıca ekonomi, fizik, kimya, bilgisayar ve mühendislik uygulamaları gibi daha birçok sahada çeşitli amaçlar doğrultusunda kullanılan çok önemli bir matematiksel araçtır [1-19].

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Bunlardan birincisi tam metrik uzaylar üzerinde daralma ve genelleştirilmiş daralma dönüşümleri için sabit nokta teorisi, diğeri ise normlu lineer uzaylarının kompakt ve konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümleri için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları 1910 yılında Brouwer ile başlamıştır [20]. Brouwer $\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarlarından kendi üzerine tanımlı sürekli her dönüşümün sabit noktasının varlığı kanıtlanmıştır. 1930 yılında Brouwer'in teoremi Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara genişletilmiştir [21].

Tam metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları ise 1922 yılında Banach ile başlamıştır [22]. Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini ortaya koymuştur.

Banach sabit nokta teoremi kısa sürede pek çok araştırmacı tarafından genelleştirilmiş ve farklı uzaylarda (kısmi metrik uzaylar, asimetrik metrik uzaylar, modüler uzaylar, modüler metrik uzaylar, genelleştirilmiş metrik uzaylar) sabit nokta teoremleri ve uygulamaları elde edilmiştir [23-42].

Bu tezde Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda Suzuki $-$ Berinde daralma dönüşümleri, genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)-$simülasyon daralma dönüşümleri ve $\alpha-$kapalı daralma dönüşümleri tanımlanarak ilgili sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Bu teoremlerin graf teorisine, integral denklemlere ve Ulam $-$ Hyers kararlılık problemine uygulamaları gösterilmiştir. Ayrıca, modüler metrik uzayın simetri özelliği kaldırılarak daha genel bir yapı olan asimetrik modüler metrik uzay inşa edilip bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Asimetrik modüler metrik uzayda ispatlanamayan sabit nokta teoremleri için Archimedean olmayan özelliği kullanılarak Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzaylarda rasyonel ifade içeren $(\alpha,\beta)_\psi-$daralma dönüşümleri ve genelleştirilmiş Suzuki simülasyon daralma dönüşümleri tanımlanıp ilgili sabit nokta teoremleri ve bu teoremlerin graf teorisine ve genelleştirilmiş Ulam $-$Hyers kararlılık problemine uygulamaları verilmiştir.

1.2. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler üzerinde durulmuştur.

Tanım 1.2.1. [43] M boş olmayan bir küme olsun.

$$\begin{aligned} d : M \times M &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

fonksiyonu

d_1. $d(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in M$

d_2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x,y \in M$

d_3. $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in M$ (simetri)

d_4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x,y,z \in M$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna M üzerinde metrik, (M,d) ikilisine de metrik uzay denir.

Örnek 1.2.2. [44] $M = \mathbb{R}$ olmak üzere her $x,y \in M$ için

$$d(x,y) = |x-y|$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. $(\mathbb{R},d)$ uzayına da alışılmış metrik uzay denir.

Örnek 1.2.3. [43] M boştan farklı bir küme olsun. Her $x,y \in M$ için $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. d fonksiyonuna ayrık metrik (M,d) ikilisine de ayrık metrik uzay adı verilir.

Örnek 1.2.4. [45] $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $C(I,\mathbb{R})$ kümesi üzerinde

$$d(x,y) = \sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|$$

ile tanımlanan $d : C(I,\mathbb{R}) \times C(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu bir metriktir.

Tanım 1.2.5. [46] (M,d) metrik uzay ve $\{x_n\}$ bir dizi olsun. $x_0 \in M$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x_0 \in M$ noktasına yakınsar (ya da $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $x_n \to x \ (n \to \infty)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.6. [45] (M,d) metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m,n \geq N$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir. Her yakınsak dizi ayrıca Cauchy dizisidir, fakat her Cauchy dizisinin yakınsak olması gerekmez. $\{x_n\}$ dizisi metrik uzayda bir x noktasına yakınsak ise herhangi bir alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Örnek 1.2.7. [45] $M = (0,1]$, $(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzayın bir alt kümesi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \dfrac{1}{n}$ M uzayında bir dizi olmak üzere $\{x_n\}$ bu uzayda bir Cauchy dizisidir ancak yakınsak değildir. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ ve $m,n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ için

$$d(x_n, x_m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$$

dir. Ancak $x_n \to 0 \notin M$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi M uzayında yakınsak değildir.

Tanım 1.2.8. [45] (M,d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi $x \in M$ noktasına yakınsak ise (M,d) uzayına tam metrik uzay denir.

Uyarı 1.2.9. [45] Tam metrik uzayın her alt uzayının tam olması gerekmez.

Örnek 1.2.10. [45] $\mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tam metrik uzaydır fakat $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tam uzay değildir.

Tanım 1.2.11. [45] (M,d) ve (Y,d^*) metrik uzaylar, $S:(M,d) \to (Y,d^*)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in M$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $d(x_0,x) < \delta$ iken $d^*(S(x_0),S(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa S fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.2.12. [45] (M,d) ve (Y,d^*) metrik uzaylar, $S:(M,d) \to (Y,d^*)$ bir fonksiyon ve $x \in M$ olsun. x noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için $\{S(x_n)\}$ dizisi $S(x)$ noktasına yakınsıyor ise S fonksiyonuna x noktasında dizisel süreklidir denir.

Önerme 1.2.13. [45] Metrik uzaylarda süreklilik ile dizisel süreklilik denktir.

Tanım 1.2.14. [44] L boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $\cdot: K \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L kümesine K üzerinde vektör uzayı (lineer uzay) denir.

a. L kümesi $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

G_1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G_2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G_3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G_4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G_5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

b. $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L_1. $\alpha.x \in L$ dir.

L_2. $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

L_3. $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

L_4. $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

L_5. $1.x = x$ dir.

Burada $K = \mathbb{R}$ ise L kümesine reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ ise L kümesine kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 1.2.15. [44] M bir reel vektör uzayı olsun ve $\|.\| : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile verilsin.

a. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

b. her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $x \in X$ için $\|\alpha.x\| = |\alpha|.\|x\|$,

c. her $x, y \in X$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna M üzerinde bir norm, $(M, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 1.2.16. [44] M boştan farklı bir küme ve τ, M kümesinin kuvvet kümesi $P(M)$ kümesinin alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine M üzerinde bir topoloji denir.

a. $\emptyset, M \in \tau$,

b. τ ailesine ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ailesine aittir,

c. τ ailesine ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ailesine aittir.

Tanım 1.2.17. [44] (M,τ) topolojik uzay olsun ve M uzayının farklı her x ve y elemanları için

$[T_0]:=$ birini içeren diğerini içermeyen en az bir komşuluğu vardır,

$[T_1]:=$ birini içeren ve diğerini içermeyen en az birer komşuluğu vardır,

$[T_2]:=$ ayrık komşulukları vardır,

aksiyomları verilsin. Eğer (M,τ) topolojik uzayı $[T_0]$, $[T_1]$ ve $[T_2]$ aksiyomlarını sağlıyorsa (M,τ) topolojik uzayına sırasıyla T_0-uzayıdır, T_1-uzayıdır ve T_2- uzayıdır ya da Hausdorff uzayıdır denir.

$[T_0]$, $[T_1]$ ve $[T_2]$ aksiyomlarının tanımlarından her Hausdorff uzayının bir T_1-uzayı ve her T_1-uzayının bir T_0-uzayı olduğu açıktır.

Tanım 1.2.18. [44] (M,d) bir metrik uzay olsun. Bu uzayda her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse bu uzaya kompakt uzay denir.

Teorem 1.2.19. [44] Bir metrik uzayın kompakt alt kümeleri kapalı ve sınırlıdır.

1.3. Banach Daralma Dönüşümünün Genişlemeleri

Bu bölümde Banach daralma dönüşümünün genelleştirmelerine ve ilgili sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.

Tanım 1.3.1. [7] (M,d) metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ için

$$d(Sx,Sy)\le k\,d(x,y) \tag{1.1}$$

olacak şekilde $k \geq 0$ reel sayısı varsa S dönüşümüne M üzerine Lipschitzian dönüşüm adı verilir. (1.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine Lipschitz sabiti denir.

Lipschitz şartındaki k değeri $[0,1)$ kümesinin elemanı olarak alınırsa aşağıdaki dönüşüm elde edilir.

Tanım 1.3.2. [7] (M,d) metrik uzay ve $S: M \to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in M$ için

$$d(Sx, Sy) \leq k\, d(x, y)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ varsa S dönüşümüne daralma dönüşümü denir.

Teorem 1.3.3. [22] (Banach Daralma Dönüşümü Prensibi) (M,d) tam metrik uzay ve $S: M \to M$ daralma dönüşüm olsun. Bu durumda S dönüşümü M uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 1.3.4. [7] (M,d) metrik uzay ve $S: M \to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in M$ için

$$d(Sx, Sy) < d(x, y)$$

ise S dönüşümüne kesin daralma (contractive) dönüşüm denir.

Tanım 1.3.5. [7] (M,d) metrik uzay ve $S: M \to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in M$ için

$$d(Sx, Sy) \leq d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa S dönüşümüne genişlemeyen (non-expansive) dönüşüm denir.

Örnek 1.3.6. [7] $(\mathbb{R},d)$ alışılmış metrik uzay olmak $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dönüşümü $Sx=x+1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda S dönüşümü genişlemeyen (non-expansive) dönüşümdür fakat daralma ya da kesin daralma dönüşümü değildir.

S dönüşümü ile ilgili olarak

S daralma $\Rightarrow$ S kesin daralma $\Rightarrow$ S genişlemeyen $\Rightarrow$ S Lipschitzian dönüşümdür

sonucu her zaman doğrudur fakat tersi $(\Leftarrow)$ her zaman geçerli değildir.

Her daralma dönüşümünün sürekli olduğu (1.1) eşitsizliğinden görülmektedir. Doğal olarak şu soru akla gelmektedir: Acaba sürekli olmayan dönüşümler tek sabit noktaya sahip midir ? 1968 yılında Kannan [23] tanımladığı daralma dönüşüm yardımıyla sürekli olmayan dönüşümlerinde tek sabit noktaya sahip olabileceğini göstermiştir.

Tanım 1.3.7. [23] (M,d) metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in M$ için

$$d(Sx,Sy)\le k\left[d(x,Sx)+d(y,Sy)\right]$$

olacak şekilde $k\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ sabiti varsa S dönüşümüne Kannan dönüşümü adı verilir.

Kannan dönüşümünün tanımlanmasıyla süreklilik şartını sağlamayan farklı genelleştirilmiş daralma dönüşümleri tanımlanmış ve çeşitli sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

Tanım 1.3.8. [24] (M,d) metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in M$ için

$$d(Sx,Sy)\le \alpha d(x,y)+\beta d(x,Sx)+\gamma d(y,Sy)$$

olacak şekilde $\alpha+\beta+\gamma<1$ varsa S dönüşümüne Ciric-Reich-Rus dönüşümü denir.

Tanım 1.3.9. [25] (M,d) metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. M uzayındaki her x, y elemanı için

$$d(Sx,Sy)\le \alpha d(x,y)+\beta d(x,Sx)+\gamma d(y,Sy)+\delta d(x,Sy)+\eta d(y,Sx)$$

eşitsizliğini sağlayan $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta<1$ özelliğine sahip $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta\in\mathbb{R}_+$ sabitleri varsa S dönüşümüne Hardy-Rogers daralma dönüşümü denir.

2003 yılında Berinde [29] farklı bir daralma şartı kullanarak zayıf (weak) daralma dönüşümü olarak bilinen dönüşümü tanımlamıştır. Daha sonra bu dönüşüm literatüre hemen hemen (almost) daralma dönüşümü olarak girmiştir. Ayrıca, Berinde [29] tam metrik uzaylarda zayıf daralma dönüşümünün sabit noktasının var olduğunu göstermiştir.

Tanım 1.3.10. [29] (M,d) metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ için

$$d(Sx,Sy)\le kd(x,y)+Ld(y,Sx)$$

ifadesini sağlayan $k\in[0,1)$ ve $L\ge 0$ sabitleri varsa S dönüşümüne zayıf veya hemen hemen (weak, almost) daralma dönüşümü denir.

Babu ve ark. [46] zayıf daralma dönüşümünü genelleştirerek yeni bir daralma şartı ile sabit nokta teorisi ile ilgili sonuçlar vermişlerdir.

Tanım 1.3.11. [46] (M,d) metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. M uzayındaki her x,y elemanı için

$$d(Sx,Sy)\le kd(x,y)+L\min\{d(x,Sx),d(y,Sy),d(x,Sy),d(y,Sx)\}$$

eşitsizliğini sağlayan $k\in[0,1)$ ve $L\ge 0$ sabitleri varsa S dönüşümüne genelleştirilmiş zayıf daralma dönüşümü adı verilir.

2008'de Suzuki [47] tam metrik uzay yerine kompakt metrik uzay alarak yeni bir daralma şartı ile aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.3.12. [47] (M,d) kompakt metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ için

$$\frac{1}{2}d(x,Sx)<d(x,y)\ \Rightarrow\ d(Sx,Sy)<d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa S dönüşümü M uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

Banach sabit nokta teoreminin diğer bir genelleştirilmesi birden fazla dönüşüm alarak elde edilen ortak sabit nokta teoremleridir.

Tanım 1.3.13. [48] M boş olmayan bir küme ve $S,T:M\to M$ iki farklı dönüşüm olmak üzere $Sx=Tx=x$ eşitliğini sağlayan $x\in M$ noktasına S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir.

Tanım 1.3.14. [48] M boş olmayan bir küme ve $S,T:M\to M$ iki farklı dönüşüm olmak üzere $Sx=Tx=w$ eşitliğini sağlayan $x,w\in M$ noktaları var ise x noktasına

S ve T dönüşümlerinin çakışma noktası (coincidence point) w noktasına ise çakışılan nokta denir.

Örnek 1.3.15. $M=[0,1]$ olmak üzere $S,T:M\to M$ iki dönüşüm olsun. Her $x\in M$ için $Sx=\frac{x}{4}$ ve $Tx=\frac{x}{16}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda 0 noktası S ve T dönüşümlerinin çakışma noktası aynı zamanda ortak sabit noktasıdır.

Ciric ve ark. [49] zayıf daralma dönüşümü ve genelleştirilmiş zayıf daralma dönüşümünü iki farklı dönüşüm için genelleştirmişlerdir.

Tanım 1.3.16. [49] (M,d) metrik uzay ve $S,T:M\to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ için

$$\begin{aligned} d(Sx,Ty)\leq k\ \text{maks}&\left\{d(x,y),d(x,Sx),d(y,Ty),\frac{d(x,Ty)+d(y,Sx)}{2}\right\}\\ &+L\min\left\{d(x,Sx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Sx)\right\}\end{aligned}$$

olacak şekilde $k\in[0,1)$ ve $L\geq 0$ sabitleri varsa S ve T dönüşümlerine genelleştirilmiş Ciric zayıf daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 1.3.17. [49] (M,d) tam metrik uzay ve S ve T M üzerinde tanımlı genelleştirilmiş Ciric zayıf daralma dönüşümü ise S ve T dönüşümleri M uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Samet ve ark. [31] aşağıda özellikleri verilen α ve ψ fonksiyonlarını kullanarak yeni bir daralma dönüşümü tanımlamışlardır. Daha sonra bu dönüşüm çok fazla ilgi görmüştür ve farklı uzaylarda genelleştirmeleri elde edilerek sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır [50-57].

$\Psi = \{\psi : [0,\infty) \to [0,\infty) \mid \psi \text{ azalmayan fonksiyon}\}$ ailesi verilsin ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

a. ψ^n, ψ nin n. iterasyonu olmak üzere her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ dir,

b. $\psi(0) = 0$ dır,

c. Her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ dir.

Tanım 1.3.18. [31] M boştan farklı bir küme, $S : M \to M$ bir dönüşüm ve $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in M$ için

$$\alpha(x,y) \geq 1 \text{ iken } \alpha(Sx,Sy) \geq 1$$

ifadesi sağlanıyorsa S dönüşümüne $\alpha -$geçişli (admissible) dönüşüm denir.

Örnek 1.3.19. [31] $M = (0,\infty)$ olmak üzere $S : M \to M$ dönüşümü her $x \in M$ için $Sx = \ln x$ olarak verilsin.

$$\alpha : M \times M \to [0,\infty)$$
$$(x,y) \to \alpha(x,y) = \begin{cases} 2, & x \geq y, \\ 0, & x > y \end{cases}$$

ise S dönüşümü $\alpha -$geçişli bir dönüşümdür.

Tanım 1.3.20. [31] (M,d) metrik uzay ve $S : M \to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in M$ için

$$\alpha(x,y)\, d(Sx,Sy) \leq \psi(d(x,y))$$

ifadesini sağlayan $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ ve $\psi \in \Psi$ fonksiyonları mevcut ise S dönüşümüne $\alpha - \psi -$ daralan dönüşüm denir.

Tanım 1.3.21. [50] M boştan farklı bir küme $\alpha, \beta : M \to \mathbb{R}_+$ iki fonksiyon ve $x \in M$ olsun.

a. $\alpha(x) \geq 1$ iken $\beta(Sx) \geq 1$ dir,

b. $\beta(x) \geq 1$ iken $\alpha(Sx) \geq 1$ dir,

özelliklerini sağlayan $S : M \to M$ dönüşümüne döngüsel (cyclic) $(\alpha, \beta) -$ geçişli dönüşüm adı verilir.

Örnek 1.3.22. [50] $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$Sx = -\left(x + x^3\right)$$

ile tanımlansın. $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları ise her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$\alpha(x) = e^x \text{ ve } \beta(y) = e^{-y}$$

olarak verilsin. Bu durumda S dönüşümü döngüsel $(\alpha, \beta) -$ geçişli dönüşümdür.

Tanım 1.3.23. [51] M boştan farklı bir küme $x, y, z \in M$ ve $\alpha : M \times M \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun.

a. $\alpha(x, y) \geq 1$ iken $\alpha(Sx, Sy) \geq 1$ dir,

b. $\alpha(x, z) \geq 1$ ve $\alpha(z, y) \geq 1$ iken $\alpha(x, y) \geq 1$ dir, özelliklerini sağlayan $S:M\to M$ dönüşümüne üçgensel (triangular) $\alpha-$geçişli dönüşüm adı verilir.

Tanım 1.3.24. [52] M boştan farklı bir küme, $\alpha:M\times M\to[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $S,T:M\to M$ birer dönüşüm olmak üzere her $x,y\in M$ için

$\alpha(x,y)\geq 1$ iken $\alpha(Sx,Ty)\geq 1$ ve $\alpha(Ty,Sx)\geq 1$

şartını sağlayan (S,T) ikilisine genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çifti adı verilir.

Örnek 1.3.25. [52] $M=[0,\infty)$ olmak üzere $S,T:M\to M$ birer dönüşüm ve $\alpha:M\times M\to[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in M$ için

$$Sx=2x,\ Tx=x^2 \text{ ve } \alpha(x,y)=\begin{cases} e^{xy}, & x,y\geq 0,\\ 0, & x,y<0,\end{cases}$$

olsun. Bu durumda (S,T) ikilisi genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çiftidir.

Tanım 1.3.26. [57] M boştan farklı bir küme, $\alpha,\beta:M\to[0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. $S,T:M\to M$ iki dönüşüm olmak üzere her $x\in M$ için

a. $\alpha(x)\geq 1$ iken $\beta(Sx)\geq 1$,
b. $\beta(x)\geq 1$ iken $\alpha(Tx)\geq 1$

şartlarını sağlayan (S,T) ikilisine döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çifti denir.

Tanım 1.3.26'da $S=T$ alınırsa Tanım 1.3.21'de verilen döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm tanımı elde edilir.

Jleli ve Samet [38] aşağıda tanımlanan θ fonksiyonu yardımıyla Banach sabit nokta teoreminin farklı bir genelleştirmesini elde etmiştir.

$\tilde{\Theta}=\{\theta \mid \theta:(0,\infty)\to(1,\infty)\}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonların bir ailesi olsun.

Θ_1. θ azalmayandır,

Θ_2. her bir $\{t_n\}\subset(0,\infty)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty}\theta(t_n)=1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}t_n=0^+$ dır,

Θ_3. $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{\theta(t)-1}{t^r}$ olacak şekilde $r\in(0,1)$ ve $l\in(0,\infty)$ sabitleri vardır.

Tanım 1.3.27. [38] (M,d) metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ için

$$d(Sx,Sy)\neq 0 \ \Rightarrow\ \theta\big(d(Sx,Sy)\big)\leq \theta\big[d(x,y)\big]^k$$

ifadesini sağlayan $\theta\in\tilde{\Theta}$ fonksiyonu ve $k\in[0,1)$ sabiti varsa S dönüşümüne $\theta-$ daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 1.3.28. [38] (M,d) tam metrik uzay ve $S:M\to M$ dönüşümü $\theta-$daralma dönüşümü ise M uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Popa [58] yeni bir fonksiyon ailesi tanımlayarak kapalı (implicit) daralma dönüşümlerini literatüre kazandırmış ve bu dönüşümü kullanarak sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

Γ, tüm reel değerli sürekli fonksiyonların ailesi olmak üzere $\wp(t_1,\ldots,t_6):\mathbb{R}_+^6\to\mathbb{R}$ fonsiyonu aşağıdaki şartları sağlayan Γ, ailesinin bir elemanı olsun:

$\wp_1$. $\wp$, t_1 değişkeninde azalmayan, t_5 ve t_6 değişkeninde artmayan bir fonksiyondur,

$\wp_2$. her $u,v \geq 0$ için $\wp(u,v,v,u,u+v,0) \leq 0$ ise $u \leq \psi(v)$ ve $\wp(u,v,u,v,0,u+v) \leq 0$ ise $u \leq \psi(v)$ olacak şekilde $\psi \in \Psi$ vardır.

Tanım 1.3.29. [58] (M,d) metrik uzay ve $S: M \to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in M$ için

$$\wp\big(d(Sx,Sy), d(x,y), d(x,Sx), d(y,Sy), d(x,Sy), d(y,Sx)\big) \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan $\Gamma \in \wp$ varsa S dönüşümüne kapalı (implicit) daralma dönüşümü adı verilir.

Khojasteh ve ark. [39] aşağıda verilen simülasyon fonksiyonu yardımıyla $Z-$ daralma dönüşümünü tanımlayarak Banach daralma dönüşümünü genelleyerek sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Tanım 1.3.30. [39] $\zeta : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlasın:

a. $\zeta(0,0) = 0$ dır,

b. her $s,t > 0$ için $\zeta(t,s) < s - t$ dir,

c. $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = l \in (0,\infty)$ olan $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ pozitif terimli dizileri için $\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$ dır.

Bu durumda ζ fonksiyonuna simülasyon fonksiyonu adı verilir.

Örnek 1.3.31. [39] $p \in (0,1)$ olmak üzere

$$\zeta_p(t,s)=\begin{cases}0 & , \quad (t,s)=(0,0)\\ ps-t, & (t,s)\neq(0,0)\end{cases}$$

olarak tanımlanan $\zeta_p:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Tanım 1.3.30'un şartlarını sağlar. Dolayısıyla bir simülasyon fonksiyonudur.

Tanım 1.3.32. [39] (M,d) bir metrik uzay ve $S:M\to M$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ için

$$\zeta\left(d(Sx,Sy),d(x,y)\right)\geq 0$$

şartını sağlayan S dönüşümüne $Z-$daralma dönüşümü denir.

Ansari [59] $C-$sınıfı fonksiyon olarak isimlendirdiği fonksiyon yardımıyla elde ettiği yeni daralma dönüşümünü kullanarak sabit nokta teoremleri ispatlamıştır.

Tanım 1.3.33. [59] $G:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ sürekli dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $C-$sınıfı fonksiyon olarak adlandırılır:

a. $G(s,t)\leq s$ dir,

b. $s=0$ veya $t=0$ ise $G(s,t)=s$ dir.

Tanım 1.3.34. [59] $G:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dönüşümü için

a. $s>t$ iken $G(s,t)>C_G$,

b. her $t\in[0,\infty)$ için $G(t,t)\leq C_G$

özelliklerini sağlayan sabit bir $C_G\geq 0$ değeri varsa G dönüşümüne C_G özelliğine sahip dönüşüm adı verilir.

Radenovic ve ark. [60] yukarıda tanımlanan $C-$sınıfı fonksiyonları kullanarak simülasyon fonksiyon yapısını genelleştirmişlerdir.

Tanım 1.3.35. [60] $\zeta:[0,\infty)^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

a. $G:[0,\infty)^2\to\mathbb{R}$ dönüşümü bir $C-$sınıfı fonksiyon olmak üzere her $s,t>0$ için $\zeta(s,t)<G(s,t)$ dir,

b. $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ iki dizi olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n>0$, ve $t_n<s_n$ ise $\limsup\limits_{n\to\infty}\zeta(t_n,s_n)<C_G$ dir.

Bu durumda G fonksiyonuna C_G-simülasyon fonksiyonu adı verilir.

Daha sade bir gösterim için C_G-simülasyon fonksiyonlarının ailesi Z_G ile gösterilmiştir.

Gopal ve ark. [61] C_G-simülasyon fonksiyonunu kullanarak $(Z_G,T)-$daralma dönüşümünü tanımlamış ve çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir.

Tanım 1.3.36. [61] (M,d) bir metrik uzay ve $S,T:M\to M$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in M$ için

$$\zeta\big(d(Sx,Sy),d(Tx,Ty)\big)\geq C_G$$

eşitsizliğini sağlayan $\zeta\in Z_G$ fonksiyonu varsa S dönüşümüne $(Z_G,T)-$daralma dönüşümü adı verilir.

Zheng ve ark. [62] Φ ailesini tanımlayarak yeni bir daralma dönüşümü elde ederek bu dönüşüm yardımıyla bazı teoremler vermişlerdir.

Φ aşağıdaki şartları sağlayan tüm $\phi:[1,\infty)\rightarrow[1,\infty)$ fonksiyonlarının ailesi olsun:

Φ_1. ϕ azalmayan bir fonksiyondur,

Φ_2. her $t>1$ için $\lim_{n\rightarrow\infty}\phi^n(t)=1$ dir,

Φ_3. ϕ fonksiyonu süreklidir.

Tanım 1.3.37. [62] (M,d) metrik uzay ve $S:M\rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in M$ için $N(x,y)=\text{maks}\{d(x,y),d(x,Sx),d(y,Sy)\}$ iken

$$\theta(d(Sx,Sy))\leq\phi(\theta(N(x,y)))$$

ifadesini sağlayan $\theta\in\tilde{\Theta}$ ve $\phi\in\Phi$ fonksiyonları varsa S dönüşümüne $\theta-\phi-$ daralma dönüşümü denir.

Aşağıdaki lemmalar, bu çalışmada yer alan sonuçların ispatında kullanılmıştır.

Lemma 1.3.38. [60] (M,d) metrik uzay ve $S:M\rightarrow M$ üçgensel $\alpha-$geçişli bir dönüşüm olsun. $x_0\in M$ için $\alpha(x_0,Sx_0)\geq1$ ve her $n\geq0$ için $\{x_n\}$ dizisi $x_{n+1}=Sx_n$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $m,n\geq0$ ve $n<m$ için $\alpha(x_n,x_m)\geq1$ dir.

Lemma 1.3.39. [62] $\theta:(0,\infty)\rightarrow(1,\infty)$ azalmayan ve sürekli bir fonksiyon, $\{t_k\}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında yakınsak ve $\inf_{t\in(0,\infty)}\theta(t)=1$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{k\rightarrow\infty}\theta(t_k)=1 \Leftrightarrow \lim_{k\rightarrow\infty}t_k=0$$

dır.

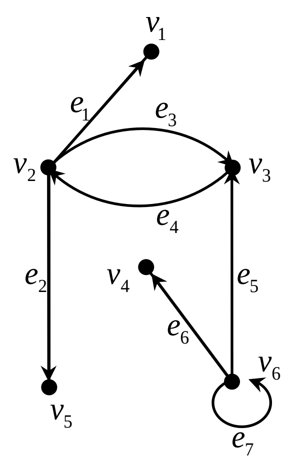
Lemma 1.3.40. [62] Eğer $\phi \in \Phi$ ise her $t > 1$ için $\phi(1) = 1$ ve $\phi(t) < t$ dir.

1.4. Graf Teorisi

Çalışmanın bu kısmında son zamanlarda sabit nokta teorisinin bir uygulaması olarak ilgi çeken bir yapı olan graf teorisi ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir.

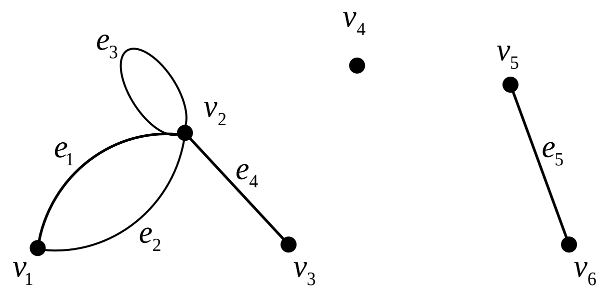
Bir H grafı noktalar ve bu noktaların birleştirilmesiyle elde dilen doğrulardan oluşmaktadır. Noktaları kümesi V ve doğrular kümesi E olmak üzere her $e \in E$ doğrusu sıralanmamış nokta çiftleriyle ilişkilidir. Eğer sadece v ve w noktaları bir tek ℓ doğrusu ile ilişkiliyse $e = (v, w)$ veya $e = (w, v)$ şeklinde yazılır. Bu durumda, bir yönsüz grafta (v, w), v ve w noktaları arasında bir doğru olarak tanımlanır [63].

Örnek 1.4.1. [63] Bir yönlü graf Şekil 1.1'de gösterilmiştir. Yönlendirilmiş doğrular oklarla gösterilmiştir. e_1 doğrusu sıralı (v_2, v_1) çiftinden ve e_7 doğrusu (v_6, v_6) çiftinden oluşmaktadır.



Şekil 1.1. Yönlü graf

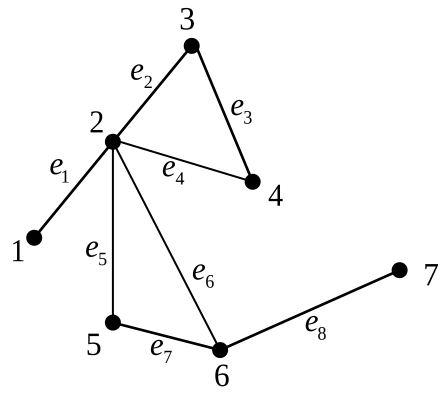
Farklı doğrular aynı noktalardan oluşabilir. Örneğin, Şekil 1.2'de e_1 ve e_2 doğruları $\{v_1, v_2\}$ nokta çiftinden oluşmaktadır. Bu gibi doğrulara paralel doğrular denir. Bir doğru sadece bir noktadan oluşuyorsa bu doğruya ilmek denir. Örneğin, Şekil 1.2'de $e_3 = (v_2, v_2)$ doğrusu bir ilmektir. Ayrıca, bir nokta herhangi bir doğru oluşturmuyorsa bu noktaya izole edilmiş nokta denir. Şekil 1.2'de v_4 noktası bir izole noktadır. Bir grafta hem ilmek hem de paralel doğrular yoksa graf basit graf olarak adlandırılır.



Şekil 1.2. Paralel doğru ve ilmek içeren graf

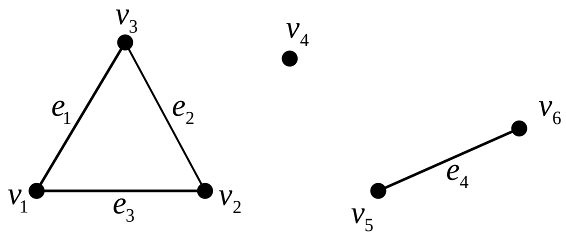
Tanım 1.4.2. [63] v ve w, H grafının iki noktası olmak üzere eğer bu iki noktayı bağlayan bir yol varsa H grafına bağlantılı graf denir.

Örnek 1.4.3. [63] Şekil 1.3'de herhangi iki noktayı bağlayan bir yol var olduğundan H grafı bağlantılı graftır.



Şekil 1.3. Bağlantılı graf

Örnek 1.4.4. [63] Şekil 1.4'de bağlantısız graf örneği gösterilmiştir.



Şekil 1.4. Bağlantısız graf

(M,d) bir metrik uzay ve $M \times M$ kümesinin köşegenler kümesi Δ olarak tanımlansın. M kümesinin elemanları ile H yönlü grafının $V(H)$ ve $E(H)$ sırasıyla noktalar ve doğrular kümeleri oluşturulsun. $E(H)$ doğrular kümesi tüm ilmekleri içersin, yani $E(H) \supseteq \Delta$ olsun. Böylece H grafı $(V(H), E(H))$ çifti olarak tanımlanmıştır.

H grafının tersi H^{-1} ile gösterilir ve bu grafın noktalar ve doğrular kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(H^{-1}) = \{(x,y) \in M \times M : (y,x) \in E(H)\}$$

dir. Ayrıca, $V\left(H^{-1}\right)=V\left(H\right)$ dir.

H grafının yönleri ihmal edilerek $\tilde{H}$ yönsüz grafı oluşur. Dolayısıyla $\tilde{H}$ grafının doğrular kümesi simetriktir. Bu durumda

$$E\left(\tilde{H}\right)=E\left(H\right)\cup E\left(H^{-1}\right)$$

dir. Her $x,y\in V^{*}$, $\left(x,y\right)\in E^{*}$ için $V^{*}\subseteq V\left(H\right)$, $E^{*}\subseteq E\left(H\right)$ olduğundan $\left(V^{*},E^{*}\right)$ grafı H grafı olarak tanımlanır.

Eğer $\tilde{H}$ grafı bağlantılı ise H grafı zayıf bağlantılıdır.

Jachymski [35] metrik uzayları grafla donatarak Banach $H-$daralma dönüşümünü literatüre kazandırmış ve bu dönüşümün grafla donatılmış tam metrik uzaylarda tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir.

Tanım 1.4.5. [35] $S:M\to M$ bir dönüşüm ve $H,$ M üzerinde bir graf olmak üzere

a. S dönüşümü H grafının doğrularını korur, yani,
   $\forall_{x,y\in M}\left(\left(x,y\right)\in E\left(H\right)\Rightarrow\left(Sx,Sy\right)\in E\left(H\right)\right)$ dir,
b. $\exists_{\alpha\in(0,1)}\forall_{x,y\in M}\left(\left(x,y\right)\in E\left(H\right)\Rightarrow d\left(Sx,Sy\right)\leq d\left(x,y\right)\right)$ dir

şartlarını sağlayan S dönüşümüne Banach $H-$daralma dönüşümü veya kısaca $H-$daralma dönüşümü adı verilir.

Bu daralma dönüşümü birçok araştırmacı için zengin bir çalışma konusu olduğundan farklı uzaylarda çalışılmış ve genelleştirilmiştir [36,64-66].

1.5. Asimetrik (Quasi) Metrik Uzaylar

Wilson [67] metrik fonksiyonunun simetri şartını kaldırarak asimetrik (quasi) metrik olarak bilinen kavramı ortaya atmıştır. Asimetrik metrik kavramı hem teorik hem de uygulamalı matematikte birçok uygulama alanına sahip olduğundan matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Simetri özelliğinin olmamasından dolayı asimetrik metrik uzayın topolojik özellikleri metrik uzaydan farklıdır. Yakınsaklık, süreklilik, tamlık gibi özellikler sağ ve sol olmak üzere iki yönde incelenmiştir.

Tanım 1.5.1. [67] M boştan farklı bir küme ve $q : M \times M \to \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in M$ için

q_1. $q(x,x) = 0$,

q_2. $q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y)$

şartlarını sağlayan q fonksiyonuna bir sözde (pseudo) asimetrik metrik denir. Bunlara ek olarak

q_3. $q(x,y) = q(y,x) = 0 \Rightarrow x = y$

şartı sağlanıyorsa q fonksiyonuna asimetrik metrik denir. Bir asimetrik metrik

q_4. $q(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

özelliğini de sağlarsa T_1-asimetrik metrik olarak adlandırılır. Bu durumda (M,q) ikilisine sözde asimetrik metrik (veya asimetrik metrik veya T_1-asimetrik metrik) uzay adı verilir.

Tanımlardan da anlaşılabileceği gibi her metrik bir T_1-asimetrik metrik, her T_1- asimetrik metrik asimetrik metrik ve her asimetrik metrik bir sözde asimetrik metriktir.

Tanım 1.5.2. [68] (M,q) asimetrik metrik uzayında

$$B_q(x_0,\varepsilon)=\{x\in M : q(x_0,x)<\varepsilon\}$$

olarak tanımlanan kümeye x_0 merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir.

Her asimetrik metrik tanımlı olduğu kümede bir τ_q topolojisi oluşturulabilir. Bu topolojinin bazı $\{B_q(x_0,\varepsilon) : x\in M, \varepsilon>0\}$ kümesidir.

Lemma 1.5.3. [69] (M,q) asimetrik metrik uzayında q asimetriğinin ürettiği τ_q topolojisi ile birlikte (M,τ_q) topolojik uzayı T_0-uzayıdır. Eğer (M,q) uzayı T_1- asimetrik metrik uzay ise τ_q topolojisi T_1 uzayıdır.

Lemma 1.5.4. [69] Her (M,q) asimetrik metrik uzayı için

$$q^{-1}(y,x)=q(x,y)$$

şeklinde tanımlanan eşlenik fonksiyonu da M üzerinde bir asimetrik metrik belirtir.

$$q^s(x,y)=\text{maks}\{q(x,y),q(y,x)\}$$

ile tanımlı q^s fonksiyonu ise M üzerinde bir metriktir.

Bir M kümesi üzerinde her bir d metriği alışılmış yöntemle bir topoloji üretir. Dolayısıyla, M kümesi üzerindeki bir d metriğinin ürettiği topoloji M kümesinin açık yuvarlarından oluşur. Bu topoloji τ_d ile gösterilecektir. Benzer şekilde (M,q) asimetrik metrik uzayı verildiğinde q^{-1} eşlenik asimetrik metrik kullanılarak M

üzerinde bir başka topoloji $\tau_{q^{-1}}$ tanımlanabilir. Ayrıca q^s metriğinin ürettiği topoloji τ_{q^s} ile gösterilir.

Tanım 1.5.5. [69] (M,q) bir asimetrik metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda tanımlı bir dizi olsun. $z \in M$ için

$$\lim_{n\to\infty} q(z, x_n) = 0$$

ise $\{x_n\}$ dizisi z noktasına yakınsaktır (veya $q-$yakınsaktır) denir. $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} q^s(z, x_n) = 0$$

ise $\{x_n\}$ dizisi τ_{q_s} topolojisine göre yakınsaktır denir.

Lemma 1.5.6. [69] (M,q) asimetrik metrik uzayında tanımlı bir $\{x_n\}$ dizisinin q^s yakınsak olması için gerek ve yeter şart hem $q-$yakınsak hem de $q^{-1}-$yakınsak olmasıdır.

Asimetrik metrik uzaylarda Cauchy dizileriyle ilgili birçok farklı yaklaşım vardır. Reilly [70] asimetrik metrik uzaylarda Cauchy dizilerini aşağıdaki şekilde sınıflandırmıştır.

Tanım 1.5.7. (M,q) bir asimetrik metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun.

a. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in M, \exists k \in \mathbb{N}, \forall m \geq k$ için $q(x, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine sol $q-$Cauchy,

b. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in M, \exists k \in \mathbb{N}, \forall m \geq k$ için $q(x_m, x) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine sağ $q-$Cauchy,

c. $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall r, s \geq k$ için $q(x_r, x_s) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine $q-$ Cauchy,

d. $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall r, s,\ r \geq s \geq k$ için $q(x_r, x_s) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine sağ $K-$Cauchy,

e. $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall r, s,\ r \geq s \geq k$ için $q(x_s, x_r) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine sol $K-$Cauchy,

dizisi adı verilir.

Tanım 1.5.8. [71] (M, q) asimetrik metrik uzayda tanımlı her

a. sol (sağ) $q-$Cauchy dizisi $q-$yakınsak ise (M, q) uzayına sol (sağ) $\varsigma-$ tam uzay,

b. $q-$Cauchy dizisi $q-$yakınsak ise (M, q) uzayına $\varsigma-$tam uzay,

c. sol (sağ) $q-$Cauchy dizisi $q^{-1}-$yakınsak ise (M, q) uzayına sol (sağ) $\eta-$ tam uzay,

d. $q-$Cauchy dizisi $q^{-1}-$yakınsak ise (M, q) uzayına $\eta-$tam uzay,

e. sol (sağ) $q-$Cauchy dizisi $q^{s}-$yakınsak ise (M, q) uzayına sol (sağ) $\Pi-$ tam uzay,

f. $q-$Cauchy dizisi $q^{s}-$yakınsak ise (M, q) uzayına $\Pi-$tam uzay,

g. sol (sağ) $K-$Cauchy dizisi $q-$yakınsak ise (M, q) uzayına sol (sağ) $K-$ tam uzay,

h. sol (sağ) $K-$Cauchy dizisi $q^{-1}-$yakınsak ise (M, q) uzayına sol (sağ) $K^{-1}-$tam uzay,

i. sol (sağ) $K-$Cauchy dizisi $q^{s}-$yakınsak ise (M, q) ye Symth$-$tam uzay,

denir.

BÖLÜM 2. MODÜLER UZAYLAR

Bu bölümde modüler uzayların genel özellikleri ile bu uzaylarda Banach daralma dönüşümü prensibinin genişlemelerinden bahsedilmiştir. Ayrıca asimetrik modüler metrik uzayın temel özellikleri incelenmiştir. Bunlara ek olarak Archimedean olmayan özelliği ile asimetrik modüler metrik kavramı birlikte düşünülerek Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay tanımlanıp bazı topolojik özellikleri verilmiştir.

2.1. Klasik Modüler Uzaylar

Nakano [72] ilk olarak sıralı uzaylar üzerinde modüler uzay teorisini tanımlamıştır. Musielak, Orlicz ve Mazur [73-74] bu yapıyı klasik modüler fonksiyonlar üzerinde genelleştirmiş ve temel teoremleri ispatlamışlardır. Bu tür uzaylar analizin uygulama alanında geniş yer kaplamaktadır. Birçok alanda genelleştirmeleri mevcuttur. Ayrıca bu uzayların olasılık ve matematiksel istatistik alanlarında da birçok uygulamaları vardır. Khamsi [75-79] modüler fonksiyon uzaylarında ve modüler uzaylarda Banach daralma dönüşümü prensibinin genelleştirmelerini ifade edip sabit nokta teoremleri ve uygulamaları ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

Tanım 2.1.1. [75] M keyfi vektör uzayı olsun. $\rho : M \to [0,\infty)$ fonksiyoneli her $x, y \in M$ için aşağıdaki şartları sağlasın.

ρ_1. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır,

ρ_2. $\forall \alpha$ skaleri için $|\alpha| = 1$ olmak üzere $\rho(\alpha x) = \rho(x)$ dir,

ρ_3. $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ iken $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ dir.

Bu durumda ρ fonksiyoneli (klasik) modüler olarak adlandırılır. Eğer (ρ_3) şartı

ρ_3'. $\quad \alpha, \beta \geq 0$, $s \in (0,1]$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ iken $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y)$

ile değiştirilirse ρ fonksiyoneli $s-$konveks modüler olarak adlandırılır. $s=1$ alınırsa ρ fonksiyoneline konveks modüler denir.

$M_\rho = \{x \in M : \lambda \to 0 \text{ iken } \rho(\lambda x) \to 0\}$ şeklinde tanımlanan M_ρ vektör uzayına modüler uzay denir.

Genelikle ρ alt toplamsallık özelliğini sağlamadığından bir norm gibi düşünülemez fakat

$$\|x\|_\rho = \inf \left\{ \alpha > 0; \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq \alpha \right\}$$

ile tanımlanan $F-$normu ile ilişkilendirilir. Eğer ρ konveks modüler ise

$$\|x\|_\rho = \inf \left\{ \alpha > 0; \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan norm fonksiyonuna ise Luxemburg normu adı verilir [75].

Lemma 2.1.2. [75] M_ρ modüler uzayında

a. Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $|a| < |b|$ olmak üzere her $x \in M_\rho$ için $\rho(ax) < \rho(bx)$ dir,

b. her $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ olmak üzere her $x_1, ..., x_n \in M_\rho$ için $\rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)$ dir.

Tanım 2.1.3. [75] M_ρ bir modüler uzay $\rho : M \to [0,\infty)$ bir fonksiyonel olsun.

a. Her $x \in M_\rho$ için $\rho(2x) \le K\rho(x)$ olacak şekilde $K > 0$ sabiti varsa ρ fonksiyoneli Δ_2-tip şartını sağlar denir.
b. $\rho(2x) \to 0$ iken $\rho(x_n) \to 0$ ise ρ fonksiyoneli Δ_2-şartını sağlar denir.

Tanım 2.1.4. [75] M_ρ modüler uzay ve bu uzayda tanımlı $\{x_n\}$ dizisi için eğer

a. $n \to \infty$ iken $\rho(x_n - x) \to 0$ ise $\rho-$yakınsaktır,
b. $n, m \to \infty$ iken $\rho(x_n - x_m) \to 0$ ise $\rho-$Cauchy dizisidir,

denir.

Tanım 2.1.5. [75] Eğer her $\rho-$Cauchy dizisi $\rho-$yakınsak ise M_ρ modüler uzayı $\rho-$tamdır denir.

ρ modüler fonksiyoneli üçgen eşitsizliğini sağlamadığından $\rho-$yakınsak olan dizi genellikle $\rho-$Cauchy dizisi değildir. Bunun gerçekleşmesi için ρ fonksiyonunun Δ_2-şartını sağlaması gerekmektedir.

Tanım 2.1.6. [75] M_ρ modüler uzay ve $S : M_\rho \to M_\rho$ bir dönüşüm olsun.

a. Eğer her $x, y \in M_\rho$ için $\rho(Sx - Sy) \le \lambda\rho(x - y)$ olacak şekilde $\lambda < 1$ mevcut ise S dönüşümüne $\rho-$daralma dönüşümü denir.
b. Eğer her $x, y \in M_\rho$ için $\rho(Sx - Sy) \le \rho(x - y)$ eşitsizliği sağlanırsa S dönüşümüne $\rho-$genişlemeyen dönüşüm denir.

Razani ve ark. [80] modüler uzayda $\rho-$daralma dönüşümünü genelleştirmiş ve aşağıdaki sabit nokta teoremini elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.7. [80] M_ρ $\rho-$tam modüler uzay, ρ Δ_2-şartını sağlayan bir fonksiyonel olsun. Her $x,y\in M_\rho$ için

$$\rho\left(c\left(Sx-Sy\right)\right)\leq\psi\left(\rho\left(l\left(x-y\right)\right)\right)$$

eşitsizliğini sağlayan $c>l$ olan $c,l\in\mathbb{R}_+$ sabitleri ve artan, alttan yarı sürekli ψ fonksiyonu mevcut ise $S:M_\rho\to M_\rho$ dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Günümüze kadar pek çok araştırmacı tarafından modüler uzaylarda farklı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır [72-86].

2.2. Modüler Metrik Uzaylar

Bu bölümde Chistyakov'un [40] 2010 yılında tanımladığı modüler metrik fonksiyonu ve bu fonksiyon yardımıyla tanımlanan modüler metrik uzayın temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, modüler metriğin tanımında yer alan üçgen eşitsizliği şartından daha güçlü bir şart olan Arhimedean olmayan özelliği ile yer değiştirilerek Paknazar ve De la Sen [87] tarafından tanımlanan Archimedean olmayan modüler metrik uzay yapısından bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda ilgi çekici sabit nokta teoremleri ispatlanıp bazı uygulamaları verilmiştir.

Herhangi bir metrik negatif olmayan sonlu değerler alır. Yani, x ile y arasındaki uzaklık

$$0\leq d\left(x,y\right)<\infty$$

dır. M kümesi üzerinde modüler kavramı özel olarak fiziksel terimlerle doğal olarak aşağıdaki gibi yorumlanabilir.

Sezgisel olarak bir küme üzerindeki metrik, küme üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki negatif olmayan sonlu uzaklığı temsil ederken bir küme üzerindeki κ modüleri de herhangi bir $\lambda > 0$ parametresi için λ zaman olarak düşünüldüğünde $x, y \in M$ için

$$0 \le \kappa_\lambda(x, y) < \infty$$

olmak üzere λ zamanında x ile y arasındaki hız olarak yorumlanabilir.

Bu çalışma boyunca, $M \neq \emptyset$ ve $\kappa : (0,\infty) \times M \times M \to [0,\infty]$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall \lambda > 0$ ve $x, y \in M$ için $\kappa(\lambda, x, y) = \kappa_\lambda(x, y)$ gösterimi kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.1. [40] M boştan farklı bir küme ve $\kappa : (0,\infty) \times M \times M \to [0,\infty]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

κ_1. her $\lambda > 0$ için $x = y \Leftrightarrow \kappa_\lambda(x, y) = 0$ dır,

κ_2. her $\lambda > 0$ ve $x, y \in M$ için $\kappa_\lambda(x, y) = \kappa_\lambda(y, x)$ dir,

κ_3. her $\lambda > 0$ ve $x, y, z \in M$ için $\kappa_{\lambda+\mu}(x, y) \le \kappa_\lambda(x, y) + \kappa_\lambda(y, z)$ dir.

Bu durumda κ fonksiyonuna modüler metrik ve (M, κ) ikilisini temsil eden $x, y \in M_\kappa$ uzayına da modüler metrik uzay denir.

M üzerinde κ modüler metriği (κ_1) şartının daha zayıf hali olan "$x = y \Leftrightarrow \kappa_\lambda(x, y) = 0$" şartını $\lambda > 0$ için sağlarsa κ fonksiyonu regülerdir, eğer her $\lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in M$ için

$$\kappa_{\lambda+\mu}(x,y) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\kappa_{\lambda}(x,z) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\kappa_{\mu}(z,y)$$

ifadesini sağlayan κ fonksiyonu ise konvekstir denir.

Örnek 2.2.2. [42] (M,d) bir metrik uzay olsun. Her $\lambda > 0$ için κ fonksiyonu $\kappa_{\lambda}(x,y) = d(x,y)$ olsun. Buradan κ fonksiyonunun modüler metrik olduğu kolayca görülür.

Örnek 2.2.3. [42] (M,d) bir metrik uzay olsun. Her $x,y \in M$ ve $\lambda > 0$ için

$$\kappa_{\lambda}(x,y) = \frac{d(x,y)}{\lambda}$$

ile tanımlı κ fonksiyonu konveks modüler metriktir.

Örnek 2.2.4. [42] (M,d) bir metrik uzay olsun. Her $x,y \in M$ ve $\lambda > 0$ için

$$\kappa_{\lambda}(x,y) = \begin{cases} \infty, & \lambda < d(x,y) \\ 0, & \lambda \geq d(x,y) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan κ fonksiyonu M üzerinde konveks modülerdir.

Örnek 2.2.5. [42] M bir reel lineer uzay ve $\rho : M \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $\lambda > 0$ ve $x,y \in M$ için

$$\kappa_{\lambda}(x,y) = \rho\left(\frac{x-y}{\lambda}\right)$$

şeklinde tanımlanan κ fonksiyonunun (konveks) modüler olması için gerek ve yeter şart ρ nun bir klasik (konveks) modüler olmasıdır.

Paknazar ve De la Sen. [87] modüler metrik uzayın (κ_3) şartını değiştirerek Archimedean olmayan modüler metrik uzayı tanımlamışlardır.

Yukarıdaki modüler metrik tanımında (κ_3) özelliği

κ_4. $\forall \lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in M$ için $\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\mu\}}(x, y) \leq \kappa_\lambda(x, y) + \kappa_\mu(y, z)$

şartı ile değiştirilirse, M_κ uzayına Archimedean olmayan modüler metrik uzay denir.

Örnek 2.2.6. [87] $M = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\kappa : M \times M \to (0, \infty)$ fonksiyonu her $\lambda > 0$ için

$$\kappa_\lambda\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \frac{1}{\lambda}\left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\right)$$

ile tanımlansın. κ fonksiyonu M üzerinde Archimedean olmayan modüler metrik fonksiyonudur.

Tanım 2.2.7. [42] M_κ modüler metrik uzay, $A \subseteq M_\kappa$ ve $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi olsun. Bu durumda

a. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\xi \in M_\kappa$ noktasına $\kappa-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\lambda > 0$ için $n \to \infty$ iken $\kappa_\lambda(\xi_n, \xi) \to 0$ olmasıdır.

b. Her $\lambda > 0$ için $n, m \to \infty$ iken $\kappa_\lambda(\xi_n, \xi_m) \to 0$ ise $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $\kappa-$ Cauchy dizisi denir.

c. $\kappa-$yakınsak bir dizinin limit noktası A alt kümesine ait ise A kümesi $\kappa-$kapalı olarak adlandırılır.

d. Eğer A kümesinde her $\kappa-$Cauchy dizisi $\kappa-$yakınsak ise A tamdır.

e. Her $\lambda>0$ için $\delta_{\kappa}(S)=\sup\{\kappa_{\lambda}(\xi,\eta);\xi,\eta\in M\}<\infty$ ise A kümesine $\kappa-$sınırlı küme denir.

Tanım 2.2.8. [42] M_{κ} modüler metrik uzay ve $S:M_{\kappa}\to M_{\kappa}$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\kappa_{\lambda}(\xi_n,\xi)=0$ iken $\lim_{n\to\infty}\kappa_{\lambda}(S\xi_n,S\xi)=0$ ise yani $\{\xi_n\}$ dizisi ξ noktasına yakınsak iken $\{S\xi_n\}$ dizisi $S\xi$ noktasına yakınsak ise S dönüşümüne $\kappa-$süreklidir denir.

2011 yılında Mongkolkeha ve ark. [88] ilk defa olarak modüler metrik uzaylarda aşağıdaki daralma dönüşümünü kullanarak dönüşümün bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermişlerdir.

Tanım 2.2.9. [88] M_{κ} modüler metrik uzay ve $S:M_{\kappa}\to M_{\kappa}$ bir dönüşüm olsun. Her $\lambda>0$ ve $x,y\in M_{\kappa}$ için

$$\kappa_{\lambda}(Sx,Sy)\le\alpha\kappa_{\lambda}(x,y)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\alpha\in[0,1)$ sabiti varsa S dönüşümüne daralma dönüşümü denir.

Son yıllarda modüler metrik uzaylar sabit nokta teorisi üzerinde çalışan araştırmacıların dikkatini çekmiştir ve bunun sonucu olarak pek çok sabit nokta teoremi ve uygulaması literatüre kazandırılmıştır [89-95].

2.3. Asimetrik Modüler Metrik Uzaylar

Bu bölümde Girgin ve Öztürk [96] tarafından tanımlanan asimetrik modüler metrik uzaylar ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca asimetrik modüler metrikten daha genel olan Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay yapısının temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu uzayda daha önce çalışmamış sabit nokta teoremleri elde edilip bu teoremlerin bazı uygulamaları dördüncü bölümde verilmiştir.

Tanım 2.3.1. M boştan farklı bir küme ve $Q:(0,\infty)\times M\times M\to[0,\infty]$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $m,n>0$ ve $\xi,\eta,\nu\in M$ için Q dönüşümü

Q_1. $Q_m(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow\xi=\eta$,

Q_2. $Q_{m+n}(\xi,\eta)\leq Q_m(\xi,\nu)+Q_n(\nu,\eta)$

şartlarını sağlarsa Q dönüşümüne M üzerinde asimetrik modüler metrik ve $M_Q:=(M,Q)$ ikilisine de bir asimetrik modüler metrik uzay denir. Eğer Q dönüşümü (Q_1) şartı yerine

Q_1^*. $Q_m(\xi,\xi)=0$, her $m>0$ ve $\xi\in M$

şartını sağlarsa Q dönüşümüne asimetrik pseudo modüler metrik, M_Q uzayına da sözde asimetrik modüler metrik uzay adı verilir. Q dönüşümü (Q_1) şartı yerine

Q_3. bazı $m>0$ için $Q_m(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow\xi=\eta$

şartını sağlarsa M_Q uzayına regülerdir denir. Son olarak Q dönüşümü her $m,n\geq 0$ ve $\xi,\eta,\nu\in M$ için

Q_4. $Q_{m+n}(\xi,\eta)\leq\frac{m}{m+n}Q_{m+n}(\xi,\nu)+\frac{n}{m+n}Q_{m+n}(\nu,\eta)$

şartını sağlarsa Q dönüşümüne konvekstir denir.

Tanım 2.3.2. Yukarıdaki tanımda (Q_2) şartı ile

Q_5. her $m,n \geq 0$ ve $\xi,\eta,\nu \in M$ için $Q_{\text{maks}\{m,n\}}(\xi,\eta) \leq Q_m(\xi,\nu) + Q_n(\nu,\eta)$

şartı yer değiştirirse M_Q uzayına Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay denir.

(Q_5) şartı (Q_2) şartını sağladığından her Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay asimetrik modüler metrik uzaydır.

Örnek 2.3.3. $M = [0,\infty)$ ve Q dönüşümü

$$Q_m(\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\xi-\eta}{m}, & \xi \geq \eta \text{ ise} \\ 1, & \xi < \eta \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, M_Q asimetrik modüler metrik uzay fakat modüler metrik uzay değildir.

Şimdi asimetrik modüler metrik uzayların bazı özellikleri verilecektir.

Q asimetrik modüler metrik olmak üzere $Q_m^{-1}(\xi,\eta) = Q_m(\eta,\xi)$ ile verilen Q^{-1} dönüşümü asimetrik modüler metriğin eşleniği olarak tanımlanır.

Eğer Q, T_0-asimetrik modüler metrik fonksiyonu ise $Q^E = Q^{-1} \cup Q$ yani

$$Q_m^E(\xi,\eta) = \max\{Q_m(\xi,\eta), Q_m(\eta,\xi)\}$$

ise Q^E bir modüler metrik fonksiyonudur.

Tanım 2.3.4. M_Q asimetrik modüler metrik uzay olsun. Eğer $m>0$ ve $r>0$ için

$$B_Q(\xi,r)=\{\eta\in M_Q:Q_m(\xi,\eta)<r\} \text{ ve } B_Q[\xi,r]=\{\eta\in M_Q:Q_m(\xi,\eta)\le r\}$$

olacak şekilde $x\in M_Q$ mevcut ise $B_Q(\xi,r)$ ve $B_Q[\xi,r]$ kümelerine sırasıyla açık ve kapalı yuvar adı verilir.

Her asimetrik modüler metrik tanımlı olduğu kümede bir τ_Q topolojisi oluşturur. Bu topolojinin bazı $\{B_Q(x_0,\varepsilon):x\in M,\varepsilon>0\}$ kümesidir.

Tanım 2.3.5. $\{\xi_p\}$ dizisi M_Q asimetrik modüler metrik uzayında $\xi\in M_Q$ noktasına yakınsasın. Bu durumda

a. $\xi_p\to\xi\Leftrightarrow Q_m(\xi,\xi_p)\to 0$ ise $\{\xi_p\}$ dizisine ξ noktasına $Q-$yakınsaktır veya soldan yakınsaktır denir.
b. $\xi_p\to\xi\Leftrightarrow Q_m(\xi_p,\xi)\to 0$ ise $\{\xi_p\}$ dizisine ξ noktasına $Q^{-1}-$yakınsaktır veya sağdan yakınsaktır denir.
c. $Q_m(\xi,\xi_p)\to 0$ ve $Q_m(\xi_p,\xi)\to 0$ ise $\{\xi_p\}$ dizisine ξ noktasına Q^E- yakınsaktır denir.

Tanım 2.3.6. M_Q asimetrik modüler metrik uzay ve $\{\xi_p\}$ bu uzayda bir dizi olsun.

a. Eğer her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $p_0\in\mathbb{N}$ sayısı $p\ge k\ge p_0$ özelliğindeki her $p,k\in\mathbb{N}$ ve $m>0$ için $Q_m(\xi_k,\xi_p)<\varepsilon$ $\left(Q_m(\xi_p,\xi_k)<\varepsilon\right)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $\{\xi_p\}$ dizisine soldan (sağdan) $Q-K-$Cauchy dizisi denir.
b. Eğer her $\varepsilon>0$ için sayısına karşılık bir $p_0\in\mathbb{N}$ sayısı $p,k\ge p_0$ özelliğindeki her $p,k\in\mathbb{N}$ ve $m>0$ için $Q_m(\xi_k,\xi_p)<\varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $\{\xi_p\}$ dizisine Q^E-K-Cauchy dizisidir denir.

c. Her soldan $Q-K-$Cauchy dizisi $Q-$yakınsak ise M_Q uzayına soldan $Q-K-$tam uzay denir.

d. Her soldan $Q-K-$Cauchy dizisi Q^E-yakınsak ise M_Q uzayına $Q-$Symth tam uzay denir.

e. M_{Q^E} tam modüler metrik uzay ise M_Q uzayına $Q-$bitam uzay denir.

Önerme 2.3.7. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay ve bu uzayda $\{x_n\}$ bir dizi olsun.

a. Eğer $\{x_n\}$ dizisi $x \in M_Q$ noktasına $Q-$yakınsak ve y noktasına $Q^{-1}-$yakınsak ise $Q_m(x,y)=0$ dır.

b. Eğer $\{x_n\}$ dizisi $x \in M_Q$ noktasına $Q-$yakınsak ve $Q_m(y,x)=0$ ise $\{x_n\}$ dizisi y noktasına $Q-$yakınsaktır.

Tanım 2.3.8. M_Q asimetrik modüler uzayın topolojisi τ_Q ve $x \in M_Q$ olsun. Bir $V \subset M_Q$ kümesine x noktasının bir τ_Q-komşuluğu denir. Ayrıca, $x \in M_Q$ noktasının komşuluklar ailesi $\vartheta(x)$ olmak üzere $V \in \vartheta(x)$ olması için gerek ve yeter şart $B_Q(x,r) \subset V$ olacak şekilde en az bir $r>0$ sayısının olmasıdır.

Tanım 2.3.9. M_Q asimetrik modüler metrik uzay ve $G \subset M_Q$ boştan farklı bir küme olsun. Her $x \in G$ için $B_Q(x,r) \subset G$ olacak şekilde $r=r_x>0$ sayısı varsa G kümesine τ_Q-açık küme denir.

Eşlenik asimetrik modüler metrik uzay $\left(Q^{-1}\right)$ kullanılarak bir diğer $\tau_{Q^{-1}}$ topolojisi elde edilir. Ayrıca, modüler metrik $\left(Q^E\right)$ tarafından üretilen topoloji τ_{Q^E} topolojisidir.

Bitopolojik uzay kısaca τ_Q ve $\tau_{Q^{-1}}$ topolojileri ile donatılmış bir T kümesidir ve $\left(T,\tau_Q,\tau_{Q^{-1}}\right)$ üçlüsü ile gösterilir.

Aşağıda asimetrik modüler metrik uzaylarda ilk olarak tanımlanan bitopolojik uzaylara özel bir tanımdan bahsedilmiştir.

Tanım 2.3.10. $\left(M_Q,\tau_Q,\tau_{Q^{-1}}\right)$ bitopolojik uzay olsun. Eğer her bir farklı $s,t\in M_Q$ noktaları için s noktasının bir U τ_Q-komşuluğu ve t noktasının bir V $\tau_{Q^{-1}}-$ komşuluğu $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde mevcut ise $\left(M_Q,\tau_Q,\tau_{Q^{-1}}\right)$ bitopolojik uzayına ikili (pairwise) Hausdorff uzayı adı verilir.

Önerme 2.3.11. Eğer M_Q bitopolojik uzayı ikili Hausdorff ise τ_Q ve $\tau_{Q^{-1}}$ topolojileri T_1-uzayıdır.

Önerme 2.3.12. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay olsun.

a. $B_Q\left(x,r\right)$ açık yuvarı τ_Q-açık küme ve $B_Q\left[x,r\right]$ kapalı yuvarı $\tau_{Q^{-1}}-$kapalıdır. Ayrıca, $B_{Q^E}\left(x,r\right)\subset B_Q\left(x,r\right)$ ve $B_{Q^E}\left(x,r\right)\subset B_{Q^{-1}}\left(x,r\right)$ dir.

b. τ_{Q^E} topolojisi τ_Q ve $\tau_{Q^{-1}}$ topolojilerinden daha incedir.

c. Her τ_Q-açık (kapalı) küme $\tau_{Q^E}-$açık (kapalı) kümedir. Aynı özellik $\tau_{Q^{-1}}$ topolojisi içinde geçerlidir.

Modüler metrik uzaylardan farklı olarak asimetrik modüler metrik uzaylarda iki farklı uzaklık fonksiyonu tanımlanmaktadır.

Tanım 2.3.13. M_Q asimetrik modüler metrik uzay, $A \subset M_Q$ boştan farklı bir küme, $x \in M_Q$ ve $m > 0$ olmak üzere

$$Q_m(x, A) = \inf\{Q_m(x, y) : y \in A\}$$

ve

$$Q_m(A, x) = \inf\{Q_m(y, x) : y \in A\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara sırasıyla soldan ve sağdan uzaklık fonksiyonu denir.

Önerme 2.3.14. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay, $A \subset M_Q$ boştan farklı bir küme olsun. Bu durumda,

$$Q_m(x, A) = Q^{-1}{}_m(x, A)$$

dır.

Önerme 2.3.15. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay, $A \subset M_Q$ boştan farklı bir küme, $x, x^* \in M_Q$ ve $m > 0$ olsun. Bu durumda,

$$Q_m(x, A) \leq Q_m(x, x^*) + Q_m(x^*, A)$$

ve

$$Q_m(A, x) \leq Q_m(A, x^*) + Q_m(x^*, x)$$

dir.

BÖLÜM 3. ARCHIMEDEAN OLMAYAN MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde üç farklı tip daralma dönüşümü kullanılarak Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ve uygulamaları elde edilmiştir. Birinci kısmında Suzuki ve Berinde dönüşümleri ile $\alpha-$geçişli dönüşümler ve $\theta-$daralma dönüşümleri birlikte düşünülerek sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. İkinci kısımda $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çifti ile simülasyon fonksiyonu kullanılarak ortak sabit nokta teoremleri ve sonuçları verilmiştir. Üçüncü kısımda $\alpha-$geçişli dönüşüm ile kapalı daralma dönüşümü bir araya getirilerek sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Dördüncü kısımda elde edilen bu sabit nokta teoremlerinin bazı uygulamaları gösterilmiştir. Bu bölüm boyunca κ fonksiyonu regüler, konveks ve her $\xi_0 \in M_\kappa$ ve $\lambda > 0$ için $\kappa_\lambda(\xi_0, S\xi_0) < \infty$ olarak kabul edilmiştir.

3.1. Suzuki – Berinde Daralma Dönüşümleri için Sabit Nokta Teorisi ile İlgili Sonuçlar

Tanım 3.1.1. M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay, $S,T : M_\kappa \to M_\kappa$ iki dönüşüm ve $\alpha : M_\kappa \times M_\kappa \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,T\eta)\right\} \le \kappa_\lambda(\xi,\eta) \quad \Rightarrow$$

$$\alpha(\xi,\eta)\theta(S\xi,T\eta) \le \left[\theta\left(P(\xi,\eta)\right)\right]^k + LE(\xi,\eta), \tag{3.1}$$

$$P(\xi,\eta)=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,T\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,T\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}$$

ve

$$E(\xi,\eta)=\min\{\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\xi,T\eta),\kappa_\lambda(\eta,S\xi)\},$$

ifadelerini sağlayan $\theta\in\tilde{\Theta}$ fonksiyonu, $k\in(0,1)$ ve $L\geq 0$ sabitleri mevcut ise S ve T dönüşümleri genelleştirilmiş $\alpha-\theta-$Suzuki$-$Berinde daralma dönüşümü olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.2. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay, $S,T:M_\kappa\to M_\kappa$ genelleştirilmiş $\alpha-\theta-$Suzuki$-$Berinde daralma dönüşümleri olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlansın:

a. (S,T) çifti genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çiftidir,

b. $\alpha(\xi_0,S\xi_0)\geq 1$ ve $\alpha(S\xi_0,\xi_0)\geq 1$ olacak şekilde $\xi_0\in M_\kappa$ vardır,

c. S ve T dönüşümleri $\kappa-$süreklidir,

d. $\alpha(\xi,\nu)\geq 1$ ve $\alpha(\nu,\eta)\geq 1$ ise $\alpha(\xi,\eta)\geq 1$ dir.

Bu durumda S ve T dönüşümleri M_κ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: (b) özelliğinden $\alpha(\xi_0,S\xi_0)\geq 1$ ifadesini sağlayan $\xi_0\in M_\kappa$ keyfi bir eleman olsun. $S\xi_0=\xi_1$ ve $T\xi_1=\xi_2$ olan $\xi_1,\xi_2\in M_\kappa$ vardır. Bu şekilde devam ederek her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\xi_{2n+2}=T\xi_{2n+1},\quad \xi_{2n+1}=S\xi_{2n}, \tag{3.2}$$

ifadesini sağlayan $\{\xi_n\}$ dizisi tanımlansın. (a) şartından (S,T) çifti genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çifti olduğundan $\alpha(\xi_0, S\xi_0)\geq 1$ ve $\alpha(S\xi_0,\xi_0)\geq 1$ sağlanır. Buradan

$$\alpha(\xi_1,\xi_2)=\alpha(S\xi_0,T\xi_1)\geq 1$$

ve

$$\alpha(\xi_2,\xi_1)=\alpha(T\xi_1,S\xi_0,)\geq 1$$

dir. Ayrıca $\alpha(\xi_2,\xi_3)=\alpha(T\xi_1,S\xi_2)\geq 1$ ve $\alpha(\xi_3,\xi_2)=\alpha(S\xi_2,T\xi_1)\geq 1$ olur. Benzer şekilde devam edilerek her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\alpha(\xi_n,\xi_{n+1})\geq 1 \text{ ve } \alpha(\xi_{n+1},\xi_n)\geq 1 \tag{3.3}$$

bulunur.

$$\frac{1}{2}\min\{\kappa_\lambda(\xi_{2n},S\xi_{2n}),\kappa_\lambda(\xi_{2n+1},T\xi_{2n+1})\}\leq \kappa_\lambda(\xi_{2n},\xi_{2n+1}) \tag{3.4}$$

olsun. Eğer $\kappa_\lambda(\xi_{2n},S\xi_{2n})<\kappa_\lambda(\xi_{2n+1},T\xi_{2n+1})$ ise

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\min\{\kappa_\lambda(\xi_{2n},S\xi_{2n}),\kappa_\lambda(\xi_{2n+1},T\xi_{2n+1})\}\\
&=\frac{1}{2}\min\{\kappa_\lambda(\xi_{2n},\xi_{2n+1}),\kappa_\lambda(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2})\}\\
&=\frac{1}{2}\kappa_\lambda(\xi_{2n},\xi_{2n+1})<\kappa_\lambda(\xi_{2n},\xi_{2n+1})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. Eğer $\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},T\xi_{2n+1}\right)<\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},S\xi_{2n}\right)$ ise

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},S\xi_{2n}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},T\xi_{2n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)<\frac{1}{2}\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)<\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right) \tag{3.6}$$

elde edilir. Böylece, (3.5) ve (3.6) ifadelerinden (3.4) iddiası doğrudur. S ve T $\alpha-\theta-$Suzuki$-$Berinde daralma dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned}\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right)&=\theta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n},T\xi_{2n+1}\right)\right)\\&\leq\alpha\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\theta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n},T\xi_{2n+1}\right)\right)\\&\leq\left[\theta\left(P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right)\right]^k+LE\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)&=\text{maks}\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},S\xi_{2n}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},T\xi_{2n+1}\right),\\&\qquad\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},T\xi_{2n+1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},S\xi_{2n}\right)}{2}\Big\}\\&=\text{maks}\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right),\\&\qquad\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+2}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+1}\right)}{2}\Big\}\\&=\text{maks}\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right),\\&\qquad\frac{\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n},\xi_{2n+2}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+1}\right)}{2}\Big\}\\&\leq\text{maks}\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right),\\&\qquad\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)}{2}\Big\}\\&=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right\},\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned} E\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right) &= \min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},S\xi_{2n}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},T\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},S\xi_{2n}\right)\right\} \\ &= \min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+2}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+1}\right)\right\} \\ &= \min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+2}\right),0\right\}=0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. $n\in\mathbb{N}$ için

$$\operatorname{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right\}=\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)$$

olarak kabul edilirse, (3.8) ve (3.9) ifadelerinde (3.7) eşitsizliğinden

$$\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right)\le\left[\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right)\right]^k$$

bulunur. Buradan da

$$\ln\left[\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right)\right]\le k\ln\left[\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right)\right]$$

elde edilir ki bu ise $k\in(0,1)$ olduğundan bir çelişkidir. Yani, $n\in\mathbb{N}$ için

$$P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)=\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)$$

dır. Böylece (3.7) ifadesinden

$$\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right)\le\left[\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right)\right]^k<\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right) \tag{3.10}$$

dir. Benzer şekilde

$$\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right)<\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n-1},\xi_{2n}\right)\right) \tag{3.11}$$

dir. (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right)\right) < \theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right)\right) \tag{3.12}$$

dir. $n \to \infty$ için (3.12) ifadesinden limit alınırsa

$$\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right)\right) \to 1 \tag{3.13}$$

bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için Lemma 1.3.38'den

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right) = 0 \tag{3.14}$$

olur. $\{\xi_n\}$ dizisinin $\kappa-$Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi için $\{\xi_{2n}\}$ dizisinin $\kappa-$ Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\varepsilon > 0$ için $n_k > m_k \geq k$ olan $\{m_k\}$ ve $\{n_k\}$ dizileri

$$\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k}\right) \geq \varepsilon \text{ ve } \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2m_k}\right) < \varepsilon \tag{3.15}$$

ifadelerini sağlayacak şekilde var olsun. (3.15) eşitsizliğinden ve (κ_4) özelliğinden

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k}\right) &= \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k}\right)\\ &\leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2n_k-1}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2m_k}\right)\\ &< \varepsilon + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2n_k-1}\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k}\right) = \varepsilon \tag{3.17}$$

olur. Ayrıca, tekrar (3.15) ifadesi ve (κ_4) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2m_k}\right) &= \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2m_k}\right) \\
&\leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right) \\
&= \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right) \\
&\leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right) \\
&+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2m_k}\right) \\
&< \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)+\varepsilon,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ve

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2n_k+1}\right) &= \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2n_k+1}\right) \\
&\leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k},\xi_{2n_k+1}\right) \\
&= \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2m_k},\xi_{2n_k+1}\right) \\
&\leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k},\xi_{2n_k-1}\right) \\
&\leq \varepsilon+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2n_k+1}\right) \\
&= \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k},\xi_{2n_k-1}\right) \\
&+\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2n_k+1}\right) \\
&\leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2m_k}\right) \\
&+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right) \\
&< \varepsilon+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2n_k}\right) \\
&+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right) &= \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right) \\
&\le \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2m_k-1}\right) \\
&= \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)+\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2m_k-1}\right) \\
&\le \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2m_k}\right) \\
&+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k},\xi_{2m_k-1}\right) \\
&< \varepsilon+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k},\xi_{2m_k-1}\right)
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

elde edilir. (3.3) ifadelerinden her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)\ge 1$ ve $\alpha\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2n_k-2}\right)\ge 1$ dir. Hipotezdeki (d) şartından $\alpha\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-2}\right)\ge 1$ elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek $n_k > m_k$ için

$$
\alpha\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)\ge 1 \tag{3.21}
$$

bulunur.

$$
\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},T\xi_{2m_k-1}\right)\right\}\le \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)
$$

olsun. Eğer

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},T\xi_{2m_k-1}\right)\right\}> \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right) \\
&=\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right)\right\}> \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

ise (3.22) ifadesinde $k\to\infty$ için limit alınırsa (3.14) ve (3.20) eşitsizliklerinden $\varepsilon<0$ çelişkisi elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},T\xi_{2m_k-1}\right)\right\}\le\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)$$

olur. Tanım 3.1.1'de verilen (3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2m_k}\right)\right)&=\theta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n_k},T\xi_{2m_k-1}\right)\right)\\&\le\alpha\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)\theta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n_k},T\xi_{2m_k-1}\right)\right)\\&\le\left[\theta\left(P\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)\right)\right]^k+LE\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right),\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}P\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)=\text{maks}&\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\\&\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},T\xi_{2m_k-1}\right),\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},T\xi_{2m_k-1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},S\xi_{2n_k}\right)}{2}\Big\}\\=\text{maks}&\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right),\\&\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right),\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2n_k+1}\right)}{2}\Big\}\end{aligned}\tag{3.24}$$

ve

$$\begin{aligned}E\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)&=\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},T\xi_{2m_k-1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},S\xi_{2n_k}\right)\right\}\\&=\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2n_k+1}\right)\right\},\end{aligned}\tag{3.25}$$

dir. (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.23), (3.24) ve (3.25) eşitsizliklerinde $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\theta(\varepsilon)\le\left[\theta(\varepsilon)\right]^k$$

elde edilir ki bu da $k \in (0,1)$ olduğundan bir çelişkidir. Böylece $\{\xi_{2n}\}$ dizisi $\kappa-$ Cauchy dizisidir. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ için $\kappa_\lambda(\xi_n, u) \to 0$ olacak şekilde $u \in M_\kappa$ vardır.

Şimdi ise u noktasının S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğu gösterilecektir. $n \to \infty$ için $\kappa_\lambda(\xi_{2n}, u) \to 0$ ve S dönüşümü $\kappa-$sürekli olduğundan ise $n \to \infty$ için

$$\kappa_\lambda(\xi_{2n+1}, u) = \kappa_\lambda(S\xi_{2n}, Su) \to 0$$

olur. Buradan $n \to \infty$ için $\xi_{2n+1} \to Su$ bulunur. $n \to \infty$ için $\xi_{2n+1} \to u$ olduğundan ve limitin tek olması gerektiğinden $Su = u$ olmalıdır. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda(u, \xi_{2n+1}) = 0$$

dır. T dönüşümünün $\kappa-$sürekli olması özelliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa $\kappa_\lambda(u, \xi_{2n+2}) = \kappa_\lambda(Tu, T\xi_{2n+1}) \to 0$ elde edilir. Fakat $\lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda(\xi_{2n+2}, u) = 0$ olduğundan ve limitin tek olması gerektiğinden $Tu = u$ olmalıdır. Dolayısıyla u noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası olarak bulunur.

S ve T dönüşümlerinin $\kappa-$süreklilik şartı kaldırarak yerine aşağıda verilen daha zayıf bir şart kullanılarak aynı sonuç elde edilir.

Tanım 3.1.3. (H) ÖZELLİĞİ: M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $\alpha : M_\kappa \times M_\kappa \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_n, \xi_{n+1}) \geq 1$ ve $\alpha(\xi_{n+1}, \xi_n) \geq 1$ özelliklerini sağlayan $\{\xi_n\}$ dizisi $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda(\xi_n, \xi) = 0$$

ifadesini sağlasın. Bu durumda, her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\xi_n\}$ dizisinin

$$\alpha\left(\xi_{n_k}, \xi\right) \geq 1 \text{ ve } \alpha\left(\xi, \xi_{n_k}\right) \geq 1$$

olan $\left\{\xi_{n_k}\right\}$ alt dizisi vardır.

Teorem 3.1.4. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay, (S,T) ikilisi aşağıdaki özellikleri sağlayan genelleştirilmiş $\alpha-\theta-$Suzuki$-$Berinde daralma dönüşümü olsun.

a. (S,T) genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çiftidir,
b. $\alpha(\xi_0, S\xi_0) \geq 1$ ve $\alpha(S\xi_0, \xi_0) \geq 1$ olacak şekilde $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,
c. (H) özelliği sağlanır,
d. $\alpha(\xi, \nu) \geq 1$ ve $\alpha(\nu, \eta) \geq 1$ ise $\alpha(\xi, \eta) \geq 1$ dir.

Bu durumda, S ve T dönüşümleri M_κ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.1.2'den $\{\xi_n\}$ dizisi $\kappa-$Cauchy dizisidir ve $u \in M_\kappa$ noktasına yakınsaktır. Ayrıca, (3.3) şartı sağlanmaktadır ve (H) özelliğinden her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha\left(\xi_{2n_k}, u\right) \geq 1$ ve $\alpha\left(u, \xi_{2n_k-1}\right) \geq 1$ ifadelerini sağlayan $\left\{\xi_{n_k}\right\}$ alt dizisi vardır. Her $k \geq 0$ için

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, S\xi_{2n_k}\right), \kappa_\lambda\left(u, Tu\right)\right\} \leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, u\right)$$

olsun. Tersine,

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, S\xi_{2n_k}\right), \kappa_\lambda\left(u, Tu\right)\right\} > \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, u\right)$$

alınırsa

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\kappa_\lambda\left(u,Tu\right)\right\}>\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},u\right)$$

$$=\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right),\kappa_\lambda\left(u,Tu\right)\right\}>\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},u\right)$$

olur. $k\to\infty$ için limit alınırsa çelişki elde edilir. (3.1) ifadesinden

$$\begin{aligned}\theta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},Tu\right)\right)&=\theta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n_k},Tu\right)\right)\\ &\le\alpha\left(\xi_{2n_k},u\right)\theta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n_k},Tu\right)\right)\\ &\le\left[\theta\left(P\left(\xi_{2n_k},u\right)\right)\right]^k+LE\left(\xi_{2n_k},u\right),\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}P\left(\xi_{2n_k},u\right)&=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},u\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\kappa_\lambda\left(u,Tu\right),\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},Tu\right)+\kappa_\lambda\left(u,S\xi_{2n_k}\right)}{2}\right\}\\ &=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},u\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right),\kappa_\lambda\left(u,Tu\right),\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},Tu\right)+\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k+1}\right)}{2}\right\}\end{aligned}\tag{3.27}$$

ve

$$\begin{aligned}E\left(\xi_{2n_k},u\right)&=\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},Tu\right),\kappa_\lambda\left(u,S\xi_{2n_k}\right)\right\}\\ &=\min\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},Tu\right),\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k+1}\right)\right\}\end{aligned}\tag{3.28}$$

elde edilir. (3.26), (3.27) ve (3.28) ifadelerinde $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\theta\left(\kappa_\lambda\left(u,Tu\right)\right)\le\left[\theta\left(\kappa_\lambda\left(u,Tu\right)\right)\right]^k<\theta\left(\kappa_\lambda\left(u,Tu\right)\right)$$

elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Böylece, $u = Tu$, yani u noktası T dönüşümünün sabit nokta olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(u,\mathrm{S}u\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},T\xi_{2n_k-1}\right)\right\}\le\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k-1}\right)$$

olsun. Eğer

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(u,Su\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},T\xi_{2n_k-1}\right)\right\}>\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k-1}\right)$$

ise

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(u,Su\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},T\xi_{2n_k-1}\right)\right\}>\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(u,Su\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2n_k}\right)\right\}>\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k-1}\right),$$

ve $k\to\infty$ için limit alınırsa tekrar çelişki elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2}\min\left\{\kappa_\lambda\left(u,Su\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},T\xi_{2n_k-1}\right)\right\}\le\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k-1}\right)$$

olmalıdır. (3.1) ifadesinden

$$\begin{aligned}\theta\left(\kappa_\lambda\left(Su,\xi_{2n_k}\right)\right)&=\theta\left(\kappa_\lambda\left(Su,T\xi_{2n_k-1}\right)\right)\\&\le\alpha\left(u,\xi_{2n_k-1}\right)\theta\left(\kappa_\lambda\left(Su,T\xi_{2n_k-1}\right)\right)\\&\le\left[\theta\left(P\left(u,\xi_{2n_k-1}\right)\right)\right]^k+LE\left(u,\xi_{2n_k-1}\right),\end{aligned}\tag{3.29}$$

$$P\left(u,\xi_{2n_k-1}\right)=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k-1}\right),\kappa_\lambda\left(u,Su\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},T\xi_{2n_k-1}\right),\frac{\kappa_\lambda\left(u,T\xi_{2n_k-1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},Su\right)}{2}\right\}$$

$$=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k-1}\right),\kappa_\lambda\left(u,Su\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2n_k}\right),\frac{\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},Su\right)}{2}\right\} \tag{3.30}$$

ve

$$E\left(u,\xi_{2n_k-1}\right)=\min\left\{\kappa_\lambda\left(u,Su\right),\kappa_\lambda\left(u,T\xi_{2n_k-1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},Su\right)\right\}$$

$$=\min\left\{\kappa_\lambda\left(u,Su\right),\kappa_\lambda\left(u,\xi_{2n_k}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},Su\right)\right\} \tag{3.31}$$

olduğundan (3.29), (3.30) ve (3.31) ifadelerinde $k\to\infty$ limit alınırsa

$$\theta\left(\kappa_\lambda\left(Su,u\right)\right)\leq\left[\theta\left(\kappa_\lambda\left(Su,u\right)\right)\right]^k<\theta\left(\kappa_\lambda\left(Su,u\right)\right),$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $u=Su,$ yani u noktası S dönüşümünün sabit noktası olarak bulunur. Bu durumda S ve T dönüşümleri M_κ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.1.2 ve Teoerem 3.1.4'de dönüşümlerin ortak sabit noktasının varlığı için yeterli şartlar verilmiş olup bu şartlar ortak sabit noktanın tekliği için yeterli şartlar değildir. Dönüşümlerin ortak sabit noktasının tekliğinin elde edilebilmesi için aşağıda tanımlanan özelliğe ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.1.5. (U) ÖZELLİĞİ: M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay, $S,T:M_\kappa\to M_\kappa$ iki dönüşüm olsun. Her $x,y\in\text{Fix}\left(S,T\right)$ için $\alpha\left(x,y\right)\geq 1$ dir.

Teorem 3.1.6. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay, S ve T genelleştirilmiş $\alpha-\theta-$Suzuki$-$Berinde daralma dönüşümleri olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan S ve T dönüşümleri M_κ uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

a. (S,T) genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çiftidir.

b. $\alpha(\xi_0, S\xi_0)\geq 1$ ve $\alpha(S\xi_0,\xi_0)\geq 1$ olacak şekilde $\xi_0\in M_\kappa$ vardır.

c. S ve T dönüşümleri $\kappa-$sürekli veya (H) özelliğini sağlar.

d. Eğer $\alpha(\xi,\nu)\geq 1$ ve $\alpha(\nu,\eta)\geq 1$ ise $\alpha(\xi,\eta)\geq 1$ dir.

e. S ve T dönüşümleri (U) özelliğini sağlar.

İspat: Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.4'de u noktasının S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğu gösterildi. Şimdi ise u noktasının tek ortak sabit nokta olduğu gösterilecektir. Tersine, $w\in M_\kappa$ noktası diğer bir ortak sabit nokta olsun. Yani $u\neq w$ ve $w=Sw=Tw$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{2}\min\{\kappa_\lambda(u,Su),\kappa_\lambda(w,Tw)\}\leq\kappa_\lambda(u,w),$$

ve $\alpha(u,w)\geq 1$ dir. Dolayısıyla (3.1) ifadesinden

$$\begin{aligned}\theta(\kappa_\lambda(u,w)) &= \theta(\kappa_\lambda(Su,Tw))\\ &\leq \alpha(u,w)\theta(\kappa_\lambda(Su,Tw))\\ &\leq[\theta(P(u,w))]^k+LE(u,w),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(u,w)&=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda(u,w),\kappa_\lambda(u,Su),\kappa_\lambda(w,Tw),\frac{\kappa_\lambda(w,Tu)+\kappa_\lambda(u,Sw)}{2}\right\}\\ &=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda(u,w),0,0,\frac{\kappa_\lambda(u,w)+\kappa_\lambda(u,w)}{2}\right\}\\ &=\kappa_\lambda(u,w)\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
E(u,w) &= \min\{\kappa_\lambda(u,Su),\kappa_\lambda(u,Tw),\kappa_\lambda(w,Su)\}\\
&= \min\{0,\kappa_\lambda(u,w),\kappa_\lambda(w,u)\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\theta(\kappa_\lambda(u,w)) \le [\theta(\kappa_\lambda(u,w))]^k
$$

elde edilir ki bu ise $k\in(0,1)$ olması ile çelişir. Böylece $u=w$ olmalıdır. Yani S ve T dönüşümlerinin M_κ uzayında ortak sabit noktası tektir.

Aşağıda, Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.1.6'dan elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

Sonuç 3.1.7. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S,T:M_\kappa\to M_\kappa$ iki dönüşüm olsun. $\theta\in\tilde{\Theta}$, $k\in(0,1)$ ve $L\ge 0$ iken her $\xi,\eta\in M_\kappa$ için

$$
\alpha(\xi,\eta)\theta(\kappa_\lambda(S\xi,T\eta)) \le [\theta(P(\xi,\eta))]^k + LE(\xi,\eta)
$$

eşitsizliğini sağlayan S ve T dönüşümleri aşağıdaki şartları da sağlarsa M_κ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir.

a. (S,T) genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çiftidir.

b. $\alpha(\xi_0,S\xi_0)\ge 1$ ve $\alpha(S\xi_0,\xi_0)\ge 1$ olacak şekilde $\xi_0\in M_\kappa$ vardır.

c. S ve T dönüşümleri $\kappa-$sürekli veya (H) özelliğini sağlayan dönüşümlerdir.

d. Eğer $\alpha(\xi,\nu)\geq 1$ ve $\alpha(\nu,\eta)\geq 1$ ise $\alpha(\xi,\eta)\geq 1$ dir.

Sonuç 3.1.8. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S,T:M_\kappa\to M_\kappa$ iki dönüşüm olsun. $\theta\in\tilde{\Theta}$ ve $L\geq 0$ olacak şekilde her $\xi,\eta\in M_\kappa$ için

$$\frac{1}{2}\min\{\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,T\eta)\}\leq\kappa_\lambda(\xi,\eta)\quad \text{iken}\quad \alpha(\xi,\eta)\theta(S\xi,T\eta)\leq\left[\theta(P(\xi,\eta))\right]^k$$

ifadesi sağlansın. Aşağıdaki şartları sağlayan S ve T dönüşümleri M_κ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir.

a. (S,T) genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çiftidir.

b. $\alpha(\xi_0,S\xi_0)\geq 1$ ve $\alpha(S\xi_0,\xi_0)\geq 1$ olacak şekilde $\xi_0\in M_\kappa$ vardır.

c. S ve T dönüşümleri $\kappa-$sürekli veya (H) özelliğini sağlayan dönüşümlerdir.

d. Eğer $\alpha(\xi,\nu)\geq 1$ ve $\alpha(\nu,\eta)\geq 1$ ise $\alpha(\xi,\eta)\geq 1$ dir.

İspat: Teorem 3.1.2’de $L=0$ alınırsa ispat elde edilir.

Eğer $S=T$, $n(\xi,\eta)=\min\{\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\xi,S\eta),\kappa_\lambda(\eta,S\xi)\}$ ve

$$m(\xi,\eta)=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,S\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,S\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}$$

olarak alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1.9. S dönüşümü M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzayından kendi üzerinde tanımlı bir dönüşüm ve her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için $\theta \in \tilde{\Theta}$, $k \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ için

$$\frac{1}{2}\kappa_\lambda(\xi,S\xi) \leq \kappa_\lambda(\xi,\eta) \quad \text{iken} \quad \alpha(\xi,\eta)\theta(\kappa_\lambda(S\xi,S\eta)) \leq [\theta(m(\xi,\eta))]^k + Ln(\xi,\eta)$$

ifadesini sağlasın. S dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

a. S üçgensel $\alpha-$geçişli dönüşümdür.
b. $\alpha(\xi_0,S\xi_0) \geq 1$ olacak şekilde $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır.
c. S dönüşümü $\kappa-$süreklidir.
d. Her $\xi,\eta \in \mathrm{Fix}(S)$ için $\alpha(\xi,\eta) \geq 1$ dir.

Sonuç 3.1.10. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S: M_\kappa \to M_\kappa$ bir dönüşüm olsun. $\theta \in \tilde{\Theta}$ fonksiyonu, $k \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri ile her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için

$$\alpha(\xi,\eta)\theta(\kappa_\lambda(S\xi,S\eta)) \leq [\theta(m(\xi,\eta))]^k + Ln(\xi,\eta)$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca,

a. S üçgensel $\alpha-$geçişli dönüşümdür,
b. $\alpha(\xi_0,S\xi_0) \geq 1$ olacak şekilde $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,
c. S dönüşümü $\kappa-$süreklidir,
d. her $\xi,\eta \in \mathrm{Fix}(S)$ için $\alpha(\xi,\eta) \geq 1$ dir,

özellikleri de sağlanırsa S dönüşümü M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.1.11. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S:M_\kappa \to M_\kappa$ dönüşümü $\theta \in \tilde{\Theta}$ ve $k \in (0,1)$ iken her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için

$$\frac{1}{2}\kappa_\lambda(\xi,S\xi) \le \kappa_\lambda(\xi,\eta) \quad \text{iken} \quad \alpha(\xi,\eta)\theta(\kappa_\lambda(S\xi,S\eta)) \le [\theta(m(\xi,\eta))]^k$$

ifadesini sağlansın. S dönüşümü için aşağıdakiler doğru olsun.

a. S üçgensel $\alpha-$geçişli dönüşümdür,
b. $\alpha(\xi_0,S\xi_0) \ge 1$ olacak şekilde $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,
c. S dönüşümü $\kappa-$süreklidir,
d. her $\xi,\eta \in \mathrm{Fix}(S)$ için $\alpha(\xi,\eta) \ge 1$ dir,

Bu durumda S, M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç 3.1.9'da $L=0$ alınırsa ispat elde edilir.

3.2. Genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)-$Simülasyon Daralma Dönüşümleri için Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda $(\alpha,\beta)-$simülasyon daralma dönüşümü tanımlanarak ortak sabit nokta teoremleri ve teoremlerden elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

Tanım 3.2.1. M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S,T:M_\kappa \to M_\kappa$ iki dönüşüm ve $\alpha,\beta:M_\kappa \to [0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. Her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için

$$\alpha(\xi)\beta(\eta) \ge 1 \quad \Rightarrow \quad \zeta(\kappa_\lambda(S\xi,T\eta),P(\xi,\eta)) \ge C_G, \tag{3.32}$$

$$P(\xi,\eta) = \text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,T\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,T\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}$$

olacak şekilde $\zeta \in Z_G$ fonksiyonu varsa S ve T dönüşümlerine genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)-$simülasyon daralma dönüşümü denir.

Teorem 3.2.2. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S,T: M_\kappa \to M_\kappa$ dönüşümleri genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)-$simülasyon daralma dönüşümü olsun.

a. (S,T) ikilisi döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çiftidir,

b. $\alpha(\xi_0)\geq 1$ olacak şekilde $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,

c. S veya T dönüşümlerinden biri $\kappa-$süreklidir,

d. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\{\xi_n\}$ dizisi ξ noktasına yakınsak iken, $\alpha(\xi_{2n})\geq 1$ ve $\beta(\xi_{2n-1})\geq 1$ ise $\alpha(\xi)\geq 1$ ve $\beta(\xi)\geq 1$ dir,

şartları sağlansın. Bu durumda, S ve T dönüşümleri M_κ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir. Bunlara ek olarak, eğer her $\xi,\eta\in \mathrm{Fix}(S,T)$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1$ ise S ve T dönüşümleri M_κ uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Hipotezde verilen (b) şartından $\alpha(\xi_0)\geq 1$ özelliğini sağlayan $\xi_0\in M_\kappa$ vardır. $\{\xi_n\}$ dizisi her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\xi_{2n+2}=T\xi_{2n+1},\quad \xi_{2n+1}=S\xi_{2n} \tag{3.33}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca, (S,T) çifti döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çifti ve $\alpha(\xi_0)\geq 1$ olduğundan $\beta(\xi_1)=\beta(S\xi_0)\geq 1$ ve $\alpha(\xi_2)=\alpha(T\xi_1)\geq 1$ dir. Benzer şekilde devam edilirse her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_{2n})\geq 1$ ve $\beta(\xi_{2n+1})\geq 1$ elde edilir. Dolayısıyla her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_{2n})\beta(\xi_{2n+1})\geq 1$ bulunur. (3.32) ifadesinden

$$
\begin{aligned}
C_G &\le \zeta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n},T\xi_{2n+1}\right),P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right)\\
&=\zeta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right),P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right)\\
&<G\left(P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

olur. Tanım 1.3.34'den

$$\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)<P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right), \tag{3.34}$$

$$
\begin{aligned}
&=\text{maks}\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right),\\
&\qquad \frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+2}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+1}\right)}{2}\Big\}\\
&=\text{maks}\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right),\\
&\qquad \frac{\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n},\xi_{2n+2}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+1}\right)}{2}\Big\}\\
&\le\text{maks}\Big\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right),\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)}{2}\Big\}\\
&=\text{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

dir. Eğer $n\in\mathbb{N}$ için $\text{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)\right\}=\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)$ olarak alınırsa (3.34) ifadesinden çelişki elde edilir. Böylece her $n\in\mathbb{N}$ için $P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)=\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)$ olur. Sonuç olarak (3.34)'den

$$\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)<\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right) \tag{3.35}$$

dir. Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)>\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right)$$

bulunur. Buradan $\left\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right\}$ dizisi negatif olmayan reel sayıların monoton azalan dizisidir ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)=l \tag{3.36}$$

olan $l\geq 0$ sayısı vardır. $l>0$ olması durumunda Tanım 1.3.35'den

$$\begin{aligned}C_G &\leq \limsup_{n\to\infty}\zeta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n},T\xi_{2n+1}\right),P\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right)\\ &=\limsup_{n\to\infty}\zeta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\right)<C_G\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir ve dolayısıyla $l=0$ olmalıdır.

Şimdi $\left\{\xi_n\right\}$ dizisinin $\kappa-$Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. Bunun için $\left\{\xi_{2n}\right\}$ dizisinin $\kappa-$Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\varepsilon>0$ olsun. $n_k>m_k\geq k$ özelliğindeki pozitif tam sayıların $\left\{m_k\right\}$ ve $\left\{n_k\right\}$ alt dizileri

$$\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right)\geq\varepsilon \text{ ve } \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2m_k}\right)<\varepsilon \tag{3.37}$$

ifadelerini sağlasın. (3.37) ifadeleri ve $\left(\kappa_4\right)$ özelliğinden

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right)=\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right)\\ &\leq \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2m_k}\right)\\ &<\varepsilon+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.38) eşitsizliğinde $k\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty}\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right)=\varepsilon \tag{3.39}$$

bulunur. Ayrıca, $\alpha\left(\xi_{2n_k}\right)\beta\left(\xi_{2m_k-1}\right)\geq 1$ ve (3.32) ifadesinden

$$\begin{aligned}C_G &\leq \zeta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n_k},T\xi_{2m_k-1}\right),P\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)\right)\\ &=\zeta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2m_k}\right),P\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)\right),\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}P\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right)&=\text{maks}\Bigg\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},S\xi_{2n_k}\right),\\ &\qquad\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},T\xi_{2m_k-1}\right),\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},T\xi_{2m_k-1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},S\xi_{2n_k}\right)}{2}\Bigg\}\\ &=\text{maks}\Bigg\{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k-1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k+1}\right),\\ &\qquad\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right),\frac{\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2n_k+1}\right)}{2}\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.37) ifadeleri ve (κ_4) özelliğinden

$$\begin{aligned}\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2m_k}\right)&=\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2m_k}\right)\\ &\leq\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right)\\ &=\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k},\xi_{2m_k}\right)\\ &\leq\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1},\xi_{2m_k}\right)\\ &<\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},\xi_{2n_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k},\xi_{2n_k-1}\right)+\varepsilon,\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2n_k+1}\right)&=\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2n_k+1}\right)\\ &\leq\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1},\xi_{2m_k}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k},\xi_{2n_k+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1}, \xi_{2m_k}\right) + \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2m_k}, \xi_{2n_k+1}\right) \\
&\le \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1}, \xi_{2m_k}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k}, \xi_{2n_k-1}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2n_k+1}\right) \\
&= \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1}, \xi_{2m_k}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k}, \xi_{2n_k-1}\right) + \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2n_k+1}\right) \\
&\le \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1}, \xi_{2m_k}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2m_k}\right) \\
&\quad + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2n_k}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2n_k+1}\right) \\
&< \varepsilon + \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k-1}, \xi_{2m_k}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2n_k}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2n_k+1}\right)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

ve

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right) &= \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right) \\
&\le \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2n_k-1}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2m_k-1}\right) \\
&= \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2n_k-1}\right) + \kappa_{maks\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2m_k-1}\right) \\
&\le \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2n_k-1}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k-1}, \xi_{2m_k}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k}, \xi_{2m_k-1}\right) \\
&< \varepsilon + \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2n_k-1}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{2m_k}, \xi_{2m_k-1}\right)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

olur. (S,T) çifti döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çifti olduğundan $\alpha\left(\xi_{2n_k}\right)\beta\left(\xi_{2m_k-1}\right) \ge 1$ dir. Bu durumda (3.32)'den

$$\begin{aligned}
C_G &\le \zeta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n_k}, T\xi_{2m_k-1}\right), P\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right)\right) \\
&= \zeta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1}, \xi_{2m_k}\right), P\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right)\right) \\
&< G\left(P\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1}, \xi_{2m_k}\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

olur. Dolayısıyla Tanım 1.3.34'den

$$\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1}, \xi_{2m_k}\right) < P\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right) \tag{3.46}$$

olmalıdır. (3.37), (3.39), (3.41), (3.42), (3.43) ve (3.44) eşitsizlikleri kullanılır ve $k \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} \kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1}, \xi_{2m_k}\right) = \lim_{k\to\infty} S\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right) = \varepsilon \tag{3.47}$$

bulunur. (3.44), (3.46) ifadeleri ve Tanım 1.3.35'den

$$C_G \le \limsup_{k\to\infty} \zeta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi_{2n_k}, T\xi_{2m_k-1}\right), P\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right)\right)$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \zeta\left(\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1}, \xi_{2m_k}\right), P\left(\xi_{2n_k}, \xi_{2m_k-1}\right)\right) < C_G$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\{\xi_{2n}\}$ dizisi $\kappa-$Cauchy dizisidir. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda\left(\xi_n, u\right) = 0$$

olan $u \in M_\kappa$ vardır. Şimdi u noktasının S ve T dönüşümlerinin M_κ uzayında ortak sabit noktası olduğu gösterilecektir. Hipotezdeki (c) özelliğinden S dönüşümü $\kappa-$ sürekli olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda\left(\xi_{2n}, u\right) = 0$$

ve S dönüşümünün $\kappa-$sürekli olmasından

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda\left(\xi_{2n+1}, u\right) = \lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda\left(S\xi_{2n+1}, Su\right) = 0$$

bulunur. Buradan $n \to \infty$ iken $\xi_{2n+1} \to Su$ ve limitin tek olması özelliğinden $Su = u$ elde edilir. Ayrıca (d) özelliği kullanılırsa $\beta(u) \ge 1$ olmalıdır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$

için $\alpha\left(\xi_{2n}\right)\beta\left(u\right)\geq 1$ dir. $u=Tu$ olduğunu göstermek için $u\neq Tu$ olsun. Dolayısıyla $\kappa_{\lambda}\left(u,Tu\right)>0$ olmalıdır. S ve T dönüşümleri genelleştirilmiş $\left(\alpha,\beta\right)-$simülasyon daralma dönüşümü olduğundan

$$C_G\leq\zeta\left(\kappa_{\lambda}\left(S\xi_{2n},Tu\right),P\left(\xi_{2n},u\right)\right)<G\left(P\left(\xi_{2n},u\right),\kappa_{\lambda}\left(S\xi_{2n},Tu\right)\right) \tag{3.48}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca Tanım 1.3.34'den

$$\kappa_{\lambda}\left(S\xi_{2n},Tu\right)<P\left(\xi_{2n},u\right) \tag{3.49}$$

dir. (3.49) ifadesinde $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\kappa_{\lambda}\left(u,Tu\right)<\kappa_{\lambda}\left(u,Tu\right)$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $u=Tu$ olmalıdır. Sonuç olarak u noktası S ve T dönüşümülerinin M_{κ} uzayında ortak sabit noktası olarak elde edilir.

Son olarak u noktasının tek ortak sabit nokta olduğunun gösterilmesi için u noktasından farklı w noktası S ve T dönüşümlerinin diğer ortak sabit noktası olsun. Buradan $\kappa_{\lambda}\left(u,w\right)\neq 0$ dır. Hipotezden $\alpha\left(u\right)\geq 1$ ve $\beta\left(w\right)\geq 1$ olup $\alpha\left(u\right)\beta\left(w\right)\geq 1$ elde edilir. (3.32) ifadesinden

$$C_G\leq\zeta\left(\kappa_{\lambda}\left(Su,Tw\right),P\left(u,w\right)\right)<G\left(P\left(u,w\right),\kappa_{\lambda}\left(Su,Tw\right)\right)$$

ve Tanım 1.3.34'den

$$\begin{aligned}\kappa_{\lambda}\left(Su,Tw\right)&<P\left(u,w\right)\\&=\text{maks}\left\{\kappa_{\lambda}\left(u,w\right),\kappa_{\lambda}\left(u,Su\right),\kappa_{\lambda}\left(w,Tw\right),\frac{\kappa_{\lambda}\left(u,Tw\right)+\kappa_{\lambda}\left(w,Su\right)}{2}\right\}\end{aligned}$$

$$= \text{maks}\left\{\kappa_\lambda(u,w), \kappa_\lambda(u,Su), \kappa_\lambda(w,Tw), \frac{\kappa_\lambda(u,w)+\kappa_\lambda(w,u)}{2}\right\}$$

$$= \text{maks}\left\{\kappa_\lambda(u,w), 0\right\}$$

$$= \kappa_\lambda(u,w)$$

olur ki bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $u = w$ olmalıdır. Yani S ve T dönüşümlerinin M_κ uzayında tek ortak sabit noktası vardır.

Sonuç 3.2.3. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S,T: M_\kappa \to M_\kappa$ iki dönüşüm olsun.

a. Her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta) \geq 1 \quad \Rightarrow$

$$\kappa_\lambda(S\xi,T\eta) \leq k \text{ maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta), \kappa_\lambda(\xi,S\xi), \kappa_\lambda(\eta,T\eta), \frac{\kappa_\lambda(\xi,T\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}$$

ifadesini sağlayan $k \in (0,1)$ sabiti vardır,

b. (S,T) döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çiftidir,

c. $\alpha(\xi_0) \geq 1$ olan $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,

d. S veya T dönüşümlerinden biri $\kappa-$süreklidir,

e. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\xi_n\}$ dizisi $\lim_{n\to\infty} \kappa_\lambda(\xi_n,\xi) = 0$, $\alpha(\xi_{2n}) \geq 1$ ve $\beta(\xi_{2n-1}) \geq 1$ özelliklerini sağlarsa $\alpha(\xi) \geq 1$ ve $\beta(\xi) \geq 1$ dir,

şartları sağlansın. Bu durumda, S ve T ortak sabit noktaya sahiptir. Bunlara ek olarak, eğer her $\xi,\eta \in \text{Fix}(S,T)$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta) \geq 1$ ise S ve T dönüşümleri M_κ uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.2.2'de $C_G = 0$ ve $\zeta(s,t) = s - kt,\ k \in (0,1)$ istenen elde edilir.

Sonuç 3.2.4. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S,T:M_\kappa \to M_\kappa$ iki dönüşüm olsun.

a. Her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1 \quad \Rightarrow$

$$\kappa_\lambda(S\xi,T\eta)\leq \text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,T\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,T\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}$$
$$-\varphi\left(\text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,T\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,T\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}\right)$$

ifadesini sağlayan $\varphi(t)=0 \Leftrightarrow t=0$ özellikli φ fonksiyonu vardır,

b. (S,T) döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çiftidir,

c. $\alpha(\xi_0)\geq 1$ olan $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,

d. S veya T dönüşümlerinden biri $\kappa-$süreklidir,

e. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\{\xi_n\}$ dizisi $\lim\limits_{n\to\infty}\kappa_\lambda(\xi_n,\xi)=0$, $\alpha(\xi_{2n})\geq 1$ ve $\beta(\xi_{2n-1})\geq 1$ özelliklerini sağlarsa $\alpha(\xi)\geq 1$ ve $\beta(\xi)\geq 1$ dir,

ifadeleri sağlansın. Bu durumda, S ve T dönüşümleri M_κ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir. Bunlara ek olarak, eğer her $\xi,\eta \in \text{Fix}(S,T)$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1$ ise S ve T dönüşümleri M_κ uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çifti olma şartı ile döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm olma şartı yer değiştirilirse ve $S=T$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.2.5. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S:M_\kappa \to M_\kappa$ bir dönüşüm olsun.

a. Her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1 \quad \Rightarrow$

$$\zeta\Big(\kappa_\lambda(S\xi,S\eta),\text{maks}\Big\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,S\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,S\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\Big\}\Big)\geq C_G \tag{3.50}$$

ifadesini sağlayan $\zeta\in Z_G$ fonksiyonu vardır,

b. S dönüşümü döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür,

c. $\alpha(\xi_0)\geq 1$ ve $\beta(\xi_0)\geq 1$ olan $\xi_0\in M_\kappa$ vardır,

d. S dönüşümü $\kappa-$süreklidir veya her $n\in\mathbb{N}$ için $\xi_n\to\xi$ ve $\beta(\xi_n)\geq 1$ olan $\{\xi_n\}$ dizisi varsa $\beta(\xi)\geq 1$ dir,

şartları sağlansın. Bu durumda S dönüşümü M_κ uzayında sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, her $\xi,\eta\in\text{Fix}(S)$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1$ ise S dönüşümü M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.6. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S:M_\kappa\to M_\kappa$ bir dönüşüm olsun.

a. Her $\xi,\eta\in M_\kappa$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1 \;\Rightarrow\; \zeta\big(\kappa_\lambda(S\xi,S\eta),\kappa_\lambda(\xi,\eta)\big)\geq C_G$ olan $\zeta\in Z_G$ fonksiyonu vardır,

b. S dönüşümü döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür,

c. $\alpha(\xi_0)\geq 1$ ve $\beta(\xi_0)\geq 1$ olan $\xi_0\in M_\kappa$ vardır,

d. S dönüşümü $\kappa-$süreklidir veya her $n\in\mathbb{N}$ için $\xi_n\to\xi$ ve $\beta(\xi_n)\geq 1$ olan $\{\xi_n\}$ dizisi varsa $\beta(\xi)\geq 1$ dir,

şartları sağlansın. Bu durumda S dönüşümü M_κ uzayında sabit noktaya sahiptir. Bunlara ek olarak, her $\xi,\eta\in\text{Fix}(S)$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1$ ise S dönüşümü M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç 3.2.5'de

$$\text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,S\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,S\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}=\kappa_\lambda(\xi,\eta)$$

alınırsa ispat elde edilir.

Sonuç 3.2.7. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S:M_\kappa\to M_\kappa$ bir dönüşüm olsun.

a. Her $\xi,\eta\in M_\kappa$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1 \quad\Rightarrow$

$$\kappa_\lambda(S\xi,S\eta)\leq k\ \text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,S\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,S\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}$$

ifadesini sağlayan $k\in(0,1)$ sabiti vardır,

b. S dönüşümü döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür,

c. $\alpha(\xi_0)\geq 1$ ve $\beta(\xi_0)\geq 1$ olan $\xi_0\in M_\kappa$ vardır,

d. S dönüşümü $\kappa-$süreklidir veya her $n\in\mathbb{N}$ için $\xi_n\to\xi$ ve $\beta(\xi_n)\geq 1$ olan $\{\xi_n\}$ dizisi varsa $\beta(\xi)\geq 1$ dir,

özellikleri sağlansın. Bu durumda S dönüşümü M_κ uzayında sabit noktaya sahiptir. Bunlara ek olarak, her $\xi,\eta\in\text{Fix}(S)$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1$ ise S dönüşümü M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

Aşağıda Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda Sonuç 3.2.5'de verilen (3.50) ifadesini sağlayan fakat Banach daralma dönüşümünü sağlamayan bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.2.8. $M_\kappa = \mathbb{R}$ olmak üzere her $\xi \in M_\kappa$ için $\kappa_\lambda(\xi,\eta) = \frac{1}{\lambda}|\xi - \eta|$ olsun. $S : M_\kappa \to M_\kappa$ dönüşümü

$$S\xi = \begin{cases} \frac{\xi}{4}, & \xi \in [0,1] \\ \xi^2, & \xi > 1, \end{cases},$$

ve $\alpha, \beta : M_\kappa \to [0,+\infty)$ fonksiyonları

$$\alpha(\xi) = \beta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [0,1], \\ 0, & \xi \notin [0,1], \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\zeta(t,s) = \frac{1}{3}s - t,\ G(s,t) = s - t\ ve\ \mathrm{C_G} = 0$ olarak alınırsa Sonuç 3.2.5'in tüm şartları sağlanır ve $\xi = 0$ noktası S dönüşümünün sabit noktası olarak bulunur. Ayrıca $\lambda > 0$ için

$$\kappa_\lambda\left(S\sqrt{6}, S\sqrt{5}\right) = \frac{1}{\lambda} > \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\lambda} = \kappa_\lambda\left(\sqrt{6},\sqrt{5}\right)$$

olduğundan S dönüşümü M_κ uzayında daralma dönüşümü değildir.

3.3. $\alpha -$Kapalı Daralma Dönüşümleri için Sabit Nokta Teorisi ile İlgili Sonuçlar

Bu bölümde Popa [58] tarafından ilk olarak tanımlanan kapalı daralma dönüşümleri ile Samet ve ark. [31] tarafından tanımlanan $\alpha -$geçişli dönüşüm yapısı birleştirilerek Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda $\alpha -$kapalı daralma dönüşümleri elde edilip ilgili sabit nokta sonuçları verilmiştir.

Tanım 3.3.1. M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S: M_\kappa \to M_\kappa$ bir dönüşüm olsun. $\alpha: M_\kappa \times M_\kappa \to [0,\infty)$ ve $\Gamma \in \wp$ fonksiyonları her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için

$$\begin{aligned}&\wp\big(\alpha(\xi,\eta)\kappa_\lambda(S\xi,S\eta),\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\\ &\quad\kappa_\lambda(\eta,S\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\eta),\kappa_\lambda(\eta,S\xi)\big)\le 0,\end{aligned} \tag{3.51}$$

eşitsizliğini sağlarsa S dönüşümüne $\alpha-$kapalı (implicit) daralma dönüşümü denir.

Teorem 3.3.2. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S: M_\kappa \to M_\kappa$ dönüşümü $\alpha-$kapalı daralma dönüşümü olsun.

a. S, $\alpha-$geçişli dönüşümdür,
b. $\alpha(\xi_0,S\xi_0)\ge 1$ olan $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,
c. S dönüşümü $\kappa-$süreklidir,

şartları sağlansın. Bu durumda S dönüşümü M_κ uzayında sabit noktaya sahiptir.

İspat: (b) özelliğinden $\alpha(\xi_0,S\xi_0)\ge 1$ olan $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır. $\{\xi_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\xi_n = S^n\xi_0 = S\xi_{n-1}$ şeklinde tanımlansın. İlk olarak $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\kappa_\lambda\left(\xi_{n_0},\xi_{n_0+1}\right)=0$ dır. κ regüler olduğundan $\xi_{n_0} = \xi_{n_0+1} = S\xi_{n_0}$ olur. Dolayısıyla ξ_{n_0} noktası S dönüşümünün sabit noktasıdır. $\xi_n \ne \xi_{n+1}$ iken

$$\kappa_\lambda(\xi_n,\xi_{n+1})>0$$

dır. S dönüşümü $\alpha-$geçişli ve $\alpha(\xi_0,\xi_1)=\alpha(\xi_0,S\xi_0)\ge 1$ olduğundan

$$\alpha(S\xi_0,S\xi_1)=\alpha(\xi_1,\xi_2)\ge 1$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right) \geq 1 \tag{3.52}$$

bulunur. (3.51) ile verilen daralma şartında $\xi = \xi_n$ ve $\eta = \xi_{n+1}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}\wp\Big(&\alpha\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right)\kappa_\lambda\left(S\xi_n, S\xi_{n+1}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, S\xi_n\right),\\ &\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, S\xi_{n+1}\right), \hbar_\lambda\left(\xi_n, S\xi_{n+1}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, S\xi_n\right)\Big) \leq 0,\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}\wp\Big(&\alpha\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right)\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right),\\ &\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+2}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+1}\right)\Big) \leq 0\end{aligned}$$

elde edilir. (κ_4) özelliği, (3.52) eşitsizliği ve $(\wp_1)$ şartından

$$\begin{aligned}&\wp\Big(\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right),\\ &\qquad \kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right), \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_n, \xi_{n+2}\right), 0\Big) \leq 0\\ &= \wp\Big(\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right)\\ &\quad \kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right), \kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right) + \kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right), 0\Big) \leq 0\end{aligned}$$

bulunur. $(\wp_2)$ şartından her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\right) \leq \psi\left(\kappa_\lambda\left(\xi_n, \xi_{n+1}\right)\right) \tag{3.53}$$

olur. (3.53) ifadesinden kolaylıkla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1},\xi_{n+2}\right)\le\psi^{n+1}\left(\kappa_\lambda\left(\xi_0,\xi_1\right)\right) \tag{3.54}$$

olduğu görülür. $\{\xi_n\}$ dizisinin $\kappa-$Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi için $m>n$ olmak üzere (κ_4) ve (3.54) özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda\left(\xi_n,\xi_m\right)&=\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_n,\xi_m\right)\\
&\le\kappa_\lambda\left(\xi_n,\xi_{n+1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1},\xi_m\right)\\
&=\kappa_\lambda\left(\xi_n,\xi_{n+1}\right)+\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\xi_{n+1},\xi_m\right)\\
&\le\kappa_\lambda\left(\xi_n,\xi_{n+1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1},\xi_{n+2}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{n+2},\xi_m\right)\\
&\vdots\\
&\le\kappa_\lambda\left(\xi_n,\xi_{n+1}\right)+\kappa_\lambda\left(\xi_{n+1},\xi_{n+2}\right)+\ldots+\kappa_\lambda\left(\xi_{m-1},\xi_m\right) \qquad (3.55)\\
&\le\left(\psi^n+\psi^{n-1}+\ldots+\psi^{m-1}\right)\kappa_\lambda\left(\xi_0,\xi_1\right)\\
&\le\sum_{k=n}^{\infty}\psi^k\left(\kappa_\lambda\left(\xi_0,\xi_1\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.55) ve ψ fonksiyonun özelliğinden $\sum_{k=n}^{\infty}\psi^k\left(\kappa_\lambda\left(\xi_0,\xi_1\right)\right)$ serisi yakınsaktır ve dolayısıyla $\{\xi_n\}$ $\kappa-$Cauchy dizisidir. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty}\kappa_\lambda\left(\xi_n,\nu\right)=0$ olan $\nu\in M_\kappa$ vardır. S dönüşümü $\kappa-$sürekli olduğundan $n\to\infty$ için $\kappa_\lambda\left(S\xi_n,S\nu\right)\to 0$ dır.

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda\left(\nu,S\nu\right)&=\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}\left(\nu,S\nu\right)\\
&\le\kappa_\lambda\left(\nu,S\xi_n\right)+\kappa_\lambda\left(S\xi_n,S\nu\right)\\
&=\kappa_\lambda\left(\nu,\xi_{n+1}\right)+\kappa_\lambda\left(S\xi_n,S\nu\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda $n\to\infty$ limit alınırsa $\kappa_\lambda\left(\nu,S\nu\right)=0$ bulunur. κ regüler olduğundan $S\nu=\nu$ dir. Yani; $\nu\in M_\kappa$ noktası S dönüşümünün sabit noktasıdır.

S dönüşümünün $\kappa-$sürekli olma özelliği ile aşağıda tanımı verilen $\left(H^*\right)$ özelliği değiştirilirse aşağıdaki Teorem 3.3.4 elde edilir.

Tanım 3.3.3. $\left(H^*\right)$ ÖZELLİĞİ: $\alpha : M_\kappa \times M_\kappa \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olmak üzere $\{\xi_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_n,\xi_{n+1}) \geq 1$ ve $n \to \infty$ iken $\xi_n \to \xi$ ifadelerini sağlarsa $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha\left(\xi_{n_k},\xi\right) \geq 1$ olan $\{\xi_n\}$ alt dizisi vardır.

Teorem 3.3.4. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S : M_\kappa \to M_\kappa$ dönüşümü $\alpha-$kapalı daralma dönüşümü olsun. S dönüşümü için aşağıdakiler sağlansın.

a. S dönüşümü $\alpha-$geçişli dönüşümdür,

b. $\alpha(\xi_0, S\xi_0) \geq 1$ olan $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,

c. $\left(H^*\right)$ özelliği sağlanır.

Bu durumda, S dönüşümü M_κ uzayında sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.3.2'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\xi_n = S\xi_{n-1}$ olan $\{\xi_n\}$ $\kappa-$Cauchy dizisi vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_n,\xi_{n+1}) \geq 1$ dir. Ayrıca, $\{\xi_n\}$ dizisi $\nu \in M_\kappa$ noktasına yakınsaktır. (c) şartından $\left\{\xi_{n_k}\right\}$ alt dizisi vardır öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha\left(\xi_{n_k},\xi\right) \geq 1$ dir. S dönüşümünün sabit noktasının var olduğunun gösterilmesi için S dönüşümünün $\alpha-$kapalı daralma dönüşümü olması kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\wp\Big(\alpha\left(\xi_{n_k},\nu\right)\kappa_\lambda\left(S\xi_{n_k},S\nu\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{n_k},\nu\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{n_k},S\xi_{n_k}\right),\\
&\quad\kappa_\lambda\left(\nu,S\nu\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{n_k},S\nu\right),\kappa_\lambda\left(\nu,S\xi_{n_k}\right)\Big) \leq 0\\
&=\wp\Big(\alpha\left(\xi_{n_k},\nu\right)\kappa_\lambda\left(\xi_{n_k+1},S\nu\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{n_k},\nu\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{n_k},\xi_{n_k+1}\right),
\end{aligned}
$$

$$\kappa_\lambda(\nu,S\nu),\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}(\xi_{n_k},S\nu),\kappa_\lambda(\nu,\xi_{n_k+1})\big)\big)\leq 0$$

$$\leq \wp\Big(\alpha\big(\xi_{n_k},\nu\big)\kappa_\lambda\big(\xi_{n_k+1},S\nu\big),\kappa_\lambda\big(\xi_{n_k},\nu\big),\kappa_\lambda\big(\xi_{n_k},\xi_{n_k+1}\big),$$

$$\kappa_\lambda(\nu,S\nu),\kappa_\lambda\big(\xi_{n_k},\nu\big)+\kappa_\lambda(\nu,S\nu),\kappa_\lambda\big(\nu,\xi_{n_k+1}\big)\Big)\leq 0$$

olur. $\wp$ fonksiyonun sürekliliğinden ve $\alpha\big(\xi_{n_k},\xi\big)\geq 1$ ifadesinden yukarıdaki son eşitsizlikte $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\wp\big(\kappa_\lambda(\nu,S\nu),0,0,\kappa_\lambda(\nu,S\nu),\kappa_\lambda(\nu,S\nu),0\big)\leq 0$$

elde edilir. $(\wp_2)$ şartından $\kappa_\lambda(\nu,S\nu)\leq 0$ olur, yani $S\nu=\nu$ dır.

Yukarıdaki teoremde dönüşümün sabit noktasının varlığı gösterilmiştir. Sabit noktanın tek olduğunun gösterilmesi için aşağıdaki tanımlanan (U^*) özelliğine ve $(\wp_3)$ özelliğine ihtiyaç vardır.

$\wp:[0,\infty)^6\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$(\wp_3)$ her $u,v>0$ için $\wp(\mathrm{u},\mathrm{u},0,0,\mathrm{u},\mathrm{v})\leq 0$ iken $\mathrm{u}\leq\psi(\mathrm{v})$ olacak şekilde $\psi\in\Psi$ vardır.

Tanım 3.3.5. (U^*) ÖZELLİĞİ: M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay, $S:M_\kappa\to M_\kappa$ bir dönüşüm ve $\alpha:M_\kappa\times M_\kappa\to[0,\infty)$ fonksiyon olsun. Her $u,v\in\mathrm{Fix}(S)$ için $\alpha(u,v)\geq 1$ dir.

Teorem 3.3.6. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun. $S:M_\kappa\to M_\kappa$ aşağıdaki özellikleri sağlayan $\alpha-$kapalı daralma dönüşümü ise M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

a. S dönüşümüm $\alpha-$geçişli dönüşümdür,

b. $\alpha(\xi_0, S\xi_0) \geq 1$ olan $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,

c. (H^*), (U^*) ve $(\wp_3)$ özellikleri sağlansın.

İspat: Çelişki yöntemiyle ispat yapılacaktır. $u = Su$ ve $v = Sv$ olan $u, v \in M_\kappa$ var olsun. S dönüşümü $\alpha-$kapalı daralma dönüşümü olduğundan,

$$\wp\left(\alpha(u,v)\kappa_\lambda(Su,Sv), \kappa_\lambda(u,v), \kappa_\lambda(u,Su), \kappa_\lambda(v,Sv), \kappa_\lambda(u,Sv), \kappa_\lambda(v,Su)\right) \leq 0$$

yazılır. (U^*) özelliği sağlandığından

$$\wp\left(\kappa_\lambda(u,v), \kappa_\lambda(u,v), 0, 0, \kappa_\lambda(u,v), \kappa_\lambda(v,u)\right) \leq 0$$

olur ve $\wp$ fonksiyonuda $(\wp_3)$ özelliğine sahip olduğundan

$$\kappa_\lambda(u,v) \leq \psi\left(\kappa_\lambda(u,v)\right) < \kappa_\lambda(u,v)$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. Buradan $u = v$ olmalıdır.

Yukarıdaki teoremlerden elde edilen bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.3.7. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay, $S : M_\kappa \to M_\kappa$ bir dönüşüm ve $\alpha : M_\kappa \times M_\kappa \to [0, \infty)$ bir fonksiyonu olsun. Her $\xi, \eta \in M_\kappa$ için $p, q, r, s, t > 0$, $p + q + r + s + t < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha(\xi,\eta)\kappa_\lambda(S\xi,S\eta) \leq\ & p\kappa_\lambda(\xi,\eta) + q\kappa_\lambda(\xi,S\xi) + r\kappa_\lambda(\eta,S\eta) \\ & + s\kappa_\lambda(\xi,S\eta) + t\kappa_\lambda(\eta,S\xi)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlansın. S dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M_κ uzayında sabit noktaya sahiptir.

a. S dönüşümü $\alpha-$geçişli dönüşümdür,
b. $\alpha\left(\xi_0, S\xi_0\right) \geq 1$ olan $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,
c. $\left(H^*\right)$ özelliği sağlanır veya S dönüşümü $\kappa-$süreklidir.

Bunlara ek olarak, $p+r+s<1$ için $\left(U^*\right)$ ve $(\wp_3)$ özelliği sağlanıyorsa, S dönüşümü M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.3.2'de

$$\wp\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right)=a_1-a_2 p-a_3 q-a_4 r-a_5 s-a_6 t$$

alınırsa ispat elde edilir.

Sonuç 3.3.8. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $\alpha: M_\kappa \times M_\kappa \rightarrow[0, \infty)$ bir fonksiyonu olsun. $k \in[0,1)$ olmak üzere her $\xi, \eta \in M_\kappa$ için

$$\alpha(\xi, \eta) \kappa_\lambda(S\xi, S\eta) \leq k \text{ maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi, \eta), \kappa_\lambda(\xi, S\xi), \kappa_\lambda(\eta, S\eta), \kappa_\lambda(\xi, S\eta), \kappa_\lambda(\eta, S\xi)\right\}$$

eşitsizliğini sağlayan $S: M_\kappa \rightarrow M_\kappa$ dönüşümü aşağıdakileri sağlasın.

a. S dönüşümü $\alpha-$geçişli dönüşümdür,
b. $\alpha\left(\xi_0, S\xi_0\right) \geq 1$ olan $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,
c. S dönüşümü $\kappa-$süreklidir veya $\left(H^*\right)$ özelliğine sahiptir.

Bu durumda, S dönüşümünün M_κ uzayında sabit noktası vardır. Ayrıca, (U^*) ve $(\wp_3)$ özellikleri de sağlanırsa, S dönüşümü M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.3.2'de $k \in [0,1)$ olmak üzere

$$\wp(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = a_1 - k.\text{maks}\{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\},$$

alınırsa ispat elde edilir.

Teorem 3.3.2'de $\alpha(x, y) = 1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde etmek için $(\wp_{1a})$ ve $(\wp_2)$ şartlarına ihtiyaç vardır.

Γ kümesi $\wp : \mathbb{R}_+^6 \to \mathbb{R}_+$ reel değerli sürekli fonksiyonların ailesi aşağıdaki şartları sağlasın.

$(\wp_{1a})$ $\wp$ fonksiyonu beşinci değişkeninde artmayan fonksiyondur ve her $\xi, \eta \geq 0$ için

$\wp(\xi, \eta, \eta, \xi, \xi + \eta, 0) \leq 0 \;\Rightarrow\; \xi \leq k\eta$ olacak şekilde $k \in [0,1)$ vardır,

$(\wp_2)$ Her $\xi > 0$ için $\wp(\xi, \xi, 0, 0, \xi, \xi) > 0$ dır.

Sonuç 3.3.9. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S : M_\kappa \to M_\kappa$ bir dönüşüm olsun. Her $\xi, \eta \in M_\kappa$ için

$$\wp\left(\kappa_\lambda(S\xi, S\eta), \kappa_\lambda(\xi, \eta), \kappa_\lambda(\xi, S\xi), \kappa_\lambda(\eta, S\eta), \kappa_\lambda(\xi, S\eta), \kappa_\lambda(\eta, S\xi)\right) \leq 0$$

ifadesini sağlayan $\wp \in \Gamma$ fonksiyonu $(\wp_{1a})$ ve $(\wp_2)$ şartlarını sağlasın. Bu durumda S dönüşümü M_κ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.3.2'de $\alpha(\xi,\eta)=1$ ve $\psi(t)=kt,\ k\in[0,1)$ alınırsa Sonuç 3.3.9 elde edilir.

Aşağıda, Teorem 3.3.2, Teorem 3.3.4 ve Teorem 3.3.6'yı açıklayan bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.3.10. $M_\kappa=\mathbb{R}$ olsun. Her $\xi,\eta\in M_\kappa$ ve $\lambda>0$ için $\kappa_\lambda(\xi,\eta)=\frac{1}{\lambda}|\xi-\eta|$ olmak üzere M_κ uzayı $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzaydır. $S:M_\kappa\to M_\kappa$ fonksiyonu $S\xi=\frac{\xi}{6}$ ile tanımlansın. Ayrıca, $\alpha:M_\kappa\to M_\kappa$ fonksiyonu

$$\alpha(\xi,\eta)=\begin{cases}1, & \xi,\eta\in[0,1] \text{ ise,}\\ 0, & \xi,\eta\notin[0,1] \text{ ise,}\end{cases}$$

ve $\wp:\mathbb{R}_+^6\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu da

$$\wp(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)=t_1-\frac{3}{4}\text{maks}\left\{t_2,t_3,t_4,\frac{t_5+t_6}{2}\right\}$$

olarak verilsin. $\alpha(\xi,\eta)\geq 1$ olsun. Bu durumda $\xi,\eta\in[0,1]$ dır. Ayrıca, her $\xi\in[0,1]$ için $S\xi\in[0,1]$ dir. Böylece $\alpha(S\xi,S\eta)\geq 1$ olur. Dolayısıyla S dönüşümü bir $\alpha-$ geçişli dönüşümdür. $\xi,\eta\in[0,1]$ ise

$$\wp\left(\alpha(\xi,\eta)\kappa_\lambda(S\xi,S\eta),\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,S\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,S\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right)$$

$$=\alpha(\xi,\eta)\kappa_\lambda(S\xi,S\eta)-\frac{3}{4}\text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta),\kappa_\lambda(\xi,S\xi),\kappa_\lambda(\eta,S\eta),\frac{\kappa_\lambda(\xi,S\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}$$

$$\leq\frac{1}{6\lambda}|\xi-\eta|-\frac{3}{4}\text{maks}\left\{\frac{1}{\lambda}|\xi-\eta|,\frac{6}{5\lambda}|\xi|,\frac{6}{5\lambda}|\eta|,\frac{1}{12\lambda}\left(|6\xi-\eta|+|6\eta-\xi|\right)\right\}\leq 0$$

dır. Benzer şekilde (3.51) şartı $\xi,\eta \notin [0,1]$ olduğu durumda da sağlanır. Dolayısıyla S dönüşümü $\alpha-$kapalı daralma dönüşümdür. Bunlara ek olarak (H^*) ve (U^*) özelliklerinin sağlandığı ve S dönüşümünün $\kappa-$sürekli olduğu açıktır. Böylece Teorem 3.3.2, Teorem 3.3.4, ve Teorem 3.3.6'nın şartları sağlanmaktadır ve *0* noktası S dönüşümünün $\mathbb{R}$ 'deki tek sabit noktası olarak bulunur.

3.4. Archimedean Olmayan Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisinin Bazı Uygulamaları

Bu kısımda elde edilen sabit nokta teoremlerinin bazı uygulamaları verilmiştir.

3.4.1. Genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)-$Simülasyon Daralma Dönüşümlerinin Graf Teorisine Uygulaması

Bu kısımda yer alan M_{ST} ifadesi

$$M_{ST} = \{\xi \in M : (\xi, S\xi) \in E(H) \quad \text{ve} \quad (S\xi, TS\xi) \in E(H)\}$$

kümesi olarak kullanılmaktadır.

Tanım 3.4.1.1. M_κ H yönlü grafı ile donatılmış Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve (S,T) döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çifti olsun. Her $(\xi,\eta) \in E(H)$ için

$$\alpha(\xi)\beta(\eta) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \zeta\left(\kappa_\lambda(S\xi, T\eta), P(\xi,\eta)\right) \geq C_G,$$

$$P(\xi,\eta) = \text{maks}\left\{\kappa_\lambda(\xi,\eta), \kappa_\lambda(\xi,S\xi), \kappa_\lambda(\eta,T\eta), \frac{\kappa_\lambda(\xi,T\eta)+\kappa_\lambda(\eta,S\xi)}{2}\right\}$$

olan $\zeta \in Z_G$ fonksiyonu varsa (S,T) ikilisine genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)_H-$simülasyon daralma dönüşüm çifti denir.

Teorem 3.4.1.2. M_κ yönlü graf H ile donatılmış $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve (S,T) genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)_H-$simülasyon daralma dönüşüm çifti olsun. Aşağıdakiler sağlansın:

a. $\alpha(\xi_0)\geq 1$ olan $\xi_0 \in M_{ST}$ vardır,

b. her $n\geq 0$ için $\{\xi_n\}$ dizisi verilsin. $\xi_n \to \xi$ ve $(\xi_{2n},\xi_{2n+1})\in E(H)$ iken

b_1. T dönüşümü $\kappa-$sürekli, her $k\geq 0$ için $\left(\xi,\xi_{2n_k+1}\right)\in E(H)$ ve $\alpha(\xi_{2n})\geq 1$ iken $\alpha(\xi)\geq 1$ dir veya,

b_2. S dönüşümü $\kappa-$sürekli, her $k\geq 0$ için $\left(\xi_{2n_k},\xi\right)\in E(H)$ ve $\beta(\xi_{2n+1})\geq 1$ iken $\beta(\xi)\geq 1$ dir,

c. $(\xi_{2n},S\xi_{2n})\in E(H) \Rightarrow (\xi_{2n+2},S\xi_{2n+2})\in E(H)$ ve $(\xi_{2n+1},T\xi_{2n+1})\in E(H) \Rightarrow (\xi_{2n+3},T\xi_{2n+3})\in E(H)$ dir.

Bu durumda S ve T dönüşümleri M_κ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\xi_0 \in M_{ST}$ olduğundan $(\xi_0,S\xi_0)\in E(H)$ ve $(S\xi_0,TS\xi_0)\in E(H)$ dir. Yani, $(\xi_0,\xi_1)\in E(H)$ ve $(\xi_1,T\xi_1)=(\xi_1,\xi_2)\in E(H)$ dir. (c) şartından $(\xi_2,S\xi_2)\in E(H)$ ve $(\xi_3,T\xi_3)\in E(H)$ olur. Buradan $(\xi_2,\xi_3)\in E(H)$ ve $(\xi_3,\xi_4)\in E(H)$ dir. Benzer şekilde devam edilirse her $n\in\mathbb{N}$ için $(\xi_{2n},S\xi_{2n})\in E(H)$ ve $(\xi_{2n+1},T\xi_{2n+1})\in E(H)$ bulunur. Ayrıca, her $n\in\mathbb{N}$ için $(\xi_{2n},\xi_{2n+1})\in E(H)$ ve $(\xi_{2n+1},\xi_{2n+2})\in E(H)$ dir. Teorem 3.2.2'den $n\to\infty$ için limit alınırsa $\kappa_\lambda(\xi_n,\xi_{n+1})\to 0$ bulunur ve dolayısıyla $\{\xi_n\}$ dizisi M_κ uzayında $\kappa-$Cauchy dizisidir. M_κ uzayı $\kappa-$tam uzay olduğundan $\xi^* \in M_\kappa$ vardır öyle ki $n\to\infty$ iken $\kappa_\lambda(\xi_n,\xi^*)\to 0$ dir.

$\xi^* \in M_\kappa$ noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası mıdır ?

$\kappa_\lambda\left(\xi_n,\xi^*\right)\to 0$ ve$\left(\xi_{2n},\xi_{2n+1}\right)\in E(H)$ olduğundan $\left\{\xi_{2n_k}\right\}$ alt dizisi vardır öyle ki (b) ifadesinden dolayı ya T dönüşümü $\kappa-$sürekli olduğundan $\left(\xi^*,\xi_{2n_k+1}\right)\in E(H)$ ve $\alpha\left(\xi^*\right)\geq 1$ ya da S dönüşümü $\kappa-$sürekli olduğundan $\left(\xi_{2n_k},\xi^*\right)\in E(H)$ ve $\beta\left(\xi^*\right)\geq 1$ dir. T dönüşümü $\kappa-$sürekli, $\left(\xi^*,\xi_{2n_k+1}\right)\in E(H)$ ve $\alpha\left(\xi^*\right)\geq 1$ olsun. Böylece $k\to\infty$ iken

$$\kappa_\lambda\left(T\xi_{2n_k+1},T\xi^*\right)=\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+2},T\xi^*\right)\to 0$$

olur. Dolayısıyla $T\xi^*=\xi^*$ dır. Tanım 3.4.1.1'den $\alpha\left(\xi^*\right)\beta\left(\xi_{2n_k+1}\right)\geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}C_G &\leq \zeta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi^*,T\xi_{2n_k+1}\right),P\left(\xi^*,\xi_{2n_k+1}\right)\right)\\ &< G\left(P\left(\xi^*,\xi_{2n_k+1}\right),\kappa_\lambda\left(S\xi^*,T\xi_{2n_k+1}\right)\right)\end{aligned}$$

ve Tanım 1.3.34'den

$$\kappa_\lambda\left(S\xi^*,T\xi_{2n_k+1}\right)<P\left(\xi^*,\xi_{2n_k+1}\right),$$

$$\begin{aligned}P\left(\xi^*,\xi_{2n_k+1}\right)=\text{maks}\{&\kappa_\lambda\left(\xi^*,\xi_{2n_k+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi^*,S\xi^*\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},T\xi_{2n_k+1}\right),\\ &\kappa_\lambda\left(\xi^*,T\xi_{2n_k+1}\right),\kappa_\lambda\left(\xi_{2n_k+1},S\xi^*\right)\}\end{aligned}$$

bulunur. Burada $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\kappa_\lambda\left(\xi^*,S\xi^*\right)<\kappa_\lambda\left(\xi^*,S\xi^*\right)$$

çelişkisi meydana gelir. Böylece $S\xi^* = \xi^*$ olur. Dolayısıyla ξ^* noktası S dönüşümünün sabit noktasıdır. Benzer şekilde S dönüşümü $\kappa-$sürekli, $\left(\xi_{2n_k}, \xi^*\right) \in E(H)$ ve $\beta\left(\xi^*\right) \geq 1$ alınırsa ξ^* noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Buradan ξ^* noktası M_κ uzayında S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası olarak bulunur.

Teorem 3.4.1.3. M_κ H yönlü grafı ile donatılmış $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve (S,T) genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)_H-$simülasyon daralma dönüşümü çifti olsun. Ayrıca,

a. $\alpha(\xi_0) \geq 1$ olan $\xi_0 \in M_{ST}$ vardır,

b. her $n \geq 0$ için $\{\xi_n\}$ dizisi verilsin. $\xi_n \to \xi$ ve $(\xi_{2n}, \xi_{2n+1}) \in E(H)$ iken

b_1. T dönüşümü $\kappa-$sürekli, her $k \geq 0$ için $\left(\xi, \xi_{2n_k+1}\right) \in E(H)$ ve $\alpha(\xi_{2n}) \geq 1$ iken $\alpha(\xi) \geq 1$ dir veya,

b_2. S dönüşümü $\kappa-$sürekli, her $k \geq 0$ için $\left(\xi_{2n_k}, \xi\right) \in E(H)$ ve $\beta(\xi_{2n+1}) \geq 1$ iken $\beta(\xi) \geq 1$ dir,

c. $(\xi_{2n}, S\xi_{2n}) \in E(H) \quad \Rightarrow \quad (\xi_{2n+2}, S\xi_{2n+2}) \in E(H)$ ve

$(\xi_{2n+1}, T\xi_{2n+1}) \in E(H) \quad \Rightarrow \quad (\xi_{2n+3}, T\xi_{2n+3}) \in E(H)$ dir,

d. $\xi^*, \eta^* \in \mathrm{Fix}(S,T)$ sabit noktaları var iken $\left(\xi^*, \eta^*\right) \in E(H)$, $\alpha(\xi^*) \geq 1$ ve $\beta(\eta^*) \geq 1$ dir,

şartları sağlansın. Bu durumda, S ve T dönüşümleri M_κ uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: ξ^* ve η^* noktaları S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası olsun. Bu durumda, $\left(\xi^*, \eta^*\right) \in E(H)$, $\alpha(\xi^*) \geq 1$ ve $\beta(\eta^*) \geq 1$ dir. Tanım 3.4.1.1'den

$$C_G \leq \zeta\left(\kappa_\lambda\left(S\xi^*, T\eta^*\right), P\left(\xi^*, \eta^*\right)\right) < G\left(P\left(\xi^*, \eta^*\right), \kappa_\lambda\left(S\xi^*, T\eta^*\right)\right)$$

olur ve Tanım 1.3.34'den

$$\kappa_\lambda\left(S\xi^*, T\eta^*\right) < P\left(\xi^*, \eta^*\right) = \text{maks}\left\{\kappa_\lambda\left(\xi^*, \eta^*\right), 0\right\} = \kappa_\lambda\left(\xi^*, \eta^*\right)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\xi^* = \eta^*$ olarak bulunur.

Aşağıda verilen Örnek 3.4.1.4, Teorem 3.4.1.2 ve Teorem 3.4.1.3'ün şartlarını sağlar.

Örnek 3.4.1.4. $M_\kappa = [0,1]$ olmak üzere her $\xi \in M_\kappa$ için $\kappa_\lambda\left(\xi, \eta\right) = \frac{1}{\lambda}\left|\xi - \eta\right|$ ve

$$E\left(H\right) = \left\{ \left(\xi, \eta\right) : \ \xi, \eta \in \left[0,1\right] \right\}$$

olsun. Ayrıca, $S, T : M_\kappa \to M_\kappa$ dönüşümleri ve $\alpha, \beta : M_\kappa \to \left[0, +\infty\right)$ fonksiyonları

$$S\xi = \frac{\xi}{2}, \quad T\xi = \frac{\xi}{3}, \quad \xi \in M_\kappa$$

ve

$$\alpha\left(\xi\right) = \beta\left(\xi\right) = \begin{cases} 1, & \xi \in \left(0,1\right) \text{ ise,} \\ 0, & \xi \notin \left(0,1\right) \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\zeta\left(t, s\right) = \frac{3}{4}s - t,\ G\left(s, t\right) = s - t$ ve $C_{\mathrm{G}} = 0$ olarak alınırsa Teorem 3.4.1.2 ve Teorem 3.4.1.3'deki tüm şartlar sağlanır ve $\xi = 0$ noktası S ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olarak bulunur

3.4.2. $\alpha-$Kapalı Daralma Dönüşümlerinin Bazı Uygulamaları

Bu kısımda $\alpha-$kapalı daralma dönüşümlerin Ulam-Hyers kararlılık problemine, sabit nokta probleminin iyi konumlanmışlılığına (well posedness) ve integral denklemlere uygulamaları verilmiştir.

3.4.2.1. Ulam-Hyers Kararlılık Problemine Uygulama

Ulam$-$Hyers kararlılık problemi ilk olarak Ulam [97] tarafından ortaya atılmıştır. Hyers [98] Banach uzaylarında bu probleme cevap vermiştir. Daha sonra bu problem literatüre Ulam$-$Hyers kararlılık problemi olarak girmiştir. Bota ve Petruşel [99] operatör denklemlerde bu soruya cevap aramıştır. Lazar [100] kısmi diferansiyel denklemlerde bu problemi incelemiştir. Bu bölümde Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda Sonuç 3.3.7 göz önünde bulundurularak Ulam$-$Hyers kararlılık problemine uygulaması verilmiştir.

M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $S: M_\kappa \to M_\kappa$ bir dönüşüm olsun.

$$\xi = S\xi \tag{3.56}$$

sabit nokta problemi ve $\varepsilon > 0$ için

$$\kappa_\lambda\left(S\eta, \eta\right) < \varepsilon \tag{3.57}$$

olsun.

Tanım 3.4.2.1.1. Her $\varepsilon > 0$ ve $L^* > 0$ için

$$\kappa_\lambda\left(u^*, v^*\right) < L^*\varepsilon \tag{3.58}$$

olan sırasıyla (3.56) denklemi ve (3.57) eşitsizliğini sağlayan M_κ uzayında u^* ve v^* noktaları varsa S dönüşümüne Ulam – Hyers kararlıdır denir.

Teorem 3.4.2.1.2. M_κ $\kappa-$tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $\alpha : M_\kappa \times M_\kappa \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $p+q+r+s+t<1$ olan $p,q,r,s,t>0$ sabitleri ve her $\xi,\eta \in M_\kappa$ için

$$\alpha(\xi,\eta)\kappa_\lambda(S\xi,S\eta) \leq p\kappa_\lambda(\xi,\eta)+q\kappa_\lambda(\xi,S\xi)+r\kappa_\lambda(\eta,S\eta)$$
$$+s\kappa_\lambda(\xi,S\eta)+t\kappa_\lambda(\eta,S\xi)$$

eşitsizliğini sağlayan $S : M_\kappa \to M_\kappa$ dönüşümü için aşağıdakiler doğru olsun.

a. S dönüşümü $\alpha-$geçişli dönüşümdür,
b. $\alpha(\xi_0,S\xi_0)\geq 1$ olacak şekilde $\xi_0 \in M_\kappa$ vardır,
c. (H^*) özelliği sağlanır veya S dönüşümü $\kappa-$süreklidir,
d. $\varepsilon>0$ için $\kappa_\lambda(S\eta,\eta)<\varepsilon$ şartını sağlayan her u ve v için $\alpha(u,v)\geq 1$ dir.

Bu durumda (3.56) sabit nokta problemi Ulam – Hyers kararlıdır.

İspat: Sonuç 3.3.7'den $u=Su$ olan bir tek $u \in M_\kappa$ vardır. Dolayısıyla (3.56) denkleminin bir çözümüdür. $\varepsilon>0$ olsun ve $v \in M_\kappa$ noktası (3.57) eşitsizliğini sağlasın. Böylece

$$\kappa_\lambda(Sv,v)\leq\varepsilon$$

olur. $\kappa_\lambda(u,Su)=\kappa_\lambda(u,u)=0\leq\varepsilon$ olduğundan u ve v (3.57) eşitsizliğini sağlamış olur. Hipotezden $\alpha(u,v)\geq 1$ dir ve (3.58) eşitsizliğinden

$$\kappa_\lambda(u,v)=\kappa_\lambda(Su,v)$$
$$=\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}(Su,v)$$
$$\leq \kappa_\lambda(Su,Sv)+\kappa_\lambda(Sv,v)$$
$$=\alpha(u,v)\kappa_\lambda(Su,Sv)+\varepsilon$$
$$\leq a\kappa_\lambda(u,v)+b\kappa_\lambda(u,Su)+c\kappa_\lambda(v,Sv)$$
$$+d\kappa_\lambda(u,Sv)+e\kappa_\lambda(v,Su)+\varepsilon$$
$$=a\kappa_\lambda(u,v)+b\kappa_\lambda(u,Su)+c\kappa_\lambda(v,Sv)$$
$$+d\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}(u,Sv)+e\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}(v,Su)+\varepsilon$$
$$\leq a\kappa_\lambda(u,v)+b\kappa_\lambda(u,Su)+c\kappa_\lambda(v,Sv)$$
$$+d\left(\kappa_\lambda(u,v)+\kappa_\lambda(v,Sv)\right)+e\left(\kappa_\lambda(v,u)+\kappa_\lambda(u,Su)\right)+\varepsilon$$

elde edilir. $\kappa_\lambda(u,v)\leq\left(\dfrac{1+c+d}{1-a-d-e}\right)\varepsilon=L^*\varepsilon,\ L^*=\left(\dfrac{1+c+d}{1-a-d-e}\right)>0$ olduğundan S dönüşümü Ulam – Hyers kararlıdır.

3.4.2.2. Sabit Nokta Probleminin İyi Konumlanmışlılığı

Uygulamalı bilimler için sabit nokta probleminin iyi konumlanmış olması problemin modellenmesinde önemli bir araçtır. Son zamanlarda sabit nokta probleminin iyi konumlanmışlılığı matematikçiler tarafından yoğun bir şekilde farklı uzaylarda çalışmıştır [100-103].

Tanım 3.4.2.2.1. M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $\alpha: M_\kappa\times M_\kappa\to[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $S: M_\kappa\to M_\kappa$ dönüşümü

a. $\alpha(u,Su)\geq 1$ olan $u\in M_\kappa$ vardır,

b. $\{\xi_n\}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\kappa_\lambda(\xi_n,S\xi_n)=0$ iken $\lim\limits_{n\to\infty}\kappa_\lambda(\xi_n,u)=0$ dır, şartlarını sağlarsa S dönüşümünün sabit nokta problemi M_κ uzayında iyi konumlanmıştır denir.

Tanım 3.4.2.2.2. (R) ÖZELLİĞİ: M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay, $\alpha : M_\kappa \times M_\kappa \to [0,\infty)$ bir fonksiyon ve $S : M_\kappa \to M_\kappa$ bir dönüşüm olsun. M_κ uzayında $\lim\limits_{n\to\infty} \kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) = 0$ eşitliğini sağlayan $\{\xi_n\}$ dizisi varsa her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_n, S\xi_n) \geq 1$ dir.

Teorem 3.4.2.2.3. M_κ Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun. Eğer Sonuç 3.3.5'in tüm şartları ve (R) özelliği sağlanıyorsa (3.56) problemi iyi konumlanmıştır.

İspat: Sonuç 3.3.7'den $u \in M_\kappa$ noktası vardır öyle ki $u = Su$ ve $\alpha(u, Su) \geq 1$ dır. $\{\xi_n\}$ dizisi $\lim\limits_{n\to\infty} \kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) = 0$ eşitliğini sağlasın. (R) özelliğinden $\alpha(\xi_n, S\xi_n) \geq 1$ dir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\kappa_\lambda(\xi_n, u) = \kappa_\lambda(\xi_n, Su) & \\
&= \kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}(\xi_n, Su) \\
&\leq \kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) + \kappa_\lambda(S\xi_n, Su) \\
&\leq \alpha(\xi_n, u)\kappa_\lambda(S\xi_n, Su) + \kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) \\
&\leq a\kappa_\lambda(\xi_n, u) + b\kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) + c\kappa_\lambda(u, Su) + d\kappa_\lambda(\xi_n, Su) \\
&+ e\kappa_\lambda(u, S\xi_n) + \kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) \\
&\leq a\kappa_\lambda(\xi_n, u) + b\kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) + c\kappa_\lambda(u, Su) + d\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}(\xi_n, Su) \\
&+ e\kappa_{\text{maks}\{\lambda,\lambda\}}(u, S\xi_n) + \kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) \\
&\leq a\kappa_\lambda(\xi_n, u) + b\kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n) + c\kappa_\lambda(u, Su) + d\left(\kappa_\lambda(\xi_n, u) + \kappa_\lambda(u, Su)\right) \\
&+ e\left(\kappa_\lambda(u, \xi_n) + \kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n)\right) + \kappa_\lambda(\xi_n, S\xi_n)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$\kappa_\lambda(\xi_n,u)\leq\left(\frac{1+b+e}{1-a-d-e}\right)\kappa_\lambda(\xi_n,S\xi_n)$$

olur. $n\to\infty$ iken $\kappa_\lambda(\xi_n,S\xi_n)\to 0$ olduğundan $\kappa_\lambda(\xi_n,u)\to 0$ elde edilir. Yani S dönüşümünün sabit nokta problemi M_κ uzayında iyi konumlanmıştır.

3.4.2.3. Sabit Nokta Probleminin İntegral Denklemlere Uygulaması

Matematik ve uygulamalı bilimlerde integral denklemler modelleme yapmak için kullanılan önemli bir araçtır. Bu sayede integral denklemler sabit nokta teorisi çalışan pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. İntegral denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği sabit nokta teoremleri kullanılarak gösterilmiştir [104-107].

Bu bölümde $\xi\in I=[a,b]$ ve $K:I\times I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\xi(z)=\int_a^t K(z,p,\xi(p))\,dp,$$

integral denklemi ele alınmıştır.

$\xi\in I=[a,b]$ olmak üzere

$$\xi(z)=\int_a^t K(z,p,\xi(p))\,dp, \tag{3.59}$$

$K:I\times I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. $M=C(I,\mathbb{R})$ uzayı genel supremum normuyla donatılsın, yani, $\|\xi\|=\operatorname{maks}_{z\in I}|\xi(z)|$ ve her $\xi,\eta\in M$ için

$$\kappa_\lambda(\xi,\eta)=\frac{1}{\lambda}\|\xi-\eta\|=\frac{1}{\lambda}d(\xi,\eta)$$

olsun. $r>0$ ve $\xi\in M$ için

$$B_\lambda(\xi,r)=\{v\in M:\kappa_\lambda(\xi,\eta)\le r\}$$

ξ merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar yüzeyi tanımlansın. Bu durumda M_κ uzayı $\kappa-$ tam Archimedean olmayan modüler metrik uzaydır.

Şimdi de $S:M_\kappa\to M_\kappa$ dönüşümü

$$S\xi(z)=\int_a^z K(z,p,\xi(p))\,dp \tag{3.60}$$

ile tanımlansın. Böylece, $\xi(z)$ integral denkleminin (3.58) çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart (3.59) ile verilen S operatörünün sabit noktaya sahip olmasıdır.

Teorem 3.4.2.3.3. $r>0$ keyfi reel sayı olsun.

a. $y\in B_\lambda(\xi,r)$ ve $\lambda>0$ ise her $z,p\in I$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}$ ve $q:I\times I\to\mathbb{R}_+$ sürekli fonksiyonu için

$$\left|K(z,p,\xi(p))-K(z,p,\eta(p))\right|\le\frac{q(z,p)}{b-a}\left|\xi(p)-\eta(p)\right| \text{ dir,}$$

b. $\sup\limits_{z\in I}q(z,p)=k<1$ dir.

Bu durumda (3.59) integral denklemi bir çözüme sahiptir.

İspat: $\eta\in B_\lambda(\xi,r)$ ve Teorem 3.4.2.3.3'ün hipotezinde verilen (*b*) şartından

$$
\begin{aligned}
\left|S\xi(z)-S\eta(z)\right| &\leq \left|\int_a^z \left[K\left(z,p,\xi(p)\right)-K\left(z,p,\eta(p)\right)\right]dp\right| \\
&\leq \int_a^t \left|K\left(t,p,\xi(p)\right)-K\left(z,p,\eta(p)\right)\right|dp \\
&\leq \int_a^b \left|K\left(z,p,\xi(p)\right)-K\left(z,p,\eta(p)\right)\right|dp \\
&\leq \int_a^b \frac{q(z,p)}{b-a}\left|\xi(p)-\eta(p)\right|dp \\
&\leq \left\|\xi(p)-\eta(p)\right\|\int_a^b \frac{k}{b-a}dp \\
&= k\left\|\xi(p)-\eta(p)\right\|
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\kappa_\lambda\left(S\xi,S\eta\right) &= \frac{1}{\lambda}\left\|S\xi-S\eta\right\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\left|S\xi(z)-S\eta(z)\right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}k\left\|\xi(p)-\eta(p)\right\| \\
&\leq k\,\kappa_\lambda\left(\xi,\eta\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\wp:\mathbb{R}_+^6\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu $k\in[0,1)$ olmak üzere

$$
\wp\left(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6\right)=t_1-kt_2
$$

şeklinde tanımlanırsa S integral operatörü Sonuç 3.3.9'un tüm şartlarını sağlar. Bu durumda S dönüşümü sabit noktaya sahiptir. Böylece (3.59) denklemi bir çözüme sahiptir.

BÖLÜM 4. ASİMETRİK MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ

Bu bölümde [95] ve [108]'de verilen Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinden ve bu teoremlerden elde edilen uygulamalardan bahsedilmiştir. Q regüler ve konveks bir fonksiyondur. Her $m>0$ ve $\xi_0 \in M$ için $Q_m\left(\xi_0, S\xi_0\right)<\infty$ özelliğini sağlamaktadır. (M,Q) ikilisini temsil eden M_Q uzayı da Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay olarak tanımlanmıştır. Archimedean olmayan asimetrik modüler uzaylarda sabit nokta teoremlerinin sabit noktasının varlığı sorunsuz bir şekilde elde edilebilmesi için M_Q uzayı $Q-$Symth tam olarak kabul edilmiştir.

4.1. Rasyonel İfade İçeren $(\alpha,\beta)_\psi$ – Daralma Dönüşümleri için Sabit Nokta Teoremleri

Döngüsel $\alpha-$geçişli dönüşümler ve $\psi \in \Psi$ fonksiyonu yardımıyla Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzaylarda rasyonel ifade içeren daralma dönüşümleri tanımlanarak sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Tanım 4.1.1. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay ve $\alpha,\beta: M_Q \rightarrow [0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. Her $m>0$ ve $\xi,\eta \in M_Q$ için

$$\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1 \quad \Rightarrow \quad Q_m(S\xi,S\eta)\leq \psi\left(P(\xi,\eta)\right), \tag{4.1}$$

$$P(\xi,\eta)=\text{maks}\left\{Q_m(\xi,\eta), Q_m(S\xi,\xi), Q_m(S\eta,\eta),\right.$$

$$\left.\frac{Q_m(S\xi,\xi)Q_m(S\eta,\eta)}{1+Q_m(S\xi,S\eta)},\frac{Q_m(S\xi,\xi)Q_m(S\eta,\eta)}{1+Q_m(\xi,\eta)}\right\}$$

olan $\psi\in\Psi$ fonksiyonu varsa $S:M_Q\to M_Q$ dönüşümüne rasyonel ifade içeren $(\alpha,\beta)_\psi$ – daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 4.1.2. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam uzay olsun. $S:M_Q\to M_Q$ rasyonel ifade içeren $(\alpha,\beta)_\psi$ – daralma dönüşümü aşağıdakileri sağlasın.

a. S dönüşümü döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür,

b. $\alpha(\xi_0)\geq 1$ ve $\beta(\xi_0)\geq 1$ olan $\xi_0\in M_Q$ vardır,

c. her $p\in\mathbb{N}$ için $\xi_p\to\xi$ ve $\alpha(\xi_p)\geq 1$ olan $\{\xi_p\}$ dizisi var ise $\alpha(\xi)\geq 1$ dir.

Bu durumda S dönüşümü M_Q uzayında sabit noktaya sahiptir.

İspat: Her $p\in\mathbb{N}$ için $\{\xi_p\}$ iterasyon dizisi $\xi_p=S^p\xi_0=S\xi_{p-1}$ şeklinde tanımlansın. (b) şartından $\alpha(\xi_0)\geq 1$ olan $\xi_0\in M_Q$ vardır. S döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm ve $\alpha(\xi_0)\geq 1$ olduğundan $\beta(\xi_1)=\beta(S\xi_0)\geq 1$ ve $\alpha(\xi_2)=\alpha(S\xi_1)\geq 1$ dir. Benzer şekilde her $p\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_p)\geq 1$ ve $\beta(\xi_{p-1})\geq 1$ dir. Tekrar, S döngüsel $(\alpha,\beta)-$ geçişli dönüşüm ve $\beta(\xi_0)\geq 1$ olduğundan benzer yöntemle her $p\in\mathbb{N}$ için $\beta(\xi_p)\geq 1$ ve $\alpha(\xi_{p-1})\geq 1$ bulunur. Dolayısıyla her $p\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_p)\geq 1$ ve $\beta(\xi_p)\geq 1$ dir. Ayrıca, her $p\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\xi_p)\beta(\xi_{p-1})\geq 1$ dir. (4.1) ifadesinden

$$Q_m(\xi_{p+1},\xi_p)=Q_m(S\xi_p,S\xi_{p-1})\leq\psi\left(P(\xi_p,\xi_{p-1})\right),$$

$$P\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)=\text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right),Q_m\left(S\xi_p,\xi_p\right),Q_m\left(S\xi_{p-1},\xi_{p-1}\right),\right.$$

$$\left.\frac{Q_m\left(S\xi_p,\xi_p\right)Q_m\left(S\xi_{p-1},\xi_{p-1}\right)}{1+Q_m\left(S\xi_p,S\xi_{p-1}\right)},\frac{Q_m\left(S\xi_p,\xi_p\right)Q_m\left(S\xi_{p-1},\xi_{p-1}\right)}{1+Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)}\right\}$$

$$=\text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right),Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right),Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right),\right. \tag{4.2}$$

$$\left.\frac{Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)}{1+Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)},\frac{Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)}{1+Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)}\right\}$$

$$=\text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right),Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)\right\}$$

olur. Eğer $\text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right),Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)\right\}=Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)$ alınırsa (4.2) ifadesinden

$$Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)\leq\psi\left(Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)\right)<Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right) \tag{4.3}$$

bulunur ki bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$\text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right),Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)\right\}=Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)$$

olmalıdır. $\psi\in\Psi$ olduğundan her $p\in\mathbb{N}$ için

$$Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)\leq\psi\left(Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)\right)<Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)$$

olur. Benzer şekilde devam edilirse her $p\in\mathbb{N}$ için

$$Q_m\left(\xi_{p+1},\xi_p\right)\leq\psi^p\left(Q_m\left(\xi_1,\xi_0\right)\right) \tag{4.4}$$

bulunur. $p>k$ için $\left(Q_3\right)$ özelliği ve (4.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} Q_m\left(\xi_p,\xi_k\right) = Q_{\text{maks}\{m,m\}}\left(\xi_p,\xi_k\right) &\le Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)+Q_m\left(\xi_{p-1},\xi_k\right) \\ &= Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)+Q_{\text{maks}\{m,m\}}\left(\xi_{p-1},\xi_k\right) \\ &\le Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)+Q_m\left(\xi_{p-1},\xi_{p-2}\right)+Q_m\left(\xi_{p-2},\xi_k\right) \\ &\vdots \\ &\le Q_m\left(\xi_p,\xi_{p-1}\right)+Q_m\left(\xi_{p-1},\xi_{p-2}\right)+\ldots+Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_k\right) \\ &\le \psi^{p-1}\left(Q_m\left(\xi_1,\xi_0\right)\right)+\ldots+\psi^{k-1}\left(Q_m\left(\xi_1,\xi_0\right)\right)+\psi^{k}\left(Q_m\left(\xi_1,\xi_0\right)\right) \\ &\le \sum_{t=k}^{\infty}\psi^{t}\left(Q_m\left(\xi_1,\xi_0\right)\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Buradan $p,k\to\infty$ iken limit alınırsa $\psi\in\Psi$ olduğundan $Q_m\left(\xi_p,\xi_k\right)\to 0$ bulunur. Bu ise $\left\{\xi_p\right\}$ dizisinin soldan $Q-K-$Cauchy dizisi olduğunu gösterir. M_Q $Q-$Symth tam uzay olduğundan

$$\lim_{p\to\infty} Q_m^E\left(\xi_p,u\right)=0 \tag{4.6}$$

olan $u\in M_Q$ vardır. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} Q_m\left(\xi_p,u\right)=0 \text{ ve } \lim_{p\to\infty} Q_m\left(u,\xi_p\right)=0 \tag{4.7}$$

olur. $u\in M_Q$ noktasının S dönüşümünün sabit noktası olduğunun gösterilmesi için $Q_m\left(Su,u\right)>0$ olsun. (c) ifadesinden $\alpha\left(u\right)\beta\left(\xi_p\right)\ge 1$ dir. Ayrıca, (4.1) ifadesinden

$$Q_m\left(Su,\xi_{p+1}\right)=Q_m\left(Su,S\xi_p\right)\le\psi\left(P\left(u,\xi_p\right)\right), \tag{4.8}$$

$$P\left(u,\xi_p\right)=\text{maks}\Big\{Q_m\left(u,\xi_p\right),Q_m\left(Su,u\right),Q_m\left(S\xi_p,\xi_p\right),$$

$$\left.\frac{Q_m(Su,u)Q_m(S\xi_p,\xi_p)}{1+Q_m(Su,S\xi_p)},\frac{Q_m(Su,u)Q_m(S\xi_p,\xi_p)}{1+Q_m(u,\xi_p)}\right\}$$

$$=\text{maks}\left\{Q_m(u,\xi_p),Q_m(Su,u),Q_m(S\xi_p,\xi_p),\right.$$

$$\left.\frac{Q_m(Su,u)Q_m(\xi_{p+1},\xi_p)}{1+Q_m(Su,\xi_{p+1})},\frac{Q_m(Su,u)Q_m(\xi_{p+1},\xi_p)}{1+Q_m(u,\xi_p)}\right\}$$

bulunur. (4.8) eşitsizliğinde $p\to\infty$ iken limit alınırsa

$$Q_m(Su,u)\le\psi\left(P(u,\xi_p)\right)=\psi\left(Q_m(Su,u)\right)<Q_m(Su,u)$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, $Q_m(Su,u)=0$ olur. Q regüler olduğundan $u=Su$ yani u noktası S dönüşümünün M_Q uzayında sabit noktasıdır.

S dönüşümünün sabit noktasının tekliğinin elde edilebilmesi için aşağıda tanımı verilen (U^{**}) özelliğine ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 4.1.3. (U^{**}) ÖZELLİĞİ: M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay, $S:M_Q\to M_Q$ bir dönüşüm ve $\alpha,\beta:M_Q\to[0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. Her $\xi,\eta\in\text{Fix}(S)$ için $\alpha(\xi)\ge1$ ve $\beta(\eta)\ge1$ dir.

Teorem 4.1.4. M_Q rchimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam olsun. $S:M_Q\to M_Q$ rasyonel ifade içeren $(\alpha,\beta)_\psi-$daralma dönüşümü aşağıdakileri sağlasın.

a. S dönüşümü döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür,

b. $\alpha(\xi_0)\ge1$ ve $\beta(\xi_0)\ge1$ olan $\xi_0\in M_Q$ vardır,

c. her $p\in\mathbb{N}$ için $\xi_p\to\xi$ ve $\alpha\left(\xi_p\right)\geq 1$ olan $\left\{\xi_p\right\}$ dizisi mevcut ise $\alpha\left(\xi\right)\geq 1$ dir,

d. $\left(U^{**}\right)$ özelliği sağlanır.

Bu durumda S dönüşümü M_Q uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $u\neq v$ olmak üzere $u=Su$ ve $v=Sv$ olan $u,v\in M_Q$ var olsun. $\alpha\left(u\right)\beta\left(v\right)\geq 1$ olduğundan ve (4.1) ifadesinden

$$Q_m\left(u,v\right)=Q_m\left(Su,Sv\right)\leq\psi\left(P\left(u,v\right)\right),$$

$$\begin{aligned}P\left(u,v\right)&=\text{maks}\Big\{Q_m\left(u,v\right),Q_m\left(Su,u\right),Q_m\left(Sv,v\right),\\&\qquad\frac{Q_m\left(Su,u\right)Q_m\left(Sv,v\right)}{1+Q_m\left(Su,Sv\right)},\frac{Q_m\left(Su,u\right)Q_m\left(Sv,v\right)}{1+Q_m\left(u,v\right)}\Big\}\\&=\text{maks}\left\{Q_m\left(u,v\right),0\right\}\\&=Q_m\left(u,v\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$Q_m\left(u,v\right)\leq\psi\left(Q_m\left(u,v\right)\right)<Q_m\left(u,v\right)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $u=v$ dir yani S dönüşümünün M_Q uzayında sabit noktası tektir.

Örnek 4.1.5. $M_Q=\left[0,\infty\right)$ olmak üzere her $m>0$ için Q dönüşümü

$$Q_m\left(\xi,\eta\right)=\begin{cases}\dfrac{\left|\xi\right|}{m}, & \xi\neq\eta \text{ ise,}\\ 0, & \xi=\eta \text{ ise,}\end{cases}$$

şekilde tanımlansın. M_Q uzayı $Q-$Symth tam uzaydır. $S:M_Q \to M_Q$ dönüşümü ve $\alpha,\beta:M_Q \to [0,+\infty)$ fonksiyonları sırasıyla

$$S\xi = \begin{cases} \xi^2-3\xi+2, & \xi>2 \text{ ise,} \\ \dfrac{\xi}{3}, & \xi\in[0,2] \text{ ise,} \end{cases}$$

ve

$$\alpha(\xi)=\beta(\xi)=\begin{cases} 1, & \xi\in[0,1] \text{ ise,} \\ 0, & \xi\notin[0,1] \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $t>0$ için $\psi(t)=\dfrac{t}{2}$ ve $\xi\in M_Q$ için $\alpha(\xi)\geq 1$ olsun. Bu durumda, $\xi\in[0,1]$ ve dolayısıyla $S\xi\in[0,1]$ dir. Böylece $\beta(S\xi)\geq 1$ dir. Benzer şekilde, eğer $\beta(\xi)\geq 1$ ise $\alpha(S\xi)\geq 1$ dir. Buradan S döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür. Eğer $\xi\neq\eta$ ve $\xi,\eta\in[0,1]$ ise $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1$ dir. Ayrıca

$$Q_m(S\xi,S\eta)\leq\frac{|S\xi|}{m}=\frac{\xi}{3m}\leq\psi\left(Q_m(\xi,\eta)\right)\leq\psi\left(P(\xi,\eta)\right),$$

$$P(\xi,\eta)=\text{maks}\Big\{Q_m(\xi,\eta),Q_m(S\xi,\xi),Q_m(S\eta,\eta),$$

$$\frac{Q_m(S\xi,\xi)Q_m(S\eta,\eta)}{1+Q_m(S\xi,S\eta)},\frac{Q_m(S\xi,\xi)Q_m(S\eta,\eta)}{1+Q_m(\xi,\eta)}\Big\}$$

olur. Benzer şekilde $\xi,\eta\notin[0,1]$ ise (4.1) ifadesi sağlanır. Dolayısıyla S dönüşümü rasyonel ifade içeren $(\alpha,\beta)_\psi-$daralma dönüşümüdür.

M_Q uzayında $\alpha\left(\xi_p\right)\geq 1$ ve $p\to\infty$ iken $\xi_p\to\xi$ olan $\left\{\xi_p\right\}$ dizisi var olsun. $\xi_{\mathrm{p}}\in\left[0,1\right]$ dir. Dolayısıyla $\xi\in\left[0,1\right]$ ve $\alpha\left(\xi\right)\geq 1$ dir. Sonuç olarak Teorem 4.1.2'nin tüm şartları sağlanır. Ayrıca $\xi=0$ ve $\xi=2+\sqrt{2}$ noktaları S dönüşümünün sabit noktalarıdır. Bunlara ek olarak $\left(U^{**}\right)$ özelliği sağlanmadığından sabit nokta tek olarak elde edilemez.

Sonuç 4.1.6. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam olsun. (4.1) ifadesini sağlayan $S:M_Q\to M_Q$ dönüşümü

a. S döngüsel $\left(\alpha,\beta\right)-$geçişli dönüşümdür,

b. $\alpha\left(\xi_0\right)\geq 1$ ve $\beta\left(\xi_0\right)\geq 1$ olan $\xi_0\in M_Q$ vardır,

c. her $p\in\mathbb{N}$ için $\xi_p\to\xi$ ve $\alpha\left(\xi_p\right)\geq 1$ olan $\left\{\xi_p\right\}$ dizisi var ise $\alpha\left(\xi\right)\geq 1$ dir,

d. $\xi,\eta\in M_Q$ için $\alpha\left(\xi\right)\beta\left(\eta\right)\geq 1\Rightarrow Q_m\left(S\xi,S\eta\right)\leq\psi\left(Q_m\left(\xi,\eta\right)\right)$
olacak şekilde $\psi\in\Psi$ vardır,

özelliklerini sağlasın. Bu durumda, S dönüşümü M_Q uzayında sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, her $\xi,\eta\in\mathrm{Fix}\left(S\right)$ için $\alpha\left(\xi\right)\beta\left(\eta\right)\geq 1$ ise S dönüşümü M_Q uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.1.2'de $P\left(\xi,\eta\right)=Q_m\left(\xi,\eta\right)$ olarak alınırsa ispat elde edilir.

4.2. Genelleştirilmiş Suzuki Simülasyon Daralma Dönüşümleri için Sabit Nokta Teorisi ile İlgili Sonuçlar

Bu kısımda Suzuki [47] tarafından tanımlanan Suzuki dönüşümü ve Khojasteh ve ark. [39] tarafından tanımlanan simülasyon fonksiyonu birlikte düşünülerek yeni bir daralma dönüşümü elde edilmiştir.

Tanım 4.2.1. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay ve $S:M_Q \to M_Q$ bir dönüşüm olsun. Her $\xi,\eta \in M_Q$ için

$$\frac{1}{2}Q_m(\xi,S\xi) \leq Q_m(\xi,\eta) \quad \text{iken} \quad \zeta\Big(\Sigma\big(Q_m(S\xi,S\eta)\big),\varphi\big(\Sigma\big(P(\xi,\eta)\big)\big)\Big) \geq C_G, \tag{4.10}$$

$$P(\xi,\eta) = \text{maks}\{Q_m(\xi,\eta),Q_m(\xi,S\xi),Q_m(\eta,S\eta)\}$$

eşitsizliğini sağlayan $\Sigma \in \tilde{\Theta}$, $\varphi \in \Phi$ ve $\zeta \in Z_G$ fonksiyonları varsa S dönüşümüne genelleştirilmiş Suzuki simülasyon daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 4.2.2. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam ve $S:M_Q \to M_Q$ genelleştirilmiş Suzuki simülasyon daralma dönüşümü olsun. Bu durumda S dönüşümü M_Q uzayında sabit noktaya sahiptir.

İspat: Her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\xi_k\}$ iterasyon dizisi $\xi_{k+1} = S\xi_k$ şeklinde tanımlansın. Eğer k_0 noktası $\xi_{k_0} = \xi_{k_0+1}$ olacak şekilde varsa $S\xi_{k_0} = \xi_{k_0}$ olur ki bu durumda ξ_{k_0} noktası S dönüşümünün sabit noktasıdır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\xi_k \neq \xi_{k+1}$ olsun. Böylece

$$Q_m(\xi_k,\xi_{k+1}) > 0, \quad k = 0,1,2... \tag{4.11}$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2}Q_m(\xi_k,S\xi_k) < Q_m(\xi_k,S\xi_k) = Q_m(\xi_k,\xi_{k+1}) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} C_G &\leq \zeta\Big(\Sigma\big(Q_m(S\xi_k,S\xi_{k+1})\big),\varphi\big(\Sigma\big(P(\xi_k,\xi_{k+1})\big)\big)\Big) \\ &= \zeta\Big(\Sigma\big(Q_m(\xi_{k+1},\xi_{k+2})\big),\varphi\big(\Sigma\big(P(\xi_k,\xi_{k+1})\big)\big)\Big) \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$< G\left(\varphi\left(\Sigma\left(P\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right)\right)\right),\Sigma\left(Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right)\right)$$

elde edilir. Tanım 1.3.34'den

$$\Sigma\left(Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right) < \varphi\left(\Sigma\left(P\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right)\right)\right), \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} P\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right) &= \text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right),Q_m\left(\xi_k,S\xi_k\right),Q_m\left(\xi_{k+1},S\xi_{k+1}\right)\right\} \\ &= \text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right),Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right),Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right\} \\ &= \text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right),Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right\} \end{aligned}$$

olduğundan $k \in \mathbb{N}$ için

$$\text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right),Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right\} = Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)$$

olsun. Bu durumda (4.13) ifadesinde ve Lemma 1.3.39'dan

$$\Sigma\left(Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right) < \varphi\left(\Sigma\left(Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right)\right) < \Sigma\left(Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right)$$

çelişkisi elde edilir. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için

$$P\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right) = Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right) \tag{4.14}$$

bulunur. Ayrıca, (4.13) eşitsizliğinden

$$\Sigma\left(Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right) < \varphi\left(\Sigma\left(Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right)\right)\right) \tag{4.15}$$

olur. Benzer şekilde devam edilirse her $k \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
\Sigma\left(Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right)\right) &< \varphi\left(\Sigma\left(Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right)\right)\right) \\
&< \varphi^2\left(\Sigma\left(Q_m\left(\xi_{k-1},\xi_k\right)\right)\right) \\
&\vdots \\
&< \varphi^k\left(\Sigma\left(Q_m\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir . $k \to \infty$ için limit alınırsa φ fonksiyonunun tanımdan ve Θ_2 özelliğinden

$$\lim_{k\to\infty} \varphi^k\left(Q_m\left(\xi_1,\xi_2\right)\right) = 1$$

bulunur. Böylece Lemma 1.3.39'dan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{k\to\infty} Q_m\left(\xi_{k+1},\xi_{k+2}\right) = 0 \tag{4.16}$$

olur. $\{\xi_k\}$ dizisinin soldan $Q-K-$Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi için $\varepsilon > 0$ iken

$$Q_m\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right) \geq \varepsilon \text{ ve } Q_m\left(\xi_{t_k-1},\xi_{s_k}\right) < \varepsilon \tag{4.17}$$

olan $\{t_k\}$ ve $\{s_k\}$ dizileri var olsun. (4.16) ifadesi ve (Q_5) özelliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \leq Q_m\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right) &= Q_{\text{maks}\{m,m\}}\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right) \\
&\leq Q_m\left(\xi_{t_k},\xi_{t_k-1}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k-1},\xi_{s_k}\right) \\
&< \varepsilon + Q_m\left(\xi_{t_k},\xi_{t_k-1}\right)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

bulunur. Yukarıda $k \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{s_k}\right) = \varepsilon \tag{4.19}$$

olur. Ayrıca (4.16) eşitliği ve $\left(Q_5\right)$ özelliğinden

$$\begin{aligned}
Q_m\left(\xi_{t_k+1}, \xi_{s_k+1}\right) &= Q_{\text{maks}\{m,m\}}\left(\xi_{t_k+1}, \xi_{s_k+1}\right) \\
&\le Q_m\left(\xi_{t_k+1}, \xi_{t_k}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{s_k+1}\right) \\
&= Q_m\left(\xi_{t_k+1}, \xi_{t_k}\right) + Q_{\text{maks}\{m,m\}}\left(\xi_{t_k}, \xi_{s_k+1}\right) \\
&\le Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{t_k-1}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k-1}, \xi_{s_k+1}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k+1}, \xi_{t_k}\right) \\
&= Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{t_k-1}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k+1}, \xi_{t_k}\right) + Q_{\text{maks}\{m,m\}}\left(\xi_{t_k-1}, \xi_{s_k+1}\right) \\
&\le Q_m\left(\xi_{t_k-1}, \xi_{s_k}\right) + Q_m\left(\xi_{s_k}, \xi_{s_k+1}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{t_k-1}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k+1}, \xi_{t_k}\right) \\
&< \varepsilon + Q_m\left(\xi_{s_k}, \xi_{s_k+1}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{t_k-1}\right) + Q_m\left(\xi_{t_k+1}, \xi_{t_k}\right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{1}{2} Q_m\left(\xi_{t_k}, S\xi_{t_k}\right) \le Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{s_k}\right) \tag{4.21}$$

olsun. Eğer

$$\frac{1}{2} Q_m\left(\xi_{t_k}, S\xi_{t_k}\right) > Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{s_k}\right) \tag{4.22}$$

$$= \frac{1}{2} Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{t_k+1}\right) > Q_m\left(\xi_{t_k}, \xi_{s_k}\right)$$

ise (4.22) eşitsizliğinden $k \to \infty$ limit alınırsa (4.16) ve (4.19) dan dolayı $\varepsilon < 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{2}Q_m\left(\xi_{t_k},S\xi_{t_k}\right)\leq Q_m\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right)$$

olmalıdır. S dönüşümü genelleştirilmiş Suzuki simülasyon daralma dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} C_G &\leq \zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(S\xi_{t_k},S\xi_{s_k}\right)\right),\varphi\left(\Sigma\left(P\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right)\right)\right)\right) \\ &= \zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(\xi_{t_k+1},\xi_{s_k+1}\right)\right),\varphi\left(\Sigma\left(P\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right)\right)\right)\right), \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} P\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right) &= \text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right),Q_m\left(\xi_{t_k},S\xi_{t_k}\right),Q_m\left(\xi_{s_k},S\xi_{s_k}\right)\right\} \\ &= \text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_{t_k},\xi_{s_k}\right),Q_m\left(\xi_{t_k},\xi_{t_k+1}\right),Q_m\left(\xi_{s_k},\xi_{s_k+1}\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.24}$$

olur. (4.16), (4.19), (4.20), (4.23) ve (4.24) kullanılarak $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$C_G \leq \zeta\left(\Sigma(\varepsilon),\varphi\left(\Sigma(\varepsilon)\right)\right) < G\left(\varphi\left(\Sigma(\varepsilon)\right),\Sigma(\varepsilon)\right)$$

elde edilir. Tanım 1.3.34’den

$$\Sigma(\varepsilon) < \varphi\left(\Sigma(\varepsilon)\right) < \Sigma(\varepsilon)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\{\xi_k\}$ dizisi soldan $Q-K-$Cauchy dizisidir. M_Q $Q-$ Smyth tam uzay olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} Q_m{}^E\left(\xi_k,u\right)=0$$

olan $u\in M_Q$ vardır. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} Q_m\left(\xi_k,u\right)=0 \text{ ve } \lim_{k\to\infty} Q_m\left(u,\xi_k\right)=0$$

olur. $u\in M_Q$ noktasının S dönüşümünün sabit noktası olduğunun gösterilmesi için $Q_m\left(Su,u\right)>0$ ve her $k\geq 0$ için

$$\frac{1}{2}Q_m\left(\xi_k,S\xi_k\right)\leq Q_m\left(\xi_k,u\right)$$

olsun. Tersine

$$\frac{1}{2}Q_m\left(\xi_k,S\xi_k\right)>Q_m\left(\xi_k,u\right)=\frac{1}{2}Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right)>Q_m\left(\xi_k,u\right) \tag{4.25}$$

olarak alınırsa ve bu ifade de $k\to\infty$ için limit alınırsa $0>0$ çelişkisi elde edilir. Ayrıca S dönüşümü genelleştirilmiş Suzuki simülasyon daralma dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} C_G &\leq \zeta\Big(\Sigma\big(Q_m\left(S\xi_k,Su\right)\big),\varphi\Big(\Sigma\big(P\left(\xi_k,u\right)\big)\Big)\Big)\\ &=\zeta\Big(\Sigma\big(Q_m\left(\xi_{k+1},Su\right)\big),\varphi\Big(\Sigma\big(P\left(\xi_k,u\right)\big)\Big)\Big)\\ &<G\Big(\varphi\Big(\Sigma\big(P\left(\xi_k,u\right)\big)\Big),\Sigma\big(Q_m\left(\xi_{k+1},Su\right)\big)\Big)\end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. Tanım 1.3.34'den

$$\Sigma\big(Q_m\left(\xi_{k+1},Su\right)\big)<\varphi\Big(\Sigma\big(P\left(\xi_k,u\right)\big)\Big), \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} P\left(\xi_k,u\right)&=\text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_k,u\right),Q_m\left(\xi_k,S\xi_k\right),Q_m\left(u,Su\right)\right\}\\ &=\text{maks}\left\{Q_m\left(\xi_k,u\right),Q_m\left(\xi_k,\xi_{k+1}\right),Q_m\left(u,Su\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.28}$$

dir. (4.26)-(4.28) ifadelerinde $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\Sigma\left(Q_m\left(u,Su\right)\right) < \varphi\left(\Sigma\left(Q_m\left(u,Su\right)\right)\right) < \Sigma\left(Q_m\left(u,Su\right)\right)$$

çelişkisi elde edilir. Buradan $u \in M_Q$ noktası S dönüşünün sabit noktası olarak bulunur.

$u^* \in M_Q$ noktası S dönüşümünün diğer bir sabit noktası olsun. Bu durumda $u \neq u^*$ ve $Su^* = u^*$ olsun. Buradan

$$Q_m\left(Su,Su^*\right) = Q_m\left(u,u^*\right) > 0$$

ve

$$0 = \frac{1}{2}Q_m\left(u,Su\right) \leq Q_m\left(u,u^*\right)$$

olmalıdır. S dönüşümü genelleştirilmiş Suzuki simülasyon daralma dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} C_G &\leq \zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(Su,Su^*\right)\right),\varphi\left(\Sigma\left(P\left(u,u^*\right)\right)\right)\right) \\ &= \zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(u,u^*\right)\right),\varphi\left(\Sigma\left(P\left(u,u^*\right)\right)\right)\right) \\ &< G\left(\varphi\left(\Sigma\left(P\left(u,u^*\right)\right)\right),\Sigma\left(Q_m\left(u,u^*\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

olur. Tanım 1.3.34' den

$$\Sigma\left(Q_m\left(u,u^*\right)\right) < \varphi\left(\Sigma\left(P\left(u,u^*\right)\right)\right), \tag{4.30}$$

$$P\left(u,u^*\right) = \text{maks}\left\{Q_m\left(u,u^*\right),Q_m\left(u,Su\right),Q_m\left(u^*,Su^*\right)\right\} = Q_m\left(u,u^*\right) \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.29)-(4.31) ifadelerinden

$$\Sigma\left(Q_m\left(u,u^*\right)\right)<\varphi\left(\Sigma\left(Q_m\left(u,u^*\right)\right)\right)<\Sigma\left(Q_m\left(u,u^*\right)\right),$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $u\in M_Q$ noktası S dönüşümünün M_Q uzayında tek sabit noktasıdır.

Aşağıda Teorem 4.2.2'den elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

Sonuç 4.2.3. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam uzay ve ve $S:M_Q\to M_Q$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\jmath,\ell\in M_Q$ için

$$\frac{1}{2}Q_m\left(\jmath,S\jmath\right)\leq Q_m\left(\jmath,\ell\right)\quad\Rightarrow\quad\zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(S\jmath,S\ell\right)\right),\varphi\left(\Sigma\left(Q_m\left(\jmath,\ell\right)\right)\right)\right)\geq C_G$$

ifadesini sağlayan $\Sigma\in\tilde{\Theta}$, $\varphi\in\Phi$ ve $\zeta\in Z_G$ fonksiyonları varsa S dönüşümü M_Q uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teroem 4.2.2'de $P\left(\jmath,\ell\right)=Q_m\left(\jmath,\ell\right)$ alınırsa sonuç elde edilir.

Suzuki şartı kaldırılırsa aşağıdaki istenen elde edilir.

Sonuç 4.2.4. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam uzay ve $S:M_Q\to M_Q$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\jmath,\ell\in M_Q$ için $P\left(\jmath,\ell\right)=\text{maks}\left\{Q_m\left(\jmath,\ell\right),Q_m\left(\jmath,S\jmath\right),Q_m\left(\ell,S\ell\right)\right\}$ iken

$$\zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(S\jmath,S\ell\right)\right),\varphi\left(\Sigma\left(P\left(\jmath,\ell\right)\right)\right)\right)\geq C_G,$$

olan $\Sigma \in \tilde{\Theta}$, $\varphi \in \Phi$ ve $\zeta \in Z_G$ fonksiyonları varsa S dönüşümü M_Q uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.2.5. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam uzay ve $S: M_Q \to M_Q$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\jmath, \ell \in M_Q$ için $P(\jmath,\ell) = \text{maks}\{Q_m(\jmath,\ell), Q_m(\jmath,S\jmath), Q_m(\ell,S\ell)\}$ iken

$$\frac{1}{2}Q_m(\jmath,S\jmath) \leq Q_m(\jmath,\ell) \quad \Rightarrow \quad \Sigma\big(Q_m(S\jmath,S\ell)\big) \leq \varphi\big(\Sigma\big(P(\jmath,\ell)\big)\big),$$

olan $\Sigma \in \tilde{\Theta}$ ve $\varphi \in \Phi$ fonksiyonları varsa S dönüşümü M_Q uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.2.2'de $C_G = 0$ ve $\zeta(s,t) = s - t$ olarak alınırsa ispat elde edilir.

Sonuç 4.2.6. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam uzay ve $S: M_Q \to M_Q$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\jmath, \ell \in M_Q$ için

$$\Sigma\big(Q_m(S\jmath,S\ell)\big) \leq \varphi\big(\Sigma\big(P(\jmath,\ell)\big)\big),$$

$$P(\jmath,\ell) = \text{maks}\{Q_m(\jmath,\ell), Q_m(\jmath,S\jmath), Q_m(\ell,S\ell)\}$$

olan $\Sigma \in \tilde{\Theta}$ ve $\varphi \in \Phi$ fonksiyonları varsa S dönüşümü M_Q uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç 4.2.5'de Suzuki şartı kaldırılırsa istenen elde edilir.

Sonuç 4.2.6'da $P(\jmath,\ell) = Q_m(\jmath,\ell)$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.7. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam uzay ve $S: M_Q \to M_Q$ bir dönüşüm olsun. Her $\jmath, \ell \in M_Q$ için

$$\Sigma\left(Q_m\left(V\jmath, V\ell\right)\right) \leq \varphi\left(\Sigma\left(Q_m\left(\jmath, \ell\right)\right)\right)$$

olan $\Sigma \in \tilde{\Theta}$ ve $\varphi \in \Phi$ fonksiyonları varsa S dönüşümü M_Q uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

4.3. Archimedean Olmayan Asimetrik Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisinin Bazı Uygulamaları

Bu kısımda Bölüm 4.1. ve Bölüm 4.2'de elde edilen sonuçların bazı uygulamaları verilmiştir.

4.3.1. Genelleştirilmiş Ulam $-$ Hyers Kararlılık Problemi

Berzdek ve Cieplinski [109] ve Bota ve Petruşel [110] sabit nokta probleminin genelleştirilmiş Ulam $-$ Hyers kararlılık problemine uygulamalarını elde etmişlerdir. Bu kısımda Bölüm 4.1'de elde edilen sabit nokta sonuçlarının genelleştirilmiş Ulam $-$ Hyers kararlılık problemine uygulaması gösterilmiştir.

Tanım 4.3.1.1. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay ve $S: M_Q \to M_Q$ bir dönüşüm olsun. $u \in M_Q$ noktasının sabit nokta denklemi

$$u = S(u) \tag{4.32}$$

olsun. Eğer $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu artan, 0 noktasında sürekli ve $\varphi(0) = 0$ olacak şekilde her $\varepsilon > 0$ ve $v^* \in S_Q$ noktası için $\varepsilon-$çözüme sahipse, yani $Q_m\left(S\left(v^*\right), v^*\right) \leq \varepsilon$ iken $Q_m\left(u^*, v^*\right) \leq \varphi(\varepsilon)$ olan $u^* \in S_Q$ sabit noktası varsa (4.32) problemi genelleştirilmiş Ulam $-$ Hyers kararlıdır denir.

Teorem 4.3.1.2. M_Q Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$ Symth tam uzay olsun. $S: M_Q \to M_Q$ dönüşümü aşağıdakileri sağlasın.

a. S döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür,

b. $\alpha(\xi_0)\geq 1$ ve $\beta(\xi_0)\geq 1$ olan $\xi_0 \in M_Q$ vardır,

c. her $p\in\mathbb{N}$ için $\xi_p \to \xi$ ve $\alpha(\xi_p)\geq 1$ olan $\{\xi_p\}$ dizisi var ise $\alpha(\xi)\geq 1$ dir,

d. $\xi,\eta \in M_Q$ için $\alpha(\xi)\beta(\eta)\geq 1 \Rightarrow Q_m(S\xi,S\eta)\leq \psi(Q_m(\xi,\eta))$
olan $\psi\in\Psi$ vardır,

e. $\varphi(t):=t-\psi(t)$ ile tanımlı $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu kesin olarak artandır.

Bu durumda $u^*\in S_Q$ $\varepsilon-$çözümü için $\alpha(u^*)\geq 1$ ve $\beta(u^*)\geq 1$ ise (4.32) sabit nokta problemi genelleştirilmiş Ulam – Hyers kararlıdır.

İspat: Sonuç 4.1.5'den $S(\xi^*)=\xi^*$ dir. $\varepsilon>0$ için $\eta^*\in M_Q$ noktası bir $\varepsilon-$çözüm olsun. Dolayısıyla $Q_m(S(\eta^*),\eta^*)\leq\varepsilon$ dur. $\xi^*,\eta^*\in M_Q$ noktaları birer $\varepsilon-$çözüm olduğundan $\alpha(\xi^*)\geq 1$ ve $\beta(\eta^*)\geq 1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
Q_m(\xi^*,\eta^*) &= Q_m(S\xi^*,\eta^*)\\
&= Q_{\text{maks}\{m,m\}}(S\xi^*,\eta^*)\\
&\leq Q_m(S\xi^*,S\eta^*)+Q_m(S\eta^*,\eta^*)\\
&\leq \psi(Q_m(\xi^*,\eta^*))+\varepsilon
\end{aligned}$$

dur ve $Q_m(\xi^*,\eta^*)-\psi(Q_m(\xi^*,\eta^*))\leq\varepsilon$ bulunur. $\varphi(t):=t-\psi(t)$ olduğundan

$$\varphi(Q_m(\xi^*,\eta^*))=Q_m(\xi^*,\eta^*)-\psi(Q_m(\xi^*,\eta^*))$$

dir. Sonuç olarak $Q_m\left(\xi^*,\eta^*\right)\le \varphi^{-1}(\varepsilon)$ bulunur. Burada $\varphi^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu artan, 0 noktasında sürekli ve $\varphi^{-1}(0)=0$ dır. Dolayısıyla (4.32) sabit nokta problemi genelleştirilmiş Ulam – Hyers kararlıdır.

4.3.2. Genelleştirilmiş Suzuki-Simülasyon Daralma Dönüşümlerinin Graf Teorisine Uygulaması

Bu kısımda $M_S=\left\{\jmath\in M_Q:(\jmath,\hbar\jmath)\in E(H)\right\}$ ile tanımlanan küme kullanılmıştır.

Tanım 4.3.2.1. M_Q H grafı ile donatılmış Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay olsun.

a. H grafının doğrularını korur,

b. her $\jmath,\ell\in E(H)$ ve her $m>0$ için

$P(\jmath,\ell)=\text{maks}\left\{Q_m(\jmath,\ell),Q_m(\jmath,S\jmath),Q_m(\ell,S\ell)\right\}$

ve $\frac{1}{2}Q_m(\jmath,S\jmath)\le Q_m(\jmath,\ell)$ iken

$$\zeta\Big(\Sigma\big(Q_m(S\jmath,S\ell)\big),\varphi\big(\Sigma\big(P(\jmath,\ell)\big)\big)\Big)\ge C_G,$$

olan $\Sigma\in\tilde{\Theta}$, $\varphi\in\Phi$ ve $\zeta\in Z_G$ fonksiyonları vardır,

özelliklerini sağlayan $S:M_Q\to M_Q$ dönüşümüne genelleştirilmiş Suzuki simülasyon $H-$tipi daralma dönüşümü denir.

Lemma 4.3.2.2. M_Q H grafıyla donatılmış Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay ve $S:M_Q\to M_Q$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda S dönüşümü hem genelleştirilmiş Suzuki simülasyon $H^{-1}-$tipi daralma dönüşümü hem de genelleştirilmiş Suzuki simülasyon $\tilde{H}-$tipi daralma dönüşümüdür.

Teorem 4.3.2.3. M_Q H grafıyla donatılmış Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzayı $Q-$Symth tam uzay olsun. $S:M_Q \to M_Q$ dönüşümü

a. $\jmath_0 \in M_S$ noktası vardır,

b. S dönüşümü genelleştirilmiş Suzuki simülasyon $\tilde{H}-$tipi daralma dönüşümüdür,

c. H grafı zayıf bağlantılıdır,

d. $\lim_{k\to\infty} Q_m^{\ E}\left(\jmath_k, u\right)=0$ ve $\left(\jmath_k, \jmath_{k+1}\right) \in E\left(H\right)$ özelliklerini sağlayan $\left\{\jmath_k\right\}$ dizisi var ise $\left(\jmath_{k_n}, u\right) \in E\left(H\right)$ olan $\left\{\jmath_{k_n}\right\}$ alt dizisi vardır,

şartlarını sağlasın. Bu durumda S dönüşümü M_Q uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\left\{\jmath_k\right\}$ dizisi $\jmath_{k+1} = S\jmath_k$ olarak tanımlansın. $\jmath_0$ noktası M_S kümesinin bir elemanı olsun. Bu durumda $\left(\jmath_0, S\jmath_0\right)=\left(\jmath_0, \jmath_1\right) \in E\left(H\right)$ dir. S dönüşümü H grafının doğrularını koruduğundan

$$\left(\jmath_0, \jmath_1\right) \in E\left(H\right) \quad \Rightarrow \quad \left(S\jmath_0, S\jmath_1\right) \in E\left(H\right)$$

olmalıdır. Benzer şekilde devam edilirse $\left(\jmath_k, \jmath_{k+1}\right) \in E\left(H\right)$ elde edilir. Böylece Teorem 4.2.2'den $\left\{\jmath_k\right\}$ dizisi soldan $Q-K-$Cauchy dizisidir. M_Q uzayı $Q-$Smyth tam olduğundan $u \in M_Q$ noktası vardır öyle ki $\lim_{k\to\infty} Q_m^E\left(\jmath_k, u\right)=0$ dır. Dolayısıyla

$$\lim_{k\to\infty} Q_m\left(\jmath_k, u\right)=0$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} Q_m\left(u, \jmath_k\right)=0$$

olur. $u \in M_S$ noktasının S dönüşümünün sabit noktası olduğunun gösterilmesi için

$$\frac{1}{2} Q_m\left(\jmath_{k_n}, S\jmath_{k_n}\right) \leq Q_m\left(\jmath_{k_n}, u\right) \tag{4.33}$$

olsun.

$$\frac{1}{2} Q_m\left(\jmath_{k_n}, \hbar\jmath_{k_n}\right) > Q_m\left(\jmath_{k_n}, u\right) = \frac{1}{2} Q_m\left(\jmath_{k_n}, \jmath_{k_n+1}\right) > Q_m\left(\jmath_{k_n}, u\right) \tag{4.34}$$

ve bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limit alınırsa $0 > 0$ çelişkisi oluşur. S genelleştirilmiş Suzuki simülasyon $\tilde{H}-$tipi daralma dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} C_G &\leq \zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(S\jmath_{k_n}, Su\right)\right), \varphi\left(\Sigma\left(P\left(\jmath_{k_n}, u\right)\right)\right)\right) \\ &\leq \zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(S\jmath_{k_n}, Su\right)\right), \varphi\left(\Sigma\left(P\left(\jmath_{k_n}, u\right)\right)\right)\right) \\ &\leq G\left(\varphi\left(\Sigma\left(P\left(\jmath_{k_n}, u\right)\right)\right), \Sigma\left(Q_m\left(S\jmath_{k_n}, Su\right)\right)\right), \end{aligned} \tag{4.35}$$

dır. Tanım 1.3.34'den

$$\Sigma\left(Q_m\left(S\jmath_{k_n}, Su\right)\right) < \varphi\left(\Sigma\left(P\left(\jmath_{k_n}, u\right)\right)\right), \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} P\left(\jmath_{k_n}, u\right) &= \text{maks}\left\{Q_m\left(\jmath_{k_n}, u\right), Q_m\left(\jmath_{k_n}, S\jmath_{k_n}\right), Q_m\left(u, Su\right)\right\} \\ &= \text{maks}\left\{Q_m\left(\jmath_{k_n}, u\right), Q_m\left(\jmath_{k_n}, \jmath_{k_n+1}\right), Q_m\left(u, Su\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur. (4.35)-(4.37) eşitsizliklerinde $n \to \infty$ iken limit alınırsa
$\Sigma\left(Q_m\left(u, Su\right)\right) < \varphi\left(\Sigma\left(Q_m\left(u, Su\right)\right)\right) < \Sigma\left(Q_m\left(u, Su\right)\right)$

olur. Buradan

$$\Sigma\left(Q_m\left(u,Su\right)\right)<\Sigma\left(Q_m\left(u,Su\right)\right)$$

çelişkisi ortaya çıkar. Böylece $Q_m\left(u,Su\right)=0$ dır. Dolayısıyla Q regüler olduğundan $u=Su$ olarak bulunur. $u\in M_S$ noktasının dönüşümün tek sabit noktası olduğunun gösterilmesi için $u^*\in M_S$ noktası diğer bir sabit nokta olarak seçilsin. Dolayısıyla $u\neq u^*$ ve $u^*=Su^*$ olsun. Bu durumda $\sigma\in M_Q$ noktası vardır öyle ki $(u,\sigma)\in E\left(H\right)$ ve $(\sigma,u^*)\in E\left(H\right)$ dir. (c) şartından dolayı $\left(u,u^*\right)\in E\left(\tilde{H}\right)$ dir. Ayrıca

$$0=\frac{1}{2}Q_m\left(u,Su\right)<Q_m\left(u,u^*\right)$$

dır. S genelleştirilmiş Suzuki simülasyon $\tilde{H}-$tipi daralma dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned}C_G&\leq\zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(Su,Su^*\right)\right),\varphi\left(\Sigma\left(P\left(u,u^*\right)\right)\right)\right)\\&\leq\zeta\left(\Sigma\left(Q_m\left(u,u^*\right)\right),\varphi\left(\Sigma\left(P\left(u,u^*\right)\right)\right)\right)\\&\leq G\left(\varphi\left(\Sigma\left(P\left(u,u^*\right)\right)\right),\Sigma\left(Q_m\left(Su,Su^*\right)\right)\right)\end{aligned}\tag{4.38}$$

bulunur. Tanım 1.3.34'den

$$\Sigma\left(Q_m\left(u,u^*\right)\right)<\varphi\left(\Sigma\left(P\left(u,u^*\right)\right)\right)\tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}P\left(u,u^*\right)&=\text{maks}\left\{Q_m\left(u,u^*\right),Q_m\left(u,Su\right),Q_m\left(u^*,Su^*\right)\right\}\\&=\text{maks}\left\{Q_m\left(u,u^*\right),0\right\}=Q_m\left(u,u^*\right)\end{aligned}\tag{4.40}$$

olur. (4.38)-(4.40) ifadelerinden

$$\Sigma\Big(Q_m\big(u,u^*\big)\Big) < \varphi\Big(\Sigma\Big(Q_m\big(u,u^*\big)\Big)\Big) < \Sigma\Big(Q_m\big(u,u^*\big)\Big) \tag{4.41}$$

çelişkisi bulunur. Buradan $u = u^*$ olmalıdır.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında Archimedean olmayan modüler metrik uzaylar ve Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzaylar olmak üzere iki farklı uzay üzerinde çalışılmıştır.

Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda $\alpha-$kapalı daralma dönüşümleri tanımlanmış ve sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Bu teoremlerin Ulam $-$ Hyers kararlılık problemine, iyi konumlanmışlık problemine ve integral denklemlere uygulaması gösterilmiştir.

Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda Suzuki-Berinde dönüşümü inşa edilmiştir. Bu dönüşüm yardımıyla ortak sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Ortak sabit nokta teoremleri ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çifti ile simülasyon fonksiyonu birleştirilerek genelleştirilmiş $(\alpha,\beta)-$simülasyon daralma dönüşümü tanımlanmıştır. Bu daralma dönüşümünü sağlayan iki farklı dönüşüm için ortak sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Archimedean olmayan modüler metrik uzayda simetri özelliği ihmal edilerek non-Archimedean asimetrik modüler metrik uzay kavramı tanımlanmış ve topolojik özellikleri çalışılmıştır. Bu uzayda rasyonel ifade içeren $(\alpha,\beta)_{\psi}-$daralma dönüşümü tanımlanarak ilgili sabit nokta teoremleri ispat edilmiştir. Bu teoremlerin genelleştirilmiş Ulam $-$ Hyers kararlılık problemine uygulaması verilmiştir.

Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzaylarda Suzuki daralma dönüşümü ve simülasyon fonksiyonu birlikte düşünülerek genelleştirilmiş Suzuki – simülasyon daralma dönüşümü ifade edilmiştir. Genelleştirilmiş Suzuki – simülasyon daralma dönüşümünü sağlayan sabit nokta teoremleri ve çeşitli sonuçlar bulunmuştur. Bulunan bu sonuçların graf teorisine uygulaması verilmiştir.

Sonuç olarak, bu tezde elde edilen bulgular sabit nokta teorisi alanında çalışmalar yapan araştırmacılara farklı bir bakış açısı kazandırmayı hedefleyerek araştırmacıların önerilerine sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Gopal, D., Kumam, P., Abbas, M., Background and recent developments of metric fixed point theory, Taylor Francis, 2018.

[2] Agarwal, R. P., Meehan, M., O'Regan, D., Fixed point theory and applications, Cambridge University Press, Cambridge, 6-110, 2011.

[3] Badii, M., Existence of periodic solutions for the thermistor problem with the Joule-Thomson effect, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat., 54, 1-10, 2001.

[4] Border, K.C., Fixed point theorems with applications to economics and game theory, Cambridge University Press, New York, 81-122, 1985.

[5] Cataldo, A., Lee, E. A., Liu, X., Matsikoudis, E. D., Zheng, H., A constructive fixed point theorem and the feedback semantics of timed systems, Technical Report UCB/EECS-2006-4, EECS Dept., University of California, 1-8, 2006.

[6] Edelstein, M., On fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc., 37, 74-79, 1962.

[7] Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Verlag, 2007.

[8] Guo, D., Lakshmikantham, V., Coupled fixed points of nonlinear operators with applications. Nonlinear Anal., 11, 623-632, 1987.

[9] Hyvärinen, A., Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis, IEEE Trans. Neural Netw., 10(3), 626-634, 1999.

[10] Goebel, K., Kirk, W.A., Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[11] Kirk W.A., Sims, B., Handbook of metric fixed point theory, Springer Science Business Media B.V., Dordrecht, 2001.

[12] Khamsi M.A., Kirk, W.A., An introduction to metric spaces and fixed point theory, John Wiley, New York, 2001.

[13] Rus, I.A., Generalized contractions and applications, Cluj Univ.Press, Cluj-Napoca, 2001.

[14] Agarwal, R.P., O'Regan, D., Sahu, D.R., Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, Fixed Point Theory Appl., 6, Springer, New York, 2009.

[15] Dugundji J., Granas, A., Fixed Point Theory, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1982.

[16] Cauchy, A.L., Lecons de calcul differentiel et de calcul intgral, Mallet Bachelier, Paris 1884.

[17] Picard, E., Memoire sur latheoriedes equations aux derivees partiel les etla methode des approximations successives, J. Math. Pures et Appl., 6, 145–210, 1890.

[18] Liouville, J., Second memoire sur le developpement des fonctions ou parties de fonctions en series dont divers termes sont assujettis a satisfaire a une meme equation diffrentielle du second ordre contenant un parametre variable, J. Math. Pureset Appl. 2, 16–35, 1837.

[19] Lipschitz, R., Lehrbuch der analysis, Bonn, M. Cohen & sohn (F. Cohen), 1877.

[20] Brouwer, L.E.J., Über ein eindentiege stetige transformationen von flachen in sich, Math. Ann., 69, 176-180, 1910.

[21] Schauder, J., Der fixpunktsatz in funktionenraumen, Studia Math., 2, 171-182, 1930.

[22] Banach, S., Sur les operations dans les emsembles abstraits et leurs applications aux equations integrals, Fund. Math., 1, 133-181, 1922.

[23] Kannan, R., Some reults on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 60, 71-76, 1968.

[24] Chatterjea, S.K., Fixed point theorems, Compts. Rend. Acad. Bulgare Sc., 25, 727-730, 1972.

[25] Hardy, G.E., Rogers, T.D., A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull., 16, 201-206, 1973.

[26] Ciric, L.B., A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273, 1974.

[27] Boyd, D. W., Wong, J.S.W., On nonlinear contractions, Proc. of the Amer. Math. Soc., 20, 458-464, 1969.

[28] Meir, A., Keeler, E., A theorem on contraction mappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 28, 326–329, 1969.

[29] Berinde, V., On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, Carpathian J. Math., 19(1) ,722-732, 2003.

[30] Rhoades, B.E., A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226, 257-290, 1977.

[31] Samet, B., Vetro, C., Vetro, P., Fixed point theorems for $\alpha-\psi-$contractive type mappings, Nonlinear Anal., 75, 2154-2165, 2012.

[32] Nadler, S.B., Multi-valued contraction mappings, Pac. J. Math., 30, 475-488, 1969.

[33] Knaster, B., Un théorème sur les fonctions d'ensembles, Ann. Soc. Polon. Math., 6, 133–134, 1928.

[34] Tarski, A., A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, Pac. J. Math., 5(2), 285–309, 1955.

[35] Jachymski, J., The contraction principle for mappings on a metric space with a graph., Proc. Am. Math. Soc., 136, 1359-1373, 2008.

[36] Öztürk, M., Abbas, M., Girgin, E., Fixed points of mappings satisfying contractive condition of integral type in modular spaces endowed with a graph, Fixed Point Theory Appl., 2014, 220, 2014.

[37] Öztürk, M., Abbas, M., Girgin, E., Common fixed point results of a pair generalized $(\psi,\varphi)-$contraction mappings in modular spaces., Fixed Point Theory Appl., 2016, 19, 2016.

[38] Jleli, M., Samet, B., A new generalization of the Banach contraction principle, J. Inequal. Appl., 2014(38), 2014.

[39] Khojasteh, F., Shukla, S., Radenovic, S., A new approach to the study of fixed point theorems via simulation functions, Filomat, 29, 1189-1194, 2015.

[40] Chistyakov, V. V., Modular metric spaces, I: basic concepts, Nonlinear Anal., 72, 1-14, 2010.

[41] Chistyakov, V.V., Modular metric spaces, II: Application to superposition operators, Nonlinear Anal., 72, 15-30, 2010.

[42] Chistyakov, V.V., Metric Modular Spaces Theory and Applications, Springer, 2015.

[43] Jain, P.K., Metric Spaces, Narosa Publishing House, New Delhi, 2009.

[44] Maddox, I.J., Elements of Functıonal Analysis, Cambridge University Press, 1970.

[45] Kreyzig, E., Introductory functional analysis with applications, Jhon Wiley & Sons, New York, 1978.

[46] Babu, G.V.R., Sandhya, M.L., Kameswari, M.V.R., A note on a fixed point theorem of Berinde weak contractions, Carpathian J. Math., 24(1), 8-12, 2008.

[47] Suzuki, T., A new type of fixed point theorem in metric spaces, Nonlinear analysis., 71, 5313-5317, 2009.

[48] Jungck, G., Rhoades, B.E., Fixed point for set valued functions without continuity, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 29(3), 277-288, 1998.

[49] Ciric, L., Abbas, M., Saadati, R., Hussain, N., Common fixed point of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces, Appl., Math., Comput., 217, 5784-5789, 2011.

[50] Alizadeh, S., Moradlou, F., Salimi, P., Some Fixed Point Results for $(\alpha,\beta)-(\psi,\phi)-$Contractive Mappings, Filomat, 28(3), 635-647, 2014.

[51] Karapınar, E., Kumam, P., Salimi, P., On a $\alpha-\psi-$Meir-Keeler contractive mappings, Fixed Point Theory Appl., 2013(94), 2013.

[52] Aydi, H., $\alpha-$implicit contractive pair of mappings on quasi $b-$metric spaces and application to integral equations, Journal of Nonlinear Convex Analysis, 17(12), 2417-2433, 2017.

[53] Phiangsungnoen, S., Sintunavarat, W., Kumam, P., Fixed point results generalized Ulam-Hyers stability and well-posedness via $\alpha-$admissible mappings in $b-$metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2014, 188, 2014.

[54] Kutbi, M.A., Sintunavarat, W., Ulam-Hyers stability and well-posedness of fixed point problems for $\alpha-\lambda-$contraction mapping in metric spaces, Abstract and Applied Analysis, 2014, Article ID 268230.

[55] Sintunavarat, W., Genaralized Ulam-Hyers stability, well-posedness, and limit shadowing property of fixed point problems for $\alpha-\beta-$contraction mapping in metric spaces, The Scientific World Journal, 2014, Article ID 569174.

[56] Cho, S. H., Bae, J.S., Fixed points of weak $\alpha-$contraction type maps, Fixed Point Theory and Appl., 2014(175), 2014.

[57] Latif, A., Isik, H., Ansari, A.H., Fixed points and functional equation problems via cyclic admissible generalized contractive type mappings, J. Nonlinear Sci. Appl., 9, 1129-1142, 2016.

[58] Popa, V., Fixed point theorems for implicit contractive mappings, Stud. Cerc. St. Ser. Mat. Univ. Bacau, 7, 129-133, 1997.

[59] Ansari, A.H., Note on $\varphi-\psi-$contractive type mappings and related fixed point, The 2nd Regional Conference on Math. Appl., 377-380, 2014.

[60] Radenovic, S., Chandok, S., Simulation type functions and coincidence point results, Filomat, 32(1), 141-147, 2018.

[61] Gopal, D., Kumam, P., Budhia, L., A new fixed point theorem under Suzuki type $Z-$contraction mapping, Journal of Mathematical Analysis, 8(1), 113-119, 2017.

[62] Zheng, D.W., Cai, Z.Y., Wang, P., New fixed point theorems for $\alpha-\psi-$contraction in complete metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl., 10, 2662-2670, 2017.

[63] Johnsonbaugh, R., Discrete mathematics, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1997.

[64] Abbas, M., Nazir, T., Common fixed point of a power graphic contraction pair in partial metric spaces endowed with a graph, Fixed Point Theory Appl., (2013), 2013.

[65] Öztürk, M., Girgin, E., On some fixed-point theorems for $\psi-$contraction on metric space involving a graph, J. Inequal. Appl., 2014, doi:10.1186/1029-242X-2014-39.

[66] Samreen, M, Kamran, T., Fixed point theorems for integral $G-$contractions, Fixed Point Theory Appl., (2013), 2013.

[67] Wilson, W., A., On quasi-metric spaces, American J. Math., 53, 675-84, 1931.

[68] Kunzi, H.P.A., Nonsymmetric distances and their associated topologies:About the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology, Handbook of the History of General Topology, Kluwer, 3, 853-968.

[69] Cobzas, S., Functional analysis in asymmetric normed spaces, Springer, 2013.

[70] Reilly, I.L., Subrahmanyam, P.V., Vamanamurthy, M.K., Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces, Monatshefte Math., 93, 127-140, 1982.

[71] Altun, I., 0lgun, M. ,Mınak, G., Classification of completeness of quasi metric space and some new fixed point results, Nonlinear Funct. Anal. Appl., 22, 371–384, 2017.

[72] Nakano, H., Modulared semi – ordered linear spaces, Tokyo Math. Book Ser., 1, 1950.

[73] Musielak, T, Orlicz, W., On modular spaces, Stud. Math. 18, 49-65, 1959.

[74] Mazur, S., Orlicz, W., On some classes of linear spaces, Stud. Math., 17, 97-119, 1958.

[75] Khamski, M.A., Kozlowski, W., Fixed point theory in modular function space, Nonlinear Analysis, 14:11, 935-953, 1990.

[76] Benavides, T.D., Khamsi, M.A., Samadi, S., Asymptotically non-expansive mappings in modular function spaces, J. Math. Anal. Appl., 265, 249-263, 2002.

[77] Benavides, T.D., Khamsi, M.A., Samadi, S., Asymptotically regular mappings in modular function spaces, Sci. Math. Jpn., 53, 295-304, 2001.

[78] Benavides, T.D., Khamsi, M.A., Samadi, S., Uniformly lipschitzian mappings in modular function spaces, Nonlinear Anal., 46, 267-278, 2001.

[79] Khamsi, M.A., A convexity property in modular function spaces, Math. Japan. 44, 269-279, 1996.

[80] Razani, A., Nabizadeh, E., Mohamadi, M.B., Homaeipour, S., Fixed points of nonlinear and asymptotic contractions in modular space, Abstract and Applied Analysis, 2007, Article ID:40575.

[81] Razani, A., Moradi, R., Common fixed point theorems of integral type in modular space, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 35(2), 11-24, 2009.

[82] Mongkolkeha, C., Kumam, P., Fixed point and common fixed point theorems for generalized weak contraction mappings of integral type in modular spaces, Int. J. Math. Sci., 2011, Article ID 705943.

[83] Beygmohammadi, M., Razani, A., Two fixed-point theorems for mappings satisfying a general contractive condition of integral type in the modular space, Int. J. Math. Sci., 2010, Article ID 317107.

[84] Liu, Z, Li, X, Kang, S.M., Cho, S.Y., Fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral type and applications, Fixed Point Theory Appl. 2011, Article ID 64.

[85] Mongkolkeha, C, Kumam, P: Some fixed point results for generalized weak contraction mappings in modular spaces, Int. J. Anal. 2013, Article ID 247378.

[86] Koshi, S., Shimogaki, T., On F −norms of quasi-modular spaces, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I., 15(3-4), 202-218, 1961.

[87] Paknazar, M., De la Sen, M., Best proximity point results in non-Archimedean modular metric spaces, Mathematics, 5, 23, 2017.

[88] Mongkolkeha, C., Sintunavarat, W., Kumam, P., Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces, Fixed Point Theory Appl., (2011), 93, 2011.

[89] Alfuraidan, M.R., The contraction principle for mappings on a modular metric space with a graph, Fixed Point Theory and Applications, 2015(46), 2015.

[90] Abdou, A.N., Some fixed point theorems in modular metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl., 9, 4381-4387, 2016.

[91] Kassab, W., Common fixed point results on non-Archimedean metric modular spaces, Symmetry, 11(11), 1355, 2019.

[92] Aksoy, Ü., Karapınar, E., Erhan, İ., Fixed point theorems in complete modular metric spaces and an applications to anti-periodic boundry value problems, Filomat, 31:17, 5475-5488, 2017.

[93] Aksoy, Ü., Karapınar, E., Erhan, İ., Rakocevic, V., Meir-Keeler type contractions on modular metric spaces, Filomat, 32:10, 3697-3707, 2018.

[94] Girgin, E., Öztürk, M., $\alpha_{\kappa}-$implicit contraction in non-AMMS with some applications, Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 1(2), 212-219, 2018.

[95] Girgin, E., Öztürk, M., Fixed point results of generalized $\alpha-(\psi,\phi)-Z_G-$ contractive mappings on non-Archimedean modular metric spaces, Res. Fixed Point Theory Appl., 2020, Article ID 2018019.

[96] Girgin, E., Öztürk, M., $(\alpha,\beta)-\psi-$contraction in non-Archimedean quasi modular metric spaces and applications, Journal of Mathematical Analysis, 10(1), 19-30, 2019.

[97] Ulam, S.M., Problems in modern mathematics, John Wiley & Sons, 1964.

[98] Hyers, D.H., On the stability of the linear functional equation, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 27, 222-224, 1941.

[99] Bota, M.F., Petruşel, A., Ulam – Hyers stability for operatiorial equations, Analele Stiintifice ale Universitati, 57(1), 65-74, 2011.

[100] Lazar, V.L., Ulam-Hyers stability for partial differential inclusions, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 21, 1-19, 2012.

[101] Reich, S., Zaslavski, A.J., Well-posedness of fixed point problems, Far East J. Math. Sci., 2001, 393-401.

[102] Akkouchi, M., Well posedness of the fixed point problem for certain asymptotically regular mappings, Annalas Mathematicae Silesianae, 23, 2009, 43-52.

[103] Akkouchi, M., Popa, V., Well posedness of the fixed point problem for mapings satisfying an implicit relations, Demonstratio Math., 43(4), 2010, 923-929.

[104] Popa, V., Well posedness of the fixed point problem in compact metric space, Bull. Univ. Petrol-Gaze, Ploicsti, sec. Math Inform. Fiz., 60(1), 1-4, 2008.

[105] Nazam, M., Muhammad, A., On a fixed point theorems with application to integral equations, International Journal of Analysis, 2016, Article ID 9843207.

[106] Eke, K.S., Akewe, H., Bishop, S.A., On random fixed point theorems with applications to integral equations, Heliyon, (5), 2019, Article ID e01641.

[107] Debnath, P., Srivastava, H.M., New extensions of Kannan's and Reich's fixed point theorems for multivalued maps using Wardowski's technique with application to integral equations, Symmetry, 12,1090, 2020.

[108] Girgin, E., Öztürk, M., Modified Suzuki – simulation type contractive mapping in non-Archimedean quasi modular metric spaces and applications, Mathematics, 7(9), 769, 2019.

[109] Brzdek, J., Cieplinski, K., A fixed point theorem and the Hyers – Ulam stability in non-Archimedean spaces, J. Math. Anal. Appl., 400(1), 68-75, 2013.

[110] Bota, M.F., Petruşel, A., Ulam – Hyers stability for operatorial equations, Analel Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, 57, 65-74, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Ekber Girgin, 16.03.1990'da Bulgaristan'ın Filibe şehrinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Bursa'da tamamladı. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2012 yılında bitirdi. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında başladığı yüksek lisans eğitimini 2014 yılında bitirdi. 2014 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında başladığı doktora eğitimine halen devam etmektedir. Bu süre zarfında çeşitli özel kurumlarda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmıştır.