Trigonometrik Fonksiyon Yaklaşımı ve Bununla İlgili Bir Uygulama

Eyüp Sabri TÜRKER (*)

Ö Z E T

Bu çalışmada, belli bir peryot ile tekrarlayan olayların analizinde kullanılan peryodik regresyon metodu tanıtılmış ve bu metod yardımıyla Trabzon bölgesi için 38 yıla dayanan aylık ortalama yağış miktarları kullanılarak yağışların yıl içindeki değişimlerinin matematiksel modeli incelenmiştir.

S U M M A R Y

In this study, the periodic regression method which is used in the analysis of the events repeating with a known period was introduced, and by means of this method the mathematical model of the changes of rains within a year was investigated using the average monthly rainfalls during 38 years for the region of Trabzon.

I. GİRİŞ

Belli aralıklarda değişmeyip sabit kaldığı varsayılan olaylarda, peryotlar sabit ve bilinen uzunlukta ise Fourier analizi, kullanılan en etkin istatistiksel yöntemlerden biridir. Bu metodun esası verilere Fourier dizisinin çoklu regresyon yöntemiyle uyumunu sağlamaktır.

Geçmişe dayalı bilgilerin kullanılması ve yağış yerlerinin bu gibi çalışmalara esas teşkil etmesi konunun güncelliğini korumasına neden olmaktadır. Öncelikle uzun peryotlarda yapılan incelemelerde sonuçlar güvenilir olmaktadır.

Bu güne kadar yapılan çalışmalarda, çoğunlukla veriler sürekli zaman içinde ele alınıp incelenmiştir. Ne varki; Günlük, haftalık ve aylık dönemlerdeki incelemelerde, yağışsız toplamlar da bulunacağından ya-

(*) S.D.M.M. Akademisi, Matematik Asistanı.

ğış sürecinin kesikli zaman içinde düşünülmesi gerekmektedir. Belirli bir dönem içindeki yağış toplamlarının genel olarak Gamma Dağılımı gösterdiği bilinmektedir.

Yıldırım, Okur ve Öztürk (1981) aylık ve yıllık yağış toplamlarının dağılışları ile ilgili yaptıkları bir çalışmada, Loi des Fuites (LDF) diye bilinen ve Poisson ile Gamma dağılışlarının karışımı olan bir dağılışı kullanmışlardır. Aynı çalışmada, yıllık toplamların gösterdiği dağılışın teorik iki dağılıma uygunlukları için Kolmogorov - Smirnov tek örnek testi yapılmış ve sonuçta, yıllık toplamların Gamma ve LDF dağılışlarına uygunluk gösterdiği anlaşılmıştır. Ayrıca, yağış verilerinin aylık ortalama ve standart sapmalarının yaklaşık sinüzoidal bir eğri çizdiği görülmüştür. Aylık toplamların, yıllık toplamların aksine önemli ölçüde çarpık dağılım gösterdiği anlaşılmıştır.

Bu çalışmada, aylık toplamlar için Normal, Poisson ve Gamma dağılışlarının uygun olup olmadığı, Trabzon bölgesi için kaydedilen 38 yıllık yağış verilerine Kolmogorov - Smirnov tek örnek testi uygulanarak kontrol edilmiş, ancak sonuçta aylık toplamların gösterdiği dağılış ile, teorik dağılışlar arasındaki farklar önemli bulunmuştur. Bu sonuç, aylık toplamların modellemesi yapılırken daha çarpık dağılımların kullanılması gerektiği anlamına gelmektedir.

Çalışmada ayrıca, birçok problemlerin yaklaşık çözümünde kullanılan Fourier serilerinin regresyonuna yer verilmiştir. Zira, yaklaşık olarak 12 aylık peryotta sinüzoidal bir eğri çizen ortalama yağış miktarlarının matematiksel modelini Fourier serileri yardımı ile kurmak birçok bakımdan yarar sağlamaktadır.

II. TRİGONOMETRİK FONKSİYON YAKLAŞIMLARI

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi ile yaklaşık olarak ifade edilebilmesi için istenilen aralıkta,

i) Sürekli olduğu her nokta için fonksiyonun tek değerli olması,
ii) Sonlu olması,
iii) Sürekli veya sadece sonlu sayıda süreksizlikleri olması,
iv) Sonlu sayıda maksimum ve minimum değerleri olması,

şartlarını sağlaması gerekmektedir.

Birçok problemde $f(x)$ fonksiyonunun değeri bilinmeyip bu fonksiyonun sadece n tane eşit aralıklı ayrık noktalardaki değerleri biliniyor olabilir. Bu durumda yaklaşım ayrık Fourier serisi yardımı ile yapılacaktır. Verilerin çift veya tek sayıda olması durumuna göre problem iki ayrı bölümde incelenecektir.

a) 2N tane çift sayıdaki ayrık nokta için $f(x)$ fonksiyonunun değerleri biliniyorsa bu 2N noktayı içine alan $[a, b]$ aralığı uygun dönüşümle $[0,2\pi]$ aralığına dönüştürülebilir.

$$\theta = \frac{(x-a)}{b-a}\, 2\pi \tag{1}$$

şeklinde bir θ değişkeni tanımlanarak,

$$\Delta\,\theta = \frac{\pi}{N} \tag{2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
y_0 &= f(0) \\
y_1 &= f(\Delta\theta) \\
y_2 &= f(2\Delta\theta) \\
&\;\;\vdots \\
y_k &= f(k\Delta\theta) \\
&\;\;\vdots \\
y_{2N-1} &= f[(2N-1)\Delta\theta]
\end{aligned} \tag{3}$$

konularak $f(x)$ fonksiyonu yaklaşık olarak,

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} (a_j \operatorname{Cos} j\theta + b_j \operatorname{Sin} j\theta) \tag{4}$$

şeklinde yazılabilir $(m \leqslant N-1)$.

a_j ve b_j katsayıları,

$$M = \sum_{k=0}^{2N-1} [f(\theta) - y_k]^2 \tag{5}$$

ifadesinin minimum olması şartı kullanılarak,

$$M = \sum_{k=0}^{2N-1} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} (a_j \operatorname{Cos} j\theta + b_j \operatorname{Sin} j\theta) - y_k \right]^2 \tag{6}$$

ifadesinde $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ parametrelerine göre alınacak türevler sıfıra eşitlenip,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2N-1} \operatorname{Sin} r\theta_k \operatorname{Sin} s\theta_k = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ N & r = s \neq 0 \end{cases} \\ &\sum_{k=0}^{2N-1} \operatorname{Sin} r\theta_k \operatorname{Cos} s\theta_k = 0 \\ &\sum_{k=0}^{2N-1} \operatorname{Cos} r\theta_k \operatorname{Cos} s\theta_k = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ N & r = s \neq 0 \\ 2N & r = s = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

ortogonallik şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(\theta_k) \operatorname{Cos} j\theta_k \quad (j = 0, 1, \ldots m) \\ b_j &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(\theta_k) \operatorname{Sin} j\theta_k \quad (j = 1, 2, \ldots m) \end{aligned} \tag{8}$$

olarak elde edilirler. Burada,

$$\theta_k = k\Delta\theta = k\frac{\pi}{N}, \quad (k = 0, 1, \ldots, 2N-1) \tag{9}$$

şeklindedir.

b) Şayet 2N+1 tane tek sayıdaki noktalarda $f(x)$ fonksiyonunun değerleri bilinirse $m \leqslant N$ şartı sağlandığı taktirde benzer yolla,

$$a_j = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=0}^{2N} f(\theta_k) \operatorname{Cos} j\theta_k \quad (j=0,1,\ldots,m)$$

$$b_j = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=0}^{2N} f(\theta_k) \operatorname{Sin} j\theta_k \quad (j=1,2,\ldots,m) \tag{10}$$

katsayıları veren formüller bulunabilir. Burada,

$$\theta_k = k\,\Delta\theta = k\,\frac{2\pi}{2N+1} \tag{11}$$

şeklindedir.

III. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Çalışmada, Trabzon meteoroloji bölge müdürlüğü tarafından tutulan 38 yıllık yağış kayıtlarından yararlanılarak, yağış miktarlarının aylık ortalamalara göre yaklaşık olarak çizdiği eğri Fourier serileri kullanılarak hesaplanmıştır. Yağış verilerinin yıl içerisindeki değişimlerinin incelenmesi için birer aylık dönemlerin seçimi uygun görülmüştür. Aylık toplamların ortalama değerleri Tablo - 1 de verilmiştir.

Tablo 1 — Aylık Toplamların Ortalama Değeri

Aylar	Ortalama yağış miktarı
Ocak	90.5
Şubat	69.6
Mart	59.4
Nisan	54.7
Mayıs	52.5
Haziran	49.0
Temmuz	36.8
Ağustos	45.7
Eylül	81.3
Ekim	105.7
Kasım	98.0
Aralık	79.5

Tablo - 1 deki veriler için istatistikde kullanılan dağılımlardan Normal, Poisson ve Gamma gibi önemli olanların uyumu araştırılmış, ancak uygunluk için kullanılan Kolmogorov - Smirnov tek örnek testinin sonuçları, $\alpha=0.05$ anlamlılık seviyesine göre aylık yağış ortalamalarının bilinen dağılımlara uymadığını ortaya koymuştur.

Normal Dağılım varsayımı altında Kolmogorov - Smirnov tek örnek testine göre $D_{max}=0.9525$ sonucu bulunmuştur. Bu değerin $\alpha=0.05$ anlamlılık seviyesi için verilen kritik değerden daha büyük olduğu görülmüştür.

Aylık toplamlar, yıllık toplamların aksine belirgin biçimde çarpık dağılım gösterdiklerinden dağılım fonksiyonlarını belirlemek oldukça güçtür.

Yağış miktarı (mm olarak yükseklik), günlük miktar saat 7.00'den 7.00'ye kadarki geçen 24 saatlik zaman içinde vuku bulan yağışların toplamı şeklinde düşünülmüştür. Çalışmada Fourier serisine uyum için $m=3$ olarak alınmıştır. Yapılan F testleri sonucunda önemsiz bulunan harmonikler atılmış olup Belirleme Katsayısı (R^2) oldukça yüksek bulunmuştur.

Çalışmada peryot uzunluğu ay sayısına eşitlenerek 12 olarak alınmıştır. Her ay için θ_i değerleri Tablo - 2 de verilmiştir.

Tablo 2 — θ_i değerleri

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
θ_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

Çalışma sonucunda a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 değerleri,

$$a_0=(1/6)\sum_{i=0}^{11} f(\theta_i)=137.1166$$

$$a_1=(1/6)\sum_{i=0}^{11} f(\theta_i)\,\mathrm{Cos}\,\theta_i=18.76866$$

$$a_2=(1/6)\sum_{i=0}^{11} f(\theta_i)\,\mathrm{Cos}\,2\theta_i=9.083$$

$$a_3 = (1/6)\sum_{i=0}^{11} f(\theta_i)\ \mathrm{Cos}\ 3\,\theta_i = 5.016$$

$$b_1 = (1/6)\sum_{i=0}^{11} f(\theta_i)\ \mathrm{Sin}\,\theta_i = -33.0391$$

$$b_2 = (1/6)\sum_{i=0}^{11} f(\theta_i)\ \mathrm{Sin}\ 2\,\theta_i = -3 \cdot 3199$$

$$b_3 = (1/6)\sum_{i=0}^{11} f(\theta_i)\ \mathrm{Sin}\ 3\,\theta_i = 7.4$$

şeklinde bulunduğundan, aranan fonksiyon,

$$f(\theta) = 68.5583 + 18.76866 \cos\theta - 33.0391 \sin\theta + 9.083 \cos 2\theta - 3.31995 \sin 2\theta + 5.016 \cos 3\theta + 7.4 \sin 3\theta$$

olarak elde edilir. $\theta = \dfrac{\pi x}{6}$ ters dönüşümü yapılarak da,

$$f(x) = 68.5583 + 18.76866\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi x}{6}\right) - 33.0391\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 9.083\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 3.31995\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 5.016\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 7.4\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

bulunur. Ortalama yağışın mevsimsel değişimini incelemek ve verilen herhangi bir zamanda ortalama yağış miktarının tahminlenmesi bulunan son formül yardımı ile yapılabilir.

En küçük kareler metodu uygulandığı zaman bulunacak a_k ve b_k katsayılarının sayısı en fazla, verilen ayrık noktaların sayısına eşit olmalıdır. Bu yüzden $m \leqslant 5$ şartı göz önünde bulundurularak 5 harmonik seçilerek Fourier serilerinin uyumu araştırılmıştır. Ancak, yapılan ön çalışmalardan sonra $m=3$ için uygun trigonometrik fonksiyon bulunabileceği ve bulunan regresyon denkleminin varyasyonun büyük kısmını açıklayabileceği görülmüştür. Böylece regresyon denklemine ilave edilecek terimlerin önemli bir katkı sağlamayacağı anlaşılmıştır.

Yağış verilerinin serpiştirme diyagramı çizilecek olursa, bunların yaklaşık sinüzoidal bir eğri çizdiği belirtilmişti. Bu şekilde aylık ortalamaların maksimumu ve minimumu belirlenebilmektedir.

Aylık ortalamaların yıl içindeki değişmeleri mevsimlere dayanan yağış özelliğini ortaya çıkarmakta ve böylece Trabzon ili yağış rejimi belirlenebilmektedir.

REFERANSLAR

1. ARDEN, B. W. ve ASTİL, K. N. (1970) Numerical Algorıthms, Origins and Applications. Addison-Wesley Publishing Company. London.
2. AKTAŞ, Z., ÖNCÜL, H., URAL, S. (1981) Sayısal Çözümleme. Cilt I, O.D.T.Ü.
3. TÜRKER, E. S. Kolmogorov - Smirnov Testi ile Shaphiro - Wilk Testinin Karşılaştırılması üzerine bir Çalışma. Yüksek Lisans Tezi. Ege Üniversitesi. E.H.E.E. 1979. Boonova.
4. PÜSKÜLCÜ, H. (1979) Periyodik Regresyon ve Bunun Zeytin Yapraklarındaki Azotun Mevsimsel Değişimine Uygulanması Üzerine Bir Araştırma. Uygulamalı İstatistik Dergisi, Cilt: 2, Sayı: 1. E.Ü.E.H.B.E. Bornova.
5. YILDIRIM, P., OKUR, M. C., ÖZTÜRK, A. (1981) Aylık ve Yıllık Yağış Toplamlarının Dağılışlarının Belirlenmesi Üzerine Bir Araştırma. Uygulamalı İstatistik Dergisi, Cilt: 4, Sayı: 2, Ege Üniversitesi, E.H.B.E. Bornova.