

Kaymalı Yataklar Üzerinde Yataklanmış Esnek Transmisyon Millerinin Titreşim Analizi ve Simulasyonu

Dr. Faris KAYA (*)

Ö Z E T

Bu çalışmada kaymalı yataklar üzerine oturtulmuş shaftların titreşim analizi için bir metod geliştirilmiştir. Bu metod tabii frekansların bulunmasına mod şekillerinin tesbitine ve ayrıca milin herhangi bir hızdaki deformasyon eğrisinin bulunmasına elvermektedir. Sistemin dinamik analizinde kaymalı yatakların tesiri hızın fonksiyonu olarak hesaplara katılmış olup ayrıca milin deformasyonu sonucu doğan iç sönümleyicinin sistemi kontrol etme kabiliyeti yine hızın fonksiyonu olarak incelenmiştir. Son olarak teorik neticelerle deneysel neticelerin karşılaştırılması yapıldı.

S U M M A R Y

In this work the methodology of vibration analysis of flexible rotor-bearing system is studied and a method is presented. This method is convenient for the calculation of critical speed analysis as well as mode shapes, synchronous and nonsynchronous vibration analysis. The effect of internal damping and journal bearing is included in the vibration equations. Finally the effect of an external damper on the vibration behaviour of the rotor-bearing system is studied and the theoretical results are compared with the experimental ones.

SEMBOLLER

- c : damper katsayısı
 f_{xi}, f_{yi} : X ve Y yönünde kuvvetler
 I_1 : kesit atalet momenti

(*) İ.D.M.M.A. Mak. Fak., Yıldız.

J_i	:	Polar atalet momenti
k	:	yatak yay katsayısı
m_i	:	kütle
M_{xi}, M_{yi}	:	X ve Y yönünde momentler
P	:	dış kuvvet
q_b, q_c	:	yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri
α_i, y_i	:	X ve Y yönünde yerdeğiştirme
r_i	:	eksantrisite
v	:	elastik yerdeğiştirme
θ_{xi}, θ_{yi}	:	açısal yerdeğiştirme (X ve Y yönünde)
\mathcal{K}	:	katılık katsayılar matrisi

1. GİRİŞ

Birçok mühendislik uygulamalarında güç, dönen bir makinadan diğerine millerle iletilir. Meselâ, bir gemide gaz türbininden dişli kutusuna veya bir helikopter kuyruk pervanesine döndürme momentinin iletilmesi yine millerle olur. Senelerdenberi yapılan çalışmalar hep yüksek hızlarda güç iletimini yükseltmek doğrultusunda yapılagelmıştır. Bu durum yukarıda bahsedilen millerin dinamik özelliklerinin daha iyi anlaşılma ihtiyacını doğurmuştur.

Yüksek hızda dönen transmisyon millerinde en fazla korkulan ve milin uzun zaman o hızda dönmesi istenmiyen hız kritik hızlardır. Bu hızlarda çok küçük bir dengelenmemiş kuvvet gayet büyük dinamik çökmeler doğurur ve hatta, eğer kontrol edilmezse bu çökmeler sistemi tahrip edinceye kadar büyüyebilir.

Aynı zamanda bu kritik hızlara bağlı veya bağımsız olarak meydana gelen çoğu kaymalı yatakların tesiri ile stabil olmayan (kararsız) hız bölgeleri yine transmisyon milleri için tehlikelidir.

Bu stabil olmayan hareketlere sebep olarak kaymalı yatak içindeki yağın hareketi veya sistemdeki lineer olmayan bazı özellikleri gösterilebilir.

İşte, zamanla yüksek hızda güç ileten esnek millere duyulan ihtiyaç, bunların kritik hız, stabil olmayan hareket ve lineer olmayan özelliklerini anlamaya araştırmacıları yönlendirdi. Yapılan araştırmaların tabii bir neticesi olarak esnek millerin istenmiyen özelliklerini kontrol konuları yeni yeni araştırma sahaları oldu.

Bu konuda ilk çalışma Holzer'in (1) torsiyon titreşimlerinin incelenmesi ile başlamıştır. Daha sonraları Myklestad (2)'in uçak kanat titreşimlerine tatbik ettiği bu teoriyi Prohl (3), Lund ve Orcutt (4) ve Mc Lean (5) matrislerle ifade etmişlerdir. Şaftların analizinde «Transfer Matrix Methods» Transfer Matris Metod olarak bilinen bu metodun en geniş şekilde esnek rotora tatbiki Dostal (6) tarafından yapılmıştır. Dostal (6) yaptığı çalışmada transfer matris metod ile millerin stabil olmayan hareketlerininin dahi incelenebileceğini göstermiştir.

Bu metodun en avantajlı yönü çok yüksek dereceli sistemlerde bile fazla bilgisayar hafızası ve zamanı işgal etmediği için ekonomik oluşudur. Fakat bu metod sadece zincir tipi sistemler için uygulandığı ve birde sistemin kütle, yay ve damper gibi özelliklerini matrisler halinde ayrı ayrı ifadeye müsait olmadığı için pek kullanışlı değildir.

Diğer bir metotta Newmark (7) ve Turner v.d. (8) tarafından yapı analizine uygulanıp daha sonraları Clough (9) ve Zienkiewicz (10) tarafından geliştirilen «Finite - Element Method» sonlu elemanlar metodudur. Daha sonraki yıllarda bu metodun Ruhl (11) ve Nordmann (12) tarafından güvenilir bir şekilde millerin kritik hız analizleri ile sistemlerin stabil olmayan hız alanlarını tesbit ettiği gösterilmiştir.

Esnek transmisyon millerinin dinamik analizlerinde kullanılan bir üçüncü metotta kökü ta 1880 lere uzanan fakat şaft titreşim sahasında Shen (13) ile Kirk ve Gunter (14) tarafından uygulanan «Influence Coefficient Method», Esneklik Katsayılar Metodudur. Bu metod en komplike bir şekilde esnek millerin analizinde Nikolajsen (15) tarafından diğer birçok esnek rotor özelliklerinin analizini yapabilecek bir komputer programı halinde tatbik edildi.

Bu sahada bir dördüncü metotta «Modal Method», Mod Metodu olup ilk olarak Johnson (16) ile Timoshenko (17) tarafından şaftların dinamik titreşim analizlerine uygulanmıştır. Daha sonra bu metod Parkinson v.d. (18) ile Darlow v.d. (19) tarafından şaftların dengelenmesinde uygulanmıştır.

Bu çalışmada bu dört metodun dışında başka bir metodla kaymalı yataklar üzerinde dönen esnek transmisyon milinin dinamik analizi yapılmıştır. «Stiffness Coefficients Method», Katılık Katsayılar Metodu olarak bilinen bu metod Vernon (20) tarafından ilk defa, millerin titreşim analizlerine tatbik edilmiştir.

Bu metod literatürde ilk defa KAYA (21) ile kaymalı yataklar üze-

rine oturtulmuş dönen bir esnek milin kritik hız analizlerinde ve herhangi bir hızdaki mil sehimi eğrisinin tesbitinde geçerli bir metod olduğu gösterilmiştir. Gerek kritik hızların tesbitinde ve gerekse zorlanmış titreşim halinde mil sehimlerinin bulunmasında kaymalı yatakların en genel şekilde tariflenerek tüm yay ve damper katsayıları hesaba katıldı. Ayrıca milin ilk eğimi ve mil üzerinde herhangi noktalarda dengelenmemiş bir veya birkaç ağırlıkla hıza bağlı kuvvetlerle zorlanmış titreşim elde edildi. Ayrıca milin iç sürtünmesinden doğan dahili damperle mil üzerinde olması muhtemel disk şeklindeki dönen kitlelerin polar atalet momentleride hesaba katıldı.

2. TEORİ

2.1. Koordinat sistemi ve milin parçalara ayrılışı

Genel olarak millerin kaymalı yataklar üzerine oturduğu ve bu yatakların özelliklerinin aynı olmadığı ayrıca damper veya yay gibi herhangi bir dış düzenleyicinin de olduğunu göz önüne alarak biri rotorun yere göre konumunu diğeri de rotorun iki ucuna göre elastik konumunu tesbit eden iki ayrı koordinat sistemi kabul edildi. Koordinatların yarısı x diğeri yarısı da y yönündeki çökme ve sapsmaları göstermektedir. Böylece serbestlik derecesinin 4 misli koordinata ihtiyaç vardır.

Şaft, maksimum devir sayısına bağlı olarak her kritik hız için en az 5 parça olmak üzere, kesit değişimleri de nazara alınarak, parçalara ayrıldı. Her parçanın kütlesi iki eşit parçaya bölünüp parçanın iki ucunda kabul edildi. Böylece parça sayısından bir fazla kadar kütesiz ve fakat elastik mil elemanları ile birbirine bağlı bir sistem elde edildi. 1 den n ye kadar olan kütleler arasında hem yay ve hem de malzemenin iç özelliklerinden doğan, titreşim hızına bağlı lineer sönüm katsayısı, damper, olduğu kabul edildi.

2.2. Düz ve esnek bir rotorun matematik modeli

Genel matematik modelin çıkarılmasında adım adım yol takip edilerek bir önceki bölümde tariflenen rigid kütlelerinden doğan atalet kuvvetleri, yatak ve kontrol elemanı kuvvetleri, dönen kütlelerden doğan momentler ve diğer büyüklüklerin çıkarılması aşağıdaki şekilde yapıldı.

D'Alembert prensibini atalet ve yatak kuvvetlerine uygulayacak olursak :

$$f_{x_i, y_i} = -kv_i - m_i \ddot{v}_i - c\dot{v}_i + m_i r_i w^2 \sin(\omega t + \lambda_i) - U$$

Dönen kütlelerden dolayı doğan momentler M_x , M_y iseler.

$$M_{x_i} = \omega J_i \dot{\theta}_{y_i} - I_i \ddot{\theta}_{x_i}$$

ve benzeri şekilde M_{y_i} de bulunur.

Bu denklemleri birleştirerek aşağıdaki genel titreşim denklemi elde edilir.

p dış kuvvetler vektörü ise

$$p = -\alpha \ddot{V} - \beta \dot{V} - \gamma V - u + f$$

bu genel kuvvet denklemi matrislerden meydana gelmiş olup α kütle ve kesit mukavemet moment matrisini β polar atalet moment ve yatak damper katsayılar matrisini ve γ yatak yay katsayılar matrisini, u ise kontrol kuvveti katsayılar matrisini, f ise tahrik edici kuvvetler matrisini göstermektedir.

Rotordaki elastik sehim ve açısal sapmalar

Yukarıda çıkarılan P dış kuvvetler vektörü rotor üzerinde elastik sapmalar meydana getirir ki bu sapmalar P nin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

Rotorun katılık katsayılar matrisi \mathcal{K} ile gösterilecek olursa yine yatay ve düşey olarak sadece elastik yöndeğiştirmeler nazara alınarak yerdeğiştirme ve dış kuvvetler için aynı harflerin büyüklerini kullanarak kuvvetle elastik yerdeğiştirmeler arasındaki genel bağıntı $p = \mathcal{K}v$ olarak yazılır.

\mathcal{K} bir kare matris olup serbestlik derecesinin 2 katı elemana sahiptir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

A_{ij} : J noktasında birim bir çökme meydana getirmek için i noktasında pozitif yönde gerekli olan kuvvet, diğer tüm noktalardaki çökme ve sapmalar sıfır olmak kaydıyla.

B_{ij} : J noktasında birim bir sapma meydana getirmek için diğer bütün noktalarda çökme ve sapmalar sıfır kalmak şartıyla, i noktasında pozitif yönde gerekli olan kuvvet.

C_{ij} : J noktasında birim bir çökme meydana getirmek için, diğer bütün noktalardaki çökme ve sapmalar sıfır olmak kaydıyla, i noktasında pozitif yönde gerekli olan moment.

D_{ij} : J noktasında birim bir sapma meydana getirmek için, diğer bütün noktalardaki çökme ve sapmalar sıfır olmak kaydıyla, i noktasında pozitif yönde gerekli olan moment.

Eğer x ve y doğrultusundaki yerdeğiştirmeleri V_x ve V_y vektörleri ile gösterilirse

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

Elastik yerdeğiştirmelerin katı gövde hareketiyle birleştirilmesi

Sistemin genel yer değişimini bulmak için elastik yerdeğiştirmelerin rigid yerdeğiştirmeler cinsinden hesaplanması gerekiyor. Bunun için ilk etapta

$$V_1 = V_n = 0 \quad (x \text{ ve } y \text{ doğrultusunda})$$

$$X_j = X_1 + \frac{Z_j}{L} (X_m - X_1) + v_{xj} \quad j = 2, \dots, m-1$$

aynı denklem Y ekseninde yazılır.

Sapmalar ise

$$\theta_{xj} = \theta_{x0} + v_{x(j-m)}$$

ve

$$\theta_{x0} = \frac{X_m - X_1}{L}$$

L : Milin uzunluęu

Z_j : J noktasının 1. noktadan uzaklığı

Böylece sistemin genel denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\underline{M}\ddot{\underline{X}} + \underline{C}\dot{\underline{X}} + \underline{K}\underline{X} + \underline{U} = \underline{P}$$

Burada Φ : dönüştürme matrisi olmak üzere

$$\mathbf{M} = \alpha, \mathbf{C} = \beta, \mathbf{K} = \gamma + \mathcal{K}\Phi, \mathbf{P} = \mathbf{f}$$

İlk sehimin tesiri

Genel olarak hemen hemen bütün millerde azda olsa bir eğrilik vardır. Mil dönmez durumda iken bu ilk sehimin pek tesirinin olmayacağı sanılırsada bilhassa kritik hızlarda, hususan milin dinamik sehimine tesiri çok fazladır. Bu sebeple ilk sehimin sistemin titreşim analizine katılması mutlaka gerekir.

Her kütle merkezinde, açısal durumu da göz önüne alınarak, belirlenen ilk sehim yukarıdaki denklemlerin sağ tarafına eklenerek ana denklemlerin içine ilave edilmiş olur.

Damper :

Her ne kadar malzemelerin iç damper miktarları kati olarak tesbit edilemezse de belli bir miktar iç damper olduğu bilinir. Bu çalışmada şimdiye kadar yapılmış olan çalışmalarında nazara alarak aşağıdaki gibi kompleks bir damper tarifi yapıldı.

Meselâ, damper - yay sistemli bir dereceli hareketin ifadesi olan

$$m\ddot{x} + k(1 + ig)x = Fe^{i\omega t}$$

$x(t)$ açıkça görüldüğü gibi harmoniktir.

ve

$$X = \frac{F}{(-\omega^2 + k + ikg)}$$

Bu ifadenin

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{i\omega t}$$

ifadesindeki

$$X = \frac{F}{(-\omega^2 + k + ic\omega)}$$

ile karşılaştırıldığında

$$c = \frac{gk}{\omega} \text{ olur.}$$

Bizim çalışmamızda bu

$$C_1 = \frac{g\mathcal{K}}{\omega}$$

şeklindedir.

İç damperin esas denkleme katılması aşağıdaki şekilde yapılır.

$$C = C_1 + C_1^1$$

C : Toplam damper katsayılar matrisi (yataklar vs.)

C_1 : İç damper katsayılar matrisi

C_1^1 : Dış damper katsayılar matrisi (yataklar vs.)

Böylece sistemin genel denklemi

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = P \text{ olur.}$$

3. TEORİK NETİCELER VE DENEYLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

Teorik neticeler elde edilen deney neticeleri ile karşılaştırılacağı için deney aletinin bütün boyutları teorik modelde esas alınmıştır. Ayrıca deney esnasında kullanılacak yağın özellikleri hıza bağlı olarak kompüterde kullanılarak, yatak katsayıları deneydekine uygun olarak formüllerde kullanıldı.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = P$$

formülünde

$$U = U_s \sin \omega t + U_c \cos \omega t$$

ve

$$q = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t$$

konularak

$$X = X_s \sin \omega t + X_c \cos \omega t$$

$$Y = Y_s \sin \omega t + Y_c \cos \omega t$$

x ve y doğrultusunda çökme ve dönmeler bulundu.

Kaymalı yataklar üzerine yataklanmış millerin zorlanmaya bağlı olmaksızın sistemin, yatakların yağlama durumuna ve milin malzemesine bağlı olarak, dengesiz durumları araştırıldı.

Şekil 1 de 1. kritik hızın iki misli hız civarında milin orta noktasının ve yataklardaki kısmının yörüngeleri gösterilmiştir. Şekil 2 de aynı noktaların yörüngeleri 1. kritik hızın üç katı bir hızda tesbit edilmiştir. Herhangi bir dış damper, yataklar hariç kullanılmadan elde edilen bu deney neticelerine mukabil şekil 3 de kararsızlık eşik hızının başlangıç değişimi dış damper ve eksantriklik oranına bağlı olarak deneysel ve teorik olarak, gösterilmiştir. Son şekilden görüldüğü gibi dış damper olmadığı hallerde deneysel ve teorik neticeler arasında iyi bir uygunluk olduğu görüldü. Buna karşılık dış damper uygulandığı deneysel ve teorik neticeler arasında oldukça önemli fark görüldü. Bu durumun deneyde kullanılan damperlerle mil arasındaki kuru sürtünmeden doğduğu kabul edildi. Zira kuru sürtünmenin kararsızlığı doğurduğu bilinmektedir. Esnek millerin titreşim analizi için geliştirilen bu metod dönen millerin zorlanmış titreşim analizine tatbikden önce şek. 4 de gösterilen sisteme tatbik edildi. Aynı problem daha evvel Transfer Matris Metodu, Dostal (6) ve Esneklik Katsayılar Metodu, Nikolajsen (14) ile çözülmüş olup neticeler arasında hiçbir fark olmadığı görüldü.

Gerek kritik hız dağılımı ve gerekse damperlenmiş halde neticeler arasında büyük bir uygunluk görüldü.

Bu metod daha sonra esas sisteme tatbik edildi.

Şekil 5 de mil üzerinde meydana gelen, milin ilk sehimi dahil ve ekstra dengelenmemiş kuvvet - damper katsayısına göre maksimum çökmeler hıza bağlı olarak gösterilmiştir. Ayrıca birinci kritik hız civarında teorelinin tatbik edilmiş olduğu deney aletinin deneysel neticeleri de şekil 8 de gösterilmiştir.

Deneyde kullanılan sıkıştırılmış yağ damperinin yüksek hızlarda doğurmuş olduğu damper katsayısı lineer olmadığından teorik neticeler bu hızlar için deneysel neticelerle karşılaştırılmadı.

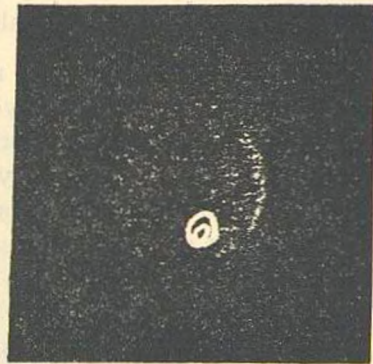
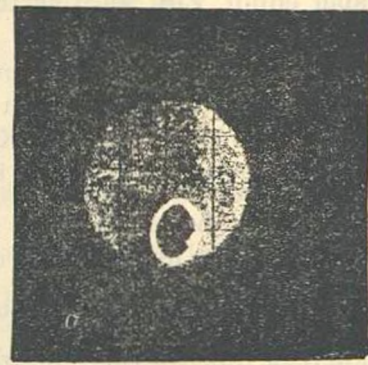
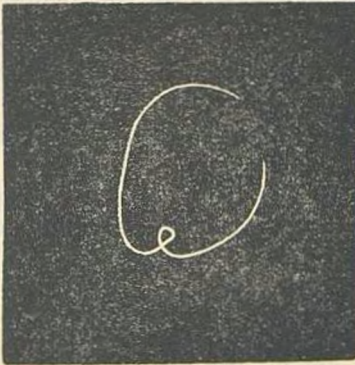
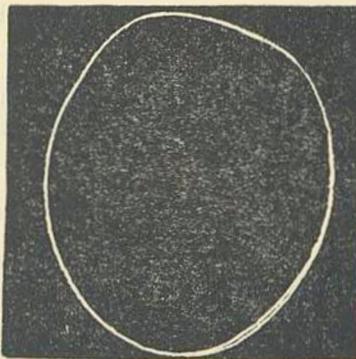
4. NETİCELER

Sistemin kararlılık durumunun incelenmesi

a) Sistemin birinci kritik hızın iki katından başlayıp yavaş yavaş kararsız duruma doğru gitmektedir. Yataklara pompalanan yağın ısıtıl-

Orta pozisyonda

Yatakiarda

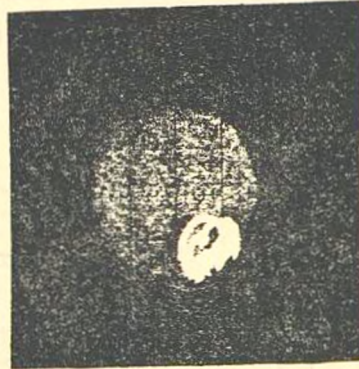
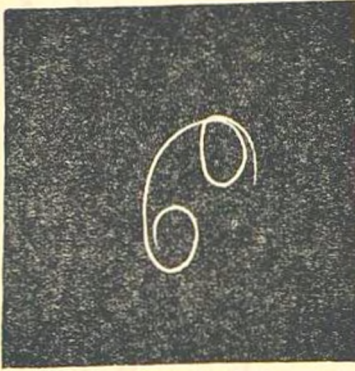
a) $\omega = 1400$ d/d Yağ Tellus 69b) $\omega = 1500$ e/d Tellus 69c) $\omega = 1530$ d/d Tellus 69

Orta pozisyonunda

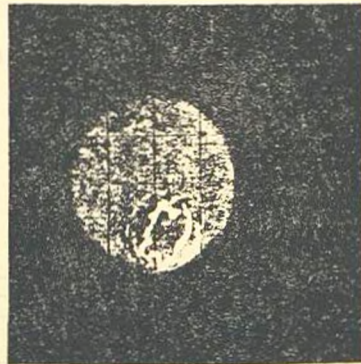
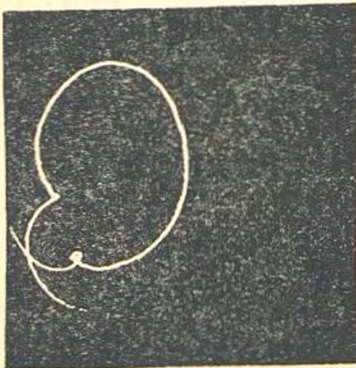
Yataklarımda



a) $\omega = 2100$ d/d Yağ: Tellus 37

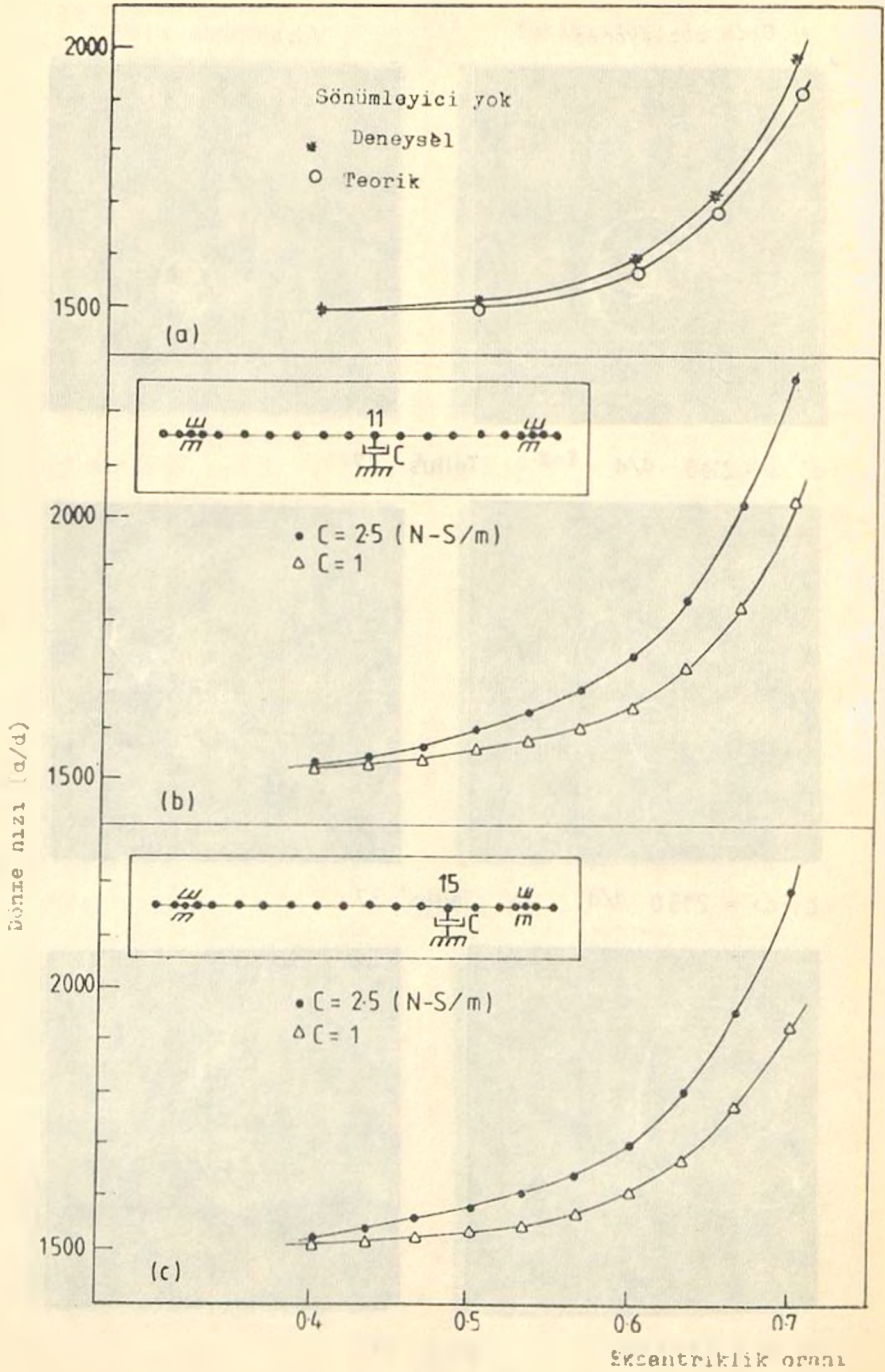


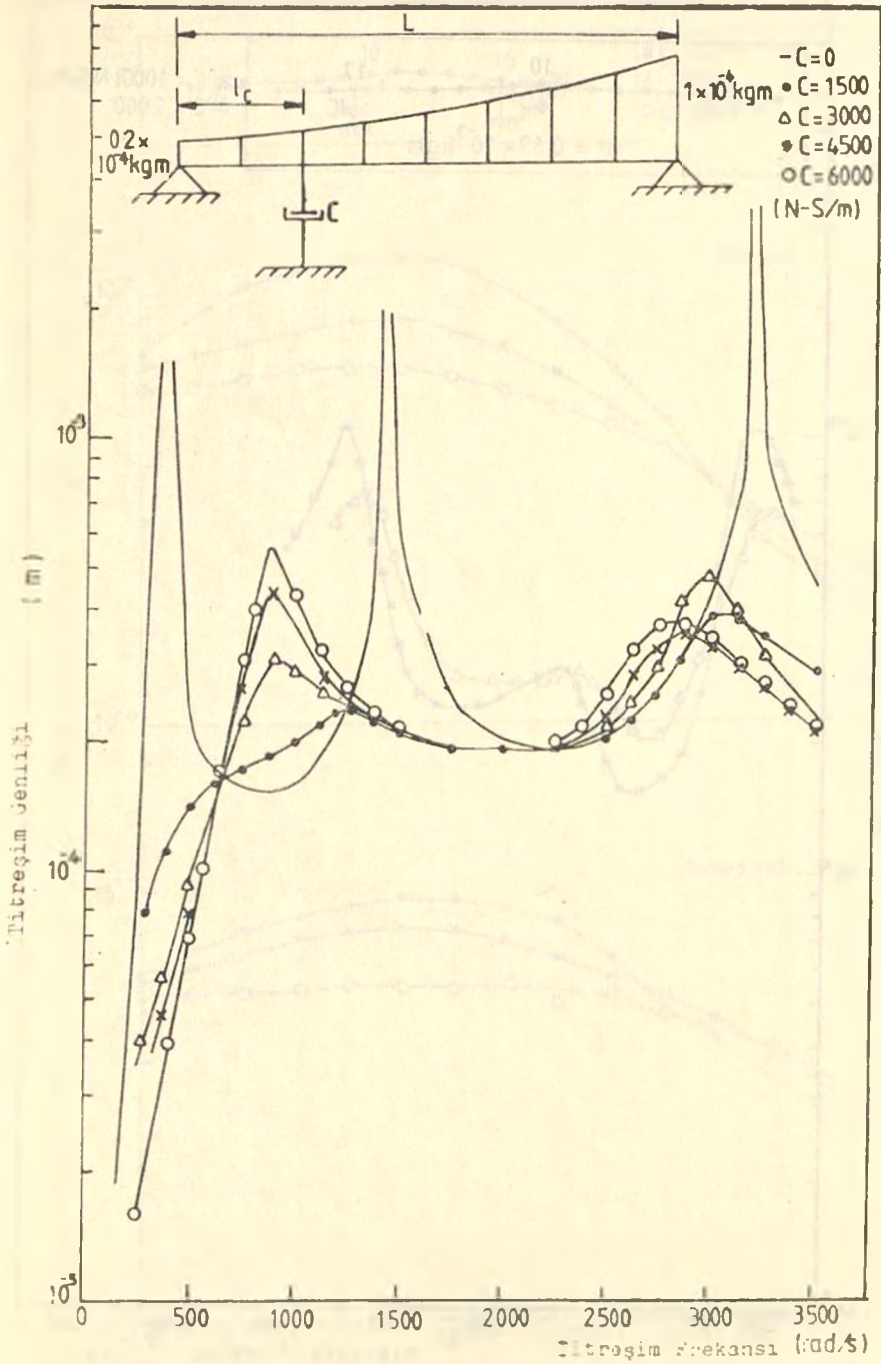
b) $\omega = 2150$ d/d Yağ: Tellus 37



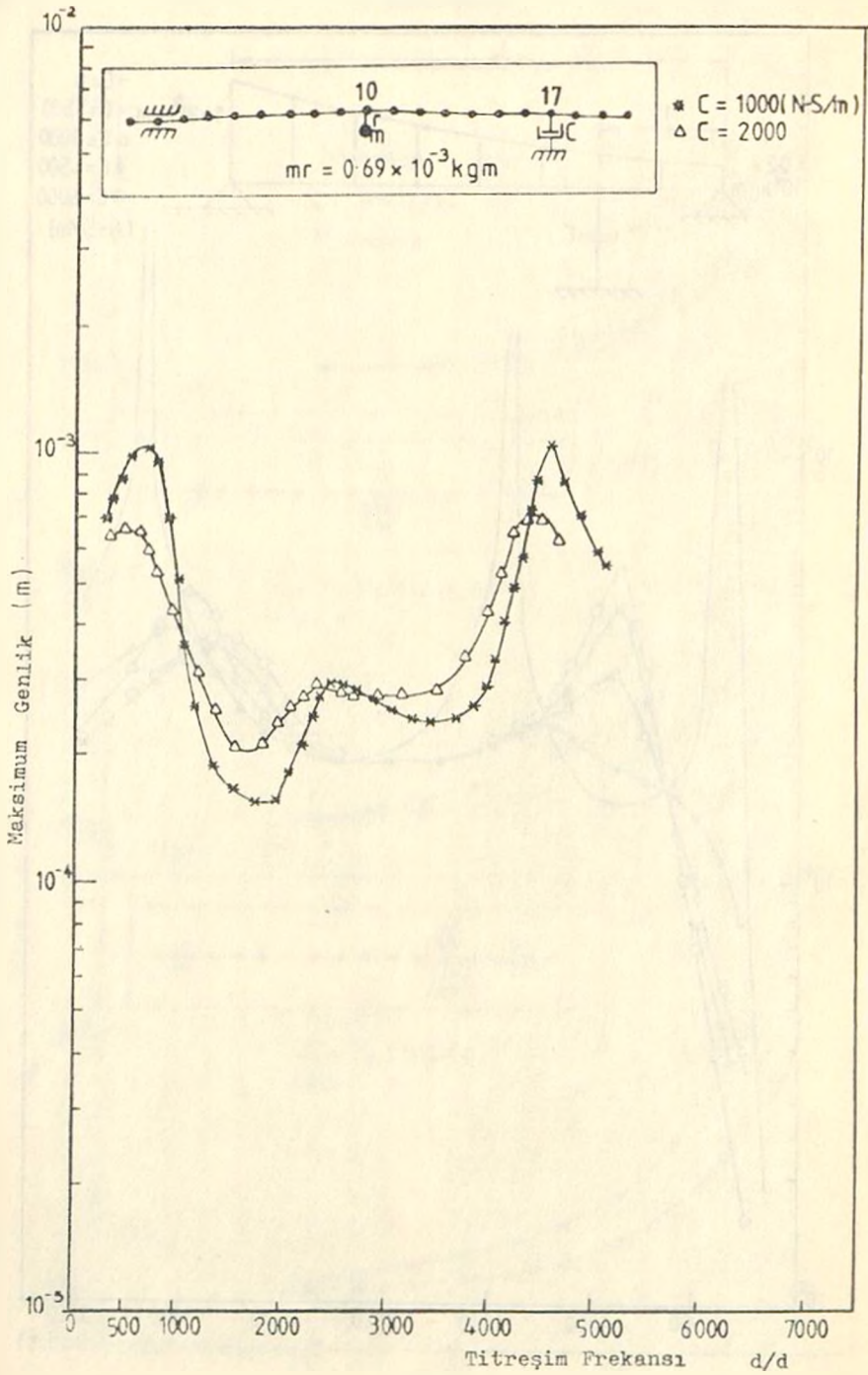
c) $\omega = 2200$ d/d Yağ: Tellus 37

Şekil 2.

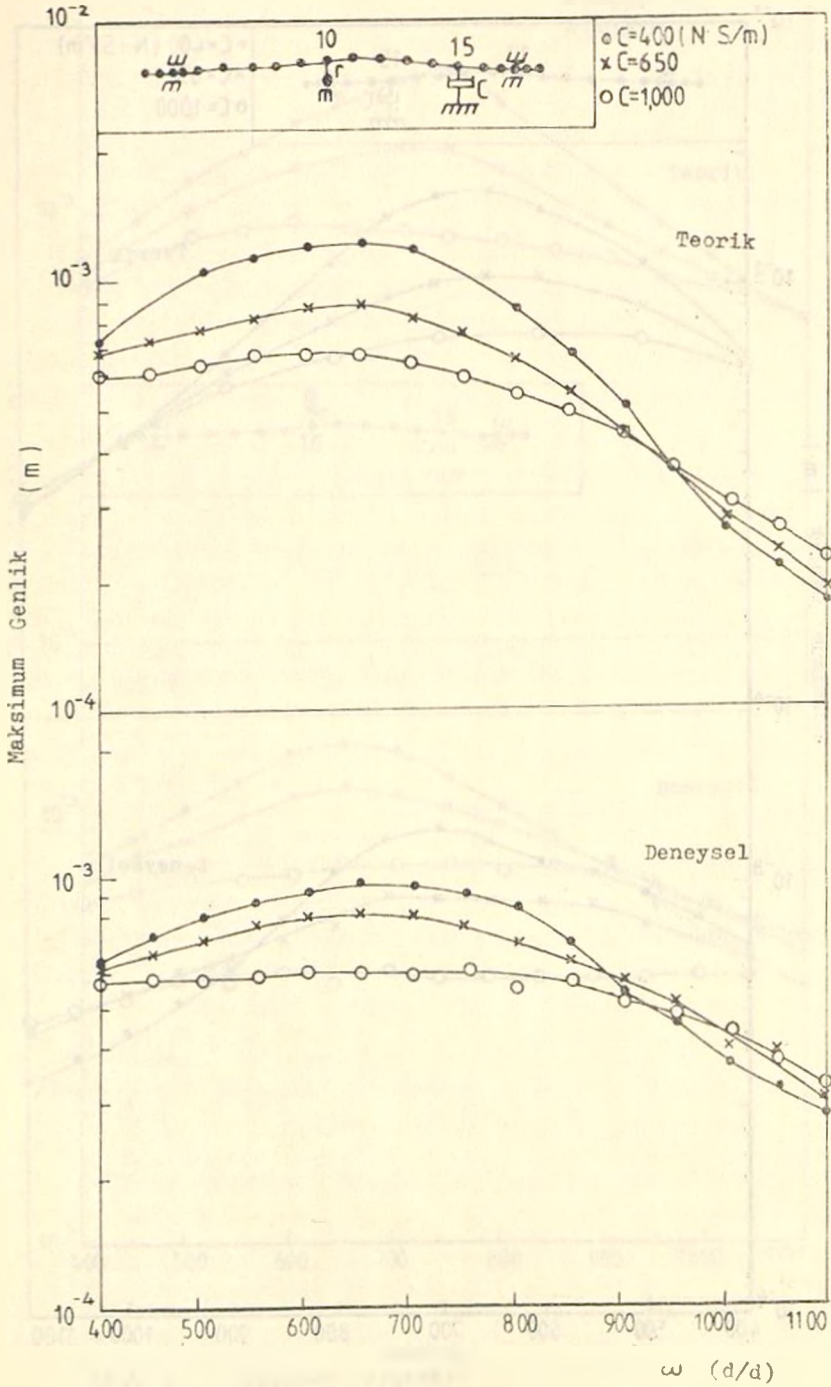




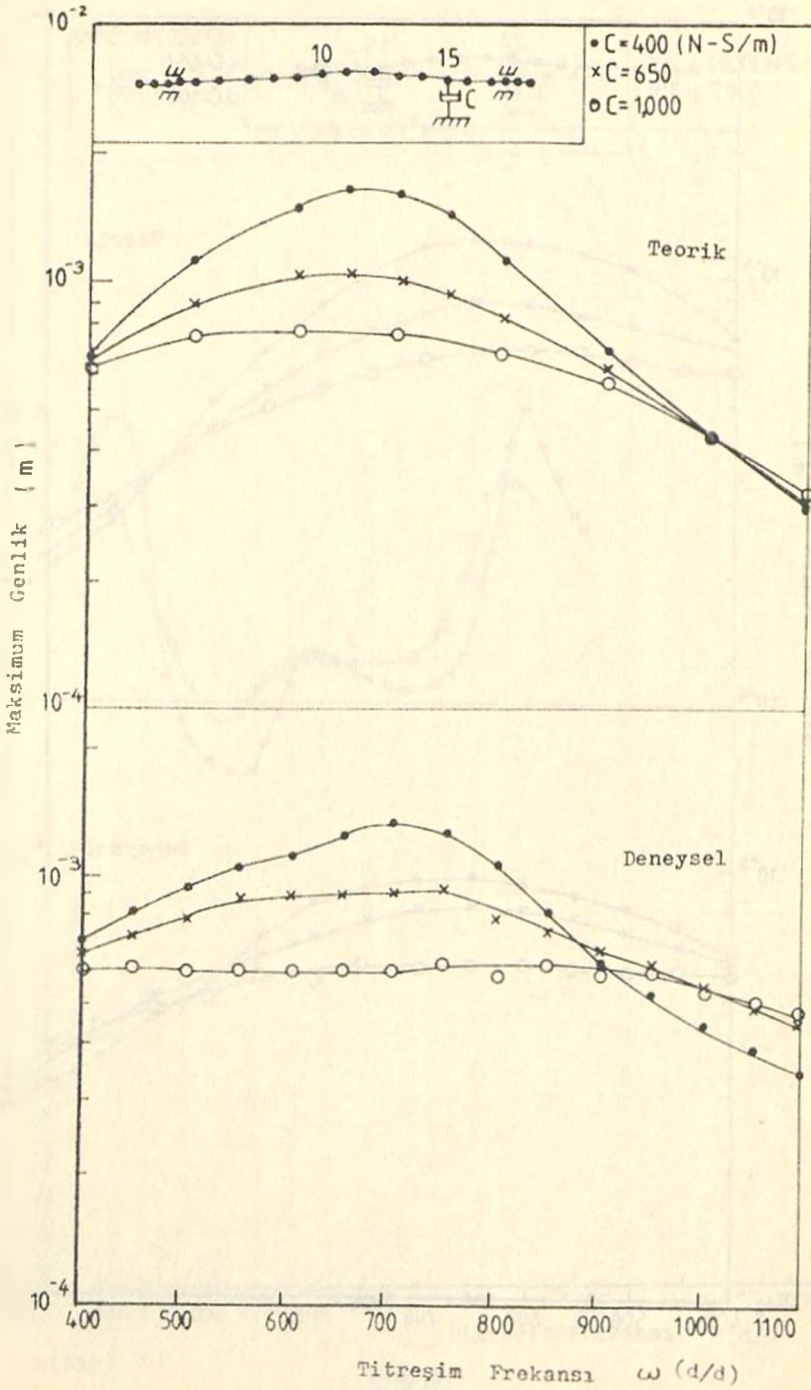
Şekil 4.



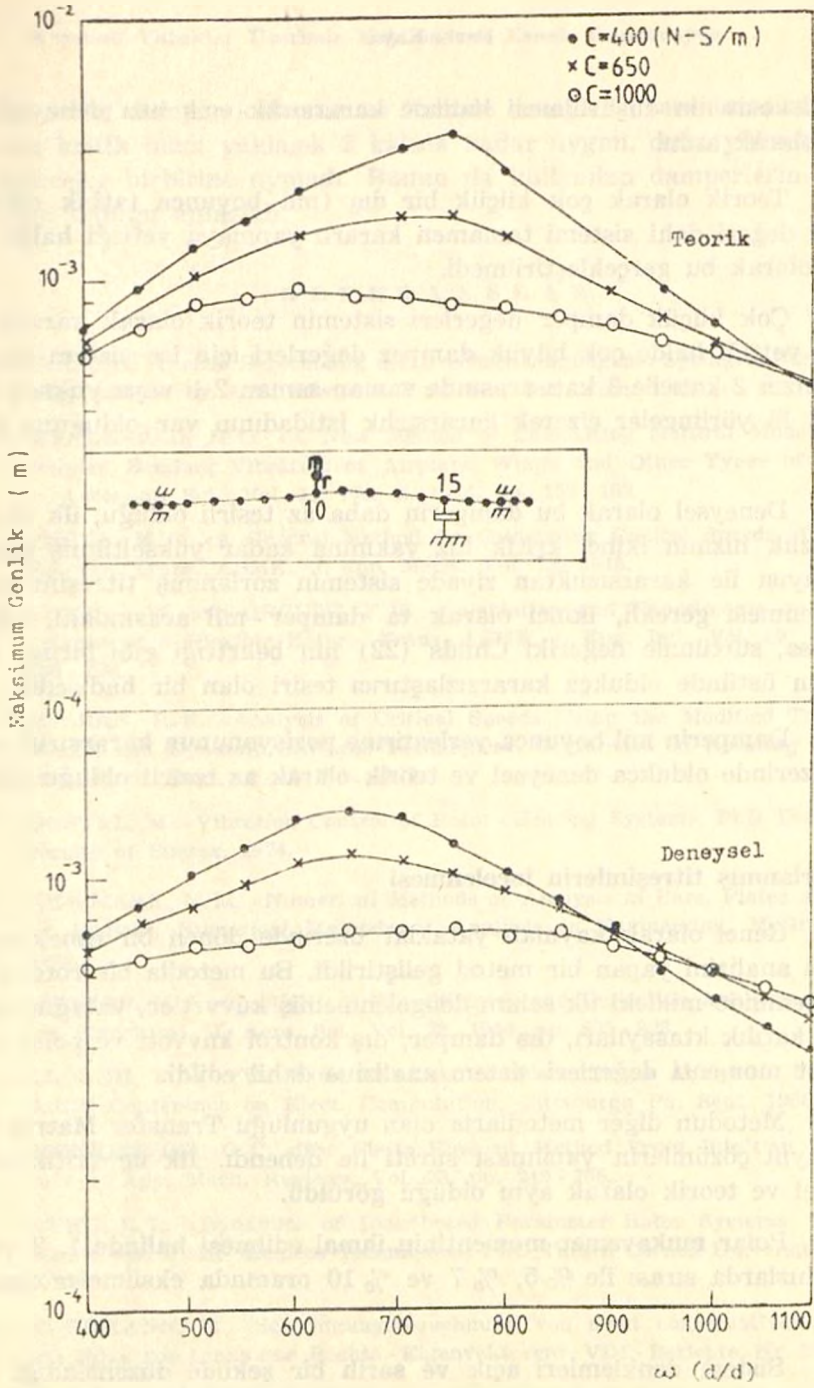
Şekil 5.



Şekil 6.



Şekil 7.



Şekil 8.

ması, viskozitenin düşürülmesi halinde kararsızlık eşik hızı deneysel ve teorik olarak arttı.

b) Teorik olarak çok küçük bir dış (mil boyunca tatbik edilen) damper değeri dahi sistemi tamamen kararlı yapmaya yettiği halde deneysel olarak bu gerçekleştirilmedi.

c) Çok küçük damper değerleri sistemin teorik olarak kararlı olmasına yettiği halde çok büyük damper değerleri için ise sistem birinci kritik hızın 2 katı ile 3 katı arasında zaman zaman 2 li veya yüksek hızlarda 3 lü yörüngeler çizerek kararsızlık istidadının var olduğunu gösterdi.

d) Deneysel olarak bu damperin daha az tesirli olduğu, ilk olarak kararsızlık hızının ikinci kritik hız yakınına kadar yükseltilmiş olması ve dolayısı ile kararsızlıktan ziyade sistemin zorlanmış titreşimlerinin sönümlenmesi gerekli, ikinci olarak ta damper - mil arasındaki, küçük dahi olsa, sürtünme değeri Childs (22) nin belirttiği gibi birinci kritik hızın üstünde oldukça kararsızlaştırıcı tesiri olan bir hadisedir.

e) Damperin mil boyunca yerleştirme pozisyonunun kararsızlık eşik hızın üzerinde oldukça deneysel ve teorik olarak az tesirli olduğu görüldü.

Zorlanmış titreşimlerin incelenmesi

a) Genel olarak kaymalı yataklar üzerinde dönen bir esnek milin titreşim analizini yapan bir metod geliştirildi. Bu metodla bir rotor - yatak sisteminde mildeki ilk sehim dengelenmemiş kuvvetler, yatağın damper ve katılık ktasayıları, dış damper, dış kontrol kuvveti ve polar mukavemet momenti değerleri sistem analizine dahil edildi.

b) Metodun diğer metodlarla olan uygunluğu Transfer Matris Metoduyla aynı çözümlerin yapılması sureti ile denendi. İlk üç kritik hızın deneysel ve teorik olarak aynı olduğu görüldü.

c) Polar mukavemet momentinin ihmal edilmesi halinde 1, 2 ve 3. kritik hızlarda sırası ile % 5, % 7 ve % 10 oranında eksilmeler olmaktadır.

d) Sistem denklemleri açık ve sarıh bir şekilde düzenlendiği için Q-R diye bilinen hesaplama yolu ile sistemin kompleks aygen değerlerini bulmak sureti ile kararlılık durumu incelendi.

e) Dış damper kullanılması halinde deneylerle teori arasındaki uygunluk kritik hızın yaklaşık 2 katına kadar uygun, daha yüksek hızlarda neticeler birbirine uymadı. Bunun da kullanılan damperlerin özelliklerinden olduğu anlaşıldı.

R E F E R A N S L A R

- 1 — HOLZER, H. «Die Berechnung der Drehschwingungen». Springer, Berlin, 1921. (Republished by J.W. Edwards, Publisher, Inc. Mich, 1948).
- 2 — MYKLESTAD, N. O. «A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams». J. Aeronaut. Sci., Vol. 11, No. 2., 1944, pp. 153 - 162.
- 3 — PROHL, M. A. «A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors». Trans. ASME, J. app. Mech., Vol. 12, 1945.
- 4 — LUND, J. W. and ORCUTT, F. K. «Calculation and Experiments on the Unbalance of a Flexible Rotor». Trans. ASME, J. Eng. Ind., Vol. 89, 1967, pp. 785 - 796.
- 5 — McLEAN, R. F. «Analysis of Critical Speeds Using the Modified Transverse Matrix and Dynamic Stiffness Techniques». Conference on Rotating Systems, Inst. Mech. Eng., 14 - 15 Feb. 1972.
- 6 — DOSTAL, M. «Vibration Control of Rotor - Bearing System». PhD Thesis, University of Sussex, 1974.
- 7 — NEWMARK, N. M. «Numerical Methods of Analysis in Bars, Plates and Elastic Bodies». Numerical Methods of Analysis in Engineering, McGraw - Hill, 1949.
- 8 — TURNER, M. J., CLOUGH, R. W. «Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structure». J. Aero. Sci., Vol. 23, 1956, pp. 805 - 823.
- 9 — CLOUGH, R. W. «The Finite Element in Plane Stress Analysis». Proc. 2nd. ASCE Conference on Elect. Computation, Pittsburgh Pa. Sept. 1960.
- 10 — ZIENKIEWICZ, O. C. «The Finite Element Method From Intuition to Generality». App. Mech. Reviews, Vol. 23, pp. 249 - 256.
- 11 — RUHL, R. L. «Dynamics of Distributed Parameter Rotor Systems: Transfer Matrix and Finite Element Techniques». PhD Thesis, Cornell University, USA., 1970.
- 12 — NORDMANN, R. «Schwingungsberechnung von nicht konservativen Rotoren mit Hilfe von Links und Rechts - Eigenvektoren». VDI - Berichte, Nr. 269, 1976.
- 13 — SHEN, F. A. «Transient Flexible Rotor Dynamics Analysis, Part 1. Theory» Trans. ASME, J. Eng. Ind. Vol. 94, 1972, pp. 531 - 538.

- 14 — KIRK, R. G. and GUNTER, E. J. «The Effect of Support Flexibility and Damping on the Synchronous Response of a Single - Mass Flexible Rotor». Trans. ASME, Paper No. 71 - VIB 72.
- 15 — NIKOLAJSEN, J. L. «Modelling and Control of Rotor - Bearing Systems». PhD Thesis, University of Sussex, 1978.
- 16 — JOHNSON, M. A. «Forced Vibration of a Rotating Elastic Body». Journal of Aircraft Engineering, 1952, pp. 271 - 273.
- 17 — TIMOSHENKO, S. «Vibration Problems in Engineering». D. Van Company, Inc. 1959.
- 18 — PARKINSON, A. G., JACKSON, K. L. and Bishop, R. E. D. «Some Experiments on the Balancing of Small Flexible Rotors: Part 11 - Experiments», J. Mech. Eng. Sci., Vol. 5, No. 2, 1963, pp. 133 - 145.
- 19 — DARLOW, M. S., SMALLEY, A. J. and PARKINSON, A. G. «Demonstration of a Unified Approach to the Balancing of Flexible Rotors». Gas Turbine Conference, ASME Paper 80 - GT - 87 - March, 1980.
- 20 — VERNON, J. B. «Linear Vibration Theory». John Wiley and Sons, Inc., N.Y. 1967.
- 21 — KAYA, F. «Vibration Control of Flexible Shafts Supported on Journal Bearings» PhD Thesis, University of Sussex, İngiltere.
- 22 — CHILDS, D. W. «Two Jeffcott Based Modal Simulation Models for Flexible Rotating Equipment» Trans. ASME, J. Eng. Ind., 1975. pp. 1000 - 1014.