

# Pasternak Türü Elastik Zemine Oturan Kirişin Titreşimi ve Burkulması

Hasan BODUROĞLU <sup>1)</sup>

## 1 — GİRİŞ :

Elastik zeminler üzerine oturan kirişlere uçaklarda veya uzay araçlarında ve soğuk bölgelerde inşa edilen yapılarda rastlanması nedeniyle yapı mekaniği ve temel mühendisliği açısından büyük önem taşımaktadır. Bu tür problemler çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Hetenyi [1] elastik zeminlere oturan kirişlerin statik davranışlarını geniş olarak incelemiştir. Bolotin [2], Winkler türü elastik zeminin üzerine oturan kirişin doğal açısız frekansında ve statik burkulma yüklerinde meydana gelen değişiklikleri araştırmıştır. İki ucu mafsallı ve elastik zemine oturan kirişin burkulması Timoshenko ve Gere [3] tarafından enerji yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Kerr [4] tarafından yapılan bir çalışmada ise Winkler zemininden farklı türde olan elastik zemin etkileri sunulmuştur. Bunlardan biri de Pasternak türü elastik zemindir [5]. Bu tür elastik zeminde meydana gelen kuvvetler

$$q(x, y) = Kw - G_0 \nabla^2 w \quad (1.1)$$

bağıntısı ile belirlenir. Burada  $K$  Winkler zemini modülü,  $G_0$  ise zemin kayma modülü,  $w(x, y)$  zemindeki çökmeler ve  $\nabla^2$  ise Laplace operatörüdür. Bu tür zeminler matematik bir model olarak incelendiğinde, zemini belirten «elastik yaylar» arasında bir kayma etkileşiminin bulunduğu anlaşılmaktadır. Pasternak türü elastik zemin modeli homogen zeminler için Winkler modelini de içine alması nedeniyle genelleştirilmiş bir mekanik model olmaktadır. Pasternak türü elastik zemin bir boyutlu hale indirgenmiş şekli ile Wiegardt türü elastik zemine dönüşmektedir [6].

Bu tür zeminler üzerindeki kirişlerin burkulması ile ilgili bir çalış-

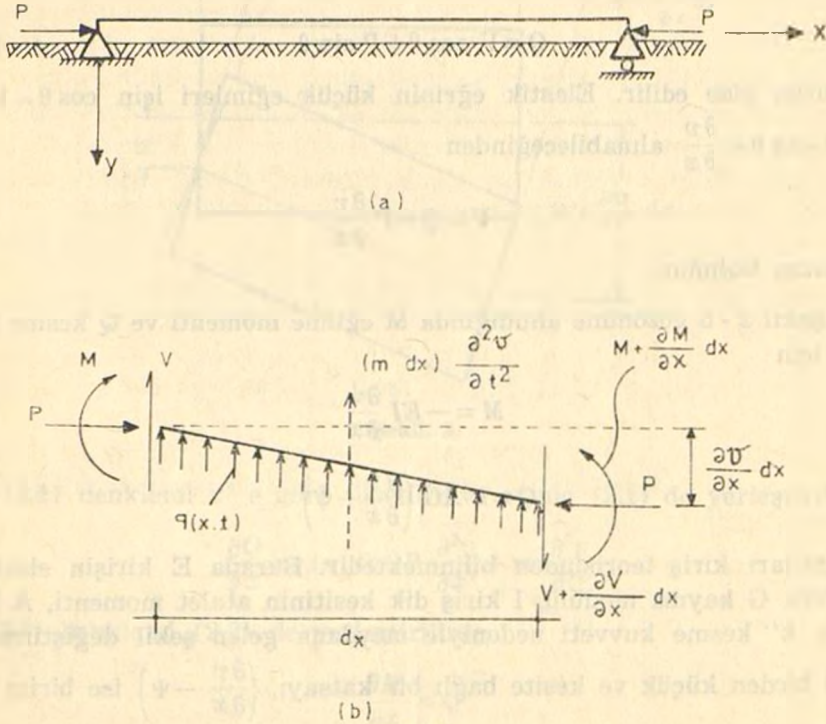
1) Doç. Dr., İ.T.Ü. Maçka İnşaat Fakültesi.

Smith [7] tarafından yapılmıştır. Pasternak zemini üzerine oturan sonlu bir Euler - Bernoulli kirişinin titreşimi Rades [8] tarafından yapılan bir araştırmada incelenmiştir. Wang ve Stephens [9] beraber yaptıkları bir çalışmada Pasternak zeminine oturan Timoshenko kirişlerinin doğal açılal frekanslarını incelemişlerdir.

Bu çalışmada da ise sabit normal kuvvet etkisinde kalan ve Pasternak türü elastik zemine oturan kirişlerin titreşimi ve burkulması incelenmiştir. Kirişteki kesme kuvveti etkisi gözönüne alınmış ve iki ucu mafsallı çubuğun aksenal normal kuvvet etkisi altındaki titreşimleri incelenmiş ve Pasternak zemininin kirişin doğal açılal frekansları ve burkulma yükleri üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

## 2 — PROBLEMİN FORMÜLASYONU :

İki ucu mafsallı, P aksenal basınç kuvveti etkisinde kalan ve Pasternak türü elastik zemine oturan kiriş ile ilgili eksen takımı Şekil 1 - a da gösterilmiştir.



Şekil. 1.

Bu kirişten çıkarılan bir diferansiyel parça üzerindeki iç kuvvetler ve D'Alembert kuvveti Şekil 1 - b de gösterilmiştir. Bu parçaya denge denklemleri uygulanacak olursa

$$\frac{\partial V}{\partial x} = q(x, t) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

ve

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V + P \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2)$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılarda  $v(x, t)$  elastik eğriye ait yer değiştirmeler,  $V$  düşey doğrultudaki kesme kuvveti,  $M$  eğilme momenti,  $P$  normal kuvvet,  $q(x, t)$  zeminin kirişe olan tepkisi ve  $m$  kirişin birim boyunun kütlesidir. Çubuğun titreşiminde kesme kuvveti etkisi göz önüne alındığından, Şekil değiştirmiş konumun incelenmesi gerekir. Şekil 2 - a da gösterildiği gibi kuvvetin yatay ve düşey bileşenleri yerine elastik eğriye dik ( $Q$ ) kesme kuvveti ile elastik eğri doğrultusundaki ( $N$ ) normal kuvveti bileşenleri incelenecek olursa,

$$Q = V \cos \theta + P \sin \theta \quad (2.3)$$

bağıntısı elde edilir. Elastik eğrinin kk eğimleri için  $\cos \theta \approx 1$  ve  $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \frac{\partial v}{\partial x}$  alınabileceğinden

$$V = Q - P \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.4)$$

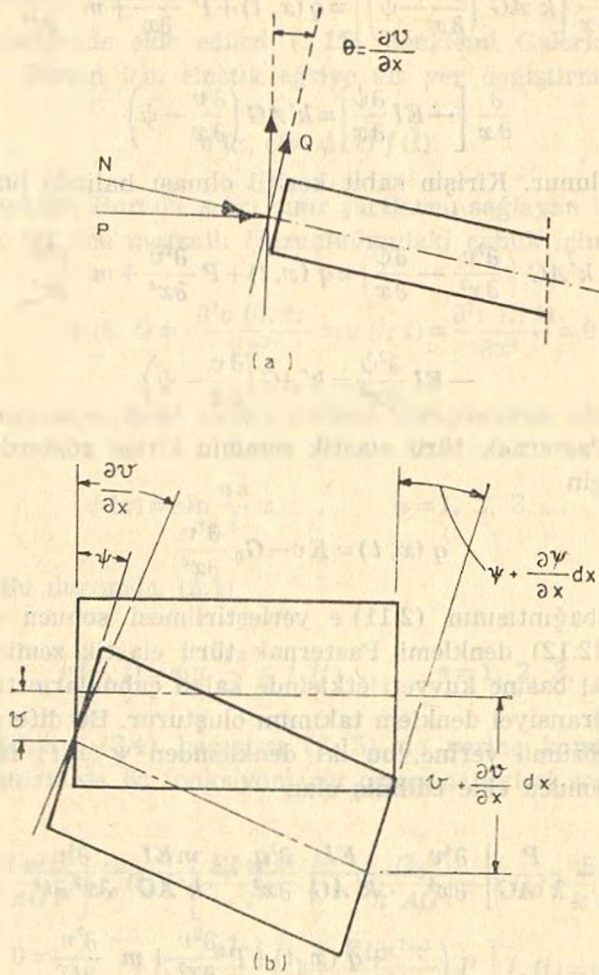
bağıntısı bulunur.

Şekil 2 - b gözönüne alındığında  $M$  eğilme momenti ve  $Q$  kesme kuvveti için

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$Q = k'AG \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \quad (2.6)$$

bağıntıları kiriş teorisinden bilinmektedir. Burada  $E$  kirişin elastisite modülü,  $G$  kayma modülü,  $I$  kiriş dik kesitinin atalet momenti,  $A$  kesit alanı,  $k'$  kesme kuvveti nedeniyle meydana gelen Şekil değiştirme ile ilgili birden kk ve kesite bağlı bir katsayı,  $\left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right)$  ise birim kaymadır.



Şekil. 2.

(2.4) denklemi  $x'$  e göre türetilir ve sonuç (2.1) de yerleştirilirse,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t) + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

ve (2.4) denklemi (2.2) de yerleştirilirse,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (2.8)$$

bağıntıları elde edilir. (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) denklemlerinden

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k'AG \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \right] = q(x, t) + P \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = k'AG \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \quad (2.10)$$

bağıntıları bulunur. Kirişin sabit kesitli olması halinde bu son iki bağıntı

$$k'AG \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = q(x, t) + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

ve

$$-EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = k'AG \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \quad (2.12)$$

şeklini alır. Pasternak türü elastik zeminin kirişe gösterdiği tepki bir boyutlu hal için

$$q(x, t) = Kv - G_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

olur. (2.13) bağıntısının (2.11) e yerleştirilmesi sonucu elde edilecek denklem ile (2.12) denklemi Pasternak türü elastik zemine oturan ve eksenel normal basınç kuvveti etkisinde kalan çubukların titreşimini veren kısmi diferansiyel denklem takımını oluşturur. Bu diferansiyel denklem takımı çözümü yerine, bu iki denklemden  $\Psi(x, t)$  fonksiyonunun yok edilmesi sonucu elde edilmiş olan

$$EI \left[ 1 - \frac{P}{k'AG} \right] \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{EI}{k'AG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{mEI}{k'AG} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + q(x, t) + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.14)$$

denkleminin  $v(x, t)$  için çözülmesi, özellikle iki ucu mafsallı çubuklarda daha kolay olmaktadır. (2.13) de verilmiş olan zemin tepkisi (2.14) de yerleştirilir ve elde edilen denklem düzenlenirse,

$$EI \left[ 1 + \frac{G_0 - P}{k'AG} \right] \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \left[ P - G_0 - \frac{EIK}{k'AG} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Kv + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{mEI}{k'GA} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir.

### 3 — ÇÖZÜM YÖNTEMİ :

Önceki bölümde elde edilen (2.15) denklemini Galerkin yöntemi ile çözülecektir. Bunun için elastik eğriye ait yer değıştirmeler

$$v(x, t) = \phi(x) f(t) \quad (3.1)$$

şeklinde alınabilir. Burada  $\phi(x)$  sınır şartlarını sağlayan koordinat fonksiyonu olup, iki ucu mafsallı  $l$  uzunluğundaki çubuk için bu sınır şartları

$$v(0, t) = \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = v(l, t) = \frac{\partial^2 v(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde olacağından basit kirişin serbest titreşimlerine ait öz fonksiyonlar olan

$$\phi(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

seçilmiştir. Bu durumda (3.1)

$$v(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x f_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

olarak yazılabilir. (3.4) bağıntısı (2.15) de yerine konur ve Galerkin yöntemi uygulanırsa öz fonksiyonların ortogonallikleri sonucu  $n$ 'ye bağılı olan

$$m \left[ 1 + \frac{EI n^2 \pi^2}{k' AG l^2} \right] \ddot{f}_n(t) + \left[ \frac{EI n^4 \pi^4}{l^4} \left( 1 + \frac{G_0}{k' AG} \right) + \left( G_0 + \frac{EIK}{k' AG} \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + K - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left( 1 + \frac{EI n^2 \pi^2}{l^2} \right) P \right] f_n(t) = 0 \quad (3.5)$$

adi diferansiyel denklemler elde edilir. Bu denklemler ise

$$\ddot{f}_n(t) + \Omega_n^2 f_n(t) = 0 \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\Omega_n$  eksenel normal kuvvet etkisindeki ve Pasternak zeminine oturan kirişin açısai frekanslarıdır, ve

$$\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 - \frac{P}{P_n^*}} \quad (3.7)$$

bağıntıları ile tanımlanır.  $\omega_n$  eksenel normal kuvvet olmadığı halde doğal açısal frekanslar

$$\omega_n^2 = \frac{EI \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \left( 1 + \frac{G_0}{k' AG} \right) + \left( G_0 + \frac{EIK}{k' AG} \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + K}{m \left( 1 + \frac{EI n^2 \pi^2}{k' AG l^2} \right)} \quad (3.8)$$

ve  $P_n^*$  ise burkulma y¼kleridir.

$$P_n^* = \frac{EI \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \left( 1 + \frac{G_0}{k' AG} \right) + \left( G_0 + \frac{EIK}{k' AG} \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + K}{\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left( 1 + \frac{EI n^2 \pi^2}{k' AG l^2} \right)} \quad (3.9)$$

Boyutsuz parametreler olarak

$$\alpha^2 = \frac{EI}{k' AG l^4}, \quad \beta^2 = \frac{K l^4}{EI} \quad \text{ve} \quad \gamma^2 = \frac{G_0 l^2}{EI} \quad (3.10)$$

seçilirse,

$$\omega_{cn}^2 = (\omega_{cn})^2 g(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.11)$$

$$P_{cn}^* = P_{cn} g(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.12)$$

bağıntıları elde edilir. Burada  $\omega_{cn}$  ve  $P_{cn}$  iki ucu mafsallı Euler - Bernoulli kirişinin doğal açısal frekansları ile burkulma y¼kleridir,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{cn} &= \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ P_{cn} &= \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

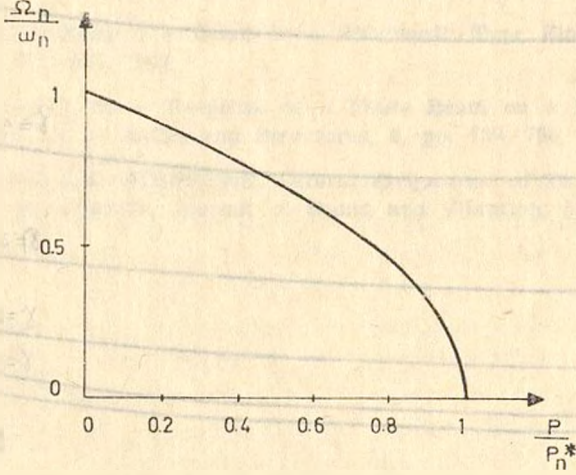
ve

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(1 + \alpha^2 \gamma^2) + (\gamma^2 + \alpha^2 \beta^2) \frac{1}{n^2 \pi^2} + \frac{\beta^2}{n^4 \pi^4}}{(1 + \alpha^2 n^2 \pi^2)}$$

Böylece (3.7), (3.11), (3.12) ve (3.13) bağıntıları problemin çözümlünü vermiş olmaktadır. Bu bağıntılara çıkar çeşitli parametrelerin etkisi sonuçlar bölümünde verilmiştir.

#### 4 — SONUÇLAR :

(3.7) denklemi incelendiğinde  $\Omega_n$  ile  $P$  arasında parabolik bir bağıntı olduğu anlaşılmaktadır ve bu durum Şekil 3 de gösterilmiştir.



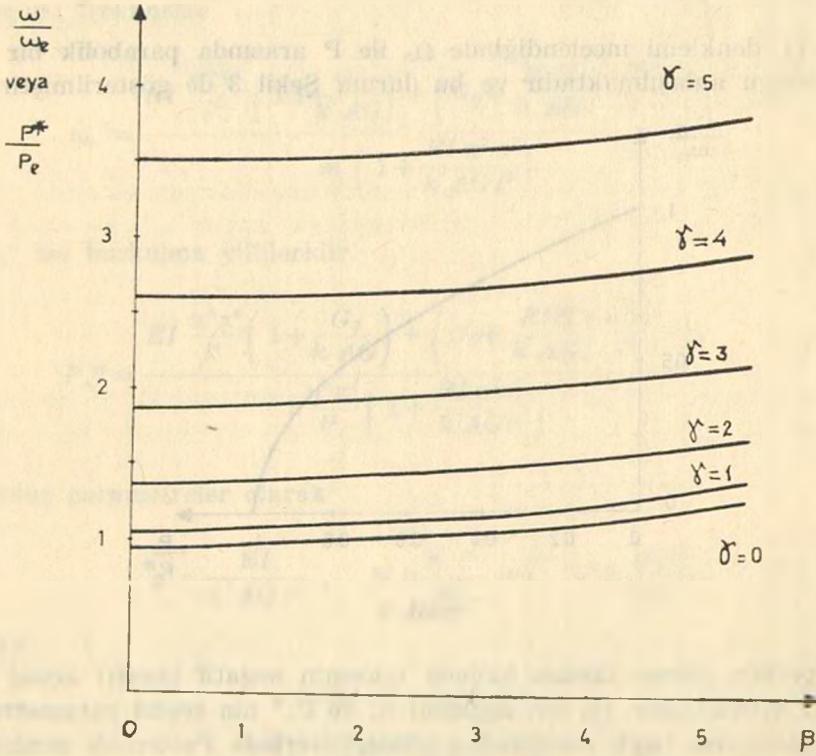
Şekil. 3.

$P$  kuvvetinin çekme olması halinde (eksenin negatif tarafı) açısal frekanslar artmaktadır.  $\Omega_n$  nin değişimi  $\omega_n$  ve  $P_n^*$  nin çeşitli parametrelerle değişmelerine bağlı olduğundan bunlar üzerinde Pasternak zemini ve kesme kuvveti etkilerinin incelenmesi gerekir. Boyutsuz parametrelerden  $\alpha$  kesme kuvveti,  $\beta$  ve  $\gamma$  ise Pasternak zemini etkilerini göstermektedir.  $\gamma=0$  olması halinde zemin Winkler zeminine dönüşmektedir.

**Sayısal örnek :** Çeşitli etkilerin incelenebilmesi için çelikten yapılmış dikdörtgen kesitli bir kiriş ele alınmıştır. Bu durumda  $k'=0,667$  ve  $\frac{E}{k'G}=3,12$  olmaktadır. Bu değerlerle  $\alpha^2=0,26 \left(\frac{h}{l}\right)^2$  elde edilir.  $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$  için  $\alpha^2=0,0026$  bulunur.  $\gamma=0$  hali Winkler zeminine karşı gelmektedir ve  $\gamma$  nin artan değerleri için gerek  $\frac{\omega}{\omega_n}$  oranı ve gerekse  $\frac{P}{P_n^*}$  oranı artmaktadır (Şekil 4).

Sonuç olarak, Pasternak zeminine oturan kirişlerde doğal açısal frekanslar ve burkulma yükleri Winkler zeminine oturan kirişlerden daha fazladır. Bu da Pasternak zemininde kayma şekil değiştirmelerinin gözönüne alınmasından ileri gelmektedir. İncelenen örnekte yalnız bi-





Şekil. 4.

rinci mod için hesap yapılmıştır. Yukarıdaki denklemlerden de görüleceği gibi daha yüksek modlarda  $n$  arttıkça,  $\beta$  ve  $\gamma$  nın bazı değerlerine göre, daha küçük frekanslar ve burkulma yükleri bulunabilir.

#### KAYNAKLAR

1. M. HETENYI, *Beams on Elastic Foundations*, Michigan, The University of Michigan Press, 1946.
2. V. V. BOLOTIN, *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, San Francisco, Holden Day, Inc., 1964.
3. S. P. TIMOSHENKO and J. M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, New York, McGraw - Hill, 1961.
4. A. D. KERR, Elastic and Viscoelastic Foundation Models, *Journal of Applied Mechanics*, 31, pp. 491 - 498, 1964.

5. P. L. PASTERNAK, (On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants.), Gosud. Izdat. Literaturi Po Stroiti. i Arkitektura, Moskow, 1954, (in Russian).
6. K. WEIGHARDT, Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage, ZAMM, 2, s. 165 - 184, 1922.
7. T. E. SMITH, Buckling of a Beam on a Weighardt - Type Elastic Foundation, ZAMM, 49, s. 641 - 645, 1969.
8. M. RADES, Steady - State Response of a Finite Beam on a Pasternak - Type Foundation, Int. Jr. of Solids and Structures, 6, pp. 739 - 756, 1970.
9. T. M. WANG and J. E. STEPHENS, Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundations, Journal of Sound and Vibration, 51 (2), pp. 149 - 155, 1977.