

Eğrisel yüzeyler Boyunca Sınır Tabaka Denklemlerinin Sayısal Çözümleri

Asistan Y. Müh. M. Adil YÜKSELEN *)

1. GİRİŞ :

Sınır tabakada eğrilik tesirleri ile ilgili hususlar ve önemleri birçok yazar tarafından belirtilmiştir. Bu tesirleri incelemek için yapılan çalışmaların bir kritiği son zamanlarda ERİM [1] tarafından yapılmıştır. YÜKSELEN [2], seçilen bir eksen takımında, eğrilik tesirlerini ihtiva edecek şekilde elde edilebilecek benzerlik çözümlerini incelemiş ve neticede biri dördüncü ve diğeri üçüncü mertebeden olmak üzere iki diferansiyel denkleme ulaşmıştır. Ancak yazar bu diferansiyel denklemlerin çözümlerini vermemiştir.

Bu çalışmada eğrilik tesirlerini ihtiva eden benzerlik denklemlerinin sayısal çözümleri yapılmıştır. Bu maksatla RUNGE - KUTTA metodunun GILL tarafından değiştirilmiş şekli [3] kullanılmış olup, çözüm için İ.T.Ü. Elektronik Hesap Bilimleri Merkezindeki «Burroughs 3700» tipi bilgisayardan yararlanılmıştır.

2. SINIR TABAKA DENKLEMLERİ ve BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ :

MURPHY eğrisel koordinatlarında, daimi, iki boyutlu, laminer sınır tabaka denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir [2] :

Süreklilik denklemi :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (1+ky) \frac{\partial v}{\partial y} + kv = 0 \quad (1)$$

Hareket denklemleri :

*) İ.T.Ü. Makine Fakültesi Uçak Elemanları ve Motorları Kürsüsü.

$$\rho \left[\frac{1}{1+ky} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{1+ky} uv \right] = - \frac{1}{1+ky} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{1+ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k^2}{(1+ky)^2} u \right] \quad (2a)$$

$$\rho \frac{k}{1+ky} u^2 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2b)$$

Burada u ve v hız bileşenlerini, μ kinematik viskoziteyi, ρ yoğunluğu, p basıncı ve $k = 1/R$ olmak üzere eğrilik yarıçapını temsil etmektedir. incelenen halde, $\bar{k} = kL$ boyutsuz eğrilik ve $\bar{\delta}$ boyutsuz sınır tabaka kalınlığı olmak üzere eğriliğin $\bar{k} = O(1/\bar{\delta})$ mertebesinde, yani çok büyük olduğu farzedilmiştir.

Denklemlere ilaveten sınır tabaka büyüklüklerinden girdap ve kayma gerilmesi için de sırayla;

$$\zeta = - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + ku \right) \quad (3a)$$

$$\tau = 2\mu e_{12} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - ku \right) \quad (3b)$$

ifadeleri yazılabilir [2].

Bu denklemlerin çözümü için gerekli sınır şartları :

$$y=0. \quad u=0, \quad v=0$$

$$y \rightarrow \infty \quad u = \frac{u_1(x)}{1+ky} \quad (4)$$

şeklinde. Burada $u_1(x)$ sınır tabaka dışındaki potansiyel akımın hızıdır.

Denklemler ve sınır şartlarında

$$\eta = \alpha_1 y x^{\alpha_2}$$

$$x = x$$

$$\Psi = \frac{u_1(x)}{\alpha_1 x^{\alpha_2}} f(\eta) \quad (5)$$

$$ky = A \eta$$

benzerlik dönüşümü bağıntıları kullanarak;

$$u = u_1 f' \quad (6a)$$

$$v = -\frac{1}{1+A\eta} \frac{m-\alpha_2}{\alpha_1} \frac{u_1}{x^{\alpha_2+1}} \left[f + \frac{\alpha_2}{m-\alpha_2} \eta f' \right] \quad (6b)$$

ve sınır tabakada benzerlik denklemi;

$$(1+A\eta)^2 f'' + A(1+A\eta) f' - A^2 f' + (1+A\eta) f f'' + A f f' + \beta \left[\frac{1}{1+A\eta} - (1+A\eta) f'^2 \right] = 0 \quad (7)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadelerde görülen α_1 , α_2 ve β sabitlerinin değerlerinin

$$\alpha_1 = \left[\frac{\rho}{\mu} \frac{m+1}{2} c \right]^{1/2}$$

$$\alpha_2 = \frac{m-1}{2}$$

$$\beta = \frac{m}{m-\alpha_2} = \frac{2m}{m+1}$$

şeklinde olması gerektiği görülebilir. Bu durumda sınır şartları da şu şekli alacaktır.

$$\begin{aligned} \eta = 0 \quad f = 0, \quad f' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty \quad f' = \frac{1}{1+A\eta} \end{aligned} \quad (8)$$

Burada da çözümde kolaylık sağlayabilmek amacıyla daha basit bir ifade elde edebilmek için

$$\eta^* = \frac{1}{A} \ln(1+A\eta)$$

dönüşümü yapılırsa sınır tabaka denklemi

$$F''' - 2AF' + FF'' + \beta(1 - F'^2) = 0 \quad (9)$$

ve sınır şartları

$$\begin{aligned} \eta^* = 0 & \quad F = 0, \quad F' = 0 \\ \eta^* \rightarrow \infty & \quad F' = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

şekline gelir. Bu denklem $A = 0$ için Falkner-Skan denklemini verir. Dolayısıyla onun genelleştirilmiş halidir.

3. NÜMERİK ÇÖZÜMLER :

Burada Bölüm 2 de verilen (7) benzerlik denkleminin sayısal çözümü izah edilecektir. Bu denklem elde edilirken gözönüne alınan hipotezler YÜKSELEN [2] tarafından geniş bir şekilde açıklanmıştır. Çözümle ilgili sınır şartları (8) bağıntıları ile verilmiştir.

Bu tür yüksek mertebeden adı diferansiyel denklemlerin çözümünde takip edilen yol genellikle şu şekildedir. Önce denklem yeni bazı değişkenler ithali ile birinci mertebeden adı diferansiyel denklemler sistemi haline getirilir. Daha sonra da seçilecek uygun bir nümerik metodu bu denklem sisteminin, verilen sınır şartlarıyla çözümü yapılır. Sistemdeki denklemlerin sayısının başta esas alınan denklemin mertebesine bağlı olacağı aşikardır. Burada ele alınan problemin çözümünde de aynı yol takip edilmiş, nümerik metod olarak da dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodunun Gill tarafından değiştirilmiş şekli [3] kullanılmıştır.

Çözüm için (7) ile verilen asıl benzerlik denklemini yerine bunun bir dönüşümüyle daha basite indirgenmiş şekli olan (9) denklemini gözönüne alınmıştır. Bu durumda tabii olarak sınır şartları için de (8) yerine (10) bağıntıları bu denklemle birlikte kullanılmıştır.

Problem, sınır şartları hem başlangıç noktasında ve hem de bağımsız değişkenin çok büyük değerlerinde, yani farklı bölgelerde verildiği için bir «sınır değeri» problemi olup, sınır değerlere ulaşabilmek için bir iterasyon kullanılması gerekmiştir. Bu maksatla (9) denklemindeki fonksiyonun F''' ikinci türevinin $\eta^* = 0$ daki değeri sürekli olarak değiştirilirken, η^* in çok büyük değerlerinde fonksiyonun $F' = 1$ doğrusuna $\pm 3 \times 10^{-5}$ hassasiyetle yaklaşmasını ve asimptot olabilmesi için de aynı zamanda F''' ikinci türevinin aynı noktalarda 1.5×10^{-5} hassasiyet-

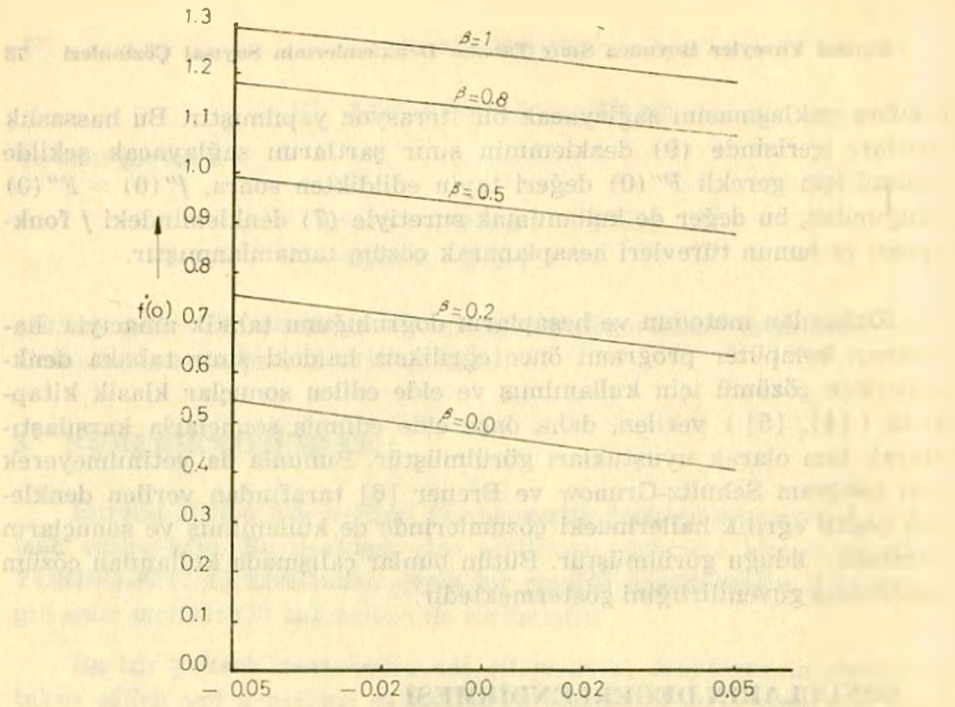
le sifıra yaklaşmasını sağlayacak bir iterasyon yapılmıştır. Bu hassaslık sınırları içerisinde (9) denkleminin sınır şartlarını sağlayacak şekilde çözümü için gerekli $F''(0)$ değeri tayin edildikten sonra, $f''(0) = F''(0)$ olduğundan, bu değer de kullanılmak suretiyle (7) denklemindeki f fonksiyonu ve bunun türevleri hesaplanarak çözüm tamamlanmıştır.

Kullanılan metodun ve hesapların doğruluğunu tahkik amacıyla, hazırlanan kompüter programı önce eğriliksiz haldeki sınır tabaka denklemlerinin çözümü için kullanılmış ve elde edilen sonuçlar klasik kitaplarda ([4], [5]) verilen, daha önce elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılarak tam olarak uyuştukları görülmüştür. Bununla da yetinilmeyerek aynı program Schultz-Grunow ve Breuer [6] tarafından verilen denklemin çeşitli eğrilik hallerindeki çözümlerinde de kullanılmış ve sonuçların tatminkâr olduğu görülmüştür. Bütün bunlar çalışmada kullanılan çözüm metodunun güvenilirliğini göstermektedir.

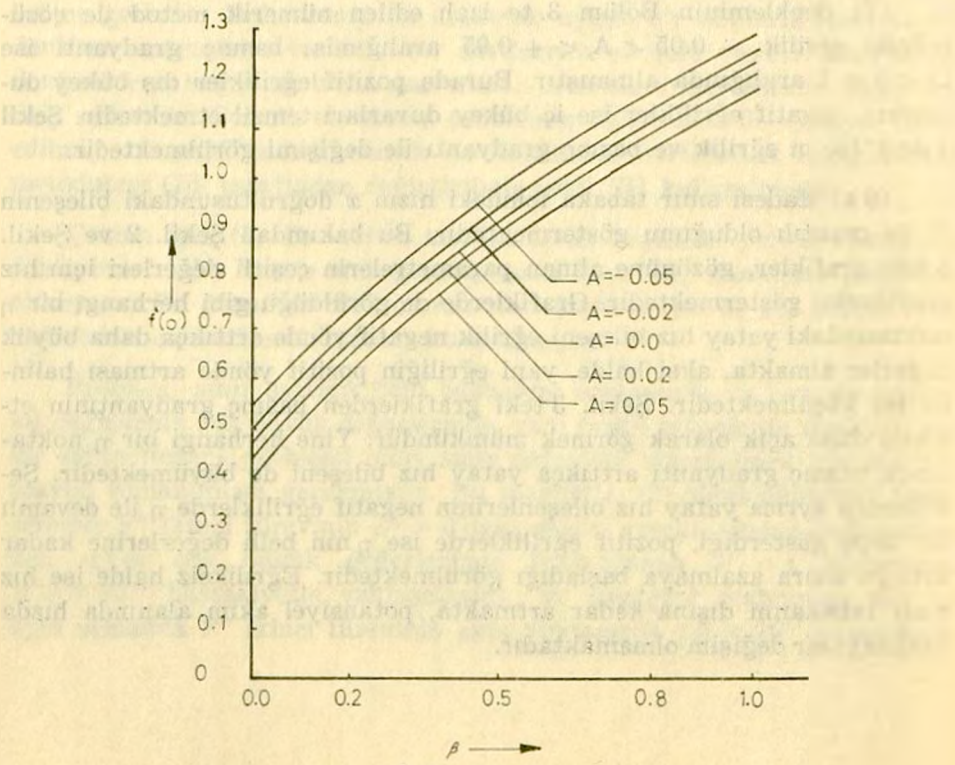
4. SONUÇLARIN DEĞERLENDİRMESİ :

(7) denkleminin Bölüm 3. te izah edilen nümerik metod ile çözümünde eğrilik $-0.05 < A < +0.05$ aralığında, basınç gradyanı ise $0 < \beta < 1$ aralığında alınmıştır. Burada pozitif eğrilikler dış bükey duvarları, negatif eğrilikler ise iç bükey duvarları temsil etmektedir. Şekil 1 de $f''(o)$ nın eğrilik ve basınç gradyanı ile değişimi görülmektedir.

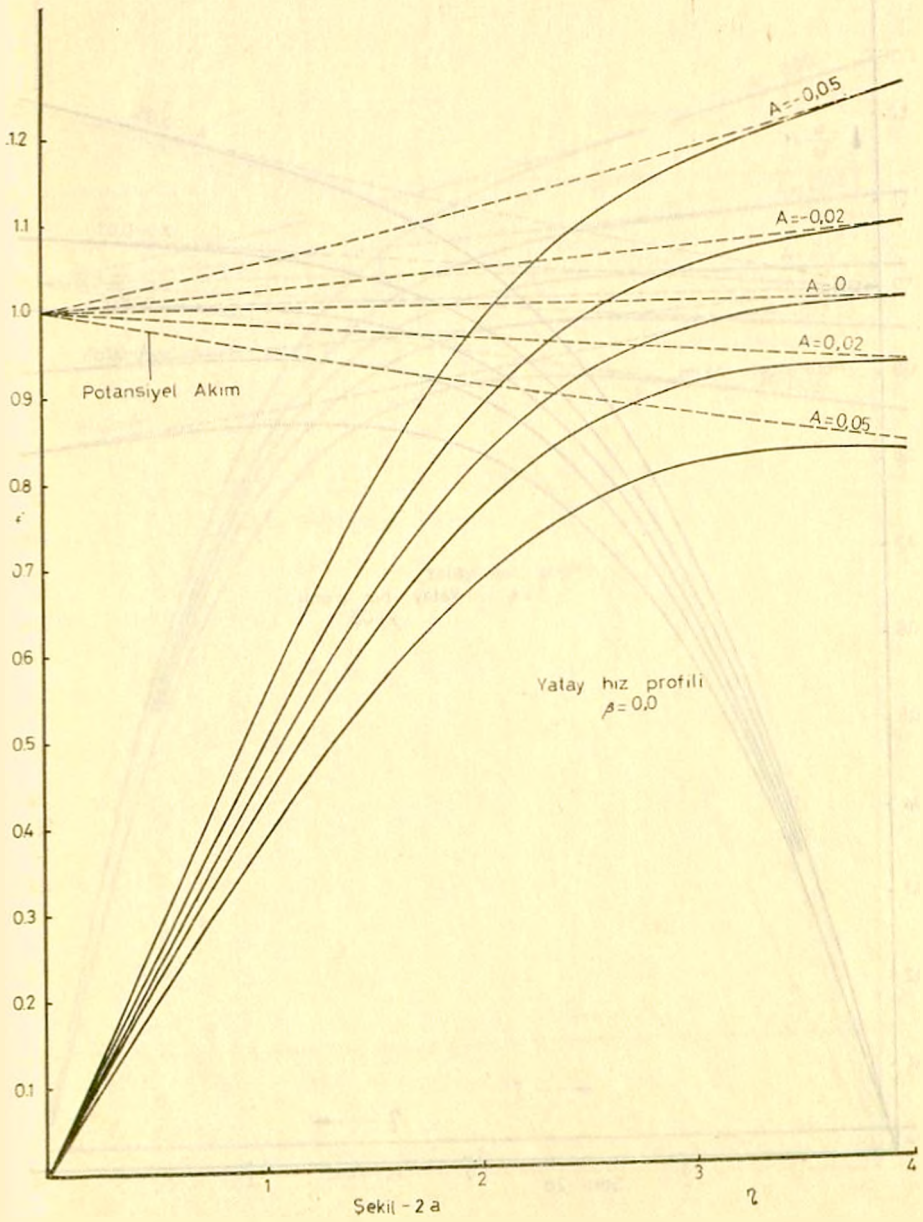
(6 a) ifadesi sınır tabaka içindeki hızın x doğrultusundaki bileşenin f' ile orantılı olduğunu göstermektedir. Bu bakımdan Şekil. 2 ve Şekil. 3 teki grafikler, gözönüne alınan parametrelerin çeşitli değerleri için hız profillerini göstermektedir. Grafiklerde de görüldüğü gibi herhangi bir η noktasındaki yatay hız bileşeni eğrilik negatif yönde arttıkça daha büyük değerler almakta, aksi halde, yani eğriliğin pozitif yönde artması halinde ise küçülmektedir. Şekil. 3 teki grafiklerden basınç gradyanının etkisini daha açık olarak görmek mümkündür. Yine herhangi bir η noktasında basınç gradyanı arttıkça yatay hız bileşeni de büyümektedir. Şekillerden ayrıca yatay hız bileşenlerinin negatif eğriliklerde η ile devamlı bir artış gösterdiği, pozitif eğriliklerde ise η nın belli değerlerine kadar arttığı, sonra azalmaya başladığı görülmektedir. Eğriliksiz halde ise hız sınır tabakanın dışına kadar artmakta, potansiyel akım alanında hızda herhangi bir değişim olmamaktadır.

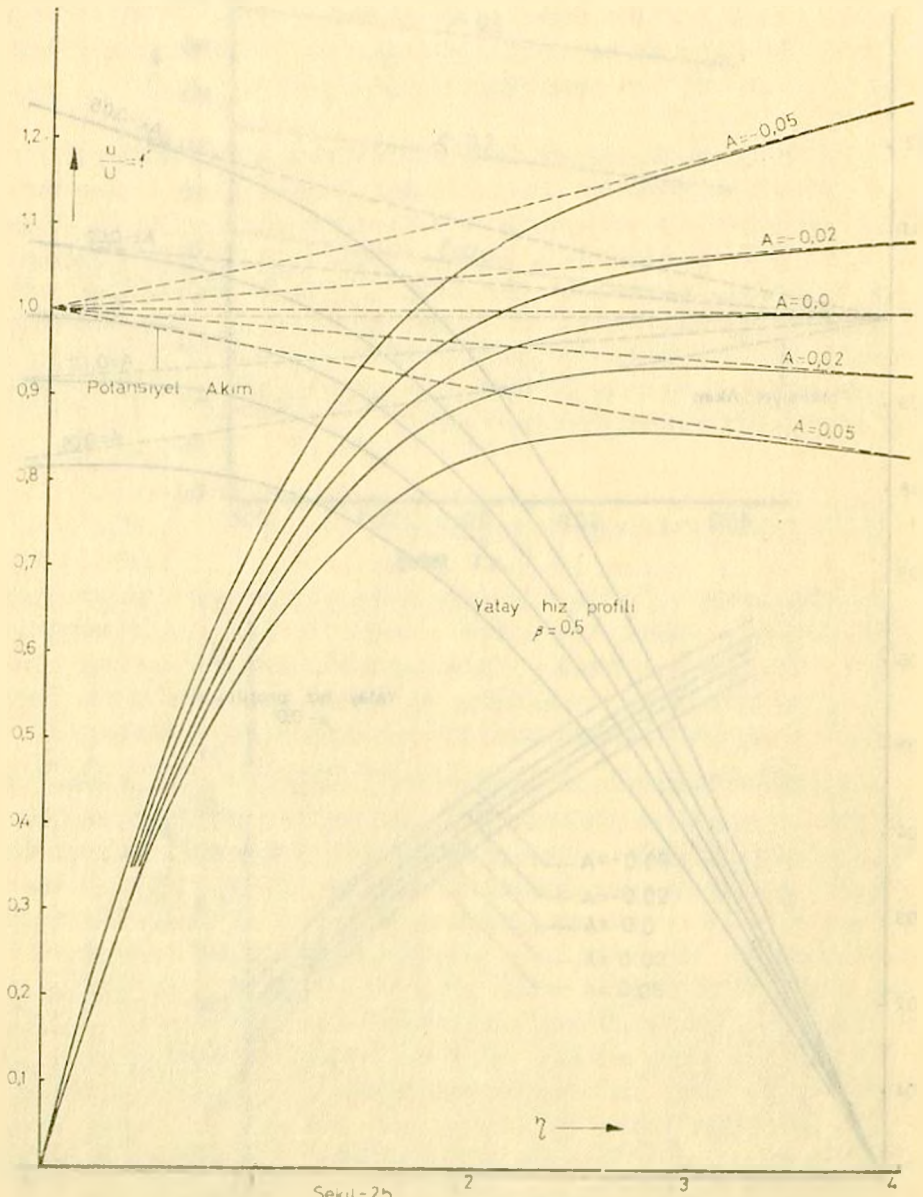


Şekil 1 a.

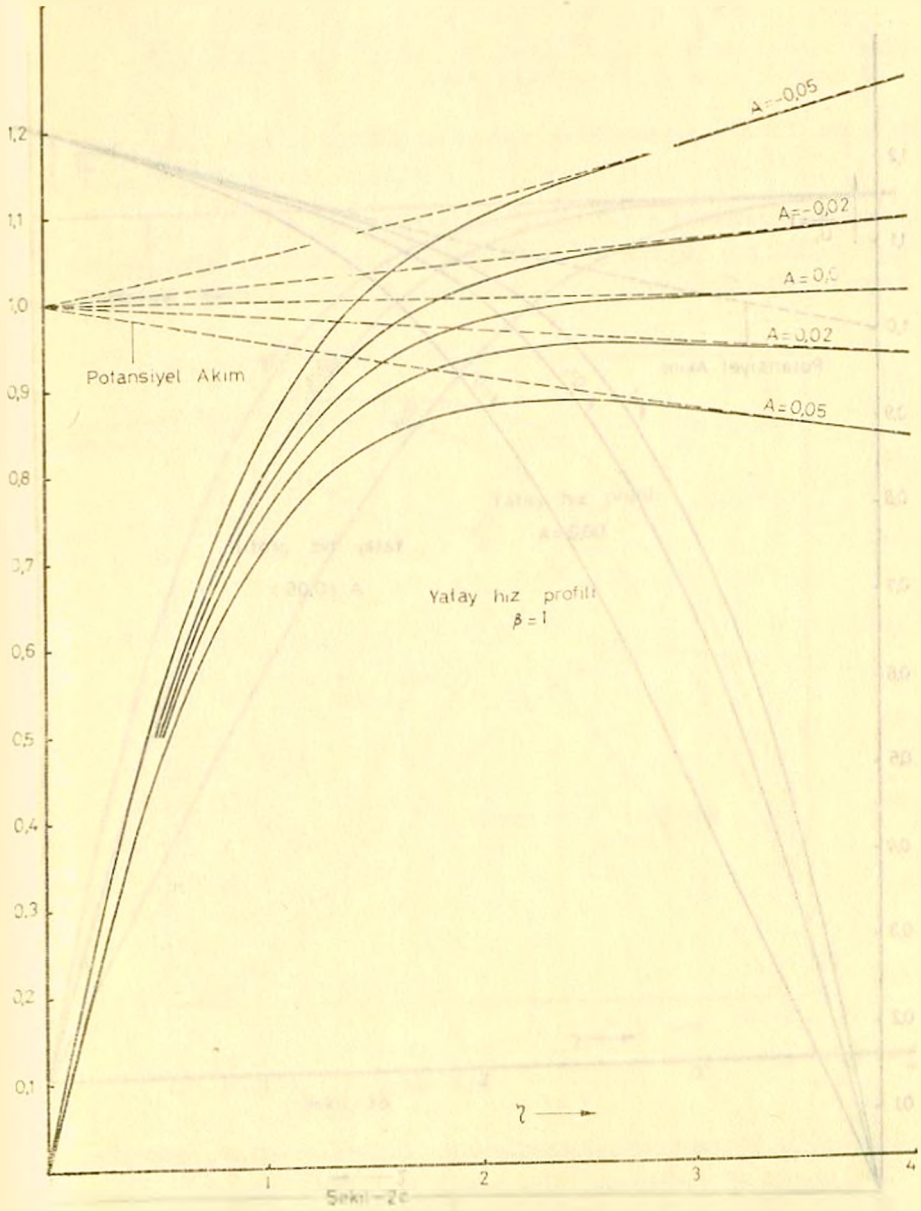


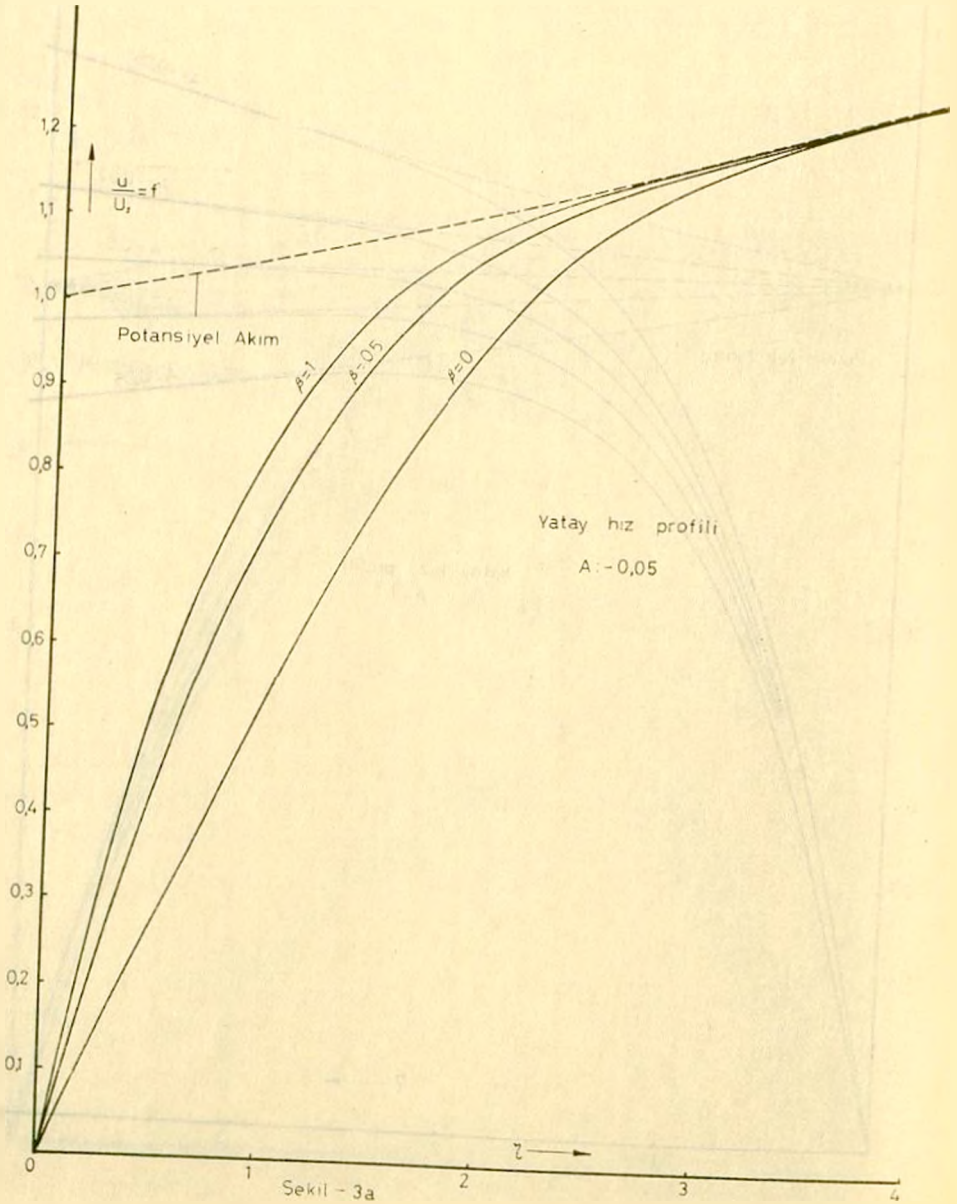
Şekil 1 b.

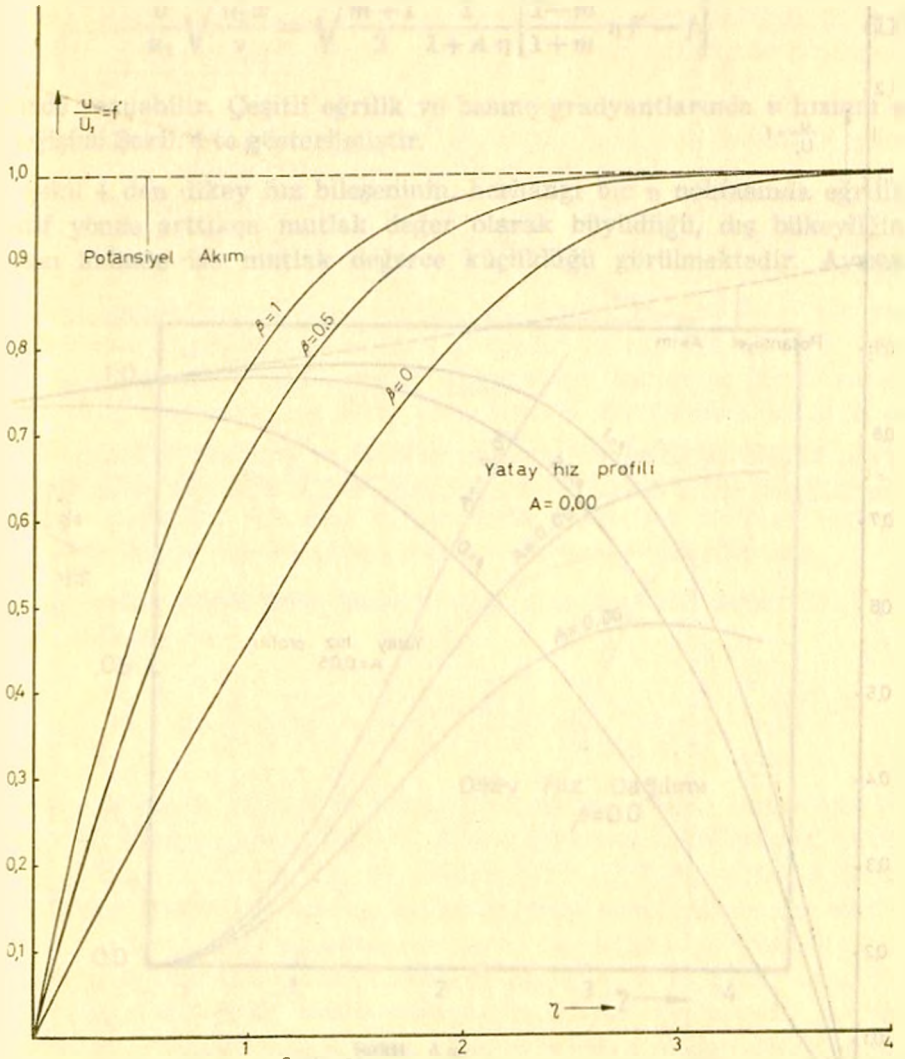




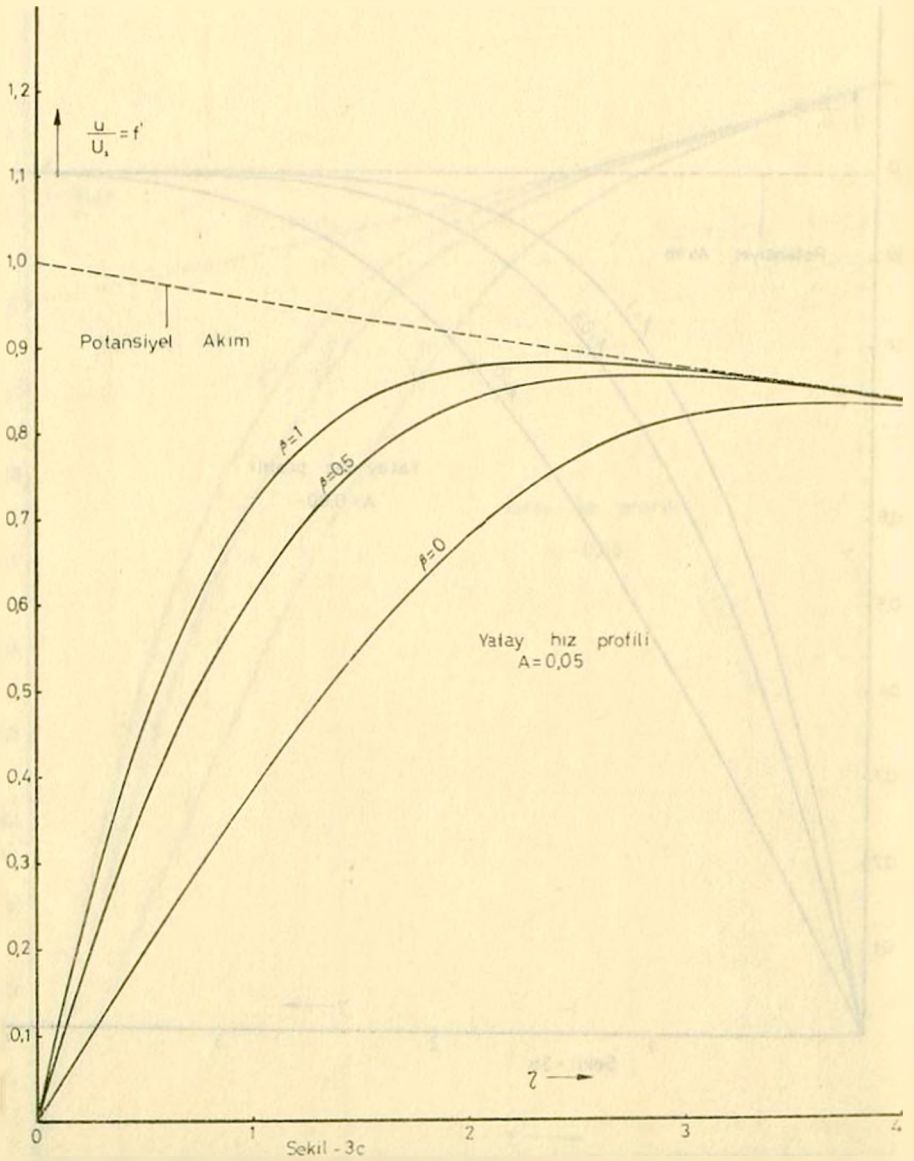
Şekil - 2b







Sekil - 3b

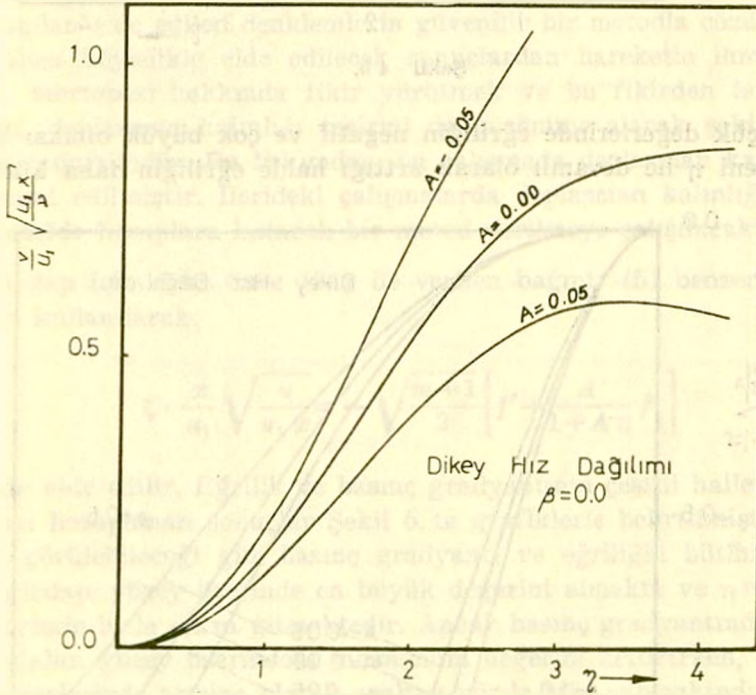


Hızın v bileşeninin değişimi (6 b) ifadesinde, sabitlerin değerleri de kullanılarak;

$$\frac{v}{u_1} \sqrt{\frac{u_1 x}{\nu}} = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{1+A\eta} \left[\frac{1-m}{1+m} \eta f' - f \right] \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir. Çeşitli eğrilik ve basınç gradyantlarında v hızının η ile değişimi Şekil. 4 te gösterilmiştir.

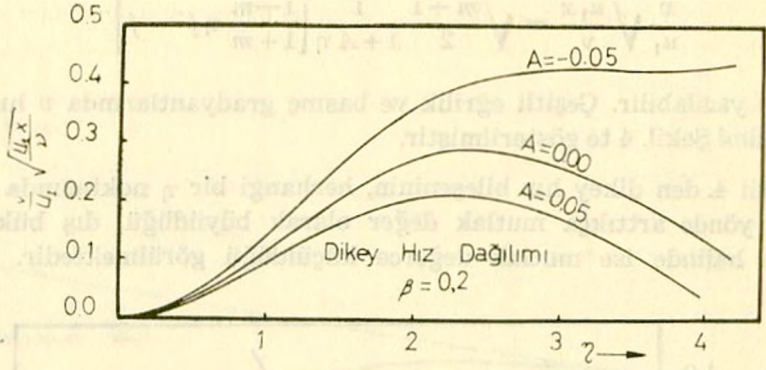
Şekil 4. den dikey hız bileşeninin, herhangi bir η noktasında eğrilik negatif yönde arttıkça mutlak değer olarak büyüdüğü, dış bükeyliğin artması halinde ise mutlak değerce küçüldüğü görülmektedir. Ayrıca



Şekil 4 n.

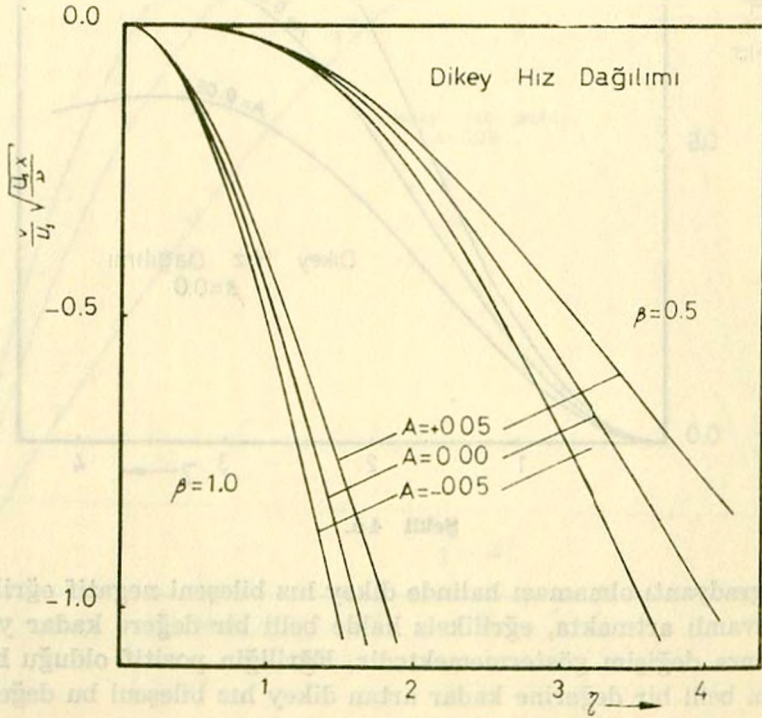
basınç gradyantı olmaması halinde dikey hız bileşeni negatif eğriliklerde η ile devamlı artmakta, eğriliksiz halde belli bir değere kadar yükselip daha sonra değişim göstermemektedir. Eğriliğin pozitif olduğu hallerde ise η nın belli bir değerine kadar artan dikey hız bileşeni bu değerde bir

maksimumdan geçtikten sonra azalmaya başlamaktadır. Basınç gradyanının artması v hız bileşenini çeşitli şekillerde etkilemektedir. Şöyle ki:



Şekil 4 b.

β nın küçük değerlerinde eğriliğin negatif ve çok büyük olması halinde hız bileşeni η ile devamlı olarak arttığı halde eğriliğin daha küçük ne-



Şekil 4 c.

gatif değerlerinde ve bütün pozitif değerlerinde bir maksimumdan sonra η ile azalan bir değişim göstermektedir. β nın 0,2 den biraz büyük değerlerinde v hız profilleri bütün eğrilik hallerinde η ile artıp, bir maksimumdan sonra azalmaktadır. Daha büyük basınç gradyanları halinde ise bütün eğriliklerde dikey hız bileşeni η ile negatif yönde büyümektedir.

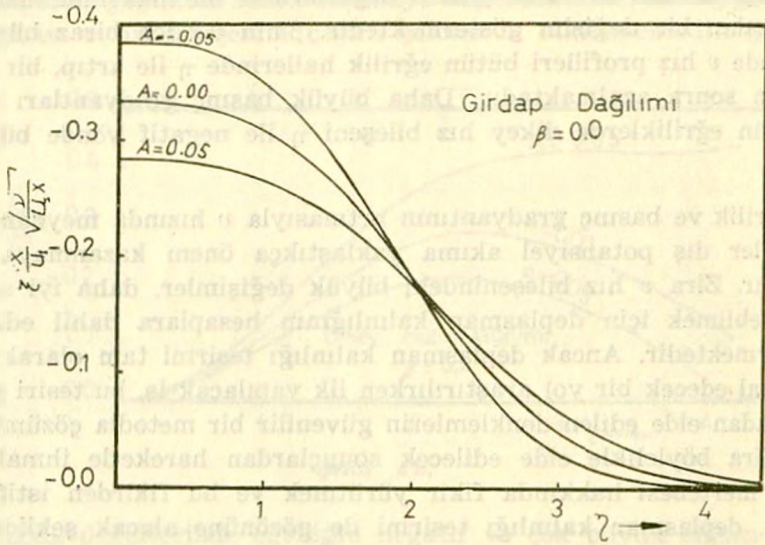
Eğrilik ve basınç gradyantının artmasıyla v hızında meydana gelen değişimler dış potansiyel akıma yaklaştıkça önem kazanmaya başlanmaktadır. Zira v hız bileşenindeki büyük değişimler, daha iyi sonuçlar elde edebilmek için deplasman kalınlığının hesaplara dahil edilmesini gerektirmektedir. Ancak deplasman kalınlığı tesirini tam olarak hesaplara ithal edecek bir yol araştırılırken ilk yapılacak iş, bu tesiri gözönüne almadan elde edilen denklemlerin güvenilir bir metodla çözümünü olmalıdır. Zira böylelikle elde edilecek sonuçlardan hareketle ihmal edilen tesirin mertebesi hakkında fikir yürütmek ve bu fikirden istifade ile metodu, deplasman kalınlığı tesirini de gözönüne alacak şekilde geliştirmek mümkündür. Bu bakımdan, bu çalışmada deplasman kalınlığı tesiri ihmal edilmiştir. İlerideki çalışmalarda deplasman kalınlığını güvenilir şekilde hesaplara katacak bir metod verilmeye çalışılacaktır.

Girdap için daha önce (3a) ile verilen bağıntı (5) benzerlik dönüşümleri kullanılarak;

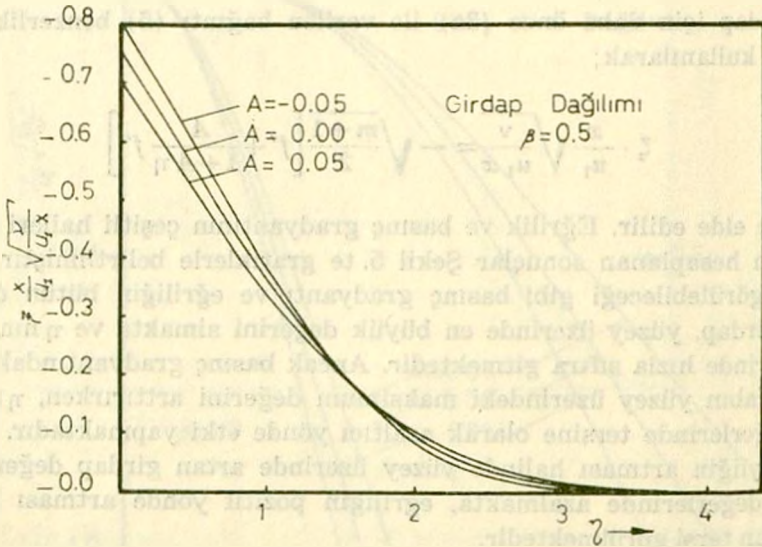
$$\zeta \cdot \frac{x}{u_1} \sqrt{\frac{v}{u_1 x}} = -\sqrt{\frac{m+1}{2}} \left[f'' + \frac{A}{1+A\eta} f' \right]$$

şeklinde elde edilir. Eğrilik ve basınç gradyantının çeşitli halleri için bu ifadeden hesaplanan sonuçlar Şekil 5. te grafiklerle belirtilmiştir. Şekillerden görülebileceği gibi basınç gradyanti ve eğriliğin bütün değerlerinde girdap, yüzey üzerinde en büyük değerini almakta ve η nın büyük değerlerinde hızla sifıra gitmektedir. Ancak basınç gradyantındaki artışlar girdabın yüzey üzerindeki maksimum değerini arttırırken, η nın büyük değerlerinde tersine olarak azaltıcı yönde etki yapmaktadır. Ayrıca iç bukeyliğin artması halinde yüzey üzerinde artan girdap değeri η nın büyük değerlerinde azalmakta, eğriliğin pozitif yönde artması halinde ise bunun tersi görülmektedir.

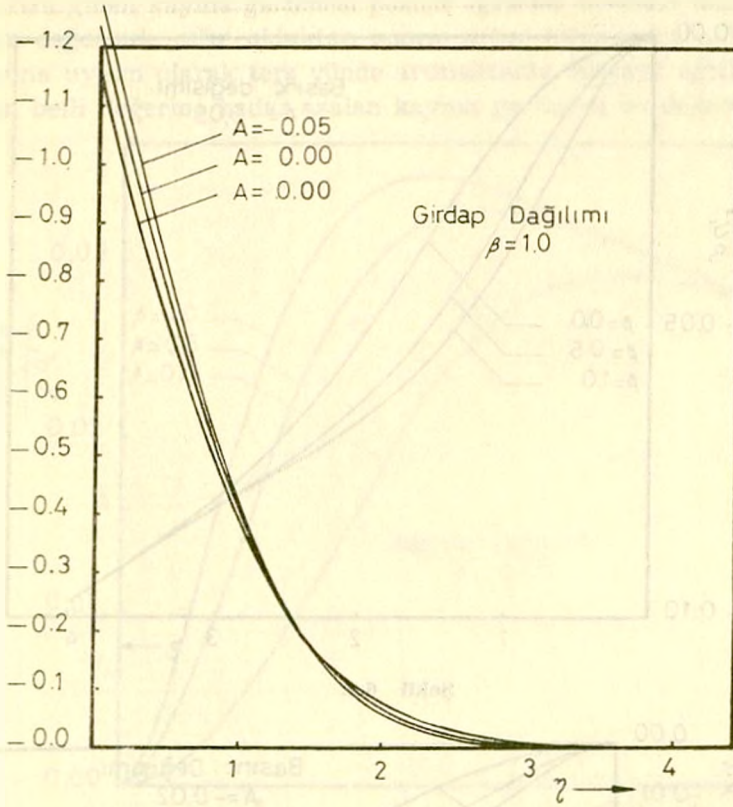
Yüzeye dik doğrultudaki basınç gradyanti hareket denkleminin (2b) ile verilen, y doğrultusundaki bileşeninden hesaplanabilir. (2b) denklemi, benzerlik dönüşümleri yapıldığı takdirde aşağıdaki şekli alır.



Şekil 5 a.



Şekil 5 b.



Şekil 5 c.

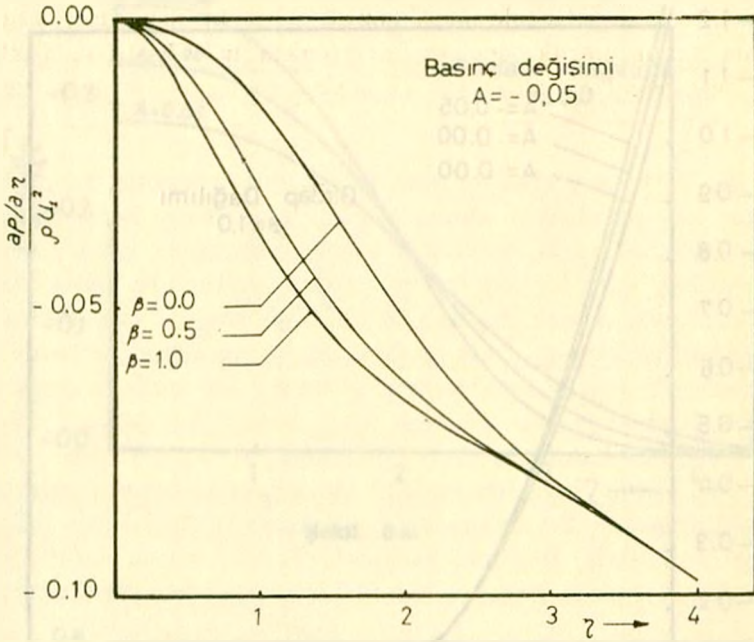
$$\frac{\partial p / \partial \eta}{\rho u_1^2} = \frac{A}{1 + A \eta} (f')^2$$

Bu ifadeden hesaplanan değerler Şekil. 6 da gösterilmiştir. Bunlardan basıncın iç bükey duvarlardan uzaklaştıkça azaldığı, dış bükey duvarlardan uzaklaştıkça ise arttığı anlaşılmaktadır. β daki artışlar ise duvardan uzaklaştıkça basınçta meydana gelen değişimi arttırıcı yönde etki etmektedir.

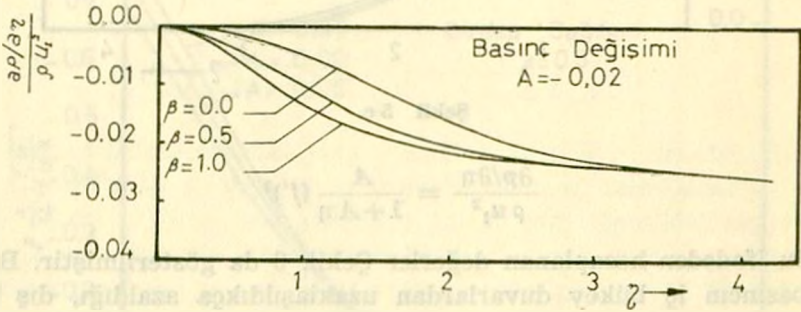
Sınır tabaka içindeki kayma gerilmesi için de (3b) ifadesinden benzerlik dönüşümleri yardımıyla;

$$\frac{\tau}{\rho u_1^2} \sqrt{\frac{u_1 x}{\nu}} = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \left[f'' - \frac{A f'}{1 + A \eta} \right]$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı $\eta = 0$ için yüzey üzerindeki sürtünmeyi verir :



Şekil 6 a.

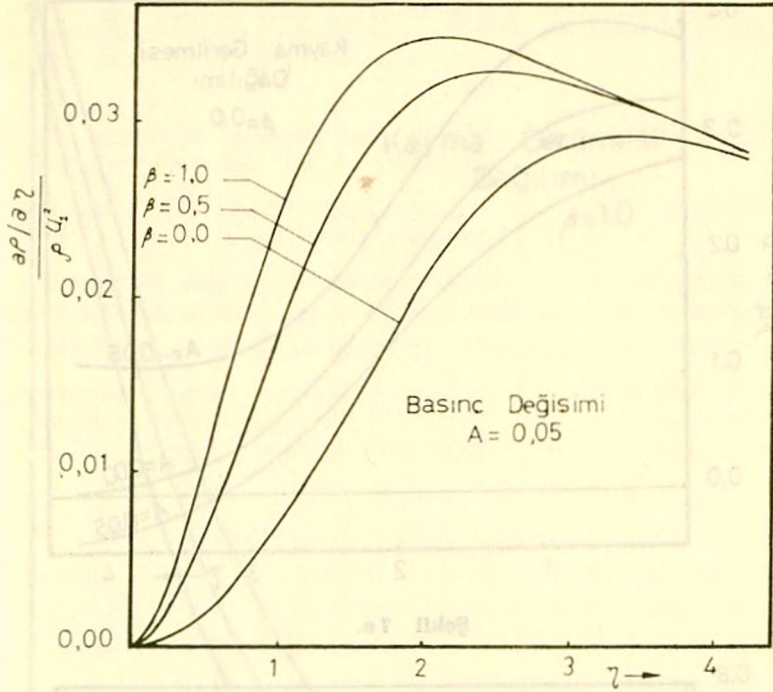


Şekil 6 b.

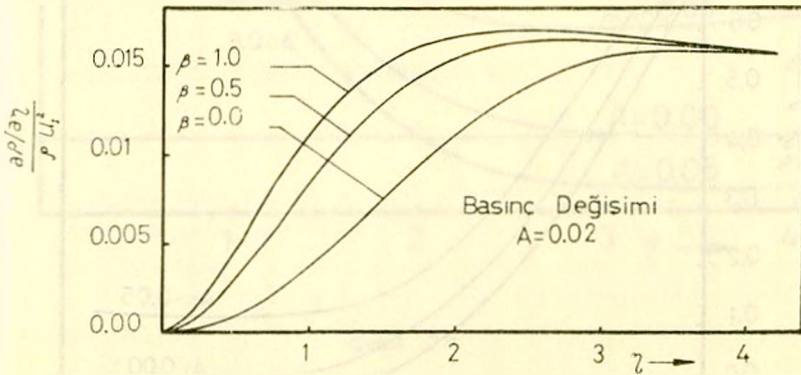
$$\frac{\tau_w}{\rho u_1^2} \sqrt{\frac{u_1 x}{\nu}} = \sqrt{\frac{m+1}{2}} [f''(0)]$$

Kayma gerilmesiyle ilgili değişimleri Şekil. 7 de görmek mümkündür. Bunlardan, bütün eğrilik ve basınç gradyanlarında kayma gerilmesinin sınır tabaka içinde potansiyel akıma doğru gidildikçe azaldığı anlaşılmaktadır. Ancak eğriliğin sıfır olduğu duvarlarda η nın büyük değerle-

rinde sifıra giden kayma gerilmesi pozitif eğrilikli duvarlar halinde η nin belli bir değerinde sıfır olduktan sonra u hız bileşeninin η boyunca azalmasına uygun olarak ters yönde artmaktadır. Negatif eğrilikli halde ise η nin belli değerine kadar azalan kayma gerilmesi bu değerden sonra

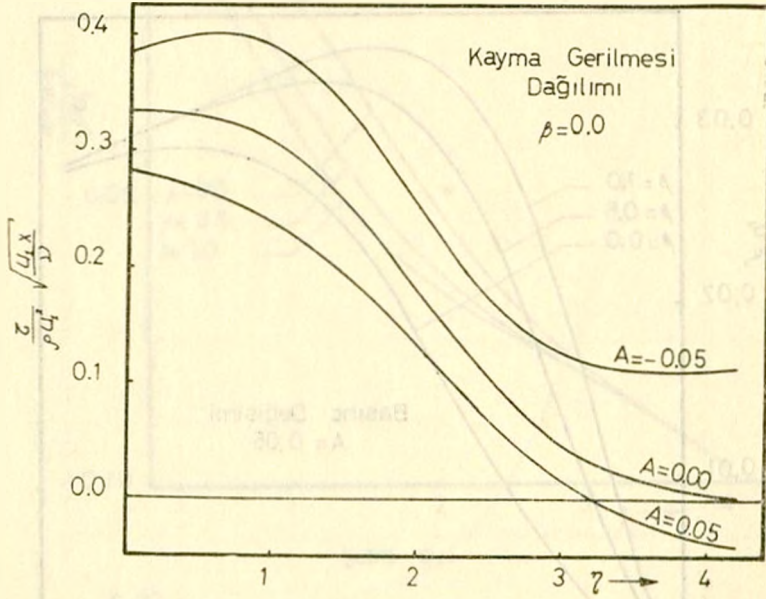


Şekil 6 c.

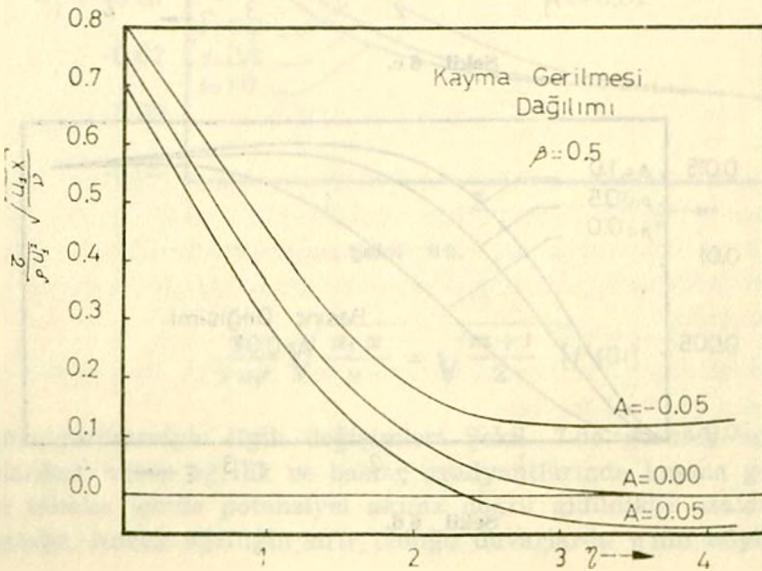


Şekil 6 d.

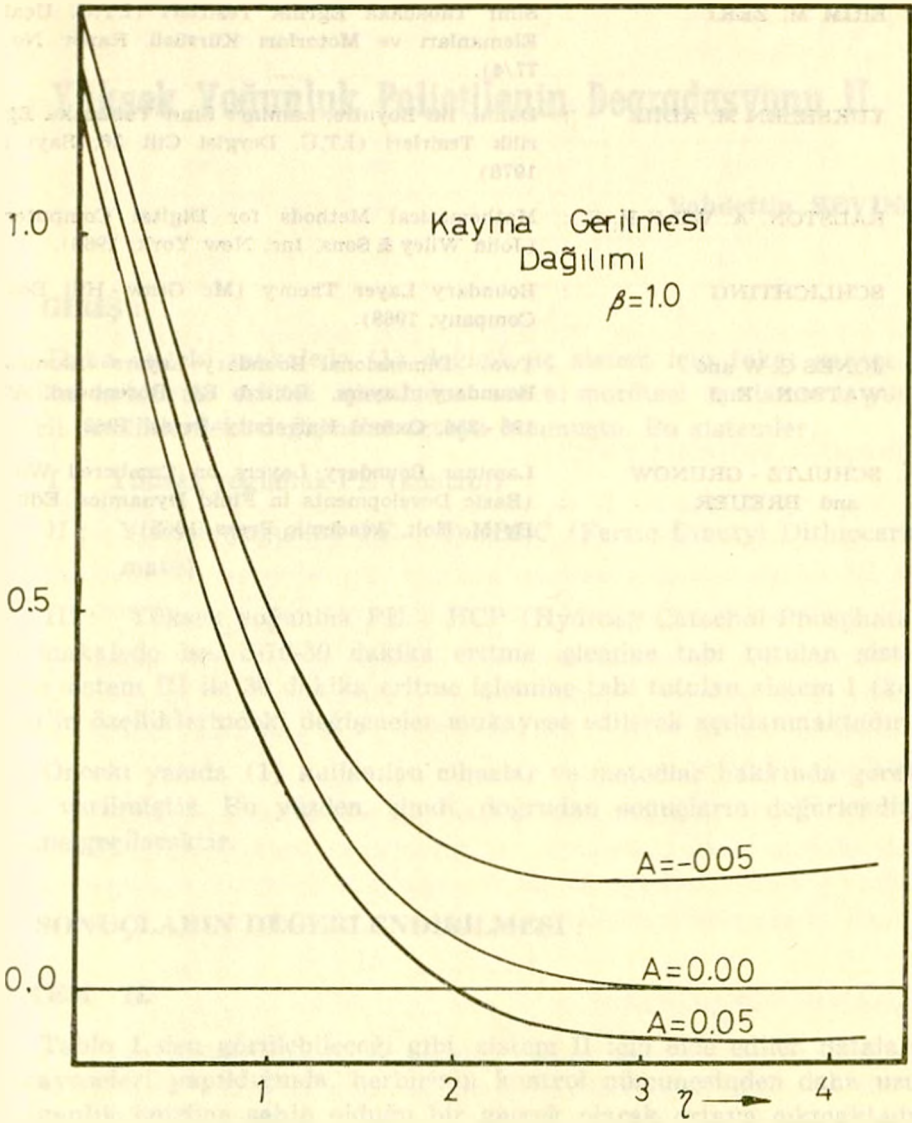
artmaktadır. β basınç gradyantındaki artımlar kayma gerilmesini duvar yakınlarında arttırırken, sınır tabakanın dışına doğru azaltıcı yönde etki yapmaktadır.



Şekil 7 a.



Şekil 7 b.



Şekil 7 c.

REFERANSLAR :

- (1) ERİM M. ZEKİ : Sınır Tabadaka Eğrılık Tesirleri (İ.T.Ü. Uçak Elemanları ve Motorları Kürsüsü. Rapor No : 77/4).
- (2) YÜKSELEN M. ADİL : Daimi, İki Boyutlu, Laminer Sınır Tabadaka Eğrılık Tesirleri (İ.T.Ü. Dergisi Cilt 36, Sayı 1, 1978)
- (3) RALSTON. A. WILF H. S. : Mathematical Methods for Digital Computers (John Wiley & Sons, Inc. New York, 1968).
- (4) SCHLICHTING : Boundary Layer Theory (Mc Graw - Hill Book Company, 1968).
- (5) JONES C. W and WATSON E. J. : Two - Dimensional Boundary Layers (Laminar Boundary Layers, Edited By Rosenhead, PP 198 - 256, Oxford University Press, 1963).
- (6) SCHULTZ - GRUNOW and BREUER : Laminar Boundary Layers on Cambered Walls (Basic Developments in Fluid Dynamics, Edited By M. Holt, Academic Press, 1965).