

# Dişli Çark Yağlamasında Elasto - hidrodinamik Davranışın Matematik Bir Modeli

Ismail CÜRGÜL<sup>(1)</sup>

## Ö Z E T

Aşırı yüklenmiş dişli çarkların yağlanmasında elasto - hidrodinamiğin ehemmiyetini ihmal etmek büyük bir hatadır. Film kalınlığına olan etkisi ile elastik deformasyon aynı zamanda basınç yayılışını da etkilemektedir. Bu makalede, diş geometrisinden dolayı meydana gelen film kalınlığı ile diş temas yüzeylerinde evolvent profillerinin eğrilik yarıçapı, dairesel eğrinin yarıçapı kabul edilerek temastaki iki diş arasında elasto - hidrodinamik tesirlerle meydana gelebilecek film kalınlığı tayin edilmiştir. Uygun basınç dağılımı, akışın devamlı olduğu halde temas alanı boyunca Newtoniyen akış şartlarına göre ele alınmış ve Reynolds diferansiyel denklemi ile hesaplanabileceği kabul edilmiştir. Bu şekilde kurulan matematik modelin çözümüne uygun metodların geliştirilmesi ileriki çalışmalarda ele alınacaktır.

## 1. DIŞLI ÇARK DIŞ TEMAS KİNEMATİĞİNİN SİLİNDİRLERLE

### TEMSİLİ

Yuvarlanma hareketi yapan makina parçaları arasındaki birçok temaslar silindirlerle temsil edilebilirler. Bu suretle temasın yakın civarında deforme olmamış katıların profilleri ile iyi bir geometrik uyum temin edilebilir. Silindirlerle temsilde temasın biraz uzağındaki geometrik hatalar ihmal edilebilir küçükölçtür.

Bu hadiseye iyi bir örnek olarak silindirik makaralı yataklar gösterilebilir. Burada harekete dahil olan bütün elemanlar silindiriktirler.

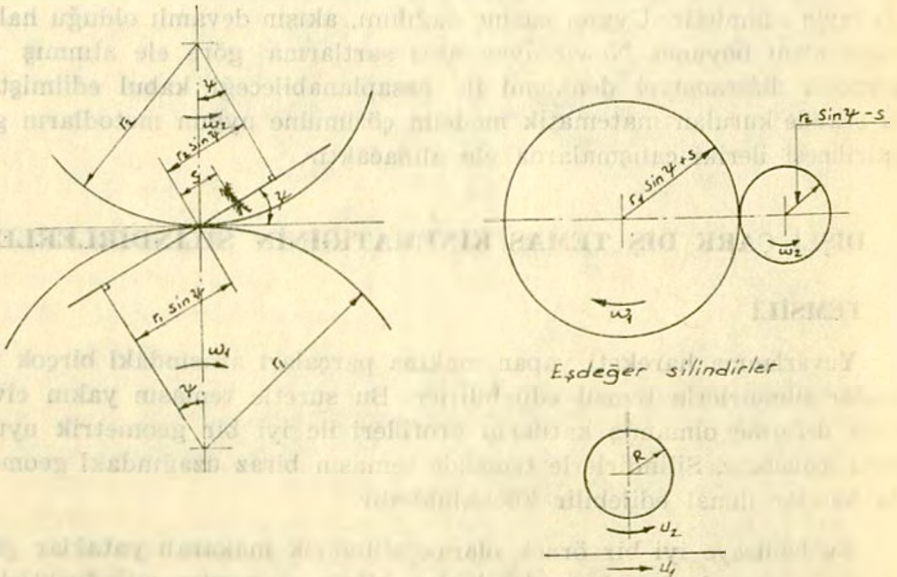
(1) Asistan, Y. Müh. Sakarya D.M.M. Akademisi

Yuvarlanma hareketini temin eden  $r$  yarıçaplı silindirler iç bileziğin dışında  $R_1$  yarıçaplı bir konveks yüzeyde ve dış bileziğin içinde  $R_1+2r$  yarıçaplı bir konkav yüzeyde hareket etmektedirler. Burada  $r$  silindir yarıçapına nazaran  $R_1$  yarıçapı oldukça büyüktür ve bu herhangi bir temas anında küçük bir hata ile silindir - düzlem teması olarak düşünülebilir. Bu durumda iç ve dış bileziklerle silindirlerin eşdeğer yarıçapları sırasıyla

$$R = \frac{rR_1}{r+R_1} \quad \text{ve} \quad R = \frac{r(R_1+2r)}{r+R_1}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Bu eşdeğer silindirlerle temsili 1942 de Merritt (3) ilk defa evolvent dişli çarklara tatbik etmiştir. Merritt'in yaptığı şudur: yuvarlanma dairesi temas noktasından bir  $s$  mesafede temastaki çarkların açısal hızları ( $\omega$ ) ile dönme yarıçapları ( $r_{1,2} \sin \psi \pm s$ ) iki silindirle temsil edilmiştir. Bu ifade de  $r_{1,2}$  çarkların yuvarlanma yarıçaplarını ve  $\psi$  kavrama açısını göstermektedir. Bir evolvent dişli temasının temsili şekli şekil: 1 de görülmektedir.



Şekil 1. Evolvent dişliler için eşdeğer silindirler

Şekil: 1 den de görülebileceği üzere yuvarlanma dairesi temas noktasından  $s$  mesafedeki temas noktasında silindir yarıçapları

$$R_1 = r_1 \sin \psi + s$$

$$R_2 = r_2 \sin \psi - s$$

ve yüzey hızları

$$u_1 = (r_1 \sin \psi + s) \omega_1$$

$$u_2 = (r_2 \sin \psi - s) \omega_2$$

şeklinde hesaplanır. Bu duruma göre herhangi bir anda silindir çiftinin eşdeğer yarıçapı

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ve} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

buradan da

$$R = \frac{(r_1 \sin \Psi + s) (r_2 \sin \Psi - s)}{(r_1 + r_2) \sin \Psi}$$

yazılabilir. Bu ifadenin matematik anlamı şudur; iki silindir arasındaki temas bir düzlem yüzey yanında eşdeğer bir silindirle yeterli bir takribiyetle temsil edilebilir (şek. 2). Bu temsilde şart; iki silindirin çap farkları büyük olmalı ve temas noktasının merkezler doğrusuna olan uzaklığı  $x$ , küçük silindir yarıçapından çok daha küçük olmalıdır (şek. 2b).

Şekil: 2a dan

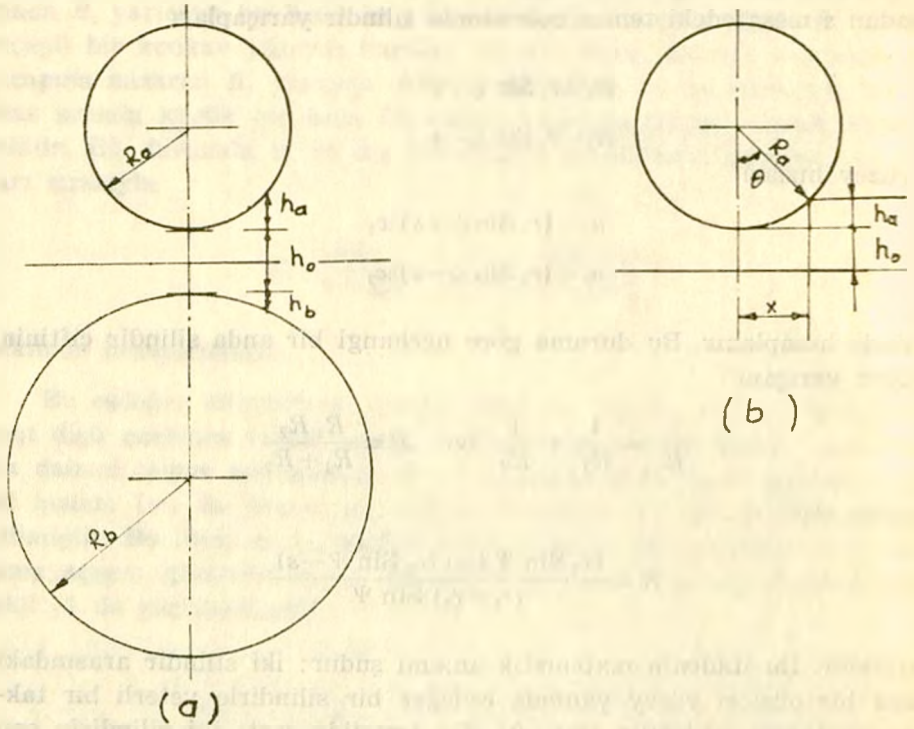
$$h = h_0 + h_a + h_b \quad (1)$$

ve şekil: 2b den

$$\begin{aligned} h_a &= R_a - R_a \cos \theta \\ &= R_a (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

yazılabilir. Ayrıca şek. 2b den

$$\begin{aligned} x &= R_a \sin \theta \\ x^2 &= R_a^2 \sin^2 \theta \\ &= R_a^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= R_a^2 (1 - \cos \theta) (1 + \cos \theta) \end{aligned}$$



Şekil: 2. Eşdeğer silyndirler

yazılır ve

$$1 - \cos \theta = \frac{x^2}{R_a^2 (1 + \cos \theta)}$$

ifadesi (2) denkleminde yerine yazılırsa

$$h_a = \frac{x^2}{R_a (1 + \cos \theta)}$$

ifadesi elde edilir. Çok küçük  $x$  değerleri için  $\cos \theta \approx 1$  alınabilir. Böylece

$$h_a = \frac{x^2}{2R_a} \quad (3)$$

ve benzer şekilde

$$h_b = \frac{x^2}{2R_b} \quad (4)$$

yazılarak bulunan bu (3) ve (4) ifadeleri (1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R_a} + \frac{x^2}{2R_b}$$

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) \quad (5 a)$$

Burada  $x$  in verilmiş herhangi bir değerinde silindirlerin ayrılması eşit olursa

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}$$

yazılabileceğinden iki silindir arasındaki film kalınlık denklemi

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R} \quad (5 b)$$

olarak elde edilir.

## 2. YAĞLAYICI FİLM BASINCI

Yağlayıcı filmde meydana gelen basınç Reynolds diferansiyel denklemi yardımı ile hesap edilebilir. Kaymalı yataklardaki yük taşıyıcı filmin teşekkülü için çıkarılmış olan bu denklem, düz bir yüzeye yakın eğri yüzeyine eşdeğer yarıçaplı bir silindir durumunun mütalaası ve akışkan filminin eğriliğinden dolayı bütün etkenlerin ihmali ile hidrodinamik analizin tertiplenmesinde de kullanılabilir. Yağlayıcının Newtoniyen bir akışkan kabul edilmesi ve yan kaçakların ihmali ile Reynolds diferansiyel denklemi,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\rho h^3}{12 \eta} \frac{dp}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\rho u h)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\rho$  yağlayıcı akışkan yoğunluğunu,  $\eta$  akışkanın viskozitesini ve  $u$  akışkan sınır (yüzey) hızını temsil ederler. Bu ifadenin  $x$  e göre integrali alınır, Reynolds denkleminin bilinen şekli ortaya çıkar;

$$\frac{dp}{dx} = 12 \eta u \left[ \frac{\rho h - (\rho h)_e}{\rho h^3} \right] \quad (6)$$

Burada indis olarak kullanılan  $(e)$ ,  $p = \frac{dp}{dx} = 0$  maksimum basınç noktasındaki şartları gösterir, yani bu noktada film kalınlığı  $h = h_0$  olmaktadır.

$p = \frac{dp}{dx} = 0$ , maksimum basınç noktasında  $(\rho h)_0$  şartları

$$\frac{\rho h^3}{12 \eta} \frac{dp}{dx} = \rho u h + c$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \text{ için } C = -u (\rho h)_0$$

ve çıkış noktası şartları :

$$x = x^* \text{ noktasında } p = \frac{dp}{dx} = 0 \text{ ve } h = h_0$$

olduğuna göre akışkan sıkıştırılmaz ise (6) denklemi,

$$\frac{dp}{dx} = 12 \eta u \left[ \frac{h - h_0}{h^3} \right] \quad (7)$$

Yağlayıcı akışkan sıkıştırılabilir bir akışkan ise denklem,

$$\frac{dp}{dx} = 6 \eta (u_1 + u_2) \left[ \frac{h - h_0 (\rho_0 / \rho)}{h^3} \right] \quad (8)$$

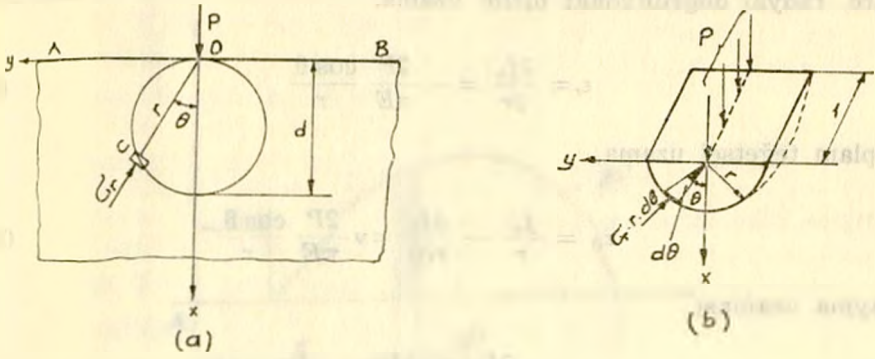
şeklini alır. Burada  $\rho_0$  yağlayıcı akışkanın giriş yoğunluğu olmaktadır.

### 3. YARI SONLU BİR ELEMANIN ELASTİK DEFORMASYONU

a) *Düz Sınır Üzerindeki Bir Noktaya Etkiyen Münferit Kuvvet :*

Yarı sonsuz bir plağın  $AB$  yatay düz sınırı üzerindeki bir noktaya etkiyen münferit bir  $P$  kuvvetini göz önüne alalım (şek. 3).

Yükün plak kalınlığı boyunca yayılışı şek. 3b den de görüldüğü gibi düzgündür. Plak kalınlığı birim olarak alındığından  $P$  yükü birim kalınlığa gelen yük olur. Bu haldeki gerilme yayılışı basit radyal yayılma



Şekil 3. Düz sınırdaki bir noktaya etkiyen münferit kuvvet

şeklinde olup yükün tatbik noktasından  $r$  uzaklıktaki  $C$  elemanına etkiyen radyal gerilme

$$\sigma_r = (-) \frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

dir.  $\sigma_0$  teğetsel gerilmesi ve  $\tau_{,0}$  kayma gerilmesi sıfırdır. Her  $r \cdot d\theta$  yüzey elemanına etkiyen kuvvetlerin  $\sigma_r r d\theta \cdot \cos \theta$  düşey bileşenleri toplamı  $P$  münferit kuvvetini dengelemelidir. O halde

$$2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r \cos \theta r d\theta = - \frac{4P}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = -P$$

olmalıdır.

Merkezi  $x$  eksenini üzerinde ve  $y$  eksenine 0 da teğet olan herhangi bir  $d$  çaplı daire üzerindeki herhangi bir  $C$  noktasında  $d \cdot \cos \theta = r$  dir. Buradan

$$\sigma_r = (-) \frac{2P}{\pi d}$$

yazılabilir. Bu gerilme değeri dairenin her yerinde aynı olmakla beraber yükün,  $P$ , tatbik noktası olan 0 da sonsuzdur. Fakat tatbikatta yükün tatbik noktasındaki malzemede daima bir miktar akma olur ve bunun sonucu yük sonlu bir alana yayılmış olur. Plastik deformasyona uğrayan kısmın kesilip çıkarıldığı düşüncesinden hareket edilirse plağın geri kalan kısmına elastisite denklemleri tatbik edilebilir.

Düz bir kenara dik etkiyen münferit kuvvet için, Hook kanununa göre, radyal doğrultudaki birim uzama,

$$\epsilon_r = \frac{\partial f_u}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r} \quad (9)$$

toplam teğetsel uzama,

$$\epsilon_\theta = \frac{f_u}{r} - \frac{\partial f_v}{r \partial \theta} = \nu \frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r} \quad (10)$$

kayma uzaması,

$$\gamma_{r\theta} = r \frac{\partial f_u}{\partial \theta} + \frac{\partial f_v}{\partial r} - \frac{f_v}{r} = 0 \quad (11)$$

Burada  $f_u$  radyal yer değiştirmeyi,  $f_v$  teğetsel yer değiştirmeyi ve  $\nu$  Poisson oranını temsil etmektedirler.

Yarı sonsuz plağın  $x$  eksenini üzerindeki noktalarının yatay (boyuna) yer değiştirmedeği kabul edilerek  $\theta=0$  sınır şartı ile  $f_u$  ve  $f_v$  integ-rasyona tabi tutulur.  $\theta = \pm \pi/2$  için yatay yer değiştirme,

$$(f_u)_{\theta=\pi/2} = -\frac{(1-\nu)P}{2E} \quad \text{ve} \quad (f_u)_{\theta=-\pi/2} = \frac{(1-\nu)P}{2E} \quad (12)$$

orijinin her iki tarafında sabit bir değer olmaktadır.

Düşey yer değiştirme,

$$(f_v)_{\theta=-\pi/2} = -(f_v)_{\theta=\pi/2} = \frac{2P}{\pi E} \ln \frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E} \quad (13)$$

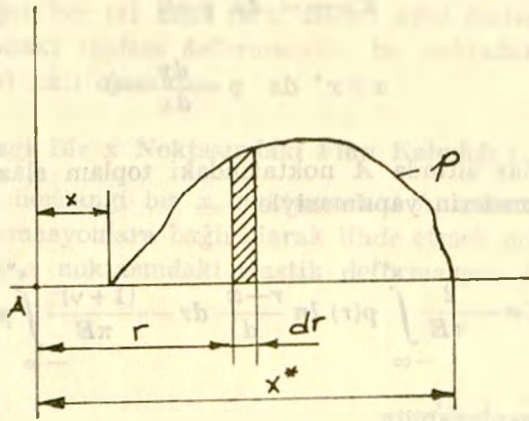
ifadesinden hesaplanabilir. Daha önce  $P$  yükünün tatbik noktası civarında küçük yarıçaplı silindirik bir yüzeyde, elastisite denklemlerinin sağlanamadığı gerekçesiyle, malzemenin kesilerek çıkarıldığı kabul edilmişti. Hakikatte bu bölgede malzeme plastik olarak deforme olduğundan yatay yer değiştirme için elastisite denklemleri sağlanamaz. Sınırın diğer noktaları için (13) denklemi sonlu yer değiştirmeler verir.

b) *Düz Sınırın Herhangi Bir Düşey Yüküyle Yüklenmesi :*

Yarı sonsuz plağın düz kenarına herhangi bir yük dağılımının etkidiğini düşünelim (şek. 4). Bu durumdaki düşey yer değiştirmeler, mün-



ferit kuvvet hali için elde edilmiş olan (13) denkleminin kullanılmasıyla bulunabilir.

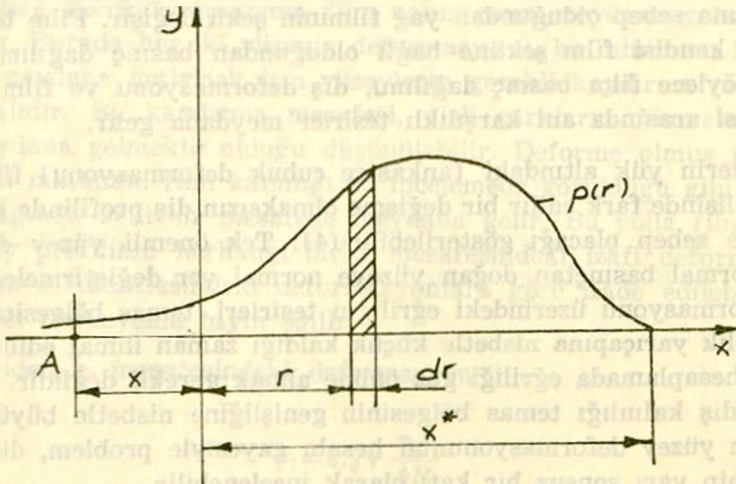


Şekil: 4. Düz sınırdaki herhangi bir yük dağılımı

Eğer düşey yayılı yükün şiddeti  $p$  ise taralı  $p \cdot dr$  yük elemanından  $r$  uzaklığındaki bir  $A$  noktasında meydana gelen toplam deformasyon,

$$h_A = \frac{2}{\pi E} \int_x^{x^*} p \ln \frac{d}{r} dr - \frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_x^{x^*} p dr \tag{14}$$

şeklinde dir. Yük dağılımının  $(x = -\infty)$  da başlamış olduğunu kabul edersek (şek. 5),



Şekil: 5

bu durumdaki sınır şartları

$$x = -\infty \text{ da } p = 0$$

ve

$$x = x^* \text{ da } p = \frac{dp}{dx} = 0$$

olsun. Bu şartlar altında  $A$  noktasındaki toplam elastik deformasyon, gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla,

$$h_A(x) = -\frac{2}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) \ln \frac{r-x}{d} dr - \frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) dr \quad (15)$$

formülü ile hesaplanabilir.

#### 4. ELASTİSİTE DENKLEMİNİN DIŞLI ÇARK YAĞLAMASINA TATBİKİ

Aşırı yüklenmiş dişli çarkların yağlanması en önemli hususlar film şekli ve basınç dağılımıdır. Elasto-hidrokinamik teoriye göre bu durum (şek. 6a) da görüldüğü gibidir. Şekilden de görüleceği gibi basınç dağılımı, yarı sonsuz bir plağın herhangi bir düşey yükte yüklenmesi haline benzerdir.

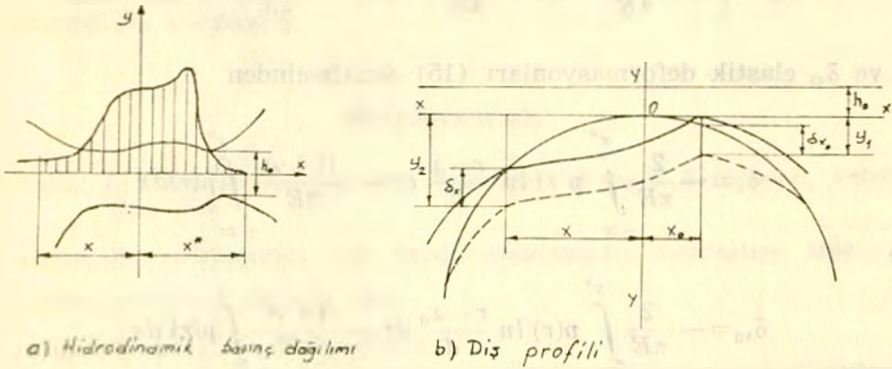
Gerçekte yağ filminde meydana gelen basınç dış yüzeyinin deformasyonuna sebep olduğundan yağ filminin şekli değişir. Film basıncının bizzatı kendisi film şekline bağlı olduğundan basınç dağılımı da değişir. Böylece film basınç dağılımı, dış deformasyonu ve film şeklinin değişmesi arasında ani karşılıklı tesirler meydana gelir.

Dişlerin yük altındaki (ankastre çubuk deformasyonu) film şeklinin kendisinde fark edilir bir değişme olmaksızın dış profilinde küçük bir dönmeye sebep olacağı gösterilebilir (4). Tek önemli yüzey deformasyonu normal basınçtan doğan yüzeye normal yer değiştirmelerdir. Yüzey deformasyonu üzerindeki eğriliğin tesirleri, temas bölgesinin genişliği eğrilik yarıçapına nisbetle küçük kaldığı zaman ihmal edilir. Bu sebepten hesaplamada eğriliği göz önüne almak gerekli değildir. Aynı zamanda diş kalınlığı temas bölgesinin genişliğine nisbetle büyüktür, bu sebepten yüzey deformasyonunun hesabı gayesiyle problem, düz bir sınıra sahip yarı sonsuz bir katı olarak incelenebilir.

Herhangi bir noktadaki film kalınlığının, eş çalışan iki dişli çark dişinin yüzey deformasyonlarının toplam değerine eşit olduğu göz önüne alınabilir. Eğer her iki dişli çark dişleri aynı malzemeden ise herhangi bir noktadaki toplam deformasyon, bu noktadaki yüzey deformasyonlarının iki katı olacaktır.

#### 4.1. Herhangi Bir $x$ Noktasındaki Film Kalınlığı :

Bu durumu, herhangi bir  $x_0$  noktasındaki  $h_0$  minimum film kalınlığı ve izafi deformasyonlara bağlı olarak ifade etmek mümkündür (şek. 6). Herhangi bir  $x$  noktasındaki elastik deformasyon  $\delta_x$  ve belirli bir



Şekil: 6. Elasto - hidrodinamik durumda basınç dağılımı ve diş yüzeyinin deformasyonu

$x_0$  mesafedeki elastik deformasyon ise  $\delta_{x_0}$  olsun. Orijinden olan bu  $x_0$  mesafesi yüzey üzerinde minimum film kalınlığının meydana geleceği yeri belirtir. Burada her iki yüzeyin deformasyonu, bu minimum film kalınlığını meydana getirmek için yüzeylerin gerekli kaydırma miktarına eşit olmalıdır. Bu kaydırma mesafesi, dişli çarkların dönmeleri sebebiyle meydana gelmekte olduğu düşünülebilir. Deforme olmuş yüzeyler arasındaki minimum film kalınlığı bu incelemede görüldüğü gibi  $O$  noktasının sağında belli bir mesafede meydana gelir. Bu yolla film kalınlığı, yüzey profilinin herhangi bir  $x$  mesafesindeki izafi deformasyonları olarak  $x_0$  mesafesindeki deformasyonlara göre ifade edilebilir. Bu  $x_0$  mesafesi iterasyonla tayin edilir.

Orijinden  $x_0$  mesafesindeki deformasyon

$$y_1 = \delta_{x_0} + \frac{x_0^2}{4R}$$

$x$  mesafesindeki deformasyon ise

$$y_2 = \delta_x + \frac{x^2}{4R}$$

$x_0$  da yağ filminin  $h_0$  kalınlığına sahip olması istendiğinden bütün noktalarındaki deformasyonlardan  $x_0$  daki deformasyon çıkarılmalıdır. İki dış için deformasyon iki kat olduğundan  $x$  noktasındaki film kalınlığı;

$$\begin{aligned} h(x) &= h_0 + 2(y_2 - y_1) \\ &= h_0 + 2\left(\delta_x + \frac{x^2}{4R} - \delta_{x_0} - \frac{x_0^2}{4R}\right) = h_0 + \frac{x^2 - x_0^2}{2R} + 2(\delta_x - \delta_{x_0}) \end{aligned} \quad (16)$$

$\delta_x$  ve  $\delta_{x_0}$  elastik deformasyonları (15) denkleminde

$$\delta_x = -\frac{2}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) \ln \frac{r-x}{d} dr - \frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) dr \quad (17)$$

ve

$$\delta_{x_0} = -\frac{2}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) \ln \frac{r-x_0}{d} dr - \frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) dr \quad (18)$$

Buradan

$$\begin{aligned} \delta_x - \delta_{x_0} &= -\frac{2}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) \left[ \ln \left( \frac{r-x}{d} \right) - \ln \left( \frac{r-x_0}{d} \right) \right] dr \\ &= -\frac{2}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) \ln \left( \frac{r-x}{r-x_0} \right) dr \end{aligned}$$

Bu ifade (16) denkleminde yerine konursa  $x$  noktasındaki film kalınlığını veren ifade ortaya çıkmış olur:

$$h(x) = h_0 + \frac{x^2 - x_0^2}{2R} - \frac{4}{\pi E} \int_{-\infty}^{x^*} p(r) \ln \left( \frac{r-x}{r-x_0} \right) dr \quad (19)$$

## 5. SONUÇ

Yukarda elde edilen (7) ve (8) nolu denklemler yağlayıcı filmindeki hidrodinamik tesiri  $p(x)=f(h)$  olarak ve (19) nolu denklem ise dişli çark dişlerinin elastik deformasyonu ile diş geometrisinden dolayı meydana gelen film kalınlığını  $h(x)=f(p)$  olarak göstermektedirler. Bu iki denklem takımı dişli çarkların Elastro - hidrodinamik yağlamasında matematik bir modeli vermektedir. Bu modelin çözümleri dişli çark yağlamasının elasto - hidrodinamik davranışının karakteristiklerini verecektir. Matematik modelin elektronik hesap makinaları yardımıyla çözülmesi gerekmektedir. Bunun için, mevcut metotlar dışında, çözümü verecek uygun bir program ve çözüm metodunun geliştirilmesi ileriki çalışmalarda ele alınacaktır.

## REFERANSLAR

1. Cürgül, İ. Evolvent Dişli Çarkların Elasto - hidrodinamik Yağlanması, Yeterlik Tezi, 1976
2. Dowson, D. — Higginson, G.R. Elasto - Hydrodynamic Lubrication, 1966
3. Merritt, H.E. Gears, Pitman, 1942
4. Radzımovsky, E.I. — Vathayanon, B.  
Influence of the Tooth Surface Deformation Upon Capacity of Hydrodynamically Lubricated Spur Gears, ASME, 1966
5. Timoshenko, S. — Goodier, J.N.  
Theory of Elasticity, 1951