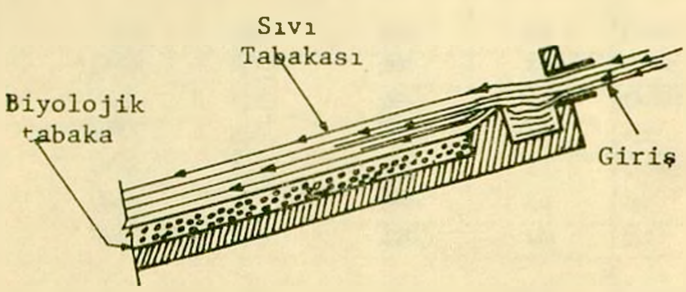
Çevre Mühendisliğinde Karşılaşılan Dispersiyon Problemlerine Ait Bazı Örnekler

Yılmaz MUSLU[1]

Giriş

Çevre mühendisliğinin pek çok dalında difüzyon problemleri ile karşılaşılmakla beraber, basit ve öğretici olması bakımından bunlar, eğik düzlem modelli biyolojik sistemlerdeki madde iletimi konusundan seçilmiştir.

Biyolojik tasfiye üniteleri, biyokimyasal reaksiyona giren kullanılmış suları katalizör vazifesi gören biyolojik maddelerle temasa getiren sistemlerdir. Mesela bunlardan damlatmalı filtrelerde biyolojik maddeler, kendilerini tutan filtre elemanı üzerinde bir tabaka meydana getirirler. Artık maddelerin ayrılması, bunları sıvıdan biyolojik tabakaya taşıyan bir madde iletimi mekanizmasına bağlıdır. Bu tabakaya taşınan artıklar daha sonra mikroorganizmalar tarafından asimile edilir. Damlatmalı filtreler için en basit fiziksel model eğik düzlem şeklinde düz bir yüzeydir. (Şekil 1) Düzlem yüzeyler son yıllarda kullanılmaya başlanan plâstik filtre elemanlarına da model vazifesi görebilirler. Bu sebeple aşağıda madde iletilmesine ait örnekler bu model üzerinden seçilmiştir. (1)



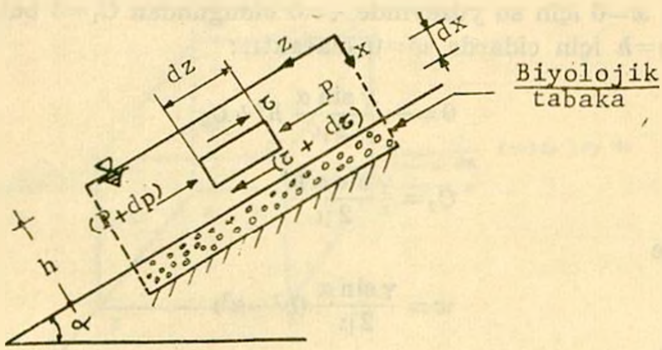
Şekil 1. Eğik düzlem şeklinde bir biyolojik sistem modeli (Maier - Behn).

[1] Prof. Dr., İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Çevre Bilimleri ve Teknolojisi Kürsüsü ve Sakarya D.M.M. Akademisi Öğretim Üyesi

Eğik Düzlem Üzerinde Lâminer Akım

Reynolds sayısının 140 dan küçük olması halinde eğik düzlem üzerindeki akım lâminerdir. Bu sayının 400 den büyük değerlerinde türbülans pek aşikar hale gelir.

Şekil düşlemine dik mesafeyi birim alarak Şekil 2 deki eğik düzlem üzerindeki sıvı elemanına tesir eden kuvvetlerin z - ekseni doğrultusundaki denge denkleminden



Şekil 2. Eğik düzlem üzerinde akım.

$$pdx + dz\,dx\,\gamma \sin \alpha + (\tau + d\tau)\,dz = (p + dp)\,dx + \tau\,dz$$

$$dzdx\,\gamma \sin \alpha = dpdx - d\tau dz$$

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{d\tau}{dx} = -\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dz} + \sin \alpha \qquad (1)$$

elde edilir. Üniform bir akım söz konusu olduğundan (1) denkleminde $dp/dz = 0$ konulursa

$$J = \sin \alpha = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\tau}{dx} \qquad (2)$$

bulunur. Akışkanların sürtünmesine ait Newton kanunu gereğince, z doğrultusundaki w hızı için

$$\tau = \mu \frac{dw}{dx} \qquad (3)$$

yazılabileceğinden (2) denklemi

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\gamma \sin \alpha}{\mu}$$

şekline girer. Bu denklemin $x=0$ ve $x=h$ arasında entegrasyonu ile

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{\gamma \sin \alpha}{\mu} x + C_1 \tag{4}$$

$$w = -\frac{\gamma \sin \alpha}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2 \tag{5}$$

elde edilir. $x=0$ için su yüzeyinde $\tau=0$ olduğundan $C_1=0$ bulunur. Diğer taraftan $x=h$ için cidarda $w=0$ olacaktır:

$$0 = -\frac{\gamma \sin \alpha}{2\mu} h^2 + C_2 \tag{6}$$

$$C_2 = \frac{\gamma \sin \alpha \, h^2}{2\mu} \tag{7}$$

Bu sebeple

$$w = \frac{\gamma \sin \alpha}{2\mu} (h^2 - x^2) \tag{8}$$

elde edilir.

Bu hız dağılımı yardımıyla birim genişlikten geçen debi

$$q = \frac{\gamma \sin \alpha}{2\mu} \int_{x=0}^{x=h} (h^2 - x^2)\, dx \tag{9}$$

$$q = w_{ort}\, h = \frac{\gamma \sin \alpha \, h^3}{3\mu} \tag{10}$$

ve ortalama hız

$$w_{ort} = \frac{\gamma \sin \alpha \, h^2}{3\mu} \tag{11}$$

elde edilir. Buna göre 8 denklemi

$$w = \frac{3}{2} w_{ort} - \frac{\gamma \sin \alpha}{2\mu} x^2 \tag{8 a}$$

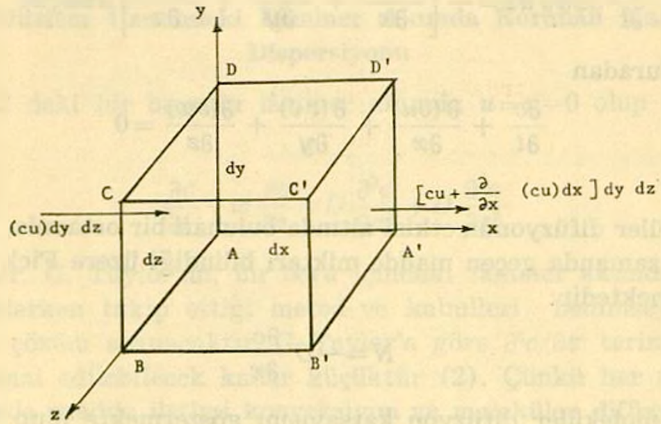
$$= \frac{3}{2} w_{ort} - \frac{3}{2} w_{ort} \frac{x^2}{h^2} \tag{8 b}$$

$$= \frac{3}{2} w_{ort} \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) \tag{8 c}$$

şeklinde yazılabilir.

Lâminer Bir Akım Bölgesinde Sıvı İçinde Çözünmüş Korunan Maddelerin Konsantrasyon Dağılımı

Hareket halindeki akışkan içinde bir A (x, y, z) noktasında, boyutları dx, dy, dz olan bir akım elemanını göz önüne alalım. (Şekil 3). Herhangi bir noktada madde konsantrasyonu $c(x, y, z)$ ve, x, y, z yönlerindeki hız bileşenleri u, v, w olsun. Maddenin korunumu prensibi Şekil 3 deki akışkan elemanına tatbik edelim. Önce madde iletiminin sadece



Şekil 3. Akışkan eleman ve birim zamanda y doğrultusunda konveksiyonla taşınan madde miktarları.

konveksiyonla olduğunu farzedelim .Bu elemana birim zamanda giren madde miktarı, birim zamanda çıkan madde miktarı ile, bu hacım içersinde, konsantrasyonun zamanla olan değişiminden ileriye gelen madde miktarının toplamına eşit olmalıdır. Bir misal olarak, bu akışkan elemanı na x yönünde birim zamanda giren ve çıkan madde miktarları Şekil 3 üzerinde gösterilmiştir. Buna göre birim zamanda elemana giren ve çıkan madde miktarları arasındaki fark

$$x \text{ yönünde } \quad -\frac{\partial}{\partial x}(c\,u)\,dx\,dy\,dz$$

$$y \text{ yönünde } \quad -\frac{\partial}{\partial y}(c\,v)\,dx\,dy\,dz$$

$$z \text{ yönünde } \quad -\frac{\partial}{\partial z}(c\,w)\,dx\,dy\,dz$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan birim zamanda A noktasında meydana gelen konsatrasyon değişimi ($\partial c/\partial t$) olduğundan, göz önüne alınan akışkan elemanı için bundan ileriye gelen madde değişim miktarı

$$\frac{\partial c}{\partial t}\, dx dy dz$$

olur. Maddenin korunumu prensibine göre

$$\frac{\partial c}{\partial t}\, dx dy dz = -\left[\frac{\partial (c\,u)}{\partial x} + \frac{\partial (c\,v)}{\partial y} + \frac{\partial (cw)}{\partial z}\right] dx dy dz \qquad (12)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (cu)}{\partial x} + \frac{\partial (cv)}{\partial y} + \frac{\partial (cw)}{\partial z} = 0 \qquad (13)$$

elde edilir.

Moleküler difüzyonun etkisi altında bulunan bir ortamda, birim alandan birim zamanda geçen madde miktarı bilindiği üzere Fick kanunu ile ifade edilmektedir:

$$N = -D \frac{\partial c}{\partial x} \qquad (14)$$

Burada D moleküler difüzyon katsayısını göstermekte olup boyut analizi sonucunda

$$[c] = \frac{M}{L^3}\,; \qquad [N] = \frac{M}{TL^2}\,; \qquad [x] = L\,; \qquad [D] = \frac{L^2}{T}$$

bulunur. İzotrop bir ortam için her üç yönde de difüzyon katsayısı aynıdir. ($D_x = D_y = D_z = D$).

Moleküler difuzyonun da etkisini göz önüne almak için (13) denkleminde (cu), (cv), ve (cw) terimleri yerine

$$\left(cu - D\frac{\partial c}{\partial x}\right); \qquad \left(cv - D\frac{\partial c}{\partial y}\right); \qquad \left(cw - D\frac{\partial c}{\partial z}\right)$$

ifadeleri konulmalıdır. Bu takdirde

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(cu - D\frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(cv - D\frac{dc}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(cw - D\frac{\partial c}{\partial z}\right) = 0 \qquad (15)$$

elde edilir ve düzenlenirse

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial z} + c\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) = 0 \qquad (16)$$

bulunur. Süreklilik denklemine göre

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{17}$$

konulursa

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) \tag{18}$$

olur.

Eğik Düzlem Üzerindeki Lâminer Akımda Korunan Maddelerin Dispersiyonu

Şekil 2 deki bir boyutlu lâminer akımda $u = v = 0$ olup (18) denklemi

$$\frac{\partial c}{\partial t} + w\frac{\partial c}{\partial z} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \tag{19}$$

şekline girer. G. Taylor'un, bir boru içindeki lâminer akımdaki dispersiyonu incelerken takip ettiği metod ve kabulleri benimseyerek (19) denklemine çözüm aranacaktır. G. Taylor'a göre $\partial^2 c/\partial z^2$ terimi diğerleri yanında ihmal edilebilecek kadar küçüktür (2). Çünkü her ne kadar z doğrultusunda madde iletimi konveksiyon ve moleküler difüzyondan ileriye geliyorsa da, moleküler difüzyon, konveksiyona nazaran yavaş ilerleyen bir olay olduğundan diğerinin yanında terk edilebilir. Bu sebeple (19) denklemi

$$\frac{\partial c}{\partial t} + w\frac{\partial c}{\partial z} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{20}$$

şeklinde yazılacaktır.

Boyuna doğrultudaki moleküler difüzyon ihmal edildiğine göre, bu doğrultudaki bütün madde taşınması konveksiyondan ileriye gelir.

w_{ort} ortalama hızıyla hareket eden bir düzleme göre madde iletimini göz önüne alalım :

$$z_1 = z - w_{ort}\, t \tag{21}$$

yazarsak (20) denklemi

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial z_1}(w - w_{ort}) = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{22}$$

olur.

z_1 = sabit olan bir düzlem boyunca akımın ortalama hızı sabit olduğundan, c nin bu düzlemler boyunca taşınması, sadece c nin x yönünde değişmesinden ileriye gelir. c konsantrasyonu z den bağımsız ise, c deki herhangi bir değişme birdenbire ortadan kalkar. Bu sebeple c nin x yönünde değişmesi

$$\frac{\partial c}{\partial z_1}(w-w_{ort})=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{23}$$

denkleminden bulunabilir. (8) ifadesi, (23) bağıntısında yerine konursa

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}=\frac{\partial c}{\partial z_1}\left(\frac{\gamma \sin\alpha}{2\mu}h^2-\frac{\gamma\sin\alpha}{2\mu}x^2-w_{ort}\right) \tag{24}$$

olur. Bu ifade (11) bağıntısı yardımıyla

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial z_1}\left(\frac{3}{2}w_{ort}-w_{ort}-\frac{\gamma\sin\alpha}{2\mu}x^2\right) \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial z_1}\left(\frac{1}{2}w_{ort}-\frac{\gamma\sin\alpha}{2\mu}x^2\right) \tag{26}$$

haline gelir ve entegre edilirse

$$\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial z_1}\left(\frac{w_{ort}}{2}x-\frac{\gamma\sin\alpha}{6\mu}x^3\right)+C_1 \tag{27}$$

$$c=\frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial z_1}\left(\frac{w_{ort}}{4}x^2-\frac{\gamma\sin\alpha}{24\mu}x^4\right)+C_1x+C_2 \tag{28}$$

elde edilir. Korunan maddeler söz konusu olduğundan $x=h$ için katı yüzey üzerinde madde nakli olmadığı farzedilirse

$$\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial z_1}\left(\frac{w_{ort}}{2}h-\frac{\gamma h^3\sin\alpha}{6\mu}\right)+C_1=0 \tag{29}$$

bulunur. (11) ifadesi yardımıyla buradan $C_1=0$ elde edilir. Diğer taraftan $x=0$ için (27) denkleminden $(\partial c/\partial x)=0$ bulunur. Serbest su yüzeyinde madde iletimi olmadığından $x=0$ için $(\partial c/\partial x)=0$ şartı da kendiliğinden sağlanmış olmaktadır.

Buna göre (28) bağıntısı

$$c=\frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial z_1}\left(\frac{w_{ort}}{4}x^2-\frac{\gamma\sin\alpha}{24\mu}x^4\right)+C_2 \tag{30}$$

şekline gelmiş olur.

$z=z_1$ deki kesit boyunca madde iletimi

$$Q = \int_{x=0}^{x=h} (1 \cdot d\,x)\, c\,(w - w_{ort}) \tag{31}$$

$$Q = \int_{x=0}^{x=h} \left[\frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial z_1} \left(\frac{w_{ort}}{4} x^2 - \frac{\gamma \sin \alpha}{24\,\mu} x^4 \right) + C_2 \right] \left[\frac{1}{2} w_{ort} - \frac{\gamma \sin \alpha}{2\,\mu} x^2 \right] dx \tag{32}$$

$$Q = \int_0^h \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial z_1} \frac{w_{ort}}{2} \left(\frac{w_{ort}}{4} x^2 - \frac{\gamma \sin \alpha}{24\,\mu} x^4 \right) dx -$$

$$- \int_0^h \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial z_1} \frac{\gamma \sin \alpha}{2\mu} \left(\frac{w_{ort}}{4} x^4 - \frac{\gamma \sin \alpha}{24\,\mu} x^6 \right) dx +$$

$$+ \int_0^h \frac{C_2 w_{ort}}{2} dx - \int_0^h \frac{C_2 \gamma \sin \alpha}{2\mu} x^2\, dx \tag{33}$$

şeklinde ifade edilebilir. (11) ifadesi yerine konursa C_2 yi ihtiva eden son iki terimin birbirini götürdüğü görülür. Diğer terimlerin integralleri aşağıdaki neticeyi verir:

$$Q = \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial z_1} \left(\frac{\gamma \sin \alpha}{\mu} \right)^2 \int_{x=0}^{x=h} \left(\frac{h^4}{72} x^2 - \frac{h^2}{3 \times 48} x^4 - \frac{h^2}{24} x^4 + \frac{x^6}{48} \right) dx \tag{34}$$

$$= \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial z_1} \left(\frac{\gamma \sin \alpha}{\mu} \right)^2 \left[\frac{h^7}{3 \times 72} - \frac{7\,h^7}{3 \times 48 \times 5} + \frac{h^7}{48 \times 7} \right] = - \frac{2h^7}{945\,D} \left(\frac{\gamma \sin \alpha}{\mu} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial z_1} \tag{34}$$

$$= - \frac{2\,h^7 \sin^2 \alpha}{945\,D} \left(\frac{g}{\nu} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial z_1} \tag{35}$$

Enine doğrultudaki konsantrasyon değişmesi sonucu, konsantrasyonun, moleküler difüzyonla, başlangıç değerinin bir kesri kadar küçülmesi için geçen zaman, konvektif taşıma yoluyla, boyuna doğrultuda görünebilir değişmelerin meydana geldiği zamana nazaran çok kısa ise, bir kesit üzerindeki ortalama konsantrasyon c_m ile gösterildiğine nazaran, z_1 kesitinde $\partial c / \partial z_1$ türevi, $\partial c_m / \partial z_1$ değerinden hemen hemen farksız olacaktır. Bu sebeple (35) denklemi

$$Q = -\frac{2h^7 \sin^2\alpha}{945D}\left(\frac{g}{\nu}\right)^2 \frac{\partial c_m}{\partial z_1} \tag{36}$$

şeklinde yazılabilir.

Görülüyor ki c_m, w_m ortalama hızıyla hareket eden bir düzleme nazaran, moleküler difüzyonla aynı kanuna uyan bir olay sonucu, fakat bu kere bir k difüzyon katsayısına sahip olmak üzere yayılmaktadır. Enine kesit alanı $(1 . h)$ olduğuna göre

$$Q = -\frac{2h^7 \sin^2\alpha}{945D}\left(\frac{g}{\nu}\right)^2 \frac{\partial c_m}{\partial z_1} = -(h \times 1)\, k \frac{\partial c_m}{\partial z_1} \tag{37}$$

$$k = \frac{2h^6 \sin^2\alpha}{945D}\left(\frac{g}{\nu}\right)^2 \tag{38}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan dz_1 uzunluğunda, h kalınlığında ve birim genişlikte bir sıvı elemanı için madde miktarı cinsinden bir süreklilik denklemi yazılırsa, dt zaman zarfında giren madde miktarı $Q\,dt$, çıkan madde miktarı $[Q + (\partial Q/\partial z_1)dz_1]dt$ olduğundan aradaki fark $-(\partial Q/\partial z_1)dz_1 dt$ olur. Diğer taraftan t anındaki konsantrasyon c_m ; $(t+dt)$ anındaki konsantrasyon $[c_m + (\partial c_m/\partial t)dt]$ olduğundan söz konusu sıvı elemanının $(1.h)\ dz_1$ hacmi içinde, dt zaman zarfındaki madde değişmesi $(\partial c_m/\partial t)$ $dt\,.\,hdz_1$ olur. Bu iki değer, maddenin korunumunu prensibi gereğince birbirine eşitlenirse

$$-\frac{\partial Q}{\partial z_1}\, dz_1\, dt = h \frac{\partial c_m}{\partial t}\, dz_1\, dt \tag{39}$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial z_1} = h \frac{\partial c_m}{\partial t} \tag{40}$$

elde edilir. (37) bağıntısı (40) da yerine konulursa

$$h\,k \frac{\partial^2 c_m}{\partial z_1^2} = h \frac{\partial c_m}{\partial t} \tag{41}$$

$$k \frac{\partial^2 c_m}{\partial z_1^2} = \frac{\partial c_m}{\partial t} \tag{42}$$

olur. (42) denkleminin çözümleri sisteme madde giriş şekli ile ilgili başlangıç şartlarına göre literatürde mevcuttur (2 , 3).

k difüzyon katsayısı, ortalama hız veya birim genişlik debisi cinsinden de ifade edilebilir:

$$k=\frac{2\,h^6}{945\,D}\left(\frac{g\sin\alpha}{\nu}\right)^2=\frac{2\,h^6}{945\,D}\left(\frac{\gamma\sin\alpha}{\mu}\right)^2 \tag{43}$$

$$=\frac{2\,h^2.9}{945\,D}\left(\frac{\gamma\,h^2\sin\alpha}{3\mu}\right)^2 \tag{44}$$

$$=\frac{2\,h^2}{105\,D}\,w_{ort}=\frac{2\,q^2}{105\,D} \tag{45}$$

Burada q birim genişlik debisini göstermektedir.

Eğik Düzlem Üzerindeki Lâminer Akımda Korunmayan Maddelerin Dispersiyonu ve Madde İletimi

Bu halde kullanılmış suyun içindeki korunamayan bir bileşiğin konsantrasyon dağılımı incelenektir. Sistemin permenant rejimde olduğu, yani herhangi bir noktada şartların zamanla değişmediği kabul edilecektir. Buna göre sıvı filmi için permenant hal denklemi 20 bağıntısında $\partial c/\partial t=0$ konularak elde edilir:

$$-D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+w\frac{\partial c}{\partial z}=-D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\gamma\sin\alpha}{2\mu}(h^2-x^2)\frac{\partial c}{\partial z}=0 \tag{46 a}$$

veya

$$-D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+G\,(h^2-x^2)\frac{\partial c}{\partial z}=0 \tag{46 b}$$

$$G=\frac{\gamma\sin\alpha}{2\mu} \tag{46 c}$$

Burada sıvı filmi içinde maddenin korunduğu farzedilmiştir. Madde ayrışması biyolojik tabaka içinde olmaktadır. Bununla beraber, bazı araştırıcılar biyolojik ayrışmanın bu tabaka yüzeyine veya yüzeye yakın kısımlarına münhasır kaldığını ve alt kısımların artık maddelerin ayrıştırılmasında önemli bir rol oynamadığını kabul etmişlerdir. (1). Bu sebeple biyolojik tabaka için ayrı bir diferansiyel denklem yazmadan, (46) denklemleri şu sınır şartları ile kullanılacaktır :

(a) Sıvı yüzeyinde madde iletimi mevcut değildir:

$$x=0 \quad \text{için} \quad D\frac{\partial c}{\partial x}=0 \tag{47}$$

(b) $x=h$ için, yâni sıvı ile biyolojik tabaka arasındaki arakesit yüzeyinde, maddenin taşınma hızı, bu maddenin biyolojik tabaka yüzeyindeki ayrışma (yok olma) hızına eşittir. Taşınan maddeler, mikroorganizmalar tarafından asimile edilmektedir (= özümlenmektedir):

$$x=h \quad \text{için} \quad -D\frac{\partial c}{\partial x}=R'=k_s c \tag{48}$$

Burada R'' mikroorganizmaların, bu tabaka yüzeyindeki metabolizma faaliyetinin bir fonksiyonu olup k_s biyokimyasal reaksiyonun hız katsayısını göstermektedir. Özel bir hal olarak problemi basitleştirmek için, madde iletiminin sınırlı olduğu, yani biyolojik tabaka yüzeyinde

$$x=h \quad \text{için} \quad c=0 \tag{48 a}$$

bulunduğu farzedilebilir (1). Bu, özümleme hızının, madde taşınma hızından çok büyük, yani

$$R' \gg -D\,\partial c/\partial x \tag{49}$$

olması halinde meydana gelir. Yani biyolojik tabaka yüzeyine madde erişir erişmez ayrıştırılarak sıvıdan ayrılır. (48 a) sınır şartı Maier ve arkadaşları tarafından kullanılarak, probleme aşağıda görüleceği üzere kuvvet serileri şeklinde bir çözüm aranmıştır. P. Monadjemi, denklemin daha değişik bir şeklinin Swilley tarafından yapılmış grafik bir çözümünden faydalanmıştır (4). (48) sınır şartına göre denklemin bu çözüm şekli, makalenin sonunda teferrûatlı bir şekilde ele alınacaktır (5).

(c) Girişte, $z=0$ düzleminde, incelenen maddenin konsantrasyonu üniform olup c_0 değerine eşittir:

$$z=0 \quad \text{ve} \quad x<h \quad \text{için} \quad c=c_0 \tag{50}$$

$$z=\infty \quad \text{ve} \quad x<h \quad \text{için} \quad c=0$$

(8) ve (11) bağıntılarına göre

$$\frac{\gamma \sin \alpha}{\mu}=\frac{2\,w_{max}}{h^2} \tag{51}$$

veya

$$\frac{\gamma \sin \alpha}{\mu}=\frac{3\,w_{ort}}{h^2} \tag{52}$$

olduğundan bu denklemler (46 a) bağıntısında yerine konursa

$$\frac{\gamma \sin \alpha}{2\mu} (h^2 - x^2) \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{53}$$

$$\frac{w_{max}}{h^2} (h^2 - x^2) \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{54}$$

$$w_{max} \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{55}$$

veya

$$\frac{3}{2} w_{ort} \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{56}$$

elde edilir. Aşağıdaki boyutsuz değişkenlerin ikamesiyle 53 ilâ 56 denklemleri basitleştirilebilir. Meselâ 55 denkleminde

$$X = \frac{x}{h} \; ; \; \bar{c} = \frac{c}{c_0} \; ; \; Z = \frac{D z}{h^2 w_{max}} \tag{57}$$

$$\partial x = h \partial X \; ; \; \partial c = c_0 \partial \bar{c} \; ; \; \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c_0}{h} \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} \tag{58}$$

$$\partial x^2 = h^2 \partial X^2 \; ; \; \partial^2 c = c_0 \partial^2 \bar{c} \; ; \; \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{c_0}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \tag{59}$$

$$\partial z = \frac{h^2 w_{max}}{D} \partial Z \tag{60}$$

yerine konursa

$$(1 - X^2) \frac{c_0 D}{h^2 w_{max}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial Z} = \frac{D}{w_{max}} \cdot \frac{c_0}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \tag{61}$$

$$(1 - X^2) \frac{\partial \bar{c}}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \tag{62}$$

elde edilir. Bu yeni denkleme göre sınır şartları

(a) $X = 0$ için $\frac{\partial \bar{c}}{\partial X} = 0$ (63)

(b) $X = 1$ için $\frac{D c_0}{h} \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} = -k_s c_0 \bar{c}$ (64)

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial X} = -\frac{k_s}{D} h \bar{c} = -k h \bar{c} \tag{65}$$

veya

$$x=1 \text{ için } \bar{c}=0 \tag{65 a}$$

$$\text{(c)} \quad Z=0 \text{ ve } X<1 \text{ için } \bar{c}=1 \tag{66}$$

$$Z=\infty \text{ ve } X<1 \text{ için } \bar{c}=0 \tag{67}$$

olur.

(62) denkleminin yukarda açıklanan sınır şartlarına göre çözümü için kısmî türevli diferensiyel denklemlere ait bilinen metotlar uygulanır. c konsantrasyonunun, X ve Z nin fonksiyonu olan iki büyüklüğün çarpımından meydana geldiği kabul edilirse

$$\bar{c} = \varphi(X) \cdot \psi(Z) \tag{68}$$

yazılır. Buna göre

$$\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} = \psi(Z) \frac{d^2\varphi(X)}{dX^2} \tag{69}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial Z} = \varphi(X) \frac{d\psi(Z)}{dZ} \tag{70}$$

olur. Bu ifadelerin (62) bağıntısında yerine konulması sonunda

$$(1-X^2)\,\varphi(X) \frac{d\psi(Z)}{dZ} = \psi(Z) \cdot \frac{d^2\varphi(X)}{dX^2} \tag{71}$$

$$\frac{1}{\psi(Z)} \cdot \frac{d\psi(Z)}{dZ} = \frac{1}{\varphi(X)(1-X^2)} \frac{d^2\varphi(X)}{dX^2} = -\lambda_n^2 \tag{72}$$

elde edilir. Bunlardan

$$\frac{1}{\psi(Z)} \cdot \frac{d\psi(Z)}{dZ} = -\lambda_n^2 \tag{73}$$

denkleminin (66) sınır şartlarını sağlayan çözümü

$$\psi(Z) = e^{-\lambda_n^2 Z} \tag{74}$$

şeklinde olup diğer denklem

$$\frac{1}{\varphi(X)(1-X^2)} \frac{d^2\varphi(X)}{dX^2} = -\lambda_n^2 \tag{75}$$

W. J. Maier ve arkadaşları tarafından (65a) sınır şartlarını sağlamak üzere bir kuvvet serisine açılarak çözülmüştür. Bu kuvvet serisi $\varphi(X, \lambda_n)$ şeklinde ifade edilirse konsantrasyon denklemi

$$\bar{c} = \sum_{1} \varphi(X, \lambda_n) \cdot e^{-\lambda_n^2 Z} \tag{76}$$

olur. Bir kesitteki ortalama konsantrasyon bulunmak istenirse

$$c_{ort}\, h.1.w_{ort} = \int_{x=0}^{x=h} c\, 1.d\, x)w \tag{77}$$

$$c_{ort} = \frac{1}{w_{ort} h} \int_{x=0}^{x=h} c\, w\, d\, x \tag{78}$$

$$\bar{c}_{ort} = \frac{c_{ort}}{c_0} = \frac{1}{w_{ort}} \int_{x=0}^{x=h} \frac{c}{c_0}\, w \frac{d\, x}{h} \tag{79}$$

$$= \frac{1}{w_{ort}} \int_{X=0}^{X=1} \bar{c}\, w\, d\, X \tag{80}$$

elde edilir. (80) bağıntısında w yerine (8c) ifadesindeki değeri yazılırsa

$$\bar{c}_{ort} = \frac{1}{w_{ort}} \int_{X=0}^{X=1} \bar{c}\, \frac{3}{2}\, w_{ort}(1-X^2) dX \tag{81}$$

$$= \frac{3}{2} \int_{X=0}^{X=1} \bar{c}(1-X^2) dX \tag{82}$$

bulunur. (76) ifadesi (82) de yerine konursa boyutsuz ortalama konsantrasyon

$$\bar{c}_{ort} = \frac{3}{2} \int_{X=0}^{X=1} \sum_{1}^{n} e^{-\lambda_n^2 z} \varphi(X, \lambda_n)(1-X^2)dX \tag{83}$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{1}^{n} \left\{ e^{-\lambda_n^2 z} \int_{X=0}^{X=1} (1-X^2)\varphi(X, \lambda_n)dX \right\} \tag{84}$$

şeklinde elde edilir.

Difüzyon Olayında Karşılaşılan Bir Başlangıç Değer Problemi ve Çözümü

Eğik düzlem üzerindeki lâminer akımda, permenant halde, korunmayan maddelerin dispersiyonu için verilen 55 (veya 56) denklemi, aşağıdaki başlangıç şartlarına göre Swilley ve Atkinson tarafından çözülmüştür:

(a) Başlangıç kesitinde konsantrasyon her tarafta aynıdır. Yâni

$$c(x, 0) = c_0 \tag{85}$$

(b) Sıvı yüzeyinde madde iletimi mevcut değildir. Yâni, $x=0$ için

$$D \frac{\partial c(0,z)}{\partial x} = 0 \tag{86}$$

(c) $x=h$ için, yâni sıvı ile biyolojik tabakanın arakesit yüzeyinde, madde taşınma hızı, bu maddenin biyolojik tabaka yüzeyindeki ayrışma hızına eşittir. Yâni $x=h$ için

$$-D \frac{\partial c(h,z)}{\partial x} = k_s c \tag{87}$$

Burada k_s biyokimyasal reaksiyonunun hız katsayısını göstermekte olup boyutu

$$[D] = \frac{cm^2}{sn} \quad ; \quad [k_s] = \frac{[D]}{[x]} = \frac{cm}{sn}$$

Swilley ve Atkinson bu problemi çözerken (56) bağıntısını aşağıdaki gibi boyutsuz değişkenlerle ifade etmişlerdir:

$$X=\frac{x}{h} \quad ; \quad \bar{c}=\frac{c}{c_0} \quad ; \quad Z=\frac{z}{L} \tag{88}$$

Burada L eğik düzlemin uzunluğunu göstermektedir. Buna göre

$$\partial x=h\,\partial X \; ; \; \partial c=c_0\,\partial \bar{c} \; ; \; \frac{\partial c}{\partial x}=\frac{c_0}{h}\frac{\partial \bar{c}}{\partial X} \tag{89}$$

$$\partial x^2=h^2\partial X^2 \; ; \; \partial^2 c=c_0\partial^2\bar{c} \; ; \; \frac{\partial^2 c}{\partial X^2}=\frac{c_0}{h^2}\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial X^2} \; ; \; \partial z=L\partial Z$$

ifadeleri (55) bağıntısında yerine konursa

$$w_{max}(1-X^2)\frac{c_0\,\partial\bar{c}}{L\partial Z}=D\,\frac{c_0}{h^2}\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial X^2} \tag{90}$$

$$(1-X^2)\frac{\partial\bar{c}}{\partial Z}=\frac{D\,L}{h^2 w_{max}}\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial X^2}=K\,\frac{\partial^2 c}{\partial X^2} \tag{91}$$

elde edilir. Burada

$$K=\frac{D\,L}{h^2 w_{max}} \tag{92}$$

Bu yeni denkleme göre 85, 86 ve 87 sınır şartları

(a) $\bar{c}(X,0)=1$ (93)

(b) $\dfrac{\partial\bar{c}(0,Z)}{\partial X}=0$ (94)

(c) $X=1$ için $-D\,\dfrac{c_0\partial\bar{c}(1,Z)}{h\partial X}=k_s\,c_0\,\bar{c}$ (95)

$$\frac{\partial\bar{c}(1,Z)}{\partial X}=-\frac{k_s}{D}\,h\,\bar{c}=-\eta\,\bar{c} \tag{96}$$

$$\eta=\frac{k_s h}{D} \tag{97}$$

olur. $\bar{c}\,(X,Z)$ ifadesinin,

$$\bar{c}\,(X,Z)=F\,(X)\,.\,G\,(Z) \tag{98}$$

şeklinde X in ve Y nin fonksiyonu olan iki kısımdan meydana geldiğini farzedelim. 98 denkleminin türevi alınıp 91 de yerine konursa

$$\frac{\partial c}{\partial Z}=F\frac{\partial G}{\partial Z} \quad ; \quad \frac{\partial^2 c}{\partial X^2}=G\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \tag{99}$$

$$F(1-X^2)\frac{\partial G}{\partial Z}=KG\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \tag{100 a}$$

veya

$$\frac{1}{KG}\frac{\partial G}{\partial Z}=\frac{1}{1-X^2}\cdot\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \tag{100}$$

X ve Z birbirinden bağımsız olarak değişebileceğinden ve her biri denklemin sadece bir tarafında bulunduğundan, 100 denkleminin her iki tarafının da bir sabite eşit olması gerekir. Konsantrasyon mesafe ile azalacağından $\partial G/\partial Z$ türevi negatif bir sayıya eşit olmalıdır. Yâni :

$$\frac{1}{KG}\frac{\partial G}{\partial Z}=\frac{1}{(1-X^2)}\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}=-b^2 \tag{101}$$

Böylece problem iki âdî diferansiyel denklemin çözümüne indirgenmiş olur:

$$\frac{dG}{dZ}+b^2KG=0 \tag{102}$$

$$\frac{d^2F}{dX^2}+b^2(1-X^2)F=0 \tag{103}$$

102 denkleminden

$$G(Z)=c_1e^{-b^2KZ} \tag{104}$$

bulunur. $F(X)$ ise öyle kolayca bulunamaz. Cebirsel bakımdan kolaylık sağlamak için aşağıdaki değişken dönüşümü yapılacaktır:

$$F(X)=e^{-bX^2/2}u(X) \tag{105}$$

$$\frac{dF}{dX}=-bXe^{-bX^2/2}u(X)+e^{-bX^2/2}u'(X)$$

$$\frac{d^2F}{dX^2}=(-be^{-bX^2/2}+b^2X^2e^{-bX^2/2})u(X)-$$

$$-u'(X)bXe^{-bX^2/2}-bXe^{-bX^2/2}u'(X)+$$

$$+e^{-bX^2/2}u''(X) \tag{106}$$

105 ve 106 ifadeleri 103 de yerine konur

$$u(X)[-b\,e^{-bX^2/2}+b^2X^2e^{-bX^2/2}+b\,e^{-bX^2/2}-b^2X^2e^{-bX^2/2}]$$

$$-2u'(X)\,b\,X\,e^{-bX^2/2}+e^{-bX^2/2}\,u''(X)=0 \qquad (107)$$

ve düzenlenirse

$$\frac{d^2u}{dX^2}-2bX\frac{du}{dX}+b(b-1)u=0 \qquad (108)$$

elde edilir. 108 denklemi $u(X)$ fonksiyonunu kuvvet serilerine açarak çözülebilir. Yâni,

$$u(X)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_nX^n \qquad (109)$$

$$\frac{du}{dX}=\sum_{n=0}^{n=\infty}n\,A_n\,X^{n-1} \qquad (110)$$

$$\frac{d^2u}{dX^2}=\sum_{n=0}^{n=\infty}n(n-1)A_nX^{n-2} \qquad (111)$$

109, 110 ve 111 bağıntıları 108 de yerine konursa

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}n(n-1)A_nX^{n-2}-2b\sum_{n=0}^{n=\infty}n\,A_nX^n+b(b-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}A_nX^n=0 \qquad (112)$$

elde edilir. X in üssü aynı olan terimleri toplanırsa

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}n(n-1)A_nX^{n-2}-\sum_{n=0}^{n=\infty}[2bn-b(b-1)]A_nX^n=0 \qquad (113)$$

olur. X in bütün değerleri için bu eşitliğin sağlanabilmesi ancak X^n li terimlerin katsayılarının sıfır olmasıyla mümkündür. Bu sebeple 113 ifadesini, X in kuvvetleri aynı olacak şekilde yazmakta fayda vardır. Bu düşünce ile, ikinci terimde X in üssü $n-2$ yapılacaktır. Σ işareti içindeki terimlerin aynı kalabilmesi için bu taktirde n, 2 ile ∞ arasında değerler alınır:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}n(n-1)A_nX^{n-2}-\sum_{n=2}^{n=\infty}[2b(n-2)-b(b-1)]A_{n-2}X^{n-2}=0 \qquad (114)$$

X^n li terimlerin katsayılarının, karşılıklı olarak birbirine eşit olması gerektiğinden

$$n(n-1)A_n = [2b(n-2) - b(b-1)]A_{n-2} \tag{115}$$

115 bağıntısı, A_{n+2} yi, A_n yardımıyla bulmaya yarayan bir rekürsion formülü verir:

$$A_{n+2} = \frac{2b(n-2) - b(b-1)}{n(n-1)} A_n \tag{116}$$

Böylece iki dizi A değerleri elde edilmiş olur. Bunlardan biri $n=0$, $n=2$, $n=4, \ldots$ için $A_0, A_2, A_4 \ldots$ gibi çift değerlere, diğeri $n=1$, $n=3$, $n=5, \ldots$ için $A_1, A_3, A_5, \ldots$ gibi tek değerlere tekabül eder:

$$A_0 = \text{Keyfî} \qquad\qquad A_1 = \text{Keyfî}$$

$$A_2 = \frac{-b(b-1)}{2!} A_0 \qquad\qquad A_3 = \frac{-b(b-3)}{3!} A_1$$

$$A_4 = \frac{b^2(b-5)(b-1)}{4!} A_0 \qquad\qquad A_5 = \frac{b^2(b-7)(b-3)}{5!} A_1$$

$$A_6 = \frac{-b^3(b-9)(b-5)(b-1)}{6!} A_0 \qquad\qquad A_7 = \frac{-b^3(b-11)(b-7)(b-3)}{7!} A_1$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

Buna göre $u(X)$ fonksiyonunun aşağıdaki gibi tek ve çift terimlerden meydana geldiği anlaşılır:

$$u(X) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n X^n = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_{2k} X^{2k} + A_1 X + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_{2k+1} X^{2k+1} \tag{117}$$

$$= A_0 \left[1 - \frac{b(b-1)}{2!} X^2 + \frac{b^2(b-5)(b-1)}{4!} X^4 - \ldots\right] \tag{118}$$

$$+ A_1 X \left[1 - \frac{b(b-3)}{3!} X^2 + \frac{b^2(b-7)(b-3)}{5!} X^4 - \ldots\right]$$

O halde 104 ve 105 bağıntıları yardımıyla $\bar{c}(X, Z)$ fonksiyonu

$$\bar{c}(X, Z) = F(X) \cdot G(Z) = e^{-bX^2/2} u(X) \cdot e^{-b^2 KZ} \tag{119}$$

$$= e^{-bX^2/2} e^{-b^2 KZ} \Big\{ A_0 \left[1 - \frac{b(b-1)}{2!} X^2 + \frac{b^2(b-5)(b-1)}{4!} X^4 - \ldots\right] +$$

$$+ A_1 X \left[1 - \frac{b(b-3)}{3!} X^2 + \frac{b^2(b-7)(b-3)}{5!} X^4 - \ldots\right] \Big\} \tag{120}$$

elde edilir.

94 denklemi ile ifade edilen 2. sınır şartı

$$\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial X}\right|_{X=0} = e^{-b^2KZ}[0 + A_1] \quad A_1 e^{-b^2KZ} = 0 \tag{121}$$

olur. Bu sebeple $A_1 = 0$ bulunur. Böylece 120 bağıntısı

$$\bar{c}(X,Z) = e^{-bX^2/2} e^{-b^2KZ} A_0 \left[1 - \frac{b(b-1)}{2!} X^2 + \frac{b^2(b-5)\,b-1)}{4!} X^4 - \ldots\right] \tag{122}$$

şekline gelir. Burada A_0 sabiti, 104 denklemindeki C_1 entegrasyon sabitinin de yerini tutmaktadır.

122 ifadesinin X e göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial X} = e^{-bX^2/2} . e^{-b^2KZ} A_0 \left[-bX + \frac{b^2}{2!}(b-1)X^3 - \frac{b}{1!}(b-1)X - \right.$$
$$- \frac{b^3}{4!}(b-5)(b-1)X^5 + \frac{b^2}{3!}(b-5)(b-1)X^3 + \frac{b^4}{6!}(b-9)(b-5)(b-1)X^7 -$$
$$\left. - \frac{b^3}{5!}(b-9)(b-5)(b-1)X^5 - \ldots \right] \tag{123}$$

ve düzenlenirse

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial X} = e^{-bX^2/2} . e^{-b^2KZ} A_0 \left\{ -bX + \left[\frac{b^2(b-1)}{2!} X^3 - \frac{b^3(b-5)(b-1)}{4!} X^5 + \ldots\right]\right.$$
$$\left. - \left[b(b-1)X - \frac{b^3}{3!}(b-5)(b-1)X^3 + \ldots\right]\right\} \tag{124}$$

elde edilir.

96 bağıntısına göre

$$\bar{c}\Big|_{X=1} = -\frac{D}{k_s h} \left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial X}\right|_{X=1} = -\frac{1}{\eta} \left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial X}\right|_{X=1} \tag{125}$$

olduğundan 122 ve 124 ifadeleri 125 de yerine konulursa

$$A_0 \left[1 - \frac{b(b-1)}{2!} + \frac{b^2(b-5)(b-1)}{4!} - \ldots\right]$$
$$= -\frac{1}{\eta} A_0 \left\{ -b + \frac{b^2(b-1)}{2!} - \frac{b^3(b-5)(b-1)}{4!} + \ldots \right] - \left[b(b-1) - \right.$$
$$\left. - \frac{b^3}{3!}(b-5)(b-1) + \ldots \right]\Big\} \tag{126}$$

veya düzenlenirse

$$\left[b-\frac{b^2(b-1)}{2!}+\frac{b^3(b-5)(b-1)}{4!}\ldots\right]+\left[b(b-1)-\frac{b^3}{3!}(b-5)(b-1)+\ldots\right]-$$

$$-\eta\left[1-\frac{b(b-1)}{2!}+\frac{b^2(b-5)(b-1)}{4!}-\ldots\right]=0 \qquad (127)$$

elde edilir. 127 denklemi, kökleri 103 diferansiyel denkleminin özel çözümlerine ait b_n değerlerini veren bir (Eigen fonksiyon) teşkil eder. Yâni 127 nin her kökü için ayrı bir A_0 katsayısı ile beraber yazılan 122 ifadelerinin toplamı da diferansiyel denklemin bir çözümü olur. O halde, kısmî türevli diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\bar{c}(X,Z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n G(Z)\phi_n(X,b)$$

şeklinde bir fonksiyon olup burada

$$\phi_n(X,b)=e^{-b_n X^2/2}\left[1-\frac{b_n(b_n-1)}{2!}X^2+\frac{b_n^2(b_n-5)(b_n-1)}{4!}X^4-\ldots\right] \qquad (128)$$

A_n değerleri öyle bulunmalıdır ki 93 No. lu başlangıç şartı sağlansın. Yâni

$$\bar{c}(X,0)=1=\Sigma A_n\phi_n(X,b) \qquad (129)$$

Bu ifadenin her iki tarafı da $\phi_m(X, b)$ $(1-X^2)$ ile çarpılıp entegrali alınırsa

$$\int_0^1 \phi_m(X,b)(1-X^2)\,dX=\sum A_n\int_0^1 (1-X^2)\,\phi_m(X,b)\,\phi_n(X,b)\,dX \qquad (130)$$

elde edilir. Burada $m=n$ hariç bütün değerler için sağ taraftaki ifadenin entegrali sıfırdır (Bkz. Wylie, Ref. No. 6). Bu sebepten

$$\int_0^1 \phi_n(X,b)(1-X^2)\,dX=A_n\int_0^1 (1-X^2)\,\phi_n^2(X,b)\,dX$$

olur. Diğer taraftan $\phi_n(X, b)$ ifadesi aynı zamanda 103 denklemini sağlayacağından dolayı

$$\frac{d}{dX}\left[\phi_n'(X,b)\right]+b_n^2(1-X^2)\,\phi_n(X,b)=0 \qquad (132)$$

veya

$$\phi_n(X, b)(1-X^2) = -\frac{1}{b_n^2} \cdot \frac{d}{dX}[\phi_n'(X, b)] \tag{133}$$

yazılabilir. 133 bağıntısı, 131 de yerine konursa

$$-\frac{1}{b_n^2}\int_0^1 \frac{d}{dX}[\phi_n'(X, b)]\,dX = -\frac{1}{b_n^2}\Big[\phi_n'(X, b)\Big]_0^1 = A_n \int_0^1 (1-X^2)\,\phi_n^2(X, b)\,dX \tag{134}$$

olur. 94 ve 96 sınır şartlarından dolayı

$$\phi_n'(0, b) = 0 \tag{135}$$

$$\phi_n'(1, b) = -\eta\,\phi_n(1, b) \tag{136}$$

eşitlikleri yazılabileceğinden, 134 ifadesi

$$\frac{1}{b_n^2} \cdot \eta\,\phi_n(1, b) = A_n \int_0^1 (1-X^2)\,\phi_n^2(X, b)\,dX \tag{137}$$

olur ve buradan

$$A_n = \frac{\eta\,\phi_n(1, b)}{b_n^2 \int_0^1 (1-X^2)\,\phi_n^2(X, b)\,dX} \tag{138}$$

elde edilir. Görülüyor ki diferansiyel denklemin çözümü 127 denkleminin köklerinin bulunmasına, ve 138 ifadesinin hesaplanmasına bağlıdır. Bu ise ayrı bir nümerik analizi gerektirir. (Bunun için Hamming, Ref. No. 7 ye bakınız).

REFERANSLAR

1. Maier, W.J.; Behn V.C.; Gates, C.D., «Simulation of the Trickling Filter Process», *Journal of the Sanitary Engineering Division,* ASCE, Vol. 93, No. SA4. August 1967.

2. Taylor, S.G., «Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube», *Proceedings Royal Society of London,* A 219, 1953.

3. Crank, J., *Mathematics of Diffusion,* Oxford at the Clarendon Press, 1967.

4. Monadjemi P., and Behn V.C., «Oxygen Uptake and Mechanism of Substrate Purification in a Model Trickling Filter», *Advances in Water Pollution Research*. Proc. 5th Int. Conf. Water Pollution Research, San Francisco, 1970.

5. Swilley, E.L., Atkinson, B., «A Mathematical Model for the Tricking Filter». *Proceedings of the Eighteenth Industrial Waste Conference*, Purdue University, Lafayette, Indiana, 1963.

6. Wylie, C.R., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1960.

7. Hamming, R.W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw Hill, New York, 1962.