

Filtrasyon Teorileri

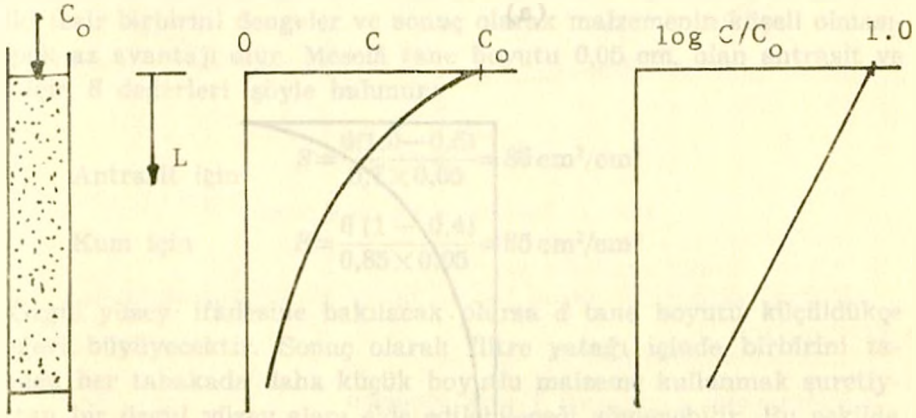
Yılmaz MUSLU ¹⁾

Atilla AKKOYUNLU ²⁾

Giriş

Filtrasyonun matematiksel teorisine ait temel denklemlere geçmeden önce, filtrenin temizleme işleminden genel olarak bahsetmek faydalı olur.

Filtre içinden süspansiyon madde ihtiva eden su geçirildiğinde, filtrasyon işlemine bağlı olarak süspansiyon madde konsantrasyonu derinlikle azalır. Süspansiyon konsantrasyonunun azalış hızı filtre boşluklarında o anda mevcut konsantrasyonla orantılıdır. Eğer filtre tanesi ve süspansiyon parçacıkları üniform ise konsantrasyondaki azalma derinliğe bağlı olarak logaritmik olacaktır. Şekil 1 de bu durum grafik olarak gösterilmiştir. (1).



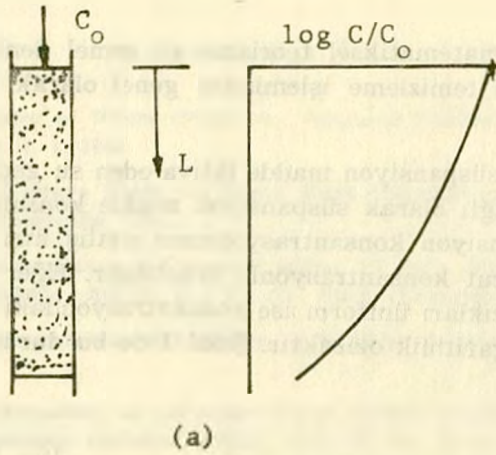
Şekil 1. Üniform taneli bir filtrede konsantrasyonun derinlikle logaritmik azalışı. (Ives)

1) Doç. Dr., İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, Çevre Bilimleri ve Teknolojisi Kürsüsü

2) Yük. Müh., İ.T.Ü. İnşaat Kürsüsü

Şekil 1 de görüleceği üzere, bu logaritmik azalmanın neticesi olarak, filtre giriş yüzünden daha uzakta bulunan tabakalar daha az miktarda süspansiyon maddeyi sudan uzaklaştırmaktadır. Bunun sebebi her tabakanın aynı oranda maddeyi sudan uzaklaştırmasıdır.

Aslında birbirini takibeden tabakaların süspansiyon maddeyi sudan uzaklaştırma bakımından daha etkili olması, yani her tabakanın bir öncekine nazaran daha büyük oranda süspansiyon maddeyi sudan ayırması istenir. Bu durum ancak her tabakanın, aynı miktarı sudan uzaklaştırması ile mümkün olur. Bu açıklamaya uyan durum Şekil 2a da görülmektedir.



Şekil 2. Malzemesi uniform olmayan bir filtrede konsantrasyonun derinlikle değişmesi.

- (a) Sudan uzaklaştırma veriminin derinlikle artışı.
 (b) Sudan uzaklaştırma veriminin derinlikle azalışı.

Ancak, pratikte geri yıkamaya bağlı olarak tane boyutuna göre tabakalanma olunca durum Şekil 2a dakinin tersi olur; yani her tabaka daha az oranda süspansiyon madde uzaklaştırır. Bunun sonucu olarak daha az miktarda süspansiyon madde filtre tabakalarında tutulmuş olur (Şekil 2b).

Filtre Verimine Etkiyen Faktörler

Şekil 2a da görülen, bir sonraki tabakanın daha etkili olması halini elde etmek için filtre verimine etkiyen faktörleri gözönüne almak gerekir. Bu faktörler, parçacıkların yapıştığı tane yüzey alanı ve filtre hızının etkisi olarak belirlenebilir.

Özgül yüzey alanının büyük olması filtre verimini etkiler. Özgül yüzey alanı, filtrenin birim hacmindeki tane yüzey alanıdır :

$$S = \frac{6(1-f)}{\psi \cdot d} \quad (1)$$

Bu bağıntının elde edilişi aşağıda gösterilecektir. Bu bağıntıda ψ küresellik faktörüdür ($\psi \leq 1,0$). f poroziteyi ve d dane çapını göstermektedir. Meselâ antrasit ve kum için ψ sırasıyla 0,70 ve 0,85 dir. Daha köşeli olan malzemede ise porozite daha büyüktür. Yukarıda ψ değerleri verilen antrasit ve kum için ortalama porozite sırasıyla 0,5 ve 0,4 dür. Bu iki tesir birbirini dengeler ve sonuç olarak malzemenin köşeli olmasının pek az avantajı olur. Meselâ tane boyutu 0,05 cm. olan antrasit ve kum için S değerleri şöyle bulunur:

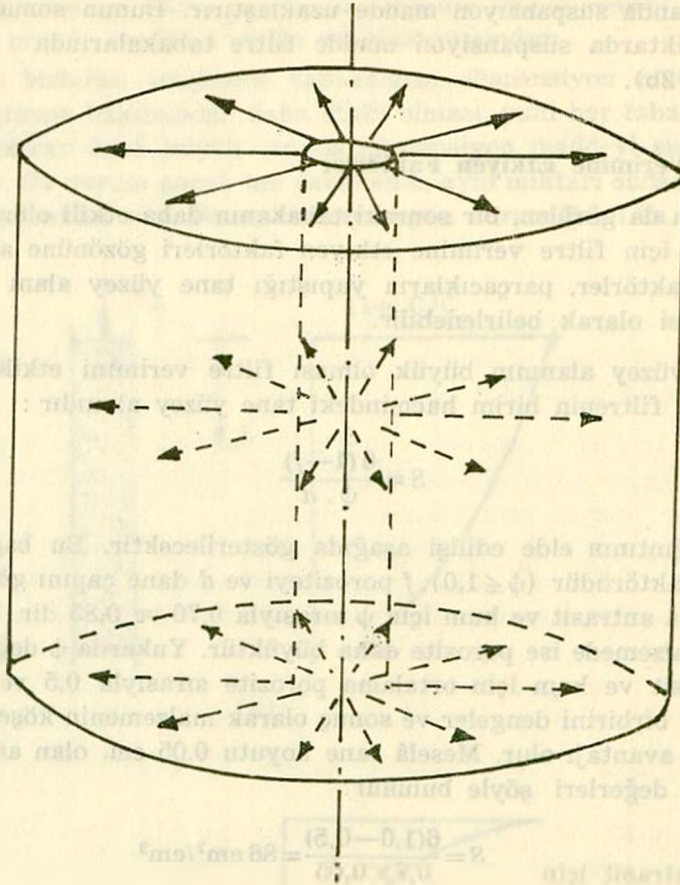
$$\text{Antrasit için} \quad S = \frac{6(1,0-0,5)}{0,7 \times 0,05} = 86 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$$

$$\text{Kum için} \quad S = \frac{6(1-0,4)}{0,85 \times 0,05} = 85 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$$

Özgül yüzey ifadesine bakılacak olursa d tane boyutu küçüldükçe S değeri büyüyecektir. Sonuç olarak filtre yatağı içinde birbirini takip eden her tabakada daha küçük boyutlu malzeme kullanmak suretiyle artan bir özgül yüzey alanı elde edilebileceği söylenebilir. Bu şekilde filtreler örnek olarak, yukarı doğru akışlı ve çok tabakalı filtreler gösterilebilir.

Filtre verimini artırmanın diğer bir yolu da akım doğrultusunda filtre hızını azaltmaktır. Akım doğrultusunda filtre hızını azaltmanın

en kolay yolu, radyal akımlı filtre kullanmaktır. Bu tip filtre şematik olarak Şekil 3 de gösterilmiştir.



Şekil 3. Radyal akımlı filtre (Ives)

Radyal akımlı filtrasyon teorisi lineer akımlı filtrasyon teorisinden çıkarılmıştır (1).

Filtrasyonu Açıklayan Teorik Modeller

Taneli malzeme içindeki akımı inceliyen araştırmacıların bir kısmı (J. Kozeny, G. M. Fair ve L. P. Hatch gibi) boşluklu ortamın kapiler borulardan teşekkül ettiğini ifade etmişlerdir. Ives ise 3 ayrı model gözönüne almıştır. Bunlar: küresel tane modeli, kapiler model ve başlangıçta küresel filtre tanelerine bağlı olarak şekil almış olan boşlukların, filt-

rasyon ilerledikçe, süspansiyon maddelerin tanelerin ara yerlerine girmesiyle kapiler borular haline dönüşmesidir. Ives küresel ve kapiler modellerden yararlanarak 3 cü modelde birleşik özgül yüzeyi açıklamak istemiştir. Aşağıda sırasıyla küresel, kapiler ve başlangıçta küresel sonra kapiler modelin hakim olduğu genel model izah edilecektir.

Küresel Tane Modeli

Bu modelde ve yukarda bahsedilen diğer iki modelde, çökeltme alanı olarak önemli fonksiyonu olan özgül yüzeyin ifadesini çıkarmak faydalı olacaktır. Bu maksatla önce aşağıdaki büyüklükleri tarif edelim :

V_0 = Tek bir temiz filtre tanesinin hacmi

f_0 = Temiz filtre porozitesi

$\frac{1-f_0}{V_0}$ = Birim hacimdeki filtre tane sayısı

σ_v = Özgül birikinti (hacimsel olarak)

V = Üzeri yabancı madde ile kaplı tane hacmi

$\frac{\sigma_v \cdot V_0}{1-f_0}$ = Bir tane başına düşen birikinti hacmi

Bu değerlere göre yüzeyi yabancı madde ile kaplı bir tane hacmi

$$V = V_0 + \frac{\sigma_v \cdot V_0}{1-f_0} = V_0 \left(1 + \frac{\sigma_v}{1-f_0} \right) \quad (2)$$

clur. $1/(1-f_0)$ değeri

$$\frac{1}{1-f_0} = \frac{f_0}{1-f_0} \cdot \frac{1}{f_0} = \frac{\text{Malzeme yerleşme sabiti}}{f_0} = \frac{\beta_v}{f_0} \quad (3)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (3) bağıntısı (2) de yerine konursa

$$V = V_0 (1 + \beta_v \cdot \sigma_v / f_0) \quad (4)$$

olur. Özgül yüzeyin tarifi gereğince

$$S = \frac{A_f}{V_f} \quad (5)$$

yazılabilir. Burada A_f ve V_f sırasıyla filtre yatağındaki bütün tanelerin toplam yüzey alanı ile filtrenin toplam hacmidir. Buna göre, küresel tanelerden meydana gelen bir yatakta

$$S = \frac{A_f}{V_f} = \left[\frac{V_f(1-f)}{\pi \cdot d^3/6} \cdot \pi \cdot d^2 \right] \cdot \frac{1}{V_f}$$

$$S = \frac{6}{d} (1-f) \quad (6)$$

elde edilmiş olur.

S_0 ve S sırasıyla temiz ve birikinti ihtiva eden filtrelerin özgül yüzey alanını gösterebilir. d_0 in temiz filtre tanesi çapı olduğu göz önüne alınarak, (6) denklemi yardımıyla aşağıdaki ifadeler yazılabilir :

$$\frac{S}{S_0} = \frac{(1-f) 6/d}{(1-f_0) 6/d_0} \quad (7)$$

$$= \frac{V_t/V_f}{V_{t_0}/V_{f_0}} \cdot \frac{d_0}{d} \quad (8)$$

(8) bağıntısında (V_t, V_f) ve (V_{t_0}, V_{f_0}) sırasıyla birikinti ihtiva eden ve etmeyen filtredeki toplam tane hacmi ve filtre hacmidir. Filtrenin işletilmesi sırasında zahiri hacimde bir değişme olmadığı, yani $V_t = V_p$ olduğu dikkate alınır (8) bağıntısı şöyle yazılır:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{V_t}{V_{t_0}} \cdot \frac{d_0}{d} \quad (9)$$

Filtredeki toplam tane sayısı N ile gösterilirse

$$\frac{S}{S_0} = \frac{N \cdot V}{N \cdot V_0} \cdot \frac{d_0}{d} = \frac{V}{V_0} \cdot \frac{d_0}{d} \quad (10)$$

olur ve bir kürenin hacmini veren denklem yardımıyla

$$\frac{S}{S_0} = \frac{\pi d^3/6}{\pi d_0^3/6} \cdot \frac{d_0}{d} = \frac{d^2}{d_0^2} = \left(\frac{d}{d_0} \right)^2 \quad (11)$$

$$V = \pi \cdot d^3/6 \quad (12)$$

$$V_0 = \pi \cdot d_0^3/6 \quad (13)$$

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{d}{d_0} \right)^3 \quad (14)$$

$$\left(\frac{d}{d_0} \right) = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1/3} \quad (14 a)$$

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{2/3} = (1 + \beta_g \sigma_v / f_0)^{2/3} \quad (15)$$

yazılabilir. (15) denklemi filtrenin başlangıçta temiz haldeki özgül yüzeyi ile daha sonraki özgül yüzeyi arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

Kapiler Model

Bu modelde filtrenin birim yüzey alanında, yarıçapı r olan n adet kapiler borunun bulunduğu göz önüne alınır (1). Filtrenin birim derinliği başına bu boruların uzunluğu l olduğuna göre

$$f_0 = \pi \cdot r^2 \cdot n \cdot l \quad (16)$$

$$S_0 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot n \cdot l \quad (17)$$

olur. Filtrasyon sırasında boşluklarda biriken süspansiyon madde dolaşısıyla, kapiler borunun iç kısmında teşekkül eden birikinti kalınlığına θ denilirse, bu değeri dikkate alarak aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$\sigma_v = \pi \cdot r^2 \cdot n \cdot l - \pi \cdot (r - \theta)^2 \cdot n \cdot l \quad (18)$$

(16) bağıntısından bulunan $\pi \cdot n \cdot l = f_0 / r^2$ değeri (18) bağıntısında yerine konarak

$$\theta = r \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_v}{f_0} \right)^{1/2} \right] \quad (19)$$

elde edilir. Filtrenin birikinti ihtiva etmesi halindeki S özgül yüzeyi ile başlangıçtaki S_0 değeri arasındaki bağıntı, (17) denklemi yardımıyla

$$S = 2 \cdot \pi \cdot (r - \theta) \cdot n \cdot l \quad (20)$$

$$S = S_0 - 2 \cdot \pi \cdot \theta \cdot n \cdot l.$$

olur. Burada θ yerine (19) ifadesi konur

$$S = S_0 - 2 \cdot \pi \cdot n \cdot l \left[r - r \left(1 - \frac{\sigma_v}{f_0} \right)^{1/2} \right]$$

ve düzenlenirse

$$S = S_0 - 2 \cdot \pi \cdot n \cdot l \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot n \cdot l \cdot r \left(1 - \frac{\sigma_v}{f_0} \right)^{1/2}$$

$$S = S_0 \left(1 - \frac{\sigma_v}{f_0} \right)^{1/2}$$

$$\frac{S}{S_0} = \left(1 - \frac{\sigma_v}{f_0} \right)^{1/2} \quad (21)$$

elde edilir.

Başlangıçta Küresel, Daha Sonra Tıkanmaya Bağlı Olarak Kapiler Modelin Hakim Olduğu Genel Model

Filtrasyon başlangıcında, tanelerin üzerindeki birikintilerin az olması sebebiyle küresel model ortama hâkimdir. Fakat zamanla tanelerin etrafındaki birikintiye bağlı olarak kapiler kanallar meydana gelecek ve akım bunların içinde olacaktır (1). Buna göre yukarıda açıklanan iki model gözönüne alarak (15) ve (21) bağıntıları yardımıyla genel model için özgül yüzey ifadesi şöyle bulunur.

$$S = S_0(1 + \beta_y \cdot \sigma_v / f_0)^{2/3} \left(1 - \frac{\sigma_v}{f_0}\right)^{1/2} \quad (22)$$

Boşlukların geometrisi ideal halde olmadığından, (22) bağıntısındaki üsler genel şekilde ifade edilirse bu bağıntı

$$S = S_0(1 + \beta_y \cdot \sigma_v / f_0)^y (1 - \sigma_v / f_0)^z \quad (23)$$

haline gelir. Filtre boşlukları birikinti ile tamamen dolunca, yani $\sigma_v = f_0$ olunca özgül yüzey diye birşey kalmaz ve $S = 0$ olur; ancak pratikte boşluklar tamamen tıkanmadan önce süspansiyon maddelerin sudan uzaklaştırılması işlemi durur.

Konsantrasyon Dağılımına Ait Matematiksel İfadeler

Filtrenin birim derinliğinde sudan uzaklaştırılan süspansiyon madde konsantrasyonu, su içinde o anda mevcut konsantrasyonla orantılıdır (1, 2, 3). Bu ifade matematik olarak Mints (1) tarafından

$$-\frac{\partial c}{\partial l} = \bar{\lambda} c \quad (24)$$

şeklinde verilmiştir. Burada c hacimsel olarak süspansiyon madde konsantrasyonunu, l giriş yüzünden itibaren ölçülen herhangi bir seviyeye kadarki derinliği, $\bar{\lambda}$ filtre katsayısını gösterir. Filtrasyon başlangıcında bütün malzeme temiz iken $\bar{\lambda}$ değeri $\bar{\lambda}_0$ olup sabittir. Filtrasyon devam ettikçe $\bar{\lambda}$ değişecektir. Filtreye girişte $l=0$ iken $c=c_0$ ve herhangi bir l derinliğinde de $c=c$ olduğu göz önüne alınarak aşağıdaki bağıntılar bulunur :

$$-\frac{\partial c}{c} = \bar{\lambda}_0 \partial l \quad (25)$$

$$\int_{c=c_0}^{c=c} \frac{\partial c}{c} = -\bar{\lambda}_0 \int_{l=0}^{l=l} \partial l \quad (26)$$

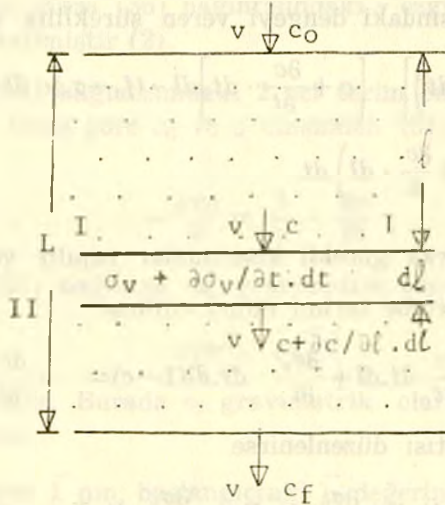
$$\ln \frac{c}{c_0} = -\bar{\lambda}_0 \cdot l \quad (27)$$

$$\ln \frac{c}{c_0} = -\bar{\lambda}_0 \cdot l \quad (28)$$

$$\frac{c}{c_0} = e^{-\bar{\lambda}_0 l} \quad (29)$$

$$c = c_0 e^{-\bar{\lambda}_0 l} \quad (30)$$

Filtrasyon ilerledikçe boşluklar tıkanmaya başlar. Su içindeki süspansiyon ve birikinti maddelerin miktarına göre dl kalınlığında bir filtre elemanı için bir süreklilik denklemi yazılabilir. (Şekil 4):



Şekil 4. Süreklilik denkleminin çıkarılışı.

Burada tasfiye edilecek su filtreye v filtre hızı ile gelmekte ve aynı v hızı ile filtreyi terketmektedir. Girişteki süspansiyon madde konsantrasyonu c_0 olup filtrasyon prosesi dolayısıyla azalan bir c_l konsantrasyonu çıkışta görülmektedir. Şekil 4 de, dl kalınlığındaki, birim enkesit alanına sahip filtre elemanında içi su ile dolu olan hacim, $(f_0 - \sigma_v) dl$ olarak ifade edilebilir. Buna göre ikinci mertebeden terimler ihmal edilirse herhangi bir t anında, dl kalınlığındaki $(f_0 - \sigma_v)dl$ sıvı hacmi içinde süspansiyon madde miktarı $(f_0 - \sigma_v) \cdot c \cdot dl$ olur. $t + dt$ anındaki süspansiyon madde miktarı ise,

$$\left[f_0 - \left(\sigma_v + \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \cdot dt \right) \right] \cdot \left[c + \frac{\partial c}{\partial t} \cdot dt \right] dl$$

bulunur. O halde

$$\left[f_0 - \left(\sigma_v + \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \cdot dt \right) \right] \cdot \left[c + \frac{\partial c}{\partial t} \cdot dt \right] \cdot dl - (f_0 - \sigma_v) c \, dl$$

dl kalınlığındaki filtre elemanında dt zaman aralığında süspansiyon madde miktarının değişimini gösterir. Bu zaman zarfında filtre taneleri üzerine, $d\sigma_v = \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \cdot dt dl$ kadar birikinti yığılır. Konsantrasyonun derinliğe bağlı olarak değişimi ise, başlangıçta, I - I kesitinde c iken II - II kesitinde $c + \frac{\partial c}{\partial l} dl$ şeklinde ifade edilebilir. Buna göre süspansiyon ve birikinti maddeleri arasındaki dengeyi veren süreklilik şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \left[f_0 - \left(\sigma_v + \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \cdot dt \right) \right] \cdot \left[c + \frac{\partial c}{\partial t} \cdot dt \right] dl - (f_0 - \sigma_v) c \, dl + \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \cdot dt \cdot dl = \\ & = v \cdot c \, dt - v \left(c + \frac{\partial c}{\partial l} \cdot dl \right) dt \end{aligned} \quad (31)$$

(31) bağıntısı açılarak gerekli kısaltmalar yapılır ve $\left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)^2 \cdot dt^2 \cdot dl$ şeklindeki ikinci mertebe terimi ihmal edilirse

$$(f_0 - \sigma_v) \frac{\partial c}{\partial t} \, dt \cdot dl + \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \, dt \cdot dl (1 - c) = -v \cdot \frac{\partial c}{\partial l} \cdot dl \cdot dt \quad (32)$$

bulunur. (32) bağıntısı düzenlenirse

$$(f_0 - \sigma_v) \frac{\partial c}{\partial t} \, dt \cdot dl + \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \, dt \cdot dl - c \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \, dt \cdot dl = -v \frac{\partial c}{\partial l} \, dl \cdot dt \quad (32a)$$

olur. Her iki yan $v \cdot dl \cdot dt$ ile bölünürse

$$\frac{1}{v} (f_0 - \sigma_v) \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{(1 - c)}{v} \cdot \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} = - \frac{\partial c}{\partial l} \quad (33)$$

elde edilir. Birikinti hacmindeki artışa eşit hacimli bir sıvı kitlesi içindeki madde miktarını ifade eden $c \cdot \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \, dt \cdot dl$ terimi çok küçük olduğundan ihmal edilirse 32 a denklemi

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} + \frac{(f_0 - \sigma_v)}{v} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial c}{\partial l} \quad (34)$$

şeklinde yazılabilir (1). Yukardaki bağıntılarda süspansiyon konsantrasyonu ve özgül birikinti oranı bazan ağırlık cinsinden de ifade edilmektedir. Meselâ 24 bağıntısı bu takdirde

$$- \frac{\partial c_G}{\partial l} = \bar{\lambda} c_G \quad (35)$$

olur. Özgül birikinti artımı da

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \cdot dt \quad (36)$$

şeklinde yazılır. (35) bağıntısındaki c_G ağırlık cinsinden (=gravimetrik) konsantrasyondur. Keza (36) bağıntısındaki σ özgül birikintisi da gravimetrik olarak verilmiştir (2).

Genellikle (34) bağıntısındaki 2 nci terim önemsizdir . Bu sebeple ihmal edilebilir. Buna göre c_G ve σ cinsinden (34) bağıntısı şöyle yazılabilir.

$$- \frac{\partial c_G}{\partial l} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (37)$$

Benzer şekilde (30) bağıntısı da, gravimetrik konsantrasyonlarla

$$c_G = \bar{c}_0 \cdot e^{-\bar{\lambda}_0 l} \quad (38)$$

şeklinde ifade edilir. Burada c_0 gravimetrik olarak ifade edilen giriş konsantrasyonudur.

Filtre katsayısı $\bar{\lambda}$ nın, başlangıçtaki $\bar{\lambda}_0$ değerine eşit ve sabit olması halinde su içindeki süspansiyon madde konsantrasyonu (38) bağıntısı ile verilir. (38) bağıntısı (35) de yerine konursa

$$- \frac{\partial c_G}{\partial l} = \bar{\lambda}_0 \cdot \bar{c}_0 e^{-\bar{\lambda}_0 l} \quad (39)$$

olur. (39) ve (37) ifadeleri birbirine eşitlenirse

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = v \cdot \bar{\lambda}_0 \bar{c}_0 e^{-\bar{\lambda}_0 l} \quad (40)$$

elde edilir. $t = 0$ da $\sigma = 0$, $t = t$ de $\sigma = \sigma$ sınır şartlarına göre (40) bağıntısı entegre edilirse

$$\sigma = v \cdot \lambda_0 \bar{c}_0 \cdot e^{-\lambda_0 l} \cdot t \quad (41)$$

bulunur. (41) bağıntısı gravimetrik olarak özgül birikintiyi verir. Bu denklemler taneli malzeme içindeki hidrolik eğim ifadeleri ile birleştirilebilir. Meselâ hidrolik eğimi veren Kozeny - Carman denkleminde, tane dizilişine ve tane şekline bağlı olan katsayıyı, $i\psi^2 = 180$ olarak

$$J_0 = \frac{180 \cdot v}{g} \cdot \frac{(1-f_0)^2}{f_0^3} \cdot \frac{v}{d_0^2} \quad (42)$$

yazalım. Burada J_0 filtre çalışma süresinin başlangıcındaki hidrolik eğim, d_0 temiz haldeki filtre tanesinin çapıdır. Malzemenin küresel tanelerden müteşekkil olduğu gözönüne alınmıştır. Küresel tanelerden meydana gelen malzemeye ait özgül yüzey (6) bağıntısı ile daha önce hesaplanmıştır. (6) bağıntısından d_0 çekilerek (42) de yerine konursa

$$J_0 = \frac{180 \cdot v}{g} \cdot \frac{(1-f_0)^2}{f_0^3} \cdot \frac{v \cdot S_0^2}{36(1-f_0)^2} \quad (43)$$

ve düzenlenirse

$$J_0 = \frac{5 \cdot v}{g} \cdot \frac{S_0^2}{f_0^3} \cdot v \quad (44)$$

elde edilir. Süspansiyon maddelerin filtre boşluklarında artmasına bağlı olarak porozite f_0 dan f ye ve özgül yüzey S_0 dan S ye değişecektir. Bu halde hidrolik eğim

$$J = \frac{5 \cdot v}{g} \cdot \frac{S^2}{f^3} \cdot v \quad (45)$$

olur. (45) bağıntısı (44) yardımıyla

$$J = J_0 \frac{f_0^3}{S_0^2} \cdot \frac{1}{v} \frac{S^2}{f^3} \cdot v$$

$$J = J_0 \left(\frac{f_0}{f} \right)^3 \left(\frac{S}{S_0} \right)^2 \quad (46)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Diğer taraftan özgül birikintinin tarifi gereğince

$$\sigma_v = f_0 - f \quad (47)$$

veya

$$f = f_0 - \sigma_v \quad (48)$$

yazılabilir. Bu bağıntı

$$\left(\frac{f_0}{f}\right)^3 = \left(\frac{f_0}{f_0 - \sigma_v}\right)^3 \quad (49)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Akımın kapiler borular içinde meydana geldiği farzedilerek S özgül yüzeyi kapiler borulara bağlı olarak da ifade edilebilir. Temiz filtre yatağının birim yüzey alanında ve birim derinliğinde, iç çapı e_0 ve uzunluğu l olan n adet kapiler borunun olduğu kabul edilecektir (2). Bu durumda porozite ve özgül yüzey

$$f_0 = n \frac{\pi}{4} e_0^2 l \quad (50)$$

$$S_0 = n \pi e_0 l \quad (51)$$

olur. (50) ve (51) bağıntıları (16) ve (17) ile aynı tipten ifadelerdir. Tıkanma sebebiyle kapiler borunun başlangıçtaki e_0 çapının, uniform olarak azalarak e değerini aldığı kabul edilmektedir. Bu halde (50) ve (51) bağıntıları

$$f = n \frac{\pi}{4} e^2 l \quad (52)$$

$$S = n \pi e l \quad (53)$$

haline gelir. (50), (51), (52) ve (53) bağıntıları yardımıyla aşağıdaki ifade yazılabilir :

$$\left(\frac{S}{S_0}\right)^2 = \left(\frac{e}{e_0}\right)^2 = \frac{f}{f_0} = \left(\frac{f_0 - \sigma_v}{f_0}\right) \quad (54)$$

Bu ifade, (46) bağıntısında yerine konursa

$$J = J_0 \left(\frac{f_0}{f_0 - \sigma_v}\right)^3 \left(\frac{f_0 - \sigma_v}{f_0}\right)$$

$$J = J_0 \left(\frac{f_0}{f_0 - \sigma_v}\right)^2 \quad (55)$$

elde edilmiş olur. Diğer taraftan 1 m^3 zahiri hacim içindeki birikinti ağırlığını $\gamma' \text{ m}^3/\text{kg}$ ile ifade edersek volumetrik ve gravimetrik özgül birikintiler arasındaki bağıntı

$$\sigma_v = \gamma' \sigma \quad (56)$$

olur. $\bar{\lambda}$ nın sabit ve $\bar{\lambda}_0$ a eşit olduğu kabul edilerek (56) ve (41) bağıntıları yardımıyla σ_v bulunur :

$$(57) \quad \sigma_v = \gamma' \cdot \sigma = \gamma' \cdot v \cdot \bar{\lambda}_0 \cdot \bar{c}_0 e^{-\bar{\lambda}_0 l} \cdot t \quad (57)$$

$\gamma' \cdot v \cdot \bar{\lambda}_0 \bar{c}_0 / f_0$ ifadesine $\bar{\alpha}$ denilirse, (57) bağıntısı

$$\sigma_v = \bar{\alpha} f_0 \cdot t \cdot e^{-\bar{\lambda}_0 l} \quad (58)$$

haline gelir. Bu denklem (55) de yerine konursa

$$J = J_0 \left(\frac{f_0}{f_0 - \bar{\alpha} f_0 t e^{-\bar{\lambda}_0 l}} \right)^2$$

$$J = J_0 \left(\frac{1}{1 - \bar{\alpha} t e^{-\bar{\lambda}_0 l}} \right)^2 \quad (59)$$

olur ve herhangi bir t anında filtrenin toplam L derinliğindeki H yük kaybı

$$H = \int_0^L J dl = \int_0^L J_0 \frac{dl}{(1 - \bar{\alpha} t e^{-\bar{\lambda}_0 l})^2} \quad (60)$$

$$H = \frac{J_0}{\bar{\lambda}_0} \left[\frac{\bar{\alpha} \cdot t}{1 - \bar{\alpha} \cdot t} \cdot \frac{e^{\bar{\lambda}_0 L} - 1}{e^{\bar{\lambda}_0 L} - \bar{\alpha} \cdot t} + \ln \left(\frac{e^{\bar{\lambda}_0 L} - \bar{\alpha} t}{1 - \bar{\alpha} t} \right) \right] \quad (61)$$

bulunur. Herhangi bir t anında filtrenin bütün L derinliğinde biriken süspansiyon maddenin miktarı

$$D_v = \int_0^L \sigma_v \cdot dl = \int_0^L \bar{\alpha} \cdot f_0 \cdot t \cdot e^{-\bar{\lambda}_0 l} \cdot dl = \frac{\bar{\alpha} f_0 t}{\bar{\lambda}_0} (1 - e^{-\bar{\lambda}_0 l}) \quad (62)$$

olarak bulunmuş olur.

Filtrenin toplam L derinliğindeki yük kaybının hesaplanması ile ilgili sayısal bir uygulama

$L = 0,75$ m, $d = 0,8$ mm = $(0,8) \cdot 10^{-3}$ m, $f_0 = 0,4$, $v = 2 \cdot 10^{-3}$ m/sn ;
 $c_0 = 15$ mg/l = $(15) \cdot 10^{-3}$ kg/m³, $t = 10^\circ\text{C}$, $\nu = (1,31) \cdot 10^{-6}$ m²/sn,
 $\gamma' = 0,02$ m³/kg ve $\bar{\lambda}_0 = 6$ m⁻¹ olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda $t = 0$ anında J_0

$$J_0 = \frac{180 \cdot v}{g} \cdot \frac{(1-f_0)^2}{f_0^3} \cdot \frac{v}{d_0^2} = \frac{180 \cdot 1,31 \cdot 10^{-6}}{9,81} \cdot \frac{(1-0,4)^2}{(0,4)^3} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3}}{(0,8 \cdot 10^{-3})^2} = 0,42$$

olur. $\bar{\alpha}$ ve $e^{\bar{\lambda}_0 L}$ değerleri de

$$\bar{\alpha} = \frac{\gamma' \cdot v \cdot \bar{\lambda}_0 \cdot \bar{c}_0}{f_0} = \frac{0,02 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot (15 \cdot 10^{-3})}{0,4} = 9 \cdot 10^{-6}$$

$$e^{\bar{\lambda}_0 L} = e^{6 \cdot 7,75} = e^{46,5} = 90$$

bulunur.

Herhangi bir t zaman sonra toplam L boyundaki kayıp (61) bağıntısı ile

$$H = \frac{0,42}{6} \left[\frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot t}{1 - 9 \cdot 10^{-6} \cdot t} \cdot \frac{90 - 1}{90 - 9 \cdot 10^{-6} \cdot t} + \ln \left(\frac{90 - 9 \cdot 10^{-6} \cdot t}{1 - 9 \cdot 10^{-6} \cdot t} \right) \right] \quad (63)$$

elde edilir. $t = 0$ sn ; $t = 0,25 \cdot 10^5$ sn ; $t = 0,5 \cdot 10^5$ sn ; $t = 0,75 \cdot 10^5$ sn ; $t = 1,0 \cdot 10^5$ sn ; $t = 1,11 \cdot 10^5$ sn sürelerinin sonunda L derinliğindeki kayıplar, (63) bağıntısından hesaplanarak aşağıda tablo halinde verilmiştir.

Zaman t , sn	0	$0,25 \cdot 10^5$	$0,5 \cdot 10^5$	$0,75 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^5$	$1,11 \cdot 10^5$
Yük kaybı H , m	0,32	0,35	0,41	0,55	1,11	∞

NOTASYON

- A_f = Filtre yatağında bulunan bütün tanelerin toplam yüzey alanı
- c = Akım içindeki süspansiyon konsantrasyonu (Hacimsel konsantrasyon)
- c_0 = Filtre girişinde, $t = 0$ anındaki konsantrasyon (Hacimsel konsantrasyon)
- c_G = Gravimetrik olarak akım içindeki süspansiyon konsantrasyonu
- \bar{c}_0 = Gravimetrik olarak filtre girişindeki süspansiyon konsantrasyonu
- D_t = Herhangi bir t anında bütün L filtre derinliği boyunca birikinti miktarı.

- d_0 = Filtre çalışma süresinin başlangıcında küre şeklinde olduğu kabul edilen filtre tanesinin çapı, veya buna eşdeğer hacimli kürenin çapı
 d = Küre şeklinde kabul edilen bir filtre tanesinin çapı veya küresel olmayan filtre tanelerinde eşit hacimli kürenin çapı
 e_0 = Kapiler boru iç çapı
 e = Birikinti dolayısıyla azalan e_0 çapı.
 f = Porozite
 f_0 = Temiz haldeki yatağa ait porozite
 H = Herhangi bir t anında filtrenin toplam derinliği olan L deki yük kaybı
 J = Hidrolik eğim
 L = Filtrenin toplam derinliği
 N = Filtredeki toplam tane sayısı
 n = Filtrenin birim yüzey alanındaki kapiler boru sayısı
 r = Bir kapiler boru yarıçapı
 S = Özgül yüzey
 S_0 = Filtrasyon başlangıcındaki özgül yüzey
 V_t = Filtredeki toplam tane hacmi
 V_f = Toplam filtre hacmi
 v = Filtre hızı
 V = Filtre tanesi hacmi
 V_0 = Temiz haldeki filtre tanesi hacmi
 σ_t = Özgül birikinti (Birim yatak hacmindeki birikinti hacmi)
 σ = Gravimetrik olarak ifade edilen özgül birikinti.
 β_r = Malzeme yerleşme sabiti
 θ = Kapiler boru içindeki birikinti kalınlığı
 λ = Filtre katsayısı
 λ_0 = Temiz filtreye ait filtre katsayısı ($t = 0$ anında)
 ν = Suyun kinematik viskozitesi

REFERANSLAR

- (1) Ives, K. J. — Theory of Filtration, International Water Supply Congress, Vienna, 1969.
- (2) Huisman, L. — Lecture Notes on Rapid Sand Filtration, Delft University of Technology, Netherlands, 1974.
- (3) Camp, R. — Theory of Water Filtration, Sanitary Engineering Division, ASCE., Vol. 90, No. SA 4, 1964.
- (4) Muslu, Y. — Linear Flow Through Porous Media, İ.T.Ü. Bülteni Cilt 24, No. 1, 1971.