Lineer Operatörler Hakkında Genişletilmiş Teoremler

Hamdi ARIKAN [1]

Özet :

Aşağıdaki yazının amacı lineeroperatörler hakkında genişletilmiş teoremleri vermektir. Bununla ilgili olarak «sıralanma», Zorn Lemması, Zermelo teoremi ve Zermelo'nun seçme aksiyomu ifade edilmiştir.

1. Sıralanma

1.1. *Tanım* : Bir P cümlesinin elemanları arasında aşağıdaki aksiyomlara uyan ve «$<$» işaretiyle gösterilecek olan bir ikili işlem tanımlanmışsa P cümlesine «$<$» ikili işlemine göre yarı sıralanmış bir cümle denir.

(1) Daima $a < a$,

(2) $a < b$ ve $b < a$ ise $a = b$ dir,

(3) $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$ dir.

Örnek : Verilen bir Y cümlesinin bütün alt cümlelerinin cümlesi P ise ihtiva edilme bağıntısı «$\subset$» P'nin bir yarı sıralanışını belirtir. Fazla olarak (bundan başka)

(4) $a < b$, $b < a$ dan en az biri doğru ise

P'ye tam sıralanmış bir cümle denir.

Eğer P yarı sıralanmış bir cümle ve S, P'nin bir alt cümlesi ise, her $a \in S$ için $a < m$ olacak şekildeki bir $m \in P$ elemanı S'nin bir üst sınırı ismini alır. Eğer $a \in P$ ve $m < a$ beraberce $m = a$ olduğunu belirtirse bir $m \in P$ elemanı maksimal ismini alır.

---

[1] Asistan, Sakarya DMMA, Yük. Mat. Kürsüsü

1.2. *Tanım :* Tam sıralanmış bir cümlenin boş olmayan her alt cümlesi bir ilk eleman ihtiva ederse bu tam sıralanmış cümle ismini alır.

Zorn Lemması: Boş olmayan yarı sıralanmış bir P cümlesinin her tam sıralanmış bir alt cümlesi üstten sınırlı ise P'nin bir maksimal elemanı vardır.

1.3. *(Zermo Teoremi) :* Her cümle, içine uygun bir sıralanma münasebeti ithal etmek suretiyle iyi sıralanabilir.

Zermelo'nun Seçme Aksiyomu : Hiçbiri boş olmayan bir takım A, B, C,... cümleleri verilmiş olsun. Daima $f(A)\in A$, $F(B)\in B$, $f(C)\in C$, ... olacak şekilde $M=\{A, B, C \dots\}$ cümlesini $N=A \cup B \cup C \dots$ cümlesi içine tasvir eden bir f «seçme fonksiyonu» vardır.

2. Lineer Operatörler Hakkında Genişletilmiş Teoremler

2.1. *Tanım :* Eğer Y bir cümle, M Y'nin bir has alt cümlesi ve M üzerinde tanımlı bir fonksiyon f ise, Y üzerinde tanımlı bir F fonksiyonu her $m\in M$ için $f(m)=F(m)$ oluyorsa f'in bir genişletilmişi ismini alır.

2.1. *Teorem :* Y ve Z iki lineer uzay olsun ve M Y'nin bir has alt uzayı olsun. f M'den Z içine tanımlı bir lineer operatör olsun. F f'nin bir genişletilmişi olacak şekilde Y den Z içine tanımlı bir F lineer operatörü vardır.

İspat : Seçilen her $y \in Y - M$ elemanı ve y_0 ve M den ibaret olan cümle ile örtülen Y nin alt uzayı M_0 olsun. M_0 ın her elemanı $y\in M$ ve α herhangi bir skaler olmak üzere $y+\alpha y_0$ şeklinde bir ve yalnız bir gösterilimi haizdir. Birden fazla gösterilimin varlığını kabul edelim. $y_1, y_2\in M$ olmak üzere farklı iki gösterilimi $y_1+\alpha_1 y_0$ ve $y_2+\alpha_2 y_0$ ise $y_1+\alpha_1 y_0=y_2+\alpha_2 y_0$ olacaktır. Buradan $y_1-y_2=(\alpha_2-\alpha_1)y_0$ elde edilir. Halbuki burada $y_1-y_2\in M$ ve $y_0\notin M$ dir. Dolayısiyle eşitlikten $(\alpha_2-\alpha_1)y_0\in M$ dir. Bu ikisinin sonucu $\alpha_2-\alpha_1=0$ dır. Demekki $y_1-y_2=0$, $y_1=y_2$ dir. Şu halde gösterilim tektir. Şimdi M_0 dan Z içine bir F_0 lineer operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

z_0 Z deki sabit bir vektörü, α herhangi bir skaleri göstermek üzere $F_0(y+\alpha y_0)=f(y)+\alpha z_0$.

Burada gaye z_0 ın seçimi değildir. Kolayca görülmektedir ki F_0 f nin bir genişletilmişidir ve M_0 dan Z içine bir lineer operatördür. Usulün sürekli tatbiki ile Y nin bütününde tanımlı istenilen genişletilmiş fonksiyona varılabilir. Gerçekten Y sonlu boyutlu ise sonlu sayıda adımda istenilene ulaşılır. Genel hal için münakaşa Zorn Lemmasından yararlanarak doğru olarak sürdürülür.

Tanım bölgesi $D(g) \subset Y$ ve değer bölgesi $R(g) \subset Z$ olan bir lineer operatör g olsun; M nin $D(g)$ nin bir has alt uzayı olduğunu kabul edelim ve aynı g f nin bir genişletilmişi olsun. g operatörlerinin bütününün sınıfı P olsun. Eğer $g, h \in P$ ise $D(g) \subset D(h)$ ve h g nin bir genişletilmişi anlamında $g < h$ bağıntısı tanımlanır. Bu bağıntı P de bir yarı sıralanma tanımlar. Bundan başka belirli $F_0 \in P$ için P boş değildir.

S nin P nin tam sıralanmış bir alt cümlesi olduğunu kabul edelim. S nin bir üst sınırı olan bir $G \in P$ elemanı tanımlayacağız. $g \in S$ elemanlarına tekabül eden $D(g)$ cümlelerinin bütününün birleşimi $D(G)$ olsun. Bu $D(G)$ cümlesi Y nin bir alt uzayıdır. Çünkü $y_1, y_2 \in D(G)$ kabul edilmişti. Buradan $y_k \in (Dg_k)$ $(k=1,2)$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in S$ elemanları mevcuttur. $g_1 < g_2$ farzedebiliriz. Böylece S tam sıralanmış bir cümle olur. Buradan $D(g_1) \subset D(g_2)$ yazılır, nitekim $y_1 + y_2 \in D(g) \subset D(G)$ dir. $D(G)$ nin kapanışı skalerle çarpım altında daha basit olarak pürüzsüz tahkik edilir. Şimdi $y \in D(G)$ farzedelim. Buradan bazı $g \in S$ için $y \in D(g)$ olduğu görülür. $G(y) = g(y)$ tanımlayabiliriz. Bu tanım muğlak değildir, çünkü, eğer $g_1, y_2 \in S$ olmak üzere $y \in D(g_1)$ ve $y \in D(g_2)$ ise $g_1(y) = g_2(y)$ eşitliğinde, S nin tam sıralanmış olması nedeniyle, sahibiz. G nin lineer olduğunu ispat $D(G)$ nin bir lineer Manifold olduğunu isbata benzerdir. G g nin tanım bölgelerinin birleşimi üzerinde tanımlı olduğundan her $g \in S$ için $G \in P$ ve $g < G$ olduğu aşikardır. Artık P nin Zorn Lemmasını ve gereken şartları gerçeklediğini biliyoruz. Bu nedenle P F ile göstereceğimiz bir maksimal eleman ihtiva eder. F nin tanım bölgesi Y yi örter, aksi takdirde isbatın birinci kısmındaki M ye $D(F)$ olarak bakarsak $g \neq F$, $F < g$ olacak şekilde bir $g \in P$ elde edilir ki F nin maksimal oluşuna karşıttır. Teoremdeki gerekli özellikleri F nin haiz olması nedeniyle teoremin isbatı şimdi tamamdır.

2.2. *Teorem :* $Y_0 Y$ lineer uzayının bir has alt uzayı olsun ve $y_1 \in Y - Y_0$ farzedelim. Eğer $y \in Y_0$ ve $<y_1, y_1'> = 1$ ise $<y, y_1'> = 0$ olacak şekilde bir $y_1' \in Y'$ mevcuttur.

c) $\zeta_0 \leqslant p(y+y_0)-f(y)$

eşitsizliği olduğunu görürüz. Bir başka gerek şart $\alpha=-1$ alarak ve a) ve b) de y yerine $-y$ koyarak elde edilir. Bu yolla her $y \in M$ için

d) $-p(-y_0)-f(y) \leqslant \zeta_0$

eşitsizliğinin doğruluğunu görürüz. Şimdi, karşıt olarak, c) ve d) eşitsizlikleri her $y \in M$ için gerçeklenirse bu durumda b) de gerçeklenir. Bunu görmek için $\alpha>0$ farzedilir ve c) de y yerine $\alpha^{-1}y$ konur. Böylece

$$\zeta_0 \leqslant p(y/\alpha+y_0)-f(y/\alpha)=(1/\alpha)\,p(y+\alpha y_0)-(1/\alpha)\,f(y)$$

ve tekrar düzenleyerek, her $y \in M$ ve $\alpha>0$ için

$$f(y)+\alpha\zeta_0 \leqslant p(y+\alpha y_0)$$

bulunur. Şayet $\alpha<0$ ise d) de y yerine $\alpha^{-1}y$ yerleştirilir. Böylece

$$\zeta_0 \geqslant -p(-y/\alpha-y_0)-f(y/\alpha)=(1/\alpha)\,p(y++y_0)-(1/\alpha)\,f(y)$$
$$-p(y+\alpha y_0)+f(y) \leqslant -\alpha\zeta_0$$

sonuç olarak

$$f(y)+\alpha\zeta_0 \leqslant p(y+\alpha y_0)$$

bulunur. Bu iki netice b) nin her durumda doğru olduğunu gösterir. ($\alpha=0$ hali aşikârdır) Şimdi y_1 ve y_2 M nin herhangi elemanları olsunlar. O halde

$f(y_2)-f(y_1)=f(y_2-y_1) \leqslant p(y_2-y_1)$

$=p((y_2+y_0)+(-y_1-y_0)) \leqslant p(y_2+y_0)+p(-y_1-y_0)$ dır. Buradan

e) $-p(-y_1-y_0)-f(y_1) \leqslant p(y_2+y_0)-f(y_2)$

elde edilir.

$$c=\sup_{y\in M}\{-p(y-y_0)-f(y)\},$$

$$C=\inf_{y\in M}\{p(y+y_0)-f(y)\} \quad \text{olsun.}$$

e) den $c \leqslant C$ olduğunu görürüz. Hem c, hem de C zaruri olarak sonludurlar. Burada da, $c \leqslant \zeta_0 \leqslant C$ olacak şekilde bir ζ_0 reel sayısı vardır. Ve bu c) ve d) yi c ve C nin tanımları nedeniyle gerçekler. Biz buradan F_0 ı a) ile tanımlarız ve b) yi gerçekler. Bu 2.5. in isbatının ilk safhasını tamamlar. İspat 2.1. deki gibi Zorn lemmasının tatbiki ile tamamlanır. $D(g)$ nin bir has alt uzayı M olacak şekilde $D(g) \subset Y$ ile g lineer fonksiyonellerinin bütününün P sınıfını göz önüne alalım, g f nin bir genişletilmişidir ve $y \leqslant D(g)$ olmak üzere $g(y) \leqslant p(y)$ dir. P nin yarı sıralanması önceki gibi tanımlar ve isbatın gerisi önceki gibi yapılır.

BİBLİOGRAFYA

[1] ANGUS E. TAYLOR Functional Analysis 1958

[2] J. DIEUDONNÉ Éléments d'analyse 1972

İspat : Sonlu boyutlu haldeki isbatı ihmal edelim. Y_0 ve y_1 in ihtiva edildiği cümle ile gerilen, Y nin alt uzayı, M olsun, M nin elemanları $y \in Y_0$ ve α bir skaler olmak üzere $y+\alpha y_1$ şeklinde tek türlü gösterilir. $f(y+\alpha y_1)=\alpha$ olarak tanımlayalım. Burada f M üzerinde bir lineer fonksiyoneldir ve eğer $y \in Y_0$ ise $f(y_1)=1$ olduğu takdirde $f(y)=0$ dır. 2.1. Teorem'i vasıtasiyle (skalerin L lineer uzayı ile) f nin bir genişletilmişi olan Y' nin bir elemanı mevcuttur. Şayet bu elemanı y_1' ile gösterirsek onda aranılan özelliklerin olduğunu görürüz.

2.3. *Teorem :* Y bir lineer uzay olsun. Eğer $y \in Y$ ve eğer $<y, y'>=0$ ise her $y' \in Y'$ için $y=0$ dır. Y nin Y'' içine tasviri J ile gösterilirse J^{-1} in mevcudiyeti şeklinde de ifade edilebilir.

İspat : 2.2. yi $Y_0=(0)$ ile uyguarsak eğer $y_1 \neq 0$ ise $<y_1, y_1'> \neq 0$ olacak şekilde $y_1' \in Y'$ nin mevcut olduğu görülür. Bu durum sadece 2.3. ün pozitif karşıt halidir. Böylece ispat tamamlanır.

2.4. *Tanım :* Y bir reel lineer uzay olsun ve Y üzerinde tanımlı reel değişkenli bir fonksiyon p olsun. p aşağıdaki iki özelliği haiz olduğunda Y üzerinde bir alt lineer fonksiyonel ismini alır.

i) $p(x+y) \leqslant p(\mathrm{x}) + y(y)$
ii) $p(\alpha y) = \alpha p(y)$ eğer $\alpha \geqslant 0$

2.5. *Teorem :* Y bir lineer uzay ve M Y nin bir has alt uzayı olsun. Her $y \in M$ için $f(y) \leqslant p(y)$ olacak şekilde Y üzerinde tanımlı bir alt lineer fonksiyonel p ve M üzerinde tanımlı bir fonksiyonel f olsun. Şu halde, her $y \in Y$ için $F(y) \leqslant p(y)$ ve F f nin bir genişletilmişi olacak şekilde Y üzerinde tanımlı bir F lineer fonksiyoneli vardır.

İspat : 2.1. in isbatına ait olan gösterilimi düzenleyebiliriz. Böylece ispat bir dereceye kadar kısaltılmış biçimde verilebilir. Bu isbatta olduğu gibi, y_0 ve M_1 ile başlayabiliriz. İlk problem M_1 üzerinde

a) $F_0(y+\alpha y_0) = f(y) + \alpha \zeta_0$

ile tanımlı F_0 lineer fonksiyoneli her $y \in M$ ve her reel α için

b) $F_0(y+\alpha y_0) \leqslant p(y+\alpha y_0)$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde ζ_0 gibi reel bir sayının varlığını göstermektir. a) ve b) de $\alpha=1$ alarak ζ_0 ile gerçeklenen bir tek gerek şartın her $y \in M$ için

Derginin Yayımlanması ve Dergiye Verilecek Yazıların Hazırlanması ile İlgili Esaslar :

1 — Dergi normal olarak senede dört sayı olarak yayınlanır. Yazı heyeti tarafından gerekli görüldüğü hallerde ilâve sayıların çıkarılması mümkündür.

2 — Dergi, Sakarya D.M.M. Akademisi öğretim kadrosu tarafından yapılan araştırma ve incelemelerin sonuçlarını neşretmek gayesiyle yayınlanmakla beraber, Akademiye mensup olmayan müelliflerin yazıları da neşredilebilir.

3 — Yazılar, daktilo ile seyrek olarak kâğıdın bir yüzüne yazılmalı ve iki nüsha olarak Dergi sekreterliğine verilmelidir.

4 — Metnin tertibinde :
a) Yazarın adı.
b) Yazarın bağlı olduğu Fakülte ve Kürsü adı.
mevcut olmalı ve yazı, şekil ve resimler hariç 15 daktilo sahifesini aşmamalıdır. Müellifinin müracaatı üzerine kısaltılamıyacağı anlaşılan daha uzun yazıların, Yazı Heyetinin kararı ile basılması mümkündür. Başlık 50 harften uzun olmamalıdır.

5 — Yazı, mümkün olduğu kadar şu bölümlerden teşekkül etmelidir :
1 — Giriş ve maksad,
2 — Kullanılan notasyon,
3 — Ele alınan konu ile ilgili çalışmalar,
4 — Konunun incelenmesi,
5 — Varılan sonuçlar,
6 — Ekler,
7 — Bibliyoğrafya.

6 — Referanslar, metinde numaralanarak belirtilmeli ve muhakkak yazı sonunda bibliyografya kısmına verilmelidir. Tercüme ve nakil yazılar için mehaz göstermek mecburidir.

7 — Şekiller, teknik resim kaidelerine uygun olarak çini mürekkep ve aydınger'e ve büyük ölçekle çizilmeli ve metin içinde yeri işaretlenerek hangi ölçüde küçültüleceği belirtilmelidir.
Şekiller üzerindeki yazı ve rakamlar, şekillerin büyüklüğüne uygun olmalı, temiz yazılmalı, küçültme halinde seçkin ve okunaklı kalabilmelidir. Yazı heyeti lüzum gördüğü şekilleri yeniden çizdirmeye ve gerekli ücreti telif ve tercüme hakkından mahsup etmeye yetkilidir.
Fotoğraflar, parlak kâğıda çok net bir şekilde basılmış olmalı ve ne ölçüde küçültüleceği arkasında belirtilmelidir.

9 — Yazılar «Sakarya D.M.M. Akademisi Dergisi Yazı Heyeti Sekreterliği - Adapazarı» adresine gönderilmelidir.

10 — Gönderilen yazılar geri verilmez.

11 — Dergide yayınlanacak yazılarda ileri sürülecek mütalaaların ve formüllerin yanlışlığından doğacak sorumluluk yazı sahiplerine aittir.

12 — Müellifi tarafından vaktinde tashih edilmeyen yazılar, Yazı Heyetinin uygun göreceği bir şahsa tashih ettirilir ve ücreti telif hakkından ödenir.

12 — Bir sayfada 5 ten fazla yanlış kalan yazılar tashih edilmemiş sayılır.

13 — Telif hakları ve belirtilmemiş diğer hususlar hakkında «Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademiler Yayın Yönetmeliği» hükümleri muteberdir.