Feyezanların İstatistik Analizleri İçin Dağılım Fonksiyonu Seçiminde Kontrol Metodları — Uygunluk Testleri —

Cevat ERKEK [1]

1. Giriş

Feyezan ihtimal hesaplarında çok sayıda dağılım fonksiyonunun seçilmesi mümkündür [1, 2, 3]. Bu dağılım fonksiyonları yardımıyla küçük bir feyezan gözlem serisinden hesaplanan istatistik büyüklüklerin bütün feyezanları veya tüm olaylar toplumunu matematiksel ifade olarak ne derece temsil edebileceği sorusu seçilen uygun kontrol metodu (uygunluk testleri) yardımıyla cevaplandırılabilir.

Seçilen bir dağılım fonksiyonunun kabul veya reddedilmesini bir ihtimal sayısı ile birleştirerek karar verebilmek için gözlem dizisinin frekans dağılımı ile yoğunluk fonksiyonu arasındaki sapma için objektif bir ölçünün kontrol büyüklüğü olarak tesbiti ve tesbit edilen bu büyüklüğün dağılım fonksiyonunun bilinmesi zorunludur.

Bütün uygunluk testlerinde prensip olarak normal dağılmış bir olaylar toplumundan alınan bir gözlem dizisinin hesaplanan istatistik değeri, belirli bir dağılım kanununa, yani kontrol dağılımına uyduğu kabul edilir. Aynı olaylar toplumundan alınan çeşitli gözlem dizileri için bu kontrol dağılımının bir değeri hesaplanır ve buna beklenen değerden sapma ismi verilir. Bundan sonra seçilen bir güven veya yanılma ihtimali yardımıyla bu sapmanın tesadüfi mi, yoksa anlamlı mi (signifikant) olduğu tesbit edilir. Meselâ bir sapma değeri, bütün olayların % 95'inde geçilmiyorsa, tesadüfi olarak kabul edilir ve 100 olaydan 5 tanesinde sapmanın anlamlı olduğu söylenir.

---

1) Doçent, Dr. - Ing., İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, Su Yapıları Kürsüsü
Taşkışla - İstanbul

α = Yanılma ihtimali ve s = istatistik güven sayısı $(s=1-\alpha)$ olmak üzere

$\alpha \leq$ % 0,1	alındığında istatistik	yönden	güven	çok iyi	
$\alpha \leq 1$	»	»	»	»	iyi
$\alpha \leq$ % 5,0	»	»	»	güvenilebilir	
$\alpha \geq$ % 5,0	»	»	»	güvenilemez	

Feyezan ihtimal hesaplarında genellikle α = % 5 $(s=0{,}95)$ yanılma ihtimali esas alınmaktadır.

Sapmanın tesadüfi olduğu hipoteze (ihtimal yoğunluk fonksiyonuna) sıfır hipotezi ismi verilir. Sapmanın anlamlı olması hali de alternatif hipotez olarak isimlendirilir.

Doğru olan bir sıfır hipotezi reddedilirse, 1 nci tip (α - hatası), yanlış bir sıfır hipotezi kabul edilirse 2 nci tip (β - hatası) bir hata yapılmış olur. Sıfır hipotezinin kabul veya reddedilmesi birçok faktörlerin yanında yanılma ihtimalinin veya güven seviyesinin büyük veya küçük tutulmasına bağlıdır. Sıfır hipotezinin kabulü için güven seviyesi ne kadar küçük tutulursa, ikinci tip bir hata yapılması ihtimali de o kadar büyük olur.

Küçük sayıda olaylar serisi için $(N<100)$ özel kontrol dağılım metodları (uygunluk testleri) inkişaf ettirilmiştir. Daha büyük sayıda olaylar toplumunda sapmaların yaklaşık olarak normal dağıldığı kabul edilir. Bazı önemli kontrol dağılım metodlarının esasları aşağıda kısaca özetlenmiştir.

2. t - Dağılımı

Bu kontrol dağılımı birinci derecede aritmetik ortalamanın ve standart sapmanın bulunmasında yapılan hataları gözönüne alır. Simetrik bir dağılım olup, olayların dağılımında serbestlik derecesinin bilinmesi gerekir. Dağılımın matematiksel ifadesi

$$p(t)=\frac{\frac{N-1}{2}}{\sqrt{N\,.\,\pi}\,.\left(\frac{N-2}{2}\right)!}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{N}\right)^{\frac{N+1}{2}}}$$

eşitliği ile verilebilir. $N \rightarrow \infty$ için normal dağılım elde edilir.

t - testinin kontrol büyüklüğü :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_x}{\sqrt{N}}}$$

eşitliği ile hesaplanır.

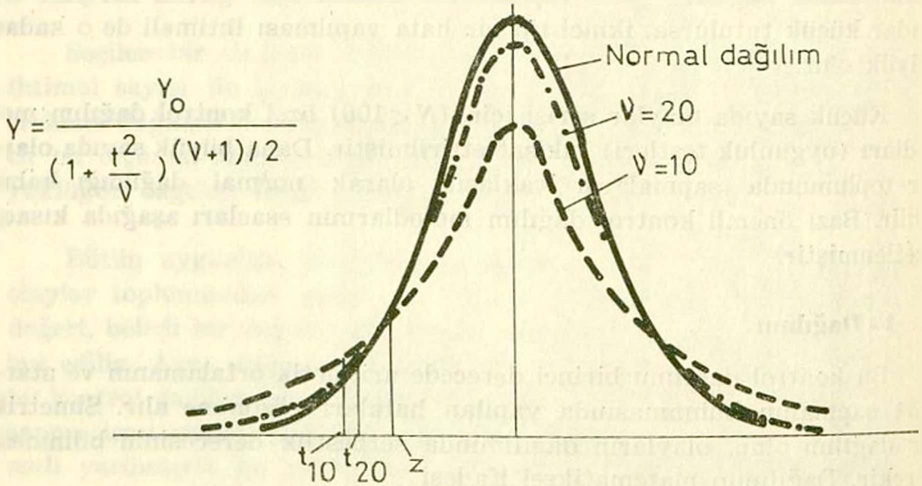
Burada;

$\bar{X}$ = gözlem dizisinden hesaplanan aritmetik ortalama

μ = gerçek ortalama değer

S_x = gözlem dizisinin standart sapması

t - dağılımı ile hesaplanan *t* - değerinin seçilen güven seviyesi yardımıyla tesbit edilen bir kritik *t* - değerinden küçük veya büyük olduğu kontrol edilir. Bunun için belirli bir güven sınırı tesbit edildikten sonra (meselâ 5.1 veya % 0,1) *t* - dağılımının absis değerleri *t* - dağılımı tablosundan alınır (Tablo 1) ve aynı alanlı normal dağılımdan (Gauss) ne kadar saptığı kontrol edilir.



Şekil 1. t - dağılımı

İki absis değeri arasındaki mesafe gözlem dizisi genişliği büyüdükçe küçülür veya başka bir söyleyişle *t* - dağılımı normal dağılıma o derece yaklaşır.

Tablo 1. t—dağılımının anlamlılık sınırları.

İki taraflı test için yanılma ihtimali									
ν \ α	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619	6366,198
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598	99,992
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924	28,000
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	15,544
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	5,869	11,178
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	9,082
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7,885
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	7,120
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	6,594
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	6,211
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	5,921
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	5,694
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	5,513
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	5,363
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	5,239
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	5,134
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	5,044
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	4,966
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	4,897
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	4,837
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	4,784
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	4,736
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	28807	3,485	3,767	4,693
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	4,654
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	4,619
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	4,587
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	4,558
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	4,530
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	4,506
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	4,482
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	4,321
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	4,169
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373	4,025
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	3,891
ν / α	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,00005
Tek taraflı test için yanılma ihtimali									

Gözlem dizisinin aritmetik ortalamasının gerçek ortalama etrafındaki güven bölgesi aşağıdaki eşitlikle hesaplanır.

$$\overline{X}-t_p \cdot \frac{S_x}{\sqrt{N-1}} < \mu < \overline{X}+t_p \cdot \frac{S_x}{\sqrt{N-1}}$$

3. x^2 - Dağılımı

Feyezan ihtimallerinin kontrolü yönünden önemli olan x - dağılımı normal dağılan büyüklüklerin karelerinin toplamının dağılımını gösterir. t - dağılımına karşılık x - dağılımı simetrik değildir ve yalnız pozitif değerler de geçerlidir. Dağılımın matematiksel ifadesi

$$p(x^2)=\frac{1}{\sqrt{2^N}\left(\frac{N-2}{2}\right)!}\cdot(x^2)^{N-2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

eşitliği ile verilebilir.

x^2 - testinin kontrol büyüklüğünün genel ifadesi ise

$$x^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{n_i-p_i}{p_i}$$

şeklindedir. Burada

n_i = gözlem değerlerinden hesaplanan ihtimalleri,

p_i = dağılım fonksiyonundan hesaplanan ihtimalleri ifade eder.

x^2 - dağılımı simetrik olmadığından küçük sayıda gözlemler için asimetri katsayısı

$$C_s=\sqrt{\frac{8}{N-1}}$$

şeklinde ifade edilir. Büyük sayıda eleman ihtiva eden gözlem dizisinde bu değer sıfıra yaklaşır veya normal dağılım meydana gelir.

Bu dağılım yardımıyla standart sapmanın güven aralığı

$$\frac{S_x\cdot\sqrt{N}}{x_{(p-100)}}<\sigma_x<\frac{S_x\sqrt{N}}{x_p}$$

eşitliği ile tesbit edilir.

Bu dağılımın karakteristik değerleri tablo şeklinde verilmiştir. (Tablo 2). Ayrıca bu dağılım, gözlenen değerlerinin dağılımının teorik dağılımından sapmasını da kontrol etmede kullanlır.

Sınıflara ayrılmış bir gözlem dizisi için x^2 - uygunluk testinin tatbikatı aşağıda kısaca özetlenmiştir:

1. N - sayıdaki gözlem değerleri k - sayıda sabit aralıklı sınıflara ayrılır, ve her bir sınıfın teorik meydana gelme ihtimali seçilen sıfır hipotezine (dağılım fonksiyonuna) göre hesaplanır.

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$$

2. Her bir sınıftaki olay sayısı N_i belirlenir.

$$\sum_{i=1}^{k} N_i = N$$

3. Gözlem dizisi için x^2 - değeri aşağıdaki eşitlikten hesaplanır:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(Ni - Np_i)^2}{Np_i}$$

4. Serbestlik derecesi belirlenir.

$$\nu = k - m - 1$$

m = gözlem değerlerinden tahmin edilmesi zorunlu parametre sayısı.

Pratikte serbestlik derecesi hesaplanırken yalnız $N_{P_i} > 5$ değerine sahip sınıf sayısı gözönüne alınır.

5. Yanılma ihtimali (α) seçildikten sonra serbestlik derecesi (ν) de gözönüne alınarak x^2 - dağılım fonksiyonunun kritik $x^2_{\alpha,\nu}$ değeri tablodan (Tablo 2) okunur.

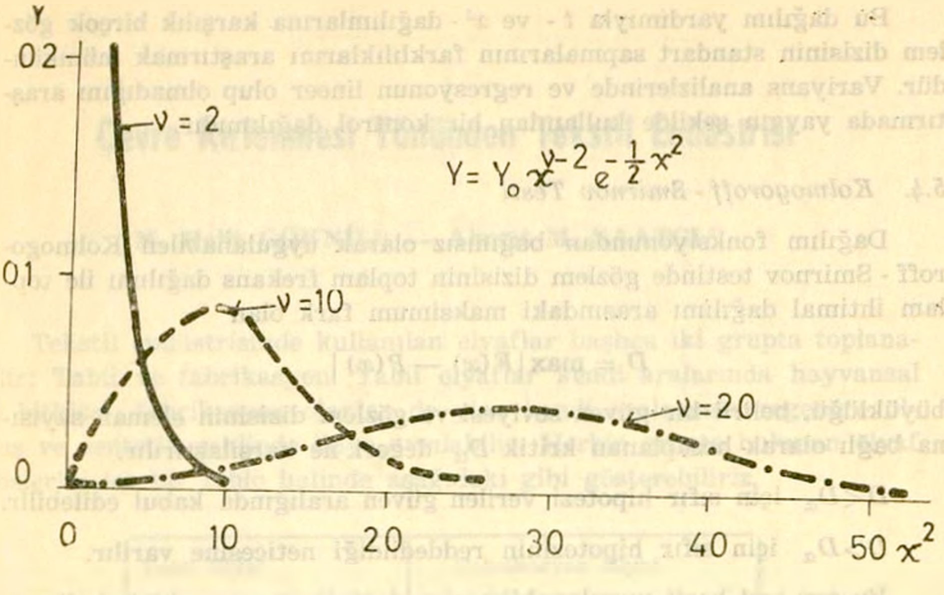
6. Hesaplanan x^2 - değeri; $x^2_{\alpha,\nu}$ ile karşılaştırılır.

$x^2 > x^2_{\alpha,\nu}$ için sıfır hipotezi esas alınan α yanılma ihtimali ile reddedildiği neticesine varılır.

$x^2 < x^2_{\alpha\nu}$ için sıfır hipotezi esas alınan güven seviyesi içinde kabul edilebilir. Böylece gözönüne alınan dağılım fonksiyonu gözlem değerlerini temsil edebileceği sonucuna varılmış olur.

TABLO 2. İki taraflı test için $x^2_{\nu,\alpha}$ dağılımı anlamlılık sınırları

ν \ α	0,99	0,975	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,446	0,713	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,115	0,216	0,352	0,584	1,00	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,297	0,484	0,711	1,064	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,01	18,48	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,36	15,51	17,53	20,09	26,12
9	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,28	19,68	21,92	24,73	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,2	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,54	26,30	28,85	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	25,99	28,87	31,53	34,81	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
22	9,54	10,98	12,34	14,04	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
24	10,86	12,40	13,85	15,66	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,20	36,42	39,36	42,98	51,18
26	12,20	13,84	15,38	17,29	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
28	13,56	15,31	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,92	41,34	44,46	48,38	56,89
30	14,95	16,79	18,49	20,60	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70
35	18,51	20,57	22,46	24,80	27,8	30,2	34,3	38,9	41,8	46,06	49,80	53,20	37,34	66,62
40	22,16	24,43	26,51	29,05	32,3	34,9	39,3	44,2	47,3	51,81	55,76	59,34	63,69	73,40
50	29,71	32,36	34,76	37,69	41,4	44,3	49,3	54,7	58,2	63,17	67,50	71,42	76,15	86,66
60	37,48	40,48	43,19	46,46	50,6	53,8	59,3	65,2	69,0	74,40	79,08	83,30	88,38	99,61
80	53,54	57,15	60,39	64,28	69,2	72,9	79,3	86,1	90,4	96,58	101,88	105,63	112,33	124,84
100	70,06	74,22	77,93	82,36	87,9	92,1	99,3	106,9	111,7	118,50	125,34	129,56	135,81	149,45
120	86,92	91,57	95,70	100,62	106,8	111,4	119,3	127,6	132,8	140,23	146,57	152,21	158,95	173,62
150	112,7	118,0	122,7	128,3	135,3	140,5	149,3	158,6	164,3	172,6	179,6	185,8	193,2	209,3
200	156,4	162,7	168,3	174,8	183,0	189,0	199,3	210,0	216,6	226,0	234,0	241,1	249,4	267,5



Şekil 2. x^2 - Dağılımı

4. F - Dağılımı

Simetrik olmıyan ve yalnız pozitif değerler için geçerli olan F - dağılım fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki kontrol büyüklüğünün dağılımı tesbit edilir.

$$F = \frac{\dfrac{S_1^2}{N_1}}{\dfrac{S_2^2}{N_2}}$$

Üç parametreli olan F - dağılım fonksiyonunun genel ifadesi

$$p(F) = \frac{\left(\dfrac{N_1+N_2-2}{2}\right)!\sqrt{N_1^{N_1} N_2^{N_2}}}{\dfrac{N_1-2}{2}!\quad \dfrac{N_2-2}{2}} \cdot \frac{F^{\frac{N_1-2}{2}}}{(N_2+N_1 F)^{\frac{N_1+N_2}{2}}}$$

eşitliği ile verilebilir. F - dağılım fonksiyonunu birkaç tabloda toplamak mümkündür. Burada bu tablolar verilmemiştir.

Bu dağılım yardımıyla t - ve x^2 - dağılımlarına karşılık birçok gözlem dizisinin standart sapmalarının farklılıklarını araştırmak mümkündür. Variyans analizlerinde ve regresyonun lineer olup olmadığını araştırmada yaygın şekilde kullanılan bir kontrol dağılımıdır.

5.4. Kolmogoroff - Smirnov Testi

Dağılım fonksiyonundan bağımsız olarak uygulanabilen Kolmogoroff - Smirnov testinde gözlem dizisinin toplam frekans dağılımı ile toplam ihtimal dağılımı arasındaki maksimum fark olan

$$D = \max |F(x) - P(x)|$$

büyüklüğü, belirli bir güven seviyesi ve gözlem dizisinin eleman sayısına bağlı olarak hesaplanan kritik D_α değeri ile karşılaştırılır.

$D < D_\alpha$ için sıfır hipotezi verilen güven aralığında kabul edilebilir.

$D > D_\alpha$ için sıfır hipotezinin reddedildiği neticesine varılır.

Bu son test basit uygulanabilmesi nedeniyle yaygın şekilde kullanılmaktadır.

REFERANSLAR

[1] CHOW, V. T. — Handbook of Applied Hydrology. Mc Graw - Hill, New - York, 1964.
[2] ERKEK, C. — Türkiye Akarsularına Öncelik Verilerek Kritik Feyezan Debisinin Hesap Metodları, İstanbul, 1972. 206 s. (Doçentlik tezi)
[3] ERKEK, C. — Feyezan Tahminlerinde İstatistik Metodlar. SDMMA. Dergisi No. 1, 1976, 20. s.
[4] MÜLLER, Trau, Vahl. — Im Ursprung begrenzte Verteilungsfunktionen. Die Wasserwirtschaft, 1975, H. 11.
[5] ÖZİŞ, Ü. — Hidrolik Süreçlerin İstatistik ve Olasılığı. E. Ü. Müh. Bil. Fak. Dergisi 1976, s. 3., 40 s.
[6] SACHS, L — Statistische Auswertungsmethoden, Berlin 1968.