

Theorie Généralisée Des Courbures

Genelleştirilmiş Eğrilik Teorisi

Siegfried HARTMANN
(Oran - Algérie)

Euclidsel Kinematikte Euler - Savary formülü ve ona dayalı konstruksiyonlar, yörünge eğrilerinin eğrilik özelliklerinde önemli bir rol oynarlar. Euclidsel kinematiğin genelleştirilmesinde ise, yörünge normalcisinin zarf noktaları (değme noktaları) olarak, eğrilik merkezi noktaları eğrilikten de önemlidirler.

Bizim mülâhazalarımızı gerçekleştiren Möbius düzleminde yörünge normali, z yörünge noktasından ve her iki p_1, p_2 ani pol noktalarından geçen daire olarak alınır. Eğer pol dairesinin elde edilen iki değme noktasından birisi p_1 ve p_2 ile çakışırsa, bu takdirde eğrilik merkez noktası ∞ dadır, ve bir dönüm noktası olur. İki tanesi ile «kinematik dönüm kuartiğine dönüşür» ve Euclidsel haldeki dönüm ve büküm dairesine tekabül eder.

Diğer taraftan $k = (p_1, p_2, s, z)$ arasındaki çifte oranı, yörünge eğrisine Möbius - invariyanı olarak bağlanmış olup, kinematik Möbius eğriliği denilir. Mütakabilen s , bir yörünge eğrisinin eğrilik dairesinin, pol dairesi ile kesim noktaları olarak alındığında $(z, s, m_i, p_i) = -1$ çifte oranından $i=1,2$ ile belirlenen m_i noktası pol dairesi üzerindeki kinematik eğrilik merkezidir. Sonuç olarak k nin münasip seçilmesi ile Euler ve Savary nin çizim ve formülünün genelleştirilmesine ulaşılır.

Dans la cinématique euclidienne la formule d'EULER et de SAVARY joue un rôle important.

L'application

$$z \rightarrow z^* := \text{centre de courbure}$$

de la trajectoire passant par z est une transformation birationnelle particulière, donne une transformation crémonienne. On peut construire par

des méthodes constructives, par exemple comme la construction du cercle de courbure les trajectoires, lorsque les courbures des trajectoires polaires sont connues. Pour cela on peut employer l'inverse de la relation.

La formule

$$\left(\frac{1}{a^*} - \frac{1}{a} \right) \sin \alpha = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}$$

explique l'application de z sur z^* .

Dans cette formule r, r' représentent les rayons de courbure de p, p' dans le pôle p , ds l'élément scalaire de l'arc de p, p' et $d\theta/ds$ la vitesse angulaire du mouvement au plan en mouvement par rapport au plan fixe, a respectivement a^* des distances des rayons polaires de z respectivement z^* et $\alpha = \text{angle}$ (rayon polaire, tangente polaire).

Lors de la généralisation de la cinématique euclidienne dans le plan de MÖBIUS M_2 ($M_2 := E_2 \cup \infty, E_2$: plan euclidien), le centre de courbure devra être remplacé par le point d'enveloppe d'une «normale» appropriée, ce qui nous mène à discuter ci-après des mises en équation éventuelles. En définissant une courbure par des birapports on peut parvenir à une formule généralisée d'EULER et de SAVARY, analogue à la cinématique euclidienne.

1. Equations des applications dans le plan de MÖBIUS

Par les nombres complexes, un mouvement de MÖBIUS est représenté par une fonction homographique

$$(1.1) \quad z = \frac{az' + b}{cz' + d}, \quad a = a(t), \dots, d = d(t) \in \mathbb{C}; \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \in I$$

Sans limiter la généralité on a :

$$(1.2) \quad |H(t)| = ad - bc \equiv 1.$$

L'image d'un point fixe z' du plan en mouvement M_2' trace dans le plan fixe M_2 une courbe $z(t)$ que nous appellerons trajectoire du point z' .

Par l'introduction des coordonnées complexes homogènes

$$z = \frac{\xi}{\eta}, z' = \frac{\xi'}{\eta'}$$

nous avons

$$(1.5) \quad x = Hx'$$

ou

$$x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

D'après (2) $|H| = 1$, soit H^{-1} est égal à la matrice d'adjointe. Cette matrice appartient au mouvement d'inversion $x' = H^{-1}x$, ou

$$H' = H^{-1} = \begin{pmatrix} d-b & \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc à la base la règle de remplacement suivante :

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & -b & -c & a \end{array}$$

Il résulte de (1) par dérivation de t et par application du mouvement d'inversion

$$(1.4) \quad z = (cd - cd)z^2 + (ad - ad + bc - bc)z + ab - ab$$

Pour abrégé nous posons: | Substitué selon la règle:

$$\begin{array}{ll} \tau = cd - cd & \tau' = -ca + ca \\ 2\sigma_1 = ad - ad + bc - bc & 2\sigma_1' = da - da + bc - bc \\ \sigma_2 = ab - ab & \sigma_2' = -db + db \end{array}$$

On obtient ainsi pour le mouvement M_2'/M_2 resp. M_1/M_2'

$$(1.4 a) \quad z = \tau z^2 + 2\sigma_1 z + \sigma_2 \text{ resp. } z' = \tau' z'^2 + 2\sigma_1' z' + \sigma_2'$$

Représentation géométrique: les solutions des équations quadratiques $\tau z^2 + 2\sigma_1 z + \sigma_2 = 0$ resp. $\tau' z'^2 + 2\sigma_1' z' + \sigma_2' = 0$ représentent les pôles instantanés p_1, p_2 , dont il est admis pour les considérations suivantes qu'ils diffèrent l'un de l'autre et qu'ils ne sont pas stationnaires. Ils sont identiques pour le mouvement et le mouvement inverse.

Ainsi

$$(1.4b) \quad \dot{z} = Q = \tau(z^2 - \nu z + \mu)$$

d'où a été posé pour

$$(1.5) \quad \nu = p_1 + p_2, \quad \mu = p_1 p_2.$$

Une dérivation supplémentaire selon t nous amène à

$$(1.6) \quad \ddot{z} = \dot{Q} = QL + L_1$$

d'où les grandeurs suivantes ont été introduites :

$$L = \ln \tau + \tau(2z - \nu), \quad L_1 = -\tau \nu z + \tau \mu.$$

Si l'on pose $\tau = |\tau| e^{i\alpha}$, α indique l'angle réel, sous lequel la tangente de la trajectoire (en tant que famille parabolique) coupe le cercle polaire. (voir fig. 1)

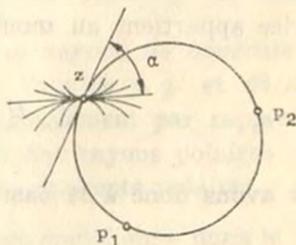


Fig. 1

$$(1.7) \quad \dot{p}_i = (-1)^{i+1} \frac{\nu p_i - \mu}{p_1 - p_2}, \quad \ddot{p}_i = (-1)^{i+1} \frac{2(\nu - p_i) \dot{p}_i + \nu \dot{p}_i - \dot{\mu}}{p_1 - p_2}$$

$i=1,2$

2. Théorie généralisée de la courbure

2.1 Centre de courbures tel que points d'enveloppement d'une «normale» appropriée.

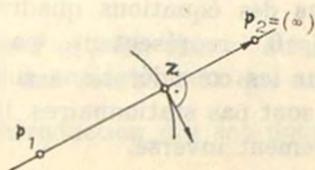
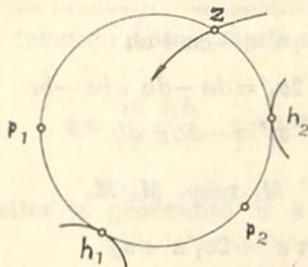


Fig. 2

Le cercle défini par z et par les deux pôles p_1 et p_2 sont appelés le cercle polaire, sur lequel λ est un paramètre réel quelconque. Ce rapport s'exprime par birapport:

$$(p_1, p_2, h, z) = \lambda, \quad (\lambda = \bar{\lambda}).$$

Dans le cas euclidien le cercle polaire correspond à la normale de la trajectoire, $p_2 = \infty$ et les tangentes des trajectoires s'y trouvent perpendiculairement.

Par z , p_1 et p_2 qui descendent de t , une famille de cercles polaires est expliquée. Pour qu'il existe des points d'enveloppement la condition

$$\left. \frac{\partial h(\lambda, t)}{\partial t} \right|_{t_0} = 0$$

doit être remplie.

Ceci donne une équation quadratique pour le paramètre λ , ce qui veut dire qu'il y a toujours deux points d'enveloppement égale d'importance.

Dans le cas euclidien l'un d'eux coïncide toujours avec le pôle et l'autre est le centre de courbure de la trajectoire. Dès lors on ne peut s'attendre à une généralisation à cet égard.

Mais d'autre part naissent de nouvelles quartiques invariantes (courbes d'ordre 4) en tant que lieu géométrique, pour lesquelles un des points d'enveloppement coïncide avec p_1 ou p_2 . Ceci répond au cas où le centre de courbure est égal à ∞ , donc quand il y a un point d'inflexion.

Nous pouvons désigner des quartiques qui sont nées comme «quartiques cinématiques d'inflexion de 1^{er} ou p^{ieme} genre».

$$W_1 = QQ\xi_1 + [Q, I_1] = 0$$

$$W_2 = QQ\xi_2 + [Q, I_1] = 0 ,$$

$$\zeta_i [1, (-1)^{1+i} \tau (p_1 - p_2) + i n \tau] , i = 1, 2 . *$$

Ces quartiques d'inflexion traversent les pôles et y touchent aux trajectoires polaires.

2.2 Définition de centres de courbures et de courbure par birapport

Considérons le cercle de courbure d'une trajectoire quelconque z et son point d'intersection s avec le cercle polaire. Les deux points m_1, m_2 , qui s'expliquent par le birapport

$$(z, s, m_i, p_i) = -1, i = 1, 2$$

peuvent être appelés centres de courbure.

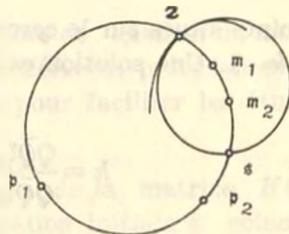


Fig. 3

*) Dorénavant il faut entendre sous $[a, b]$ la déterminante $|a \bar{b} - \bar{a} b|$.

L'origine de cette désignation résulte de la spécialisation euclidienne où nous avons $p_2 = \infty$ et le cercle de courbure se trouve perpendiculairement sur la normale, correspondant au cercle polaire. Son centre est le 4^{ème} point harmonique de $p_2 = \infty$ par rapport à z, s .

Donc : Le birapport $(z, s, m_2, p_2) = -1$.

Pour calculer le point d'intersections s , il faut que la condition suivante des 4 équations des cercles soit vérifiée :

$$K(z, z) = A \bar{z}z + Bz + C\bar{z} + D = 0$$

$$\bar{K}(z, z) = A(z\bar{z}) + B\bar{z} + Cz = 0$$

$$\bar{\bar{K}}(z, z) = A(\bar{z}z) + Bz + C\bar{z} = 0$$

$$K(s, s) = A \bar{s}s + Bs + Cs + D = 0,$$

avec $A = \bar{A}$, $D = \bar{D}$, $C = \bar{B}$,

ce qui veut dire qu'il faut que :

$$(2.1) \quad \begin{vmatrix} \bar{z}z & z & \bar{z} & 1 \\ (z\bar{z}) & \bar{z} & z & 0 \\ (\bar{z}z) & z & \bar{z} & 0 \\ s\bar{s} & s & \bar{s} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Si l'on détermine la valeur de s à partir du birapport

$$(p_1, p_2, s, z) = \frac{p_1 - s}{p_2 - s} \cdot \frac{p_1 - z}{p_2 - z} = k$$

des 4 points situés sur le cercle polaire, on obtient une équation quadratique en $k-1$. Une solution est $k=1$, où s coïncide avec z , et l'autre a la forme :

$$k = \frac{QQ\zeta_1 + [Q, I_1]}{QQ\zeta_2 + [Q, I_1]} = \frac{W_1}{W_2}$$

La grandeur k est liée invariablement à la nature de mouvement et définie comme «courbure cinématique de MÖBIUS de la trajectoire».

La courbure cinématique de MÖBIUS est obtenue comme quotient de deux formes quadratiques des coordonnées de z .

Si $s=p_1$ (c. à d. $k=0$) ou $s=p_2$ (c. à d. $k=\infty$), on pourrait parler d'un «point d'inflexion cinématique» de la trajectoire de 1^{er} genre resp. de 2^{ème} genre. Le lieu géométrique des points d'inflexion cinématiques de 1^{er} ou 2^{ème} genre est chaque fois une quartique.

3. Généralisation de la formule d'EULER et de SAVARY

3.1 Plan canonique \widetilde{M}_1

Nous essayons tout d'abord de construire, tout comme dans le cas euclidien un «système de coordonnées d'accompagnement».

Il est généralement possible d'introduire à tout moment t une variable canonique complexe \widetilde{z} au lieu de z . On peut tout d'abord normer ceci de manière que: à l'instant t_0 , \widetilde{z} prenne dans les pôles instantanés $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2$ les valeurs $+1, -1$, ainsi que les points $\widetilde{p}_3=0, \widetilde{p}_4=\infty$ séparent simultanément et harmoniquement les deux couples polaires $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2$ et $\widetilde{p}_1+d\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2+d\widetilde{p}_2$ (positions voisines).

$$(3.1) \quad \widetilde{p}_1(t_0)=1, \quad \widetilde{p}_2(t_0)=-1, \quad \widetilde{p}_3(t_0)=0, \quad \widetilde{p}_4(t_0)=\infty$$

Nous appellerons plan canonique de la variable \widetilde{z} le plan déterminé par les points $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2$ et \widetilde{p}_3 . Cette définition de \widetilde{z} échoue lorsqu'un des pôles est fixe, donc précisément dans le cas élémentaire, dans lequel nous pouvons admettre $\widetilde{p}_2=\infty$.

Nous remarquons en même temps que lors de l'examen du mouvement au moyen du plan canonique les formules dérivées précédentes peuvent être utilisées de manière analogue, et que pour faciliter les études nous pouvons laisser tomber la désignation « \sim ».

Au moment t_0 les fonctions complexes de la matrice $H(t)$ sont choisies de telle sorte que dans cette situation initiale \widetilde{z}' coïncide avec \widetilde{z} .

$$(3.2) \quad H(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le (1) on obtient pour les fonctions v et μ de (1.5)

$$(3.3) \quad v(t_0) = 0, \quad \dot{v}(t_0) = 0, \quad \mu(t_0) = -1.$$

Tenant compte de (1.4a), (1.4b) et (2) on calcule aisément ce qui suit :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tau_0' &= -\tau_0, & v_0' &= v_0 = 0, & \mu_0' &= \mu_0 = -1 \\ \ddot{\tau}_0' &= -\ddot{\tau}_0, & \dot{v}_0' &= \dot{v}_0 = 0, & \dot{\mu}_0' &= \dot{\mu}_0 \\ \ddot{\tau}_0'' &= -\ddot{\tau}_0'', & \ddot{v}_0' &= \ddot{v}_0 + 2\tau_0\dot{\mu}_0, & \ddot{\mu}_0' &= \ddot{\mu}_0. \end{aligned} \quad *$$

De plus, (1.7), (1) et (4) nous conduit au système de formules

$$(3.5) \quad \begin{aligned} p_1(t_0) &= p_1'(t_0) = 1, & p_2(t_0) &= p_2'(t_0) = -1 \\ \dot{p}_1(t_0) &= \dot{p}_1'(t_0) = -\frac{\dot{\mu}_0}{2}, & \dot{p}_2(t_0) &= \dot{p}_2'(t_0) = \frac{\dot{\mu}_0}{2} \\ \ddot{p}_1(t_0) &= \frac{1}{4} \{-\dot{\mu}_0^2 + 2\ddot{v}_0 - 2\ddot{\mu}_0\}, & \ddot{p}_2(t_0) &= \frac{1}{4} \{\dot{\mu}_0^2 + 2\ddot{v}_0 + 2\ddot{\mu}_0\} \\ \ddot{p}_1'(t_0) &= \ddot{p}_1(t_0) + \tau_0\dot{\mu}_0, & \ddot{p}_2'(t_0) &= \ddot{p}_2(t_0) + \tau_0\dot{\mu}_0. \end{aligned}$$

3.2 Courbures de trajectoires polaires

Lors du calcul des cercles de courbures des trajectoires polaires il faut, afin d'obtenir des birapports, aussi prendre le troisième point de base p_3 , utilisé pour la construction du plan canonique; par ce point et les pôles instantanés p_1, p_2 un cercle est défini. Les courbures des trajectoires polaires sont alors définies comme suit :

$$(3.6) \quad k_1 = (p_1, p_3, s_1, p_2), \quad k_2 = (p_2, p_3, s_2, p_1),$$

où s_1, s_2 est le point d'intersection du cercle de courbure de la trajectoire polaire de p_1 (de p_2) avec le cercle polaire, passent par p_1, p_2 et p_3 .

Nous cherchons maintenant un rapport entre les 4 courbures des trajectoires polaires k_1, k_2, k_1', k_2' répondant aux trajectoires polaires p_1, p_2, p_1', p_2' . La déterminante de (2.1) devient alors

*) L'indice «0» indique que les valeurs sont prises pour le moment $t = t_0$.

$$\begin{vmatrix} \overline{p_i p_i} & \overline{p_i} & \overline{p_i} & 1 \\ (\overline{p_i p_i}) & \overline{p_i} & \overline{p_i} & 0 \\ (\overline{p_i p_i}) & \overline{p_i} & \overline{p_i} & 0 \\ \overline{ss} & s & s & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (i=1,2)$$

Pour $t=t_0$, il résulte de (6)

$$s_i(t_0) = \frac{(-1)^{i+1}}{1-2k_i}$$

et en introduisant dans cette déterminante

$$(3.7) \quad \frac{1}{k_i} = \frac{(-1)^{i+1}[\overline{p_i}, \overline{p_i}] + 2[\overline{p_i}, \overline{p_i}^2]}{[\overline{p_i}, \overline{p_i}^2]}, \quad (t=t_0)$$

Lors de l'inversion il suffit de munir dans (7) tous les termes par un trait. Tenant compte de (5) on obtient alors la relation suivante:

$$\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_1'} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_2'} = 0.$$

représentant un analogue de la formule d'EULER et de SAVARY lors de la généralisation de la cinématique euclidienne.

De même on peut calculer en M_2 le cercle de courbure resp. la courbure d'une trajectoire quelconque. On cherche maintenant le point d'intersection s du cercle de courbure d'une trajectoire quelconque de z avec le cercle, passant par des points p_3, p_4 et z .

Ainsi nous avons la relation

$$k = (z, p_3, s, p_4)$$

Un calcul analogue nous mène pour la courbure au point z et au moment $t=t_0$ l'expression suivante :

$$k(t_0) = \frac{2[\overline{z_0^2}, \overline{z_0 z_0}]}{[\overline{z_0 z_0}, \overline{z_0 z_0}]}$$

BIBLIOGRAPHIE

- 1 BLASCHKE, W. - MULLER, H.R. : Ebene Kinematik, München 1956
- 2 HARTMANN, S. : Möbius - Kinematik, Dissertation Univ. Stuttgart 1973