T.C
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA TIME-LIKE TAMAMLAYICI REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Ali GÜNGÖR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZGÜR

HAZİRAN 2002

T.C
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA TIME-LIKE TAMAMLAYICI REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Ali GÜNGÖR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 1/7/2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. İbrahim Özgür	Yrd. Doç. Dr. Murat Tosun	Yrd. Doç. Dr. Cemalettin Kubat
Jüri Başkanı	**Jüri Üyesi**	**Jüri Üyesi**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her safhasında ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen başlangıçtaki tez hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Murat TOSUN' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Hocamın yurt dışında bulunduğu sırada tez danışmanlığımı üstlenen hocam Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZGÜR' e teşekkür ederim. Tezimin hazırlanması sırasında kıymetli bilgilerinden ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU' na teşekkürlerimi arz ederim.

Mehmet Ali GÜNGÖR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

IL^n	: n-boyutlu Lorentz Uzay
IR^n	: n-boyutlu Öklid Uzay
IR_1^n	: n-boyutlu Minkowski Uzay
$E_k(t)$	: k-boyutlu Space-Like Alt Uzay
$\alpha(t)$	: Time-like Eğri
$A(t)$	: Asimptotik Demet
$T(t)$	: Teğetsel Demet
$IK_{(k-m)}(t)$	: (k-m)-boyutlu Sırt Uzay
$Z_{(k-m)}(t)$	: (k-m)-boyutlu Merkez Uzay
Ω	: Time-Like Merkez Regle Yüzey
Λ	: Time-Like Asli Regle Yüzey
$F_m(t)$	: m-boyutlu Asli Uzay
Ψ_α	: (n-k-m)-boyutlu Time-Like Tamamlayıcı Regle Yüzey
$F(t)$	: (n-k-m-1)-boyutlu Space-Like Altuzay
$A_\alpha(t)$	: Time-Like Tamamlayıcı Regle Yüzeyin Asimptotik Demet
$T_\alpha(t)$	: Time-Like Tamamlayıcı Regle Yüzeyin Teğetsel Demet
Ω_α	: Time-Like Tamamlayıcı Regle Yüzeyin Merkez Regle Yüzey
ϕ	: (k+1)-boyutlu Time-Like Regle Yüzey

ÖZET

Anahtar Kelimeler : Lorentz Uzayı, Minkowski Uzayı, Regle Yüzey, Tamamlayıcı Regle Yüzey, Asimptotik Demet, Teğetsel Demet.

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir.
Birinci bölümde Lorentz uzayı, Minkowski uzayı, yarı-Öklidiyen uzay tanıtılmış ve yarı-Riemann manifoldları ile ilgili temel tanımlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde IR_1^n n-boyutlu Minkowski uzayında space-like doğrultman uzaylı $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyler tanıtılmış ve türev denklemleri ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca Asimptotik demet, Teğetsel demet, Merkez uzayı, Sırt uzayı, Merkez Regle yüzey ve Sırt Regle yüzey tanıtılmıştır.

Üçüncü bölüm çalışmamızın orijinal kısmını meydana getirmektedir. Bu bölümde, IR_1^n n-boyutlu Minkowski uzayında space-like doğrultman uzaylı $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzey ilk defa tanımlanmış ve türev denklemleri ile ilgili karakteristik sonuçlar verilmiştir.

TIME-LIKE COMPLEMENTARY RULED SURFACES IN THE MINKOWSKI SPACE

SUMMARY

Keywords : Lorentz Space, Minkowski Space, Ruled Surface, Complementary Ruled Surface, Asymptotic Bundle, Tangent Bundle

This study are arranged as three chapters.
In the first chapter, Lorentz space, Minkowski space and semi-Euclidean space are introduced and the basic definitions related to semi-Riemann manifolds are given.

In the second chapter, $(k+1)$-dimensional time-like ruled surfaces with the space-like generating space in the n-dimensional Minkowski space IR_1^n are introduced and results related to derivative equations are given. Asymptotic bundle, Tangent bundle, Central space, Edge space, Central Ruled surface and Edge Ruled surface are also introduced.

The third chapter is the original part of this study. For the first time, $(n-k-m)$-dimensional time-like Complementary Ruled surface with the space-like generating space in the n-dimensional Minkowski space IR_1^n is defined and characteristic results related to derivative equations are given.

1.BÖLÜM

I.1. Lorentz Uzayı ve Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 1.1.1

V, sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle : VxV \to IR$$

bilineer fonksiyonu $\forall\, v,w \in V$ için $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$ özelliğini sağlıyor ise < , > ya V üzerinde bir simetrik bilineer form denir,[4].

Tanım 1.1.2

V, vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form < , > olsun. Bu takdirde,

i-) $\forall\, v \in V$, $v \neq 0$ için $\langle v,v\rangle > 0$ ise < , > bilineer formu pozitif definit,

ii-) $\forall\, v \in V$, $v \neq 0$ için $\langle v,v\rangle < 0$ ise < , > bilineer formu negatif definit,

iii-) $\forall\, w \in V$ için $\langle v,w\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ oluyorsa < , > bilineer formuna non-dejenere dir denir,[4].

Tanım 1.1.3

< , >, V üzerinde simetrik bilineer form ve W da V nin bir altuzayı olsun.

< , > : W x W $\to$ IR fonksiyonuna < , > nin W üzerinde kısıtlanmışı denir ve $\langle\ ,\ \rangle|_W$ ile gösterilir,[4].

Tanım 1.1.4

V bir vektör uzayı ve $\langle\ ,\ \rangle : VxV \to IR$ simetrik bilineer form olsun.

$$\langle\ ,\ \rangle|_W : W \times W \to IR$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna ; < , > simetrik bilineer formun indeksi denir,[4].

ν, < , > nin indeksi olmak üzere $0 \leq \nu \leq$ boy$V$ dir.

Tanım 1.1.5

M, C^∞ manifold ve

$$\langle\ ,\ \rangle : \chi(M) x \chi(M) \to C^\infty(M, IR)$$
$$(X,Y) \to \langle X,Y \rangle$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere fonksiyonuna M üzerinde bir metrik tensör denir,[4].

Diğer bir ifadeyle, M nin herbir $T_M(p)$ tanjant uzayı üzerinde

$$\langle\ ,\ \rangle : T_M(p) \text{ x } T_M(p) \to IR$$

simetrik, bilineer, non-dejenere dönüşüm tanımlayan < , > fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir,[4].

Tanım 1.1.6.

IR^n üzerinde $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle_{IL} : IR^n x IR^n \to IR$$
$$(\vec{X},\vec{Y}) \to \langle \vec{X},\vec{Y} \rangle_{IL} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer, non-dejenere metrik tensörüne IR^n üzerinde Lorentz metriği denir,[4].

Bundan sonraki gösterimlerde aksi belirtilmedikçe < , > sembolü $\langle\ ,\ \rangle_{IL}$ anlamında kullanılacaktır.

Tanım 1.1.7.

IR^n üzerinde Lorentz metriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen $\{IR^n, \langle\ ,\ \rangle\}$ ikilisine n-boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca Lorentz uzayı denir ve IL^n ile gösterilir,[4].

Tanım 1.1.8.

$\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in IL^n$ olsun. Eğer

$\langle \vec{X},\vec{X} \rangle < 0$ veya $\vec{X} = 0$ ise $\vec{X}$ e time-like vektör,

$\langle \vec{X},\vec{X} \rangle > 0$ ise $\vec{X}$ e space-like vektör,

$\langle \vec{X},\vec{X} \rangle = 0$ ve $\vec{X} \neq 0$ ise $\vec{X}$ e null vektör adı verilir,[6].

Tanım 1.1.9.

IL^n, n-boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{X},\vec{Y} \in IL^n$ olsun.

$$\langle \vec{X},\vec{Y} \rangle = 0$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri Lorentz anlamında diktirler denir,[6].

Tanım 1.1.10.

$\vec{X} \in IL^n$ için $\vec{X}$ in normu

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{|\langle \vec{X},\vec{X} \rangle|}$$

olarak tanımlanır.

Yine aksi belirtilmedikçe $\| \; \|$ sembolü $\| \; \|_{IL}$ yerine kullanılacaktır. Yukarıda verilen norm tanımına göre aşağıdaki teorem verilebilir,[6].

Teorem 1.1.11.

$\vec{X} \in IL^n$ olmak üzere,

i-) $\|\vec{X}\| > 0$ dır,

ii-) $\|\vec{X}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{X}$ bir null vektördür,

iii-) $\vec{X}$ bir time-like vektör ise $\|\vec{X}\|^2 = -\langle \vec{X},\vec{X} \rangle$,

iv-) $\vec{X}$ bir space-like vektör ise $\|\vec{X}\|^2 = \langle \vec{X},\vec{X} \rangle$

dir,[6].

Tanım 1.1.12.

(V,< , >) bir Lorentz uzayı olsun. $W \subset V$ altuzayını göz önüne alalım.

i-) $\langle \; , \; \rangle|_W : WxW \to IR$ pozitif ise W ya space-like altuzay,

ii-) $\langle \; , \; \rangle|_W : WxW \to IR$ indeksi 1 olan non-dejenere ise W ya time-like altuzay

iii-) $\langle \; , \; \rangle|_W : WxW \to IR$ dejenere ise W ya Light-like altuzay denir,[6].

Tanım 1.1.13.

V Lorentz vektör uzayında bütün time-like vektörlerin cümlesi λ olsun.

$U \in \lambda$ için $\{X \in \lambda : \langle U,X \rangle \langle 0\}$ cümlesine V nin U yu ihtiva eden time-konisi denir,[6].

Tanım 1.1.14.

IR^n Öklidiyen n-uzayı verilsin. $0 \leq v \leq n$, olmak üzere v tamsayısı için, IR^n üzerinde,

$$\langle X_p, Y_p \rangle = -\sum_{i=1}^{v} x_i y_i + \sum_{j=v+1}^{n} x_j y_j$$

ile verilen tensör göz önüne alınırsa, elde edilen uzay yarı-Öklidiyen uzay olarak adlandırılır ve IR_v^n ile gösterilir,[2].

Tanım 1.1.15.

IR_v^n yarı-Öklidiyen uzayı verilsin. Eğer $v = 0$ ise IR_0^n, IR^n öklidiyen n-uzayıdır.

$v = 1$ ve $n \geq 2$ ise IR_1^n, Minkowski n-uzayı olarak adlandırılır,[2].

Tanım 1.1.16.

$n \geq 2$ ve $0 \leq v \leq n$ olsun. Bu takdirde

i-) $S_v^n(r) = \{P \in IR_v^{n+1} | \langle P, P \rangle = r^2\}$

hiperkuadratiğine IR_v^{n+1} de $r > 0$ yarıçaplı, n-boyutlu v-indeksli yarı küre denir.

ii-) IR_{v+1}^{n+1} de,

$$H_v^n(r) = \{P \in IR_{v+1}^{n+1} | \langle P, P \rangle = -r^2\}$$

ile verilen hiperkuadratiğe $r > 0$ yarıçaplı, n-boyutlu ve v-indeksli yarı-hiperbolik uzay denir,[4].

Tanım 1.1.17.

IR_1^{n+1}, Minkowski uzayında $S_1^n(r) = \{X \in IR_1^{n+1} | \langle X, X \rangle = r^2, r \in IR, r = sabit\}$ ile tanımlanan hiperkuadratiğine n-boyutlu Lorentz hiperküresi veya kısaca n-Lorentz hiperküresi denir. Burada $<,>$ iç çarpımı Lorentz iç çarpımıdır,[4].

Tanım 1.1.18.

$\alpha \in IR_1^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere;

i-) $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ ise, α time-like eğri,

ii-) $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$ ise, α space-like eğri,

iii-) $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ise, α null eğri

olarak adlandırılır,[6].

Tanım 1.1.19.

M bir diferensiyellenebilir manifold ve $<,>$ de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere ($M,<,>$) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir,[2].

Tanım 1.1.20.

M, yarı-Riemann manifoldu olsun. $<,>$ nın indeksine M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir,[4].

Tanım 1.1.21.

($M,<,>$) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer boy$M \geq 2$ ve indeks $M = 1$ ise ($M,<,>$) ikilisine bir Lorentz Manifoldu denir,[4].

Tanım 1.1.22.

M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$ de M nin altmanifoldu olsun. $J:\overline{M} \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere, $\forall p \in \overline{M}$ için

$$(J^*(<,>))(p)=<,>(J(p))$$

şeklinde tanımlı ($J^*(<,>)$) dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin yarı-Riemann altmanifoldu denir,[2].

Tanım 1.1.23.

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

1-) $[X,Y] = D_X Y - D_Y X$,

2-) $X\langle Y,Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$

şartlarını sağlayan D konneksiyonuna Levi-Civita konneksiyonu denir,[4].

Tanım 1.1.24.

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere,

$$D:\chi(\overline{M}) x \chi(\overline{M}) \to \chi(\overline{M})$$

indirgenmiş fonksiyonuna $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon adı verilir,[4].

Tanım 1.1.25.

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olsun. $\forall X,Y \in \chi(\overline{M})$

$$\overline{D}_X Y = \tan D_X Y$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonudur,[4].

Tanım 1.1.26.

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$V : \chi(\overline{M}) x \chi(\overline{M}) \to \chi^{\perp}(\overline{M})$$
$$(X,Y) \to V(X,Y) = norD_X Y$$

şeklinde tanımlı bilineer ve simetrik fonksiyona $\overline{M}$ nin şekil tensörü veya ikinci temel form tensörü denir,[4].

Tanım 1.1.27.

IR_1^n, Minkowski uzayının yarı-Riemann altmanifoldu M olsun. D, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ve ζ da normal vektör alanı olmak üzere

$$A_\zeta : \chi(M) \to \chi(M)$$
$$X \to A_\zeta(X) = -D_X \zeta$$

şeklinde tanımlı A_ζ dönüşümüne M nin ζ dan türetilmiş şekil operatörü adı verilir,[4].

II. BÖLÜM

IR_1^n, MINKOWSKI UZAYINDA SPACE-LIKE DOĞRULTMAN UZAYLI GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLER

II. GİRİŞ

IR_1^n, n-boyutlu Minkowski uzayında $\{0\} \subset I \subset IR$ olmak üzere diferensiyellenebilir time-like bir eğri

$$\alpha : I \to IR_1^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

olsun. α eğrisinin her $\alpha(t)$ noktasında tanımlı bir ortonormal vektör alan sistemi $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ ile verilmiş olsun. Bu sistem $\alpha(t) \in IR_1^n$ noktasındaki bir $T_{IR_1^n}(\alpha(t))$ tanjant uzayının k-boyutlu bir altuzayını gerer. Bu altuzay $E_k(t)$ ile gösterilirse

$$E_k(t) = Sp\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

dir. Çalışmamız boyunca $E_k(t)$ altuzayı daima space-like kabul edilecektir.

Tanım 2.1.1.

$E_k(t)$ space-like altuzayı, α eğrisi boyunca hareket ederken IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye IR_1^n, n-boyutlu Minkowski uzayında $(k+1)$-boyutlu genelleştirilmiş time-like regle yüzey denir,[4].

IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu genelleştirilmiş time-like regle yüzeyler çalışmamız boyunca M ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2.

$E_k(t)$ space-like altuzayına M regle yüzeyinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı ve α time-like eğrisine de M nin dayanak eğrisi adı verilir,[4].

Bir M, $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\phi(t,u_1,u_2,...,u_k)=\alpha(t)+\sum_{i=1}^{k}u_ie_i(t) \tag{2.1.1.}$$

dir. Eğer ϕ nin t ye ve u_i, $1\leq i\leq k$, ye göre türev alınırsa

$$\phi_t=\dot{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i\dot{e}_i(t)$$

ve

$$\phi_{u_i}=e_i(t),\quad 1\leq i\leq k$$

elde edilir. Çalışmamız esnasında

$$\left\{\dot{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i\dot{e}_i(t),e_1(t),...,e_k(t)\right\} \tag{2.1.2.}$$

sistemi daima lineer bağımsız kabul edilecektir.

Tanım 2.1.3.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $E_k(t)$ de M nin doğrultman uzayı olsun.

$$Sp\{e_1,e_2,...,e_k,\dot{e}_1,\dot{e}_2,...,\dot{e}_k\}$$

altuzayına M nin $E_k(t)$ ye göre asimptotik demeti denir ve $A(t)$ ile gösterilir.

Eğer,

$$boyA(t)=k+m,\quad 0\leq m\leq k \tag{2.1.3.}$$

kabul edilirse $A(t)$ asimptotik demetinin $E_k(t)$ yi içeren

$$\{e_1,e_2,.....,e_k,a_{k+1},a_{k+2},....,a_{k+m}\} \tag{2.1.4.}$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir,[4].

Tanım 2.1.4.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey olsun. M nin doğrultman uzayı $E_k(t)$ ve dayanak eğrisi α olmak üzere,

$$Sp\{e_1,e_2,...,e_k,\dot{e}_1,\dot{e}_2,...,\dot{e}_k,\dot{\alpha}\} \tag{2.1.5.}$$

altuzayına M nin $E_k(t)$ ye göre teğetsel demeti denir ve $T(t)$ ile gösterilir.

$E_k(t)$ space-like altuzay olduğundan e_i, $1\leq i\leq k$, vektörleri için

$$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij},\quad 1\leq i,j\leq k \tag{2.1.6.}$$

bağıntısı sağlanır. α time-like eğri olduğundan

$$\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle < 0$$

dır.

M asimptotik demeti için eğer $boyA(t) = k+m$, $\quad 0 \le m \le k$ ise

(2.1.7.) $$k+m \le boyT(t) \le k+m+1$$

dir,[4].

Teorem 2.1.5.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $T(t)$ de M nin teğetsel demeti olsun. Eğer $boyT(t) = k+m$ ise bu takdirde $A(t)$ asimptotik demeti time-like bir altuzaydır,[4].

Teorem 2.1.6.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $T(t)$ de M nin teğetsel demeti olsun. $T(t)$ daima bir time-like altuzaydır,[4].

Teorem 2.1.7.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $T(t)$ de M nin teğetsel demeti olsun. Eğer $boyT(t) = k+m+1$ ise M nin $A(t)$ asimptotik demeti bir space-like altuzaydır,[4].

Teorem 2.1.8.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $E_k(t)$ de M nin doğrultman uzayı olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere $\{e_1(t_0), e_2(t_0), \dots, e_k(t_0)\}$ da $E_k(t)$ nin bir ortonormal bazı olsun. $t_0 \in J \subset I$ olacak şekilde bir J aralığı bulunabilir ki bu aralıkta $E_k(t)$ nin $\forall t \in J$ için

$$\langle \dot{\bar{e}}_i, \bar{e}_j \rangle = 0 \quad , \quad 1 \le i, j \le k$$

olacak şekilde bir $\{\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_k(t)\}$ ortonormal bazı tek türlü olarak bulunabilir,[4].

Eğer M, $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyi Teorem 2.1.8. ifadesi geçerli olacak şekilde parametrelendirilir ise

$$\alpha_{ij} = 0 \qquad , \quad 1 \le i, j \le k$$

dir,[4].

Teorem 2.1.9.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey, $E_k(t)$ doğrultman uzayı ve $T(t)$ de M nin teğetsel demeti olsun. $E_k(t)$ nin ortonormal bazı $\{e_1(t),...,e_m(t),e_{m+1}(t),...,e_k(t)\}$ olmak üzere $boyT(t)=k+m$ olsun. Bu takdirde $\{e_1(t),e_2(t),...,e_m(t)\}$ ortonormal sistemi, $J\subset I$ açık aralığında

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_i(t),\overset{\circ}{e}_j(t)\right\rangle=0\,,\quad 1\le i,j\le m\,,\quad i\ne j$$

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_1(t),\overset{\circ}{e}_1(t)\right\rangle >...> \left\langle \overset{\circ}{e}_{s-1}(t),\overset{\circ}{e}_{s-1}(t)\right\rangle > \left\langle \overset{\circ}{e}_{s+1}(t),\overset{\circ}{e}_{s+1}(t)\right\rangle >...> \left\langle \overset{\circ}{e}_m(t),\overset{\circ}{e}_m(t)\right\rangle >0$$

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_s(t),\overset{\circ}{e}_s(t)\right\rangle <0\,,\quad 1\le s\le m$$

olacak şekilde bulunabilir. Burada

$$\overset{\circ}{e}_i=\dot{e}_i-\sum_{s=1}^{k}\langle\dot{e}_i,e_s\rangle e_s$$

dir,[4].

Teorem 2.1.10.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey, $E_k(t)$ doğrultman uzayı ve $T(t)$ de M nin teğetsel demeti olsun. $boyT(t)=k+m+1$, $0\le m\le k$, ve $E_k(t)$ nin ortonormal bazı $\{e_1(t),...,e_m(t),e_{m+1}(t),...,e_k(t)\}$olsun. Bu takdirde $\{e_1(t),e_2(t),...,e_m(t)\}$ ortonormal sistemi, $J\subset I$ açık aralığında

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_i(t),\overset{\circ}{e}_j(t)\right\rangle=0\,,\quad 1\le i,j\le m\,,\quad i\ne j$$

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_1(t),\overset{\circ}{e}_1(t)\right\rangle >......> \left\langle \overset{\circ}{e}_m(t),\overset{\circ}{e}_m(t)\right\rangle >0$$

olacak şekilde seçilebilir. Burada

$$\overset{\circ}{e}_i=\dot{e}_i-\sum_{j=1}^{k}\langle\dot{e}_i,e_j\rangle e_j$$

dir,[4].

Teorem 2.1.11.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey, $E_k(t)$ doğrultman uzayı ve $A(t)$ de asimptotik demeti olsun. $boyA(t)=k+m$ olmak üzere $E_k(t)$ nin $\{e_1(t),e_2(t),...,e_k(t)\}$ ortonormal bazı

$$\dot{e}_i=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}e_j+\kappa_i a_{k+i}\ , \quad 1\leq i\leq m$$

$$\dot{e}_s=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{sj}e_j\ , \quad m+1\leq s\leq k$$

bağıntıları geçerli olacak şekilde seçilebilir. Burada

$$\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$$

ve

$$\kappa_1>\kappa_2>....>\kappa_m>0$$

dır[4].

Sabit bir $t_0\in I$ için, Teorem 2.1.11. de verilen $\{e_1(t),e_2(t),...,e_k(t)\}$ ortonormal bazı Teorem 2.1.8. verilen ortonormal baz olarak seçilirse

$$\dot{e}_i=\kappa_i(t_0)a_{k+i}(t_0)\ , \quad 1\leq i\leq m$$

$$\dot{e}_{m+s}=0\ , \quad 1\leq s\leq k-m$$

şeklini alır. $\{e_1(t),e_2(t),...,e_m(t)\}$ nin $E_k(t)$ doğrultman uzayına göre ortonormal tümleyeni olan $\{e_{m+1}(t),e_{m+2}(t),...,e_k(t)\}$ ortonormal baz vektörleri her $t\in I$ için keyfi seçilebilir. Bu şekilde seçilen bazlar için

$$\alpha_{(m+p)(m+s)}=0\ , \quad 1\leq s,p\leq k-m$$

ifadesi geçerlidir.

II.2. Merkez, Sırt ve Asli Regle Yüzeyler

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey olsun. M nin doğrultman uzayı $E_k(t)$, asimptotik demeti $A(t)$ ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. O halde

$$k+m\leq boyT(t)\leq k+m+1$$

dir. Bu kesimde teğetsel demetinin boyutunun $k+m$ ve $k+m+1$ olması durumunda meydana gelecek olan $(k-m+1)$-boyutlu regle yüzeyleri inceleyeceğiz.

Kabul edelim ki $boyT(t)=k+m$ olsun. Bu halde M nin α dayanak eğrisinin hız vektörü için

$$\dot{\alpha} \in A(t) = Sp\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}\}$$

dir. O halde

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i + \sum_{v=1}^{m} \eta_v a_{k+v} \tag{2.2.1.}$$

yazılabilir. Ayrıca herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisi için

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) e_i(t) \tag{2.2.2.}$$

yazılabilir.

Bu son ifadede türev alınırsa

$$\dot{P}(t) = \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} (\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i + \sum_{v=1}^{m} \eta_v a_{k+v} + \sum_{i=1}^{k} (\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i)$$

elde edilir. Burada $\dot{e}_i(t)$ türev vektörlerinin yerine Teorem 2.1.11. deki karşılıkları yerlerine yazılırsa

$$\dot{P}(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\zeta_j + \dot{u}_j + \sum_{i=1}^{m} u_i \alpha_{ij} + \sum_{i=m+1}^{k} u_i \alpha_{ij} \right) e_j + \sum_{s=1}^{m} (\eta_s + u_s \kappa_s) a_{k+s} \tag{2.2.3.}$$

bulunur.

$$u_s \kappa_s + \eta_s = 0 \ , \quad 1 \leq s \leq m \tag{2.2.4.}$$

şartını sağlayan P noktaları için $\dot{P}(t)$ türev vektörleri $E_k(t)$ uzayı içinde kalacaktır. $\kappa_s > 0$, $1 \leq s \leq m$, olduğundan (2.2.4.) denklem sisteminde m tane u_s değişkenleri tek türlü çözülebilir. Geriye kalan $(k-m)$ tane u_i ise keyfi olarak seçilebilir. O halde (2.2.4.) denklemini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $E_k(t)$ içinde $(k-m)$-boyutlu bir altuzayı doldururlar. Bu alt uzaya M nin sırt uzayı denir ve $IK_{k-m}(t)$ ile gösterilir.

$E_k(t)$ doğrultman uzayı bir space-like altuzay olduğundan baz vektörlerinin hepsi space-like vektördür. O halde $IK_{k-m}(t)$ sırt uzayı bir space-like altuzaydır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.1

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $T(t)$ de *M* nin teğetsel demeti olsun. Eğer $boyT(t)=k+m$ ise *M* nin sırt uzayı space-like altuzayıdır.

Eğer $IK_{k-m}(t)$ sırt uzayı doğrultman uzayı ve *M* nin α dayanak eğrisi, dayanak eğrisi olarak alınırsa $IK_{k-m}(t)$ sırt uzayı α eğrisi boyunca hareket ederken *M* tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)$-boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye *M* nin $(k-m+1)$-boyutlu sırt regle yüzeyi denir. α daima time-like bir eğri olarak seçildiğinden sırt regle yüzeyi, time-like regle yüzeydir.

O halde aşağıdaki teorem verilebilir

Teorem 2.2.2.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $T(t)$ de *M* nin teğetsel demeti olsun. Eğer $boyT(t)=k+m$ ise *M* nin sırt regle yüzeyi vardır ve bu sırt regle yüzey time-like dir.

Şimdi kabul edelim ki *M* nin $T(t)$ teğetsel demeti için

$$boyT(t)=k+m+1$$

olsun. Bu durumda *M* nin α dayanak eğrisinin $\dot{\alpha}$ hız vektörü için

$$\dot{\alpha}\notin A(t)=Sp\{e_1,e_2,...,e_k,a_{k+1},a_{k+2},...,a_{k+m}\}$$

dir ve $T(t)$ nin bir ortonormal bazı

$$\{e_1,....,e_k,a_{k+1},....,a_{k+m},a_{k+m+1}\}$$

dir. O halde $\eta_{m+1}\neq 0$ olmak üzere

$$\dot{\alpha}=\sum_{i=1}^{k}\zeta_i e_i+\sum_{v=1}^{m}\eta_v a_{k+v}+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \tag{2.2.5.}$$

yazılabilir. $\dot{P}(t)$ nın türev vektörü hesaplanırsa

$$\dot{P}(t)=\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\dot{u}_i+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ji}u_j\right)e_j+\sum_{s=1}^{m}(\kappa_s u_s+\eta_s)a_{k+s}+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \tag{2.2.6.}$$

bulunur.

$$\kappa_s u_s+\eta_s=0\ ,\ 1\leq s\leq m$$

olacak biçimde $P(t)$ noktası için $\dot{P}(t)$ vektörü $Sp\{e_1,e_2,...,e_k,\dot{\alpha}\}$ altuzayı içinda yatar.

$\kappa_s > 0$, $1 \leq s \leq m$, olduğundan $\kappa_s u_s + \eta_s = 0$ lineer denklem sistemi ile tanımlanan $P(t)$ noktaları $Sp\{e_1, e_2, ..., e_k, \dot{\alpha}\}$ içinde $(k-m)$-boyutlu bir altuzay doldururlar. Bu alt uzaya M nin merkez uzayı denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir.

$E_k(t)$ bir space-like altuzay olduğundan bütün baz vektörleri space-like dir. O halde $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı bir space-like altuzaydır.

Bu takdirde M time-like yüzeyinin merkez uzayı ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.3.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $T(t)$ de *M* nin teğetsel demeti olsun. Eğer $boyT(t) = k+m+1$ ise *M* nin merkez uzayı space-like dir.

Eğer *M* nin dayanak eğrisi α, dayanak eğrisi ve $Z_{k-m}(t)$ de doğrultman uzayı olarak alınırsa $Z_{k-m}(t)$ uzayı α eğrisi boyunca hareket ederken IR_1^n de *M* tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)$-boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye *M* nin merkez regle yüzeyi denir. Çalışmamız esnasında α dayanak eğrisi daima time-like kabul edildiğinden merkez regle yüzeyi, time-like regle yüzeydir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.4.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve $T(t)$ de *M* nin teğetsel demeti olsun. Eğer $boyT(t) = k+m+1$ ise *M* nin merkez regle yüzeyi vardır ve bu merkez regle yüzey time-like dir[4].

M, $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve Ω da *M* nin time-like merkez regle yüzeyi olsun. Ω nın $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayına total olarak ortogonal olan bir altuzay $F_m(t)$ ve Ω merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi de r olsun. $F_m(t)$ doğrultman uzayı r boyunca hareket ederken bir $(m+1)$-boyutlu regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye *M* nin asli regle yüzeyi denir ve $\wedge$ ile gösterilir. Ω merkez regle yüzeyi time-like olduğundan $\wedge$ da time-like regle yüzeyidir.

Ayrıca burada

$$E_k(t) = Sp\{e_1, e_2, ..., e_k\}$$

olduğundan

$$F_m(t) = Sp\{e_1, e_2, ..., e_m\}$$

ve

$$Z_{k-m}(t) = Sp\{e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_k\}$$

dır. Buradan

$$boyF_m(t) + boyZ_{k-m}(t) = boyE_k(t)$$

bulunur,[4].

Sonuç 2.2.5

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyi ve Ω de M nin time-like merkez regle yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin $(m+1)$-boyutlu asli regle yüzeyi time-like dır,[4].

II.3. IR_1^n, Minkowski Uzayında $(k-m+1)$-boyutlu Time-Like Merkez Regle Yüzeyler

Bu bölümde IR_1^n, Minkowski uzayında $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyi tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)$-boyutlu time-like merkez regle yüzeyi üzerinde duracağız.

Tanım 2.3.1.

IR_1^n, Minkowski uzayında $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzey M olsun. M nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı $\alpha(t)$ time-like eğrisi boyunca M, $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyi oluştururken M nin $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayıda aynı eğri boyunca bir diğer $(k-m+1)$-boyutlu time-like regle yüzey oluşturur. Bu regle yüzeye Merkez regle yüzeyi adı verilir ve Ω ile gösterilir,[5].

Ω, Merkez regle yüzeyi

$$\Omega(t, x_1, x_2, \dots, x_{k-m}) = \alpha(t) + \sum_{s=1}^{k-m} x_s e_s(t)$$

ile parametrize edilir.

Şimdi bir I açık aralığında $A(t)$ asimptotik demetinin Teorem 2.1.11 in geçerli olduğu

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m}\}$$

bazını ele alalım ve her $t \in I$ için bu ortonormal bazı $T(t)$ teğetsel demetinin

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

ortonormal bazına tamamlayan ve bunu da $a_{k+m+2}, a_{k+m+3}, \ldots, a_n$ vektörleri yardımıyla IR_1^n nin,

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \ldots, a_n\}$$

ortonormal bazına tamamlayalım. Böylece $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \ldots, a_n$ türev vektörleri için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.3.1.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve Ω da *M* tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)$-boyutlu time-like merkez regle yüzeyi olsun. $E_k(t)$ doğrultman uzayının $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ ortonormal bazını IR_1^n bazına tamamlayan $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \ldots, a_n\}$ sisteminin türev vektörleri

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i}, \quad 1 \le i \le m$$

$$\dot{e}_s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{sj} e_j, \quad m+1 \le s \le k$$

$$\dot{a}_{k+i} = -\kappa_i e_i + \sum_{\ell=1}^{m} \tau_{i\ell} a_{k+\ell} + w a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda} \tag{2.3.1}$$

$$\dot{a}_{k+m+1} = -\sum_{\ell=1}^{m} w_\ell a_{k+\ell} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

$$\dot{a}_{k+m+\xi} = \sum_{\ell=1}^{m} w_{\xi\ell} a_{k+\ell} + \beta_\xi a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{\xi\lambda} a_{k+m+\lambda}, \quad 2 \le \xi \le n-k-m$$

ile verilir,[5].

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve Ω da *M* tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)$-boyutlu time-like merkez regle yüzeyi olsun. $E_k(t)$ doğrultman uzayının $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ ortonormal bazını IR_1^n bazına tamamlayan $\{a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \ldots, a_n\}$ sisteminin türev vektörlerini aşağıdaki tablo ile verilir.

$$
\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_m \\ \dot{e}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{e}_k \\ \dot{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \dot{a}_{k+m} \\ \dot{a}_{k+m+1} \\ \dot{a}_{k+m+2} \\ \vdots \\ \dot{a}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} & \alpha_{1(m+1)} & \cdots & \alpha_{1k} & \kappa_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} & \alpha_{m(m+1)} & \cdots & \alpha_{mk} & 0 & \cdots & \kappa_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\alpha_{(m+1)1} & \cdots & \alpha_{(m+1)m} & \alpha_{(m+1)(m+1)} & \cdots & \alpha_{(m+1)k} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{km} & \alpha_{k(m+1)} & \cdots & \alpha_{kk} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\kappa_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau_{11} & \cdots & \tau_{1m} & \omega_1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1(n-k-m)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & -\kappa_m & 0 & \cdots & 0 & \tau_{m1} & \cdots & \tau_{mm} & \omega_m & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{m(n-k-m)} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\omega_1 & \cdots & -\omega_m & 0 & -\beta_2 & \cdots & -\beta_{n-k-m} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{21} & \cdots & \omega_{2m} & \beta_2 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2(n-k-m)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{(n-k-m)1} & \cdots & \omega_{(n-k-m)m} & \beta_{n-k-m} & \beta_{(n-k-m)2} & \cdots & \beta_{(n-k-m)(n-k-m)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_{k+m} \\ a_{k+m+1} \\ a_{k+m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
$$

$\alpha(t)$ dayanak eğrisinin $\dot{\alpha}(t)$ hız vektörü

(2.3.2) $$\dot{\alpha}=\sum_{j=1}^{k}\xi_j e_j+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \quad , \quad \eta_{m+1}\neq 0$$

dır. Ω time-like merkez regle yüzeyinin keyfi bir $P(t)$ dayanak eğrisi, $\alpha(t)$ eğrisine bağlı olarak

$$P(t)=\alpha(t)+\sum_{s=1}^{k-m}x_{m+s}(t)e_{m+s}(t)$$

olmak üzere, bu eşitliğin t ye göre türevi alınırsa

$$\dot{P}(t)=\dot{\alpha}(t)+\sum_{s=1}^{k-m}\left(\dot{x}_{m+s}e_{m+s}+x_{m+s}\dot{e}_{m+s}\right)$$

elde edilir ve türev değerleri yerine yazılırsa eğer

$$\dot{P}(t)=\sum_{j=1}^{k}\xi_j e_j+\eta_{m+1}a_{k+m+1}+\sum_{s=1}^{k-m}\dot{x}_{m+s}e_{m+s}+\sum_{s=1}^{k-m}x_{m+s}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_{(m+s)j}e_j\right)$$

$$=\sum_{\ell=1}^{m}\left(\xi_\ell+x_{m+s}\alpha_{(m+s)\ell}\right)e_\ell+\sum_{s=1}^{k-m}\left(\xi_{m+s}+\dot{x}_{m+s}\right)e_{m+s}+\eta_{m+1}a_{k+m+1}$$

bulunur.

$$\dot{x}_{m+s}(t)+\xi_{m+s}(t)=0 \quad , \quad 1\leq s\leq k-m$$

eşitliğini sağlayan $P(t)$ noktaları Ω time-like merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesini oluştururlar.

(2.3.3) $$\xi_{m+s}=0 \quad , \quad 1\leq s\leq k-m$$

olması $x_{m+s}=c_s$, $(c_s=sabit)$ olmakla beraber $P(t)$ eğrisinin Ω time-like merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi olmasını karekterize eder.

Böylece Ω time-like merkez regle yüzeyine teorem 2.2.2 yi uygularsak. $\eta_{m+1}\neq 0$ olduğundan

$$\dot{P}(t)\notin\{e_{m+1},e_{m+2},\dots,e_k,\dot{e}_{m+1},\dot{e}_{m+2},\dots,\dot{e}_k\}$$

dır. Buradan dolayı Ω time-like merkez regle yüzeyi her $t\in I$ için $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayı ile aynı olan bir $Z_{k-m-s}(t)$ merkez uzayına sahiptir.

Böylece son olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3.2.

M, IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu bir time-like regle yüzey ve Ω da *M* tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)$-boyutlu time-like merkez regle yüzeyi olsun. Ω bir $Z_{k-m-s}(t)$ merkez uzayına sahiptir,[5].

III. BÖLÜM

MINKOWSKI UZAYINDA TIME-LIKE TAMAMLAYICI REGLE YÜZEYLER

III.1. GİRİŞ

Çalışmamızın orjinal kısmını teşkil edecek olan bu bölümde IR_1^n, Minkowski uzayında Ω merkez regle yüzeyli $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeylerin $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzeyleri tanıtılacak ve bu regle yüzeylerin Asimptotik demeti, Teğetsel demeti ve ilgili teoremler verilecektir.

Tanım 3.1.1
IR_1^n, Minkowski uzayında $(k-m+1)$-boyutlu time-like Ω merkez regle yüzeyli $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzey ϕ olmak üzere $\forall t \in I$ için ϕ nin $T(t)$ teğetsel demetinin

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

ortonormal bazını

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \ldots, a_n\}$$

bazına tamamlayan

$$\{a_{k+m+2}, a_{k+m+3}, \ldots, a_n\}$$

ortonormal bazına tamamlayıcı ortonormal baz adı verilir.

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

ile gerilen uzay bir time-like altuzay olduğundan dolayı,

$$\{a_{k+m+2}, a_{k+m+3}, \ldots, a_n\}$$

ile gerilen uzay bir space-like altuzaydır.

$\{a_{k+m+2}, a_{k+m+3}, \ldots, a_n\}$ ortonormal sistemi $\alpha(t) \in IR_1^n$ noktasındaki bir $T_{IR_1^n}(\alpha(t))$ tanjant uzayının $(n-k-m-1)$-boyutlu bir altuzayını gerer bu altuzayı $F(t)$ ile gösterirsek

$$F(t) = Sp\{a_{k+m+2}(t), a_{k+m+3}(t), \ldots\ldots, a_n(t)\}$$

dir.

$(k-m+1)$-boyutlu time-like Ω merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş time-like regle yüzey ϕ olsun. $F(t)$ space-like altuzayı α eğrisi boyunca hareket ederken IR_1^n de ϕ tarafından ihtiva edilmeyen $(n-k-m)$-boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye IR_1^n, Minkowski uzayında $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzey adı verilir. Bu regle yüzey Ψ_α ile gösterilir.

Burada ϕ genelleştirilmiş time-like regle yüzeyinin Ω time-like merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisi aynı zamanda Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin de dayanak eğrisidir.

$$\Psi(t, x_2, x_3, \ldots, x_{n-k-m}) = \alpha(t) + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} x_\lambda a_{k+m+\lambda}(t)$$

şeklinde parametrize edilir.

Tanım 3.1.2.

$F(t)$ space-like altuzayının $a_{k+m+\lambda}(t)$, $2 \le \lambda \le n-k-m$ vektörleri tarafından oluşturulan

$$X(t, x_2, x_3, \ldots, x_{n-k-m}) = \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} x_\lambda a_{k+m+\lambda}(t)$$

noktaları cümlesinde t ye ve x_λ lara göre türev alalım.

$$X_t = \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} x_\lambda \dot{a}_{k+m+\lambda}(t)$$

$$X_{x_\lambda} = a_{k+m+\lambda}(t), \quad 2 \le \lambda \le n-k-m$$

dir.

$$rank\left[X_t, X_{x_2}, \ldots, X_{x_{n-k-m}}\right] = rank\left[\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} x_\lambda \dot{a}_{k+m+\lambda}, a_{k+m+2}, \ldots, a_n\right] = n-k-m$$

olmak üzere $X(t, x_2, x_3, \ldots, x_{n-k-m})$ noktalarının cümlesine Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin $(n-k-m)$-boyutlu yön konisi adı verilir.

$n = k+m+1$ ise Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyi 1-boyutlu olacağından dolayı α time-like eğrisine dejenere olur.

$n > k+m+1$ olması halinde Ψ_α, bir regle yüzeyidir.

Teorem 3.1.1.

Ψ_α, IR_1^n de $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzey, $F(t)$ de Ψ_α nın doğrultman uzayı olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere $\{a_{k+m+2}(t_0), a_{k+m+3}(t_0), \ldots, a_n(t_0)\}$ da $F(t)$ nin bir ortonormal bazı olsun. $t_0 \in J \subset I$ olacak şekilde öyle bir J aralığı bulunabilir ki bu aralıkta $F(t)$ nin $\forall t \in J$ için

(3.1.1) $$\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\xi}, \bar{a}_{k+m+\lambda} \rangle = 0 \quad , \quad 2 \le \xi, \lambda \le n-k-m$$

olacak şekilde bir $\{\bar{a}_{k+m+2}(t), \bar{a}_{k+m+3}, \ldots, \bar{a}_n(t)\}$ ortonormal bazı tek türlü olarak bulunabilir.

İSPAT:

$F(t)$, IR_1^n Minkowski uzayında space-like altuzay olduğundan

$$\{a_{k+m+2}(t), a_{k+m+3}(t), \ldots, a_n(t)\}$$

bazı için

$$\langle a_{k+m+\xi}, a_{k+m+\lambda} \rangle = \delta_{\xi\lambda} \quad , \quad 1 \le \xi, \lambda \le n-k-m$$

dir.

$\le \lambda, h \le n-k-m$

Kabul edelim ki $b_{(k+m+\lambda)(k+m+h)}$, $1 \le \lambda, h \le n-k-m$, fonksiyonları

(3.1.2) $$\dot{b}_{(k+m+\lambda)(k+m+h)} + \sum_{\xi=1}^{n-k-m} b_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} \langle \dot{a}_{k+m+\xi}, a_{k+m+h} \rangle = 0$$

diferensiyel denklem sisteminin çözümleri olarak tanımlansın.

Ayrıca;

(3.1.3) $$\bar{a}_{k+m+\lambda} = \sum_{\xi=1}^{n-k-m} b_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} a_{k+m+\xi}$$

olsun. Bu takdirde $\dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}$ vektörleri aşağıdaki bağıntıları sağlar.

$$\dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda} = \sum_{\xi=1}^{n-k-m} \dot{b}_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} a_{k+m+\xi} + \sum_{\xi=1}^{n-k-m} b_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} \dot{a}_{k+m+\xi}$$

olduğundan

$$\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}, a_{k+m+h} \rangle = \sum_{\xi=1}^{n-k-m} \dot{b}_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} \langle a_{k+m+\xi}, a_{k+m+h} \rangle + \sum_{\xi=1}^{n-k-m} b_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} \langle \dot{a}_{k+m+\xi}, a_{k+m+h} \rangle$$

elde edilir. Ayrıca $b_{(k+m+\lambda)(k+m+h)}$ fonksiyonları (3.1.2) diferensiyel denkleminin çözümleri olduğundan

$$\left\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}, a_{k+m+h} \right\rangle = \dot{b}_{(k+m+\lambda)(k+m+h)} + \sum_{\xi=1}^{n-k-m} b_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} \left\langle \dot{a}_{k+m+\xi}, a_{k+m+h} \right\rangle$$

$$\left\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}, a_{k+m+h} \right\rangle = 0$$

olur buradan

$$\left\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}, \bar{a}_{k+m+s} \right\rangle = \left\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}, \sum_{h=1}^{n-k-m} b_{(k+m+s)(k+m+h)} a_{k+m+h} \right\rangle \quad , \quad 1 \le s \le n-k-m$$

$$= \sum_{h=1}^{n-k-m} b_{(k+m+s)(k+m+h)} \left\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}, a_{k+m+h} \right\rangle$$

$$= 0$$

bulunur. Bu ise

$$\left\langle \bar{a}_{k+m+\lambda}, \bar{a}_{k+m+\xi} \right\rangle$$

ifadesinin türevi alındığında

$$\frac{d\left\langle \bar{a}_{k+m+\lambda}, \bar{a}_{k+m+\xi} \right\rangle}{dt} = \left\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}, \bar{a}_{k+m+\xi} \right\rangle + \left\langle \bar{a}_{k+m+\lambda}, \dot{\bar{a}}_{k+m+\xi} \right\rangle = 0$$

olduğu görülür. Buda

$$\left\langle \bar{a}_{k+m+\lambda}, \bar{a}_{k+m+\xi} \right\rangle$$

skalar çarpımının sabit olduğunu gösterir.

Eğer (3.1.2) sisteminin çözümlerini belli bir t_0 başlangıç değerinde $\left[b_{(k+m+\lambda)(k+m+h)}(t_0)\right]$ matrisini ortogonal yapacak şekilde alırsak $\{\bar{a}_{k+m+\lambda}(t_0)\}$, $1 \le \lambda \le n-k-m$, bazı t_0 değerinde ortogonal olduğu için her t değeri içinde ortogonal olacaktır, yani;

$$\left\langle \bar{a}_{k+m+\lambda}, \bar{a}_{k+m+s} \right\rangle = \left\langle \sum_{\xi=1}^{n-k-m} b_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} a_{k+m+\xi}, \sum_{h=1}^{n-k-m} b_{(k+m+s)(k+m+h)} a_{k+m+h} \right\rangle$$

$$= \sum_{\xi=1}^{n-k-m} b_{(k+m+\lambda)(k+m+\xi)} b_{(k+m+s)(k+m+\xi)}$$

$$= \delta_{(k+m+\lambda)(k+m+s)}$$

bağıntısı sağlanır. O halde $F(t)$ nin

$$\left\langle \dot{\bar{a}}_{k+m+\lambda}, \bar{a}_{k+m+s} \right\rangle = 0 \quad , \quad 1 \le \lambda, s \le n-k-m$$

olacak şekilde bir ortonormal bazı tek türlü olarak bulunabilir.

Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Eğer (2.3.1) ve (3.1.1) denklemlerini göz önüne alırsak

(3.1.4) $$\beta_{\xi\lambda} = 0 \quad , \quad 2 \leq \xi, \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir.

Tanım 3.1.3.

Ψ_α, IR_1^n de $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzey ve $F(t)$ de Ψ_α nın doğrultman uzayı olsun.

$$Sp\{a_{k+m+2}, a_{k+m+3}, \dots, a_n, \dot{a}_{k+m+2}, \dots, \dot{a}_n\}$$

altuzayına Ψ_α nın $F(t)$ ye göre asimptotik demeti denir ve $A_\alpha(t)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4.

Ψ_α, IR_1^n de $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzey olsun. Ψ_α nın doğrultman uzayı $F(t)$ ve dayanak eğrisi α olmak üzere

$$Sp\{a_{k+m+2}, a_{k+m+3}, \dots, a_n, \dot{a}_{k+m+2}, \dots, \dot{a}_n, \dot{\alpha}\}$$

altuzayına Ψ_α nın $F(t)$ ye göre teğetsel demeti denir ve $T_\alpha(t)$ ile gösterilir.

$F(t)$ space-like bir altuzay olduğundan $a_{k+m+\xi}$, $2 \leq \xi \leq n-k-m$, vektörleri için

$$\langle a_{k+m+\xi}, a_{k+m+\lambda} \rangle = \delta_{ij}$$

bağıntısı sağlanır. α ise bir time-like eğri olduğundan

$$\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle < 0$$

dır.

Eğer $A_\alpha(t)$ asimptotik demeti için

$$boyA_\alpha(t) = n-k-m-1+s \quad , \quad 0 \leq s \leq n-k-m-1$$

ise

$$n-k-m-1+s \leq boyT_\alpha(t) \leq n-k-m+s$$

dir.

Kabul edelim ki $boyT_\alpha(t) = boyA_\alpha(t)$ olsun. Bu takdirde $A_\alpha(t)$ asimptotik demeti ile $T_\alpha(t)$ teğetsel demetlerinin ortonormal bazları aynıdır, yani $T_\alpha(t) = A_\alpha(t)$ dir.

Böylece;

$$\dot{\alpha} \in \{a_{k+m+2}, a_{k+m+3}, \dots, a_n, \dot{a}_{k+m+2}, \dot{a}_{k+m+3}, \dots, \dot{a}_n\}$$

dir. $F(t)$ bir space-like bir altuzay ve α ise bir time-like eğri olduğundan dolayı

$$\dot{a}_{k+m+\xi}\,,\quad 2\leq\xi\leq n-k-m$$

vektörleri arasında time-like bir vektör vardır. O halde $T_\alpha(t)=A_\alpha(t)$, IR_1^n de bir time-like altuzayıdır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2.

Ψ_α, IR_1^n de $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzey ve $T_\alpha(t)$, de Ψ_α nın teğetsel demeti olsun. Eğer $boyT_\alpha(t)=boyA_\alpha(t)$ ise bu takdirde $A_\alpha(t)$ asimptotik demeti de time-like altuzayıdır.

Kabul edelim ki $T_\alpha(t)=A_\alpha(t)$ olsun. Bu takdirde $\dot{\alpha}$ hız vektörü

$$\{a_{k+m+2},a_{k+m+3},\ldots,a_n,\dot{a}_{k+m+2},\dot{a}_{k+m+3},\ldots,\dot{a}_n\}$$

vektörlerinin lineer terkibi olarak yazabiliriz.

Bu takdirde (2.3.1) türev denklemlerinde (3.1.4) bağıntısı yani; $\beta_{\xi\lambda}=0$ eşitliği yerine yazılırsa eğer

$$\dot{a}_{k+m+\xi}=\sum_{\ell=1}^{m}\omega_{\xi\ell}a_{k+\ell}+\beta_\xi a_{k+m+1}\,,\quad 2\leq\xi\leq n-k-m \tag{3.1.5}$$

elde edilir. Bu son denklemi açık olarak yazarsak eğer;

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{k+m+2}&=\omega_{21}a_{k+1}+\omega_{22}a_{k+2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\omega_{2m}a_{k+m}+\beta_2a_{k+m+1}\\
&\;\;\vdots\\
\dot{a}_n&=\omega_{(n-k-m)1}a_{k+1}+\omega_{(n-k-m)2}a_{k+2}+\ldots\ldots\ldots+\omega_{(n-k-m)m}a_{k+m}+\beta_{n-k-m}a_{k+m+1}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix}\dot{a}_{k+m+2}\\ \dot{a}_{k+m+3}\\ \cdot\\ \cdot\\ \dot{a}_{n-1}\\ \dot{a}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2m} & \beta_2\\ \omega_{31} & \omega_{32} & \cdots & \omega_{3m} & \beta_3\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \omega_{(n-k-m-1)1} & \omega_{(n-k-m-1)2} & \cdots & \omega_{(n-k-m-1)m} & \beta_{n-k-m-1}\\ \omega_{(n-k-m)1} & \omega_{(n-k-m)2} & \cdots & \omega_{(n-k-m)m} & \beta_{n-k-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{k+1}\\ a_{k+2}\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{k+m}\\ a_{k+m+1}\end{bmatrix}$$

bulunur. Burada ise

$$rank\begin{bmatrix}\omega_{\ell\xi}\\ \beta_\xi\end{bmatrix}=rank\left[\omega_{\ell\xi}\right]+1\,,\quad \begin{matrix}2\leq\xi\leq n-k-m\\ 1\leq\ell\leq m\end{matrix} \tag{3.1.6}$$

eşitliği elde edilir.

Bu son eşitlik ifade eder ki

(3.1.7) $$\zeta_\nu = 0$$

dır.

Bu ise α time-like eğrisinin ϕ, $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi olması anlamındadır.

Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin keyfi bir dayanak eğrisi

(3.1.8a) $$Z(t) = \alpha(t) + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} z_\lambda(t) a_{k+m+\lambda}(t)$$

olmak üzere t ye göre türev alınırsa

$$\dot{Z}(t) = \dot{\alpha}(t) + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \left(\dot{z}_\lambda a_{k+m+\lambda} + z_\lambda \dot{a}_{k+m+\lambda}\right)$$

bulunur. (2.3.2) ve (3.1.5) denklemleri bu son denklemde yerlerine yazılırsa eğer;

$$\dot{Z}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu + \eta_{m+1} a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \dot{z}_\lambda a_{k+m+\lambda} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} z_\lambda \left(\sum_{\ell=1}^{m} \omega_{\lambda\ell} a_{k+\ell} + \beta_\xi a_{k+m+1} \right),$$

$$2 \le \xi \le n-k-m$$

(3.1.8b) $$\dot{Z}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} z_\lambda \left(\sum_{\ell=1}^{m} \omega_{\lambda\ell} a_{k+\ell} \right) + \left(\sum_{\xi=2}^{n-k-m} z_\xi \beta_\xi + \eta_{m+1} \right) a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \dot{z}_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

elde edilir. Burada

(3.1.9a) $$\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} z_\lambda \omega_{\lambda\ell} = 0 \quad , \quad 1 \le \ell \le m$$

ve

(3.1.9b) $$\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} z_\lambda \beta_\lambda + \eta_{m+1} = 0$$

eşitliklerini sağlayan $z(t)$ noktaları Ψ_α nın kenar uzayını oluştururlar.

$\forall t_1 \in I$ için $\eta_{m+1} \neq 0$ olduğundan dolayı Ψ_α kenar uzayı hiçbir zaman $\alpha(t_1)$ dayanak eğrisi noktasını ihtiva etmez.

$F(t)$ doğrultman uzayı bir space-like altuzay olduğundan baz vektörlerinin hepsi space-like vektördür. O halde Sırt uzayıda bir space-like altuzay dır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.3.

Ψ_α, IR_1^n de $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzey, Asimptotik ve Teğetsel demetleri de sırasıyla $A_\alpha(t)$ ve $T_\alpha(t)$ olsun. Eğer $boyT_\alpha(t) = boyA_\alpha(t)$ ise Ψ_α nın sırt uzayı space-like bir altuzay dır.

Şimdi $I_0 \subset I$ aralığında $\alpha(t)$ dayanak eğrisi ϕ, $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyinin bir ortogonal yörüngesi olmadığını, yani (3.1.6) veya (3.1.7) ifadelerinden birinin geçerli olmadığını kabul edelim. Bu takdirde Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyi I_0 aralığında Ω_α ile gösterilen bir merkez regle yüzeyine sahiptir.

Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin (3.1.8a) ile verilen keyfi dayanak eğrisi $Z(t)$ olmak üzere

$$\langle \dot{Z}(t), \dot{a}_{k+m+\lambda}(t) \rangle = 0 \quad , \quad 2 \le \lambda \le n-k-m$$

ise bu takdirde $Z(t)$ eğrisi Ω_α merkez regle yüzeyinin bir dayanak eğrisi olur.

$$\dot{Z}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} z_\lambda \left(\sum_{\ell=1}^{m} \omega_{\lambda\ell} a_{k+\ell} \right) + \left(\sum_{\xi=2}^{n-k-m} z_\xi \beta_\xi + \eta_{m+1} \right) a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \dot{z}_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

ve

$$\dot{a}_{k+m+\xi} = \sum_{\ell=1}^{m} \omega_{\xi\ell} a_{k+\ell} + \beta_\xi a_{k+m+1}$$

denklemleri yukarıda yerine yazılırsa eğer z_λ, $2 \le \lambda \le n-k-m$ değişkenleri için

$$\sum_{\sigma=1}^{m} (z_\lambda \omega_{\lambda\sigma}) \omega_{\xi\sigma} + \beta_\xi \left(\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} z_\lambda \beta_\lambda + \eta_{m+1} \right) = 0 \qquad (3.1.10)$$

lineer denklem sistemi bulunur.

Böylece (3.1.9a) ve (3.1.9b) den dolayı Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin Ω_α nın $\alpha(t)$ dayanak eğrisinden bağımsız olduğu görülür. (3.1.10) denkleminde $t_1 \in I_0$ için $\beta_\xi = 0$, $2 \le \xi \le n-k-m$ ise bu takdirde $\alpha(t_1)$ dayanak eğrisi noktası Ψ_α nın merkez uzayındadır.

Böylece aşağıdaki Lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.1.1.

Ω merkez regle yüzeyli $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzey ϕ ve ϕ nin $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzeyi Ψ_α olsun. Eğer (3.1.7) geçerli olmayıp (3.1.6) denklemi geçerli ise bu takdirde Ψ_α tamamlayıcı regle yüzeyinin Ω_α merkez regle yüzeyi (3.1.9a) ve (3.1.9b) ifadeleri ile tanımlanır.

α dayanak eğrisi bir time-like eğri olduğundan dolayı Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin Ω_α merkez regle yüzeyi time-like dir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.4.

IR_1^n de Ω merkez regle yüzeyli $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzey ϕ ve ϕ nin $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzeyi Ψ_α olsun. Ψ_α tamamlayıcı regle yüzeyinin Ω_α merkez regle yüzeyi time-like dir.

Eğer Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyi Ω_α, time-like merkez regle yüzeyli ise (3.1.8b), (3.1.9a) ve (3.1.9b) denklemlerinden

$$\dot{Z} = \sum_{\nu=1}^{k} \varsigma_\nu e_\nu + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \dot{z}_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

bulunur. Böylece $t_1 \in I_0$, Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin merkez uzayı $Z(t_1)$ merkez noktasındaki tanjant uzayı

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{k} \varsigma_\nu e_\nu, a_{k+m+2}, \ldots, a_n \right\}$$

uzayı tarafından gerilir. Bu ifade ederki Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin doğrultman uzayına sahip $Z(t_1)$ merkez noktasındaki tanjant uzay ϕ, $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzeyinin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayı ile

$$\alpha(t) + x\left(\sum_{\nu=1}^{k} \varsigma_\nu(t) e_\nu(t) \right) \qquad (3.1.11.)$$

doğrusu boyunca kesişir.

Tersine, Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin her merkez noktasındaki tanjant uzayı ϕ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayını bir doğru boyunca keser ise (3.1.8b) denklemine göre Ψ_α nın Ω_α merkez uzayı (3.1.9a) ve (3.1.9b) ifadeleri ile tanımlanır.

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.1

IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzey ϕ ve ϕ nin Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisi ϕ nin ortogonal yörüngesi değil ise ϕ nin Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin her bir merkez noktasındaki tanjant uzayı, ϕ nin $E_k(t_1)$, $t_1 \in I$, doğrultman uzayı ile bir doğru boyunca kesişir.

Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.5.

IR_1^n de $(k+1)$-boyutlu time-like regle yüzey ϕ olsun. Eğer aşağıdaki önermelerden biri sağlanıyor ise ϕ nin Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisini, dayanak eğrisi kabul eden $(n-k-m)$-boyutlu time-like tamamlayıcı regle yüzeyi Ψ_α, $n > k+m+1$ için $\alpha(t)$ dayanak eğrisine dejenere olmaz ve $I_0 \subset I$, $t \in I_0$ aralığında tam olarak kenar regle yüzeyli bir regle yüzey gösterir.

i-) Ψ_α time-like tamamlayıcı regle yüzeyinin asimptotik ve teğetsel demetleri $\forall t \in I$ için aynıdır.

ii-) (3.1.6) ve (3.1.7) denklemleri aynı anda geçerlidir.

iii-) $\alpha(t)$ eğrisi ϕ nin ortogonal yörüngesi olmak üzere ϕ nin ortogonal yörüngesi olmayan her $Z(t)$ dayanak eğrisi için ψ_Z time-like tamamlayıcı regle yüzeyi sonuç (3.1.1) sağlar.

Eğer $z(t_1) \in \psi_\alpha$ noktasında (3.1.9a) ifadesi geçerli ise bu noktadaki Ψ_α nın tanjant uzayı ile ϕ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayının merkez noktasındaki tanjant uzaylar bir doğru boyunca kesişir. (3.1.8b) ve (3.1.9a) ya göre bu ortak doğru

$$\alpha(t)+x\left[\sum_{\nu=1}^{k}\varsigma_\nu e_\nu+\left(\sum_{\xi=2}^{n-k-m}\beta_\xi z_\xi+\eta_{m+1}\right)a_{k+m+1}\right], \quad x\in IR \qquad (3.1.12)$$

ile verilir.

$z(t) \in \psi_\alpha$ merkez noktasındaki (3.1.9a) ve (3.1.10) şartlarını sağladığından dolayı ya (3.1.9b) ifadesi yada

$$\beta_\xi = 0 \qquad , \; 2 \le \xi \le n-k-m \; ,$$

ifadesi geçerlidir. O halde (3.1.12) doğrusu ya ϕ nin $E_k(t_1)$ doğrultman uzayında bulunur yada $E_k(t_1)$ ile bir noktada kesişir.

SONUÇ VE TARTIŞMALAR

E^n, n-boyutlu Öklid uzayında, özellikle THAS, C., FRANK, H., GIERING., HACISALİHOĞLU, H. Hilmi., KURUOĞLU, N. ve ASLANER, R. (v.s) regle yüzeylerle ilgili bir çok çalışma yapmışlardır. Biz tezimizde ilk olarak Minkowski uzayı ile ilgili temel tanımlara ve teoremlere yer verdik.

Tezimizin ikinci bölümünde IR_1^n, Minkowski uzayında, Time-Like genelleştirilmiş regle yüzeyler ve bu regle yüzeylerin Merkez, Sırt ve Asli regle yüzeyleri ile ilgili karakteristik özelliklere yer verdik. Bunla birlikte, IR_1^n Minkowski uzayında (k-m+1)-boyutlu Time-Like Merkez regle yüzeyler verildi.

IR_1^n, n-boyutlu Minkowski uzayında Time-Like regle yüzeyler ve bu regle yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri TOSUN, M., [4] de incelendi. Biz bu çalışmamızda Time-Like tamamlayıcı regle yüzeyleri ilk olarak tanıttık ve bu Time-Like tamamlayıcı regle yüzeylerin Asimptotik ve Teğetsel demetleri ile ilgili teoremlere yer verdik. Time-Like tamamlayıcı regle yüzeylerin Kenar ve Merkez uzayları tanıtıldı ve bunlarla ilgili teoremler elde edildi.

Bu çalışmada yalnızca Space-Like doğrultman uzaylı Time-Like tamamlayıcı regle yüzeyler üzerinde duruldu ancak Time-Like doğrultman uzaylı Time-Like tamamlayıcı regle yüzeyler çalışılmadı. Tezimizin devamı olarak hem Space-Like tamamlayıcı regle yüzeyler hem de Time-Like doğrultman uzaylı Time-Like tamamlayıcı regle yüzeyler üzerinde çalışacağız.

KAYNAKLAR

[1] ASLANER, R., Master Sci. Thesis., İnönü Üniversity Gradmate School of Natural and Applied Science, 1989

[2] HACISALİHOĞLU, H.H., Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi 1995

[3] THAS, C., Properties of Ruled Surfaces In The Euclidean Space E^n, Acedemica Sinica, 1978

[4] TOSUN, M,. IR_1^n Minkowski Uzayında Space-Like Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Time-Like Regle Yüzeyler, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1995

[5] TOSUN, M,. On the $(k-m+1)$-dimensional time-like center ruled surface in the Minkowski space IR_1^n, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi Cilt 1, Sayı 1, Mart 1997

[6] O'NEILL, B., Semi Riemannian Geometry, Accedemic Press. New York, Londan 1983

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Ali GÜNGÖR, 30.04.1977 yılında Denizli'nin Çivril ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Çivril'de, Lise öğrenimini ise Denizli'de tamamladı. 1998 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 1998-1999 Öğretim yılında Milli Eğitime bağlı olarak Matematik Öğretmenliği yaptı. Ekim 1999'da Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans programına kaydoldu. Aralık 1999'da Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı ve halen bu görevini sürdürmektedir.