153078

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PROJEKTÖRLER SINIFININ GENELLEŞTİRMELERİ ve GENELLEŞTİRİLMİŞ PROJEKTÖRLERİN LİNEER KOMBİNASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat SARDUVAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Halim ÖZDEMİR

TEMMUZ 2004

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PROJEKTÖRLER SINIFININ GENELLEŞTİRMELERİ ve GENELLEŞTİRİLMİŞ PROJEKTÖRLERİN LİNEER KOMBİNASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat SARDUVAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Halim ÖZDEMİR

Bu tez 20 / 07 /2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr. Halim ÖZDEMİR	Doç.Dr. Refik KESKİN	Doç.Dr. Elman ALİYEV
Jüri Başkanı	Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

TEŞEKKÜR

Tez konusu seçiminde ve bu konunun seçiminden sonra çalışmamın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarıma, yakın desteklerini gördüğüm mesai arkadaşlarıma ve beni bugünlerime getiren sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezin yazımında büyük emeği olan ve her zaman yardımlarını esirgemeyen sevgili eşim Vildan SARDUVAN'a da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: reel sayılar kümesi
N	: doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_n$	: n boyutlu kompleks vektör uzayı
$\mathbb{C}_{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu kompleks elemanlı matrislerin kümesi
$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}...$	: matrisler; $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}_{m\times n}$
$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}...$	: vektörler; $\mathbf{x}=(x_i)\in\mathbb{C}_{m\times n}$
$\mathbf{0}$	: elemanları sıfır olan vektör veya matris
$a,b,c...$	: skalerler
$\in$	: elemanıdır
$\notin$	: elemanı değildir
$\mathbf{A}'$	: $\mathbf{A}$ matrisinin transpozesi
$\mathbf{A}^*$	: $\mathbf{A}$ matrisinin eşlenik transpozesi
$\mathbf{A}^-$	: $\mathbf{A}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi
$\mathbf{A}^+$	: $\mathbf{A}$ matrisinin Moore-Penrose tersi
$\mathbf{A}^d$	: $\mathbf{A}$ matrisinin Drazin tersi
$\mathbf{A}^\#$	: $\mathbf{A}$ matrisinin grup tersi
$\Re(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin sütun uzayı
$N(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin sıfır uzayı
$rk(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin rankı
$p\Rightarrow q$	: p doğru ise q da doğrudur
$\Leftrightarrow$	: ancak ve ancak

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: İdempotent matris; Kuadripotent matris; EP matris; Kısmi izometri; Projektör; Ortogonal projektör; Genelleştirilmiş projektör; Hipergenelleştirilmiş projektör.

Bu çalışma, ilk bölüm diğer bölümler için hazırlık olmak üzere, üç ana bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1 de, Bölüm 2 ve Bölüm 3 de temel teşkil edecek olan bazı kavramlar ve bazı teoremler verilmektedir.

Bölüm 2 de, projektörler sınıfının genelleştirmeleri normal ve EP matrisler sınıfı dahilinde ele alınmaktadır. İki genelleştirilmiş projektörün toplam ve farkının genelleştirilmiş projektör olması için bir gerek ve yeter koşul verilmektedir. Ayrıca, iki hipergenelleştirilmiş projektörün toplam ve farkının hipergenelleştirilmiş projektör olması için bir yeter koşul verilmektedir. Bunlara ek olarak idempotentler, projektörler, genelleştirilmiş projektörler ve hipergenelleştirilmiş projektörler kümelerinden herhangi birine ait iki matrisin çarpımının yine aynı kümede olması için bir yeter koşul verilmektedir.

Bölüm 3 de, Bölüm 2 deki $\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$ toplamı ve $\mathbf{G}_1-\mathbf{G}_2$ farkı ile ilgili problemin genelleştirilmesi olan, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ herhangi sıfır olmayan farklı genelleştirilmiş projektörler ve c_1, c_2 sıfır olmayan kompleks sayılar olmak üzere, $\mathbf{G}=c_1\mathbf{G}_1+c_2\mathbf{G}_2$ biçimindeki bir lineer kombinasyonunun yine bir genelleştirilmiş projektör olduğu tüm durumları karakterize etme problemi ele alınmaktadır.

GENERALIZATION OF THE CLASS OF PROJECTORS AND LINEAR COMBINATION OF GENERALIZED PROJECTORS

SUMMARY

Keywords: Idempotent matrix; Quadripotent matrix; EP matrix; Partial isometry; Projector; Orthogonal projector; Generalized projector; Hypergeneralized projector.

This work, first chapter being preliminaries for the other chapters, consists of three principal chapters. In the Chapter 1, some definitions and some theorems that will be fundamental in the Chapter 2 and Chapter 3 are given.

In the Chapter 2, generalizations of the class of projectors are considered within the classes of normal and EP matrices. A necessary and sufficient condition for the sum and difference of two generalized projectors to be a generalized projector is given. Moreover, a sufficient condition for the sum and difference of two hypergeneralized projectors to be a hypergeneralized projector is given. Furthermore, a sufficient condition for the product of any two matrices belonging to any one of the classes of idempotents, projectors, generalized projectors, hypergeneralized projectors to be in the same class is given.

In the Chapter 3, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ being any two different nonzero $n \times n$ generalized projectors and c_1, c_2 being nonzero complex numbers, the problem of characterising all situations, where a linear combination of the form $\mathbf{G} = c_1\mathbf{G}_1 + c_2\mathbf{G}_2$, is also a generalized projector which is the generalization of the problem concerning the sum $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$, and the difference $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$ in Chapter 2 has been considered.

BÖLÜM 1. ÖN BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu kısımda bazı temel notasyonlar, tanımlar ve ispatsız olarak bazı özellikler verilmektedir. Çalışma boyunca matrisler koyu ve büyük harflerle ($\mathbf{A}$ gibi), vektörler koyu ve küçük harflerle ($\mathbf{a}$ gibi), skalerler ise italik harfler (c gibi) ile ifade edilmektedir.

1.2. Bazı Matris Çeşitleri ve Bazı Matris Özellikleri

Aşağıdaki tanımlar klasik tanımlar olup, örneğin [4], [5] ve [15] de mevcuttur.

Tanım1.2.1. $\mathbf{A}$ kare matrisine, eğer $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ şartını sağlıyorsa idempotent matris denir.

Tanım1.2.2. Bir kare matrisin ana köşegeni altındaki tüm elemanları sıfır ise bu matrise üst üçgensel matris denir.

Tanım1.2.3. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matrisi, eğer eşlenik transpozesine eşitse o matrise hermityen matris denir. Yani $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ için eğer, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ ise $\mathbf{A}$ hermityendir. Burada hermityen matris ile ilgili bazı özellikleri vermekte yarar vardır.

Özellik1.2.4. Hermityen matrisin özdeğerleri reeldir[5].

Özellik1.2.5. $\mathbf{U}$ üst üçgensel matrisi, sadece elementer satır işlemleri kullanılarak $\mathbf{A}$ hermityen matrisinden elde edilmişse o zaman $\mathbf{U}$ nun köşegeni $\mathbf{A}$ nın negatif özdeğerlerinin sayısı kadar negatif, $\mathbf{A}$ nın pozitif özdeğerlerinin sayısı kadar pozitif ve $\mathbf{A}$ nın sıfır özdeğerlerinin sayısı kadar da sıfır elemanı içerir[5].

Tanım1.2.6. Eğer $\mathbf{A} = \lfloor a_{ij} \rfloor$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, tersinir matrisinin eşlenik transpozesi, $\mathbf{A}$ matrisinin tersine eşitse $\left(\mathbf{A}^{-1} = (\overline{\mathbf{A}})'\right)$ $\mathbf{A}$ ya üniterdir denir.

1.3. Matrisler İçin Bazı Ters Çeşitleri

Tanım1.3.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{m\times n}$ olsun. $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{AA^{-}A} = \mathbf{A}$ şartını sağlayan $\mathbf{A}^{-} \in \mathbb{C}_{n\times m}$ matrisine, $\mathbf{A}$ nın bir genelleştirilmiş tersidir denir[4].

Teorem1.3.2. Her matris için bir genelleştirilmiş ters vardır, fakat tek olmayabilir[8].

Tanım1.3.3. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{m\times n}$ olsun. Eğer $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$ ve $\mathbf{GAG} = \mathbf{G}$ olacak şekilde bir $\mathbf{G} \in \mathbb{C}_{n\times m}$ mevcutsa $\mathbf{G}$ matrisine $\mathbf{A}$ nın yansımalı genelleştirilmiş tersi denir[17].

Tanım1.3.4. Eğer $\mathbf{A}^{\#} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matrisi aşağıdaki üç şartı sağlarsa, ona $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matrisinin grup tersi denir:

$(G.1)$ $\mathbf{AA^{\#}A} = \mathbf{A}$,

$(G.2)$ $\mathbf{A^{\#}AA^{\#}} = \mathbf{A}^{\#}$,

$(G.3)$ $\mathbf{AA^{\#}} = \mathbf{A^{\#}A}$,

[16].

Tanım1.3.5. Eğer $\mathbf{G} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matrisi aşağıdaki üç şartı sağlarsa, ona $\mathbf{A}$ matrisinin Drazin tersi denir:

$(D.1)$ $\mathbf{AG} = \mathbf{GA}$,

$(D.2)$ $\mathbf{A}^{k} = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{G}$ veya denk olarak $\mathbf{A}^{k} = \mathbf{GA}^{k+1}$ (k herhangi pozitif sayı),

$(D.3)$ $\mathbf{G} = (\mathbf{G})^2 \mathbf{A}$,

[17].

Tanım1.3.6. $\mathrm{A} \in \mathbb{C}_{m \times n}$ olsun. Eğer bir $\mathbf{A}^{+} \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisi aşağıdaki dört şartı sağlarsa, ona $\mathbf{A}$ nın Moore-Penrose tersi denir:

$(M.1)$ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}$,

$(M.2)$ $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+}$,

$(M.3)$ $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+})^{*} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$,

$(M.4)$ $(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A})^{*} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$,

[4].

Teorem1.3.7. $m \times n$ boyutlu her matrisin bir tek Moore-Penrose tersi vardır[8].

1.4. Bir Matrisin Rankı, Sütun ve Sıfır Uzayları

Tanım1.4.1. $\mathrm{A} \in \mathbb{C}_{m \times n}$ olsun. $\mathbf{A}$ nın sütun rankı (veya kısaca $\mathbf{A}$ nın rankı) onun içerdiği lineer bağımsız sütunların maksimum sayısıdır. $\mathbf{A}$ nın rankı $rk(\mathbf{A})$ ile gösterilir. $\mathbf{A}$ nın satır rankı onun içerdiği lineer bağımsız satırların maksimum sayısıdır[15].

Özellikler1.4.2.

i) Bir matrisin satır rankı ile sütun rankı aynıdır.

ii) İyi bilinen elementer satır ya da sütun işlemleri bir matrisin rankını değiştirmez.

iii) Bu iki uyarı blok matrisler için de geçerlidir[15].

Uyarı1.4.3. Bundan böyle bir $\mathbf{A}$ matrisi için sütun ya da satır rank ifadesi değil, kısaca rank ifadesi kullanılacaktır.

Tanım1.4.4. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n \times m}$ olsun ($\mathbf{A}$ nın sütunları $\mathbb{C}_n$ de vektörler olarak gösterilebilir. Dolayısıyla $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m]$ yazılabilir). $\mathbf{A}$ nın sütunları tarafından üretilen vektör uzayı $\mathbf{A}$ nın sütun uzayı olarak tanımlanır ve $\Re(\mathbf{A})$ ile gösterilir[8].

Uyarı1.4.5. $\mathbf{A}$ nın sütun uzayını tanımlamanın diğer bir yolu da $\mathbf{S} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{Ab}; \mathbf{b} \in \mathbb{C}_m\}$ dir. $\mathbf{S}$ nin $\mathbf{A}$ nın sütunları tarafından üretilen vektör uzayı olduğu da açıktır[bakınız, örneğin, 8]

Not1.4.6. $\mathbf{A}$ nın sütun uzayının boyutunun, $\mathbf{A}$ nın lineer bağımsız sütunlarının sayısına, yani $\mathbf{A}$ nın rankına eşit olduğuna dikkat etmek gerekir.

Teorem1.4.7. Eğer $\Re(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}$ nın sütun uzayı ise $\Re(\mathbf{A}) = \Re(\mathbf{AA}^*)$ dır[19].

İspat: $\mathbf{b} = \mathbf{A}'\mathbf{a}$ için $\mathbf{AA}'\mathbf{a} = \mathbf{Ab}$ dır. Yani $\Re(\mathbf{AA}^*) \subset \Re(\mathbf{A})$ dır. Bununla birlikte $\mathbf{AA}^*$ ile $\mathbf{A}$ aynı boyutlu oldukları için $\Re(\mathbf{AA}^*) = \Re(\mathbf{A})$ dır.

Tanım1.4.8. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n \times m}$ olsun. $\mathbf{A}$ nın sıfır uzayı $\mathbf{S} = \{\mathbf{y} : \mathbf{Ay} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \in \mathbb{C}_m\}$ şeklinde tanımlanır ve $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ ile gösterilir[8].

Teorem1.4.9. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n \times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sıralı özdeğerlerine sahip bir matris olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{U}^*\mathbf{AU} = \mathbf{T} = [t_{ij}] \qquad (1.4.1)$$

olacak şeklinde bir $\mathbf{U}$ üniter matrisi vardır. Burada $\mathbf{T}$ köşegen elemanları $t_{ii} = \lambda_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olan bir üst üçgensel matristir. Her $\mathbf{A}$ kare matrisi, köşegen elemanları $\mathbf{A}$ nın verilmiş sıralı özdeğerlerinden oluşan bir üst üçgensel matrise üniter olarak eşitlenebilir. Hatta eğer $\mathbf{A}$ reel matris ve $\mathbf{A}$ nın bütün özdeğerleri reel sayılardan oluşuyorsa o zaman $\mathbf{U}$ reel ve ortogonal seçilebilir[15].

BÖLÜM 2. GENELLEŞTİRİLMİŞ PROJEKTÖRLER ve HİPERGENELLEŞTİRİLMİŞ PROJEKTÖRLER

2.1. Giriş

Bu bölümde [9] da ele alınan projektörler sınıfının normal ve EP matris sınıfları çerçevesinde genelleştirme problemi daha ayrıntılı olarak ele alınmaktadır.

Bu çalışmanın bu ve bundan sonraki bölümlerinde, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{A}^-$, $\Re(\mathbf{A})$, $\Re^{\perp}(\mathbf{A})$, $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ ve $rk(\mathbf{A})$ sırası ile $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{m\times n}$ in eşlenik transpozunu, Moore-Penrose tersini, herhangi bir genelleştirilmiş tersini, sütun uzayını, sütun uzayının dikini, sıfır uzayını ve rankını göstermektedir.

Öncelikli olarak temel alınacak olan bazı tanımlar ve bazıları ispatsız olmak üzere bazı teoremler verilecektir.

Tanım2.1.1. Eğer $\mathbf{A}$ kare matrisi hermityen ve idempotent $\left(\text{yani}, \mathbf{A} = \mathbf{A}^*, \mathbf{A} = \mathbf{A}^2\right)$ ise $\mathbf{A}$ matrisine bir projektör denir[9].

Teorem2.1.2. $\mathbf{A}$ kare matrisi için $\mathbf{A}$ ile değişmeli olan bir tek yansımalı genelleştirilmiş tersi vardır ancak ve ancak $\mathbf{A}$ nın indeksi 1 $\left(\text{yani, } rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}^2)\right)$ dır[4]. Bu genelleştirilmiş ters $\mathbf{A}$ nın grup tersidir.

Tanım2.1.3. Eğer $\Re(\mathbf{A}) = \Re(\mathbf{A}^*)$ veya denk olarak $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$ ise $\mathbf{A}$ kare matrisine EP (veya sütun-ranj hermityen matris) denir[9].

Teorem2.1.4. $\mathbf{A}$ kare matrisinin bir EP olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{\#}$ olmasıdır.

İspat: $\mathbf{A}$ matrisi bir EP olsun. Bu durumda $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ dır. Bu $(M.1)$ ve $(M.2)$ ile birleştirilirse $\mathbf{A}^{+}$ nın $\mathbf{A}$ nın grup tersi, yani $\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{\#}$ olduğu görülür.

Tersine $\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{\#}$ olsun. $(G.3)$ kullanılırsa $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ yazılabilir, yani $\mathbf{A}$ bir EP dir. ■

Tanım2.1.5. Eğer $\mathbf{A}$ kare matrisi için $\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}=\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$ oluyorsa $\mathbf{A}$ kare matrisine normal matris denir[4].

Teorem2.1.6. Her normal matris EP dir.

İspat: $\mathbf{A}$ herhangi bir normal matris olsun. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}=\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$ eşitliğinin her iki tarafının Moore-Penrose tersi alınır ve elde edilen ifadenin her iki tarafı sağdan $\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}$ ile çarpılırsa sırasıyla $(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})^{+}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})^{+}$ ve $\Rightarrow (\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}$ elde edilir. Buradan $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}$ olduğundan,

$$(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})^{+}\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{*} \qquad (2.1.1)$$

yazılabilir. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})^{+}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})=\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ ve $(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})^{+}\mathbf{A}^{*}=\mathbf{A}^{+}$ eşitlikleri[17], $(2.1.1)$ de yerine yazılırsa $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ elde edilir. ■

Tanım2.1.7. Eğer $\mathbf{A}^{*}=\mathbf{A}^{+}$ ise $\mathbf{A}$ matrisine bir kısmi izometri denir[9].

Teorem2.1.8. $\mathbf{A}$ nın normal kısmi izometri olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{A}^{*}=\mathbf{A}^{\#}$ olmasıdır[7].

Teorem2.1.9. Projektörler sınıfı, normal kısmi izometriler ve idempotentler sınıfının bir kesişimidir.

İspat: $\mathbf{A}$ bir projektör olsun.

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^2 \text{ ve } \mathbf{A}=\mathbf{A}^* \tag{2.1.2}$$

dir. $(2.1.2)$ de ikinci ifadenin her iki tarafı $\mathbf{A}$ ile sağdan çarpılır ve $\mathbf{A}$ nın projektör olması göz önüne alınırsa

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A}^*\mathbf{A} \tag{2.1.3}$$

elde edilir. $(2.1.3)$ soldan $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ olur. $\mathbf{A}$ bir projektör olduğundan

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A} \tag{2.1.4}$$

bulunur. $(2.1.4)$ denkleminde $\mathbf{A}$ yerine $\mathbf{A}^*$ ve $\mathbf{A}^*$ yerine $\mathbf{A}$ yazılırsa

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^* \tag{2.1.5}$$

elde edilir. $(2.1.2)$ de ikinci ifadenin her iki tarafı soldan $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa $\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ olur. Bu eşitlik $(2.1.3)$ ile birleştirilirse

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A} \tag{2.1.6}$$

bulunur. $(2.1.2)$ den $\mathbf{A}$ bir idempotent matristir. $(2.1.4)$, $(2.1.5)$ ve $(2.1.6)$ eşitliklerinden $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^\#$ olup Teorem2.1.8. den $\mathbf{A}$ normal kısmi izometridir.

Tersine $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^\#$ ve $\mathbf{A}=\mathbf{A}^2$ olsun. $\mathbf{A}=\mathbf{A}^2$ oluşu açıktır. $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^\#$ olduğu için $(G.1)$ den $\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ olur ve $(G.3)$ kullanılırsa $\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$ yazılabilir. $\mathbf{A}$ idempotent olduğu için

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^* \tag{2.1.7}$$

olur. $(2.1.7)$ ifadesinde $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\#$ olması göz önünde bulundurularak $(G.3)$ kullanılırsa

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{A} \tag{2.1.8}$$

elde edilir. $(2.1.7)$ soldan $\mathbf{A}^*$ ile çarpılırsa $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ olur. Bu ifadenin sol tarafı için $(2.1.8)$, sağ tarafı için de $(G.1)$ düşünülerek $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ yazılabilir. Yani $\mathbf{A}$ hermityendir. O halde $\mathbf{A}$ projektördür. ■

Teorem2.1.10. İdempotent matrisler sınıfı tripotent ve kuadripotent matrisler sınıfının bir kesişimidir.

İspat: $\mathbf{A}$ idempotent matrisler sınıfından bir matris olsun. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ nin her iki tarafı sağdan $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^3$ olur. Yani $\mathbf{A}$ tripotenttir. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^3$ eşitliğinin her iki tarafı sağdan $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4$ elde edilir. Yani $\mathbf{A}$ kuadripotenttir.

Tersine $\mathbf{A} = \mathbf{A}^3$ ve $\mathbf{A} = \mathbf{A}^4$ eşitlikleri var olsun. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^4$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınırsa $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4 \cdot \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A}$ elde edilir. $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ ve $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}$ olduğu için $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ dır. ■

Teorem2.1.9. ve Teorem2.1.10. dan projektörler sınıfı, tripotent olan normal kısmi izometriler ve kuadripotent olan normal kısmi izometriler sınıfları düşünülerek genelleştirilebilir. Teorem2.1.11. ve Teorem2.2.1. bununla ilgili olarak verilmektedir.

Teorem2.1.11. $\mathbf{A}$ nın tripotent normal kısmi izometri olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{A}$ nın hermityen kısmi izometri olmasıdır.

İspat: $\mathbf{A}$ matrisi tripotent normal kısmi izometri olsun. Bu durumda $\mathbf{A}=\mathbf{A}^3$ ve Teorem2.1.8. den $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^\#$ dır. Tanım1.3.4. de $\mathbf{A}^\#$ yerine $\mathbf{A}^*$ yazılırsa

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*, \tag{2.1.9}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}, \tag{2.1.10}$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^* \tag{2.1.11}$$

ifadeleri elde edilir. $(2.1.10)$ eşitliğinde $(2.1.9)$ kulanılırsa $\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ olur. Burada da $(2.1.11)$ kullanılırsa $\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ bulunur ve $(2.1.9)$ göz önüne alınırsa $\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}^3\mathbf{A}^*$ elde edilir. $\mathbf{A}^3=\mathbf{A}$ olduğu için $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ dır. $(2.1.11)$ eşitliğinden $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*$ olur. Yani $\mathbf{A}$ hermityendir.

$(2.1.9)$ dan $\mathbf{A}$ nın normal olduğu görülmektedir. Ayrıca Teorem2.1.6. dan $\mathbf{A}$ aynı zamanda EP dir. Buradan Teorem2.1.4. den $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^\#$ ve hipotezden $\mathbf{A}^\#=\mathbf{A}^*$ olduğu için $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^*$ dır. Yani $\mathbf{A}$ kısmi izometridir.

Tersine olarak $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*$ ve $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^+$ olsun. O halde $\mathbf{A}=\mathbf{A}^+$ yazılabilir. $\mathbf{A}=\mathbf{A}^+$ olduğu için $(M.1)$ den $\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^3=\mathbf{A}$ elde edilir. Yani $\mathbf{A}$ tripotenttir. $(M.1)$ ve $(M.2)$ de $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^+$ olması kullanılırsa

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}, \tag{2.1.12}$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^* \tag{2.1.13}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*$ olduğundan

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^* \tag{2.1.14}$$

dır. $(2.1.12)$, $(2.1.13)$ ve $(2.1.14)$ den $\mathbf{A}^*$ ın grup ters şartlarını sağladığı görülür. Yani $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\#$ dır. ■

2.2. Genelleştirilmiş Projektörler

Teorem2.2.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ ve $rk(\mathbf{A}) = r$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

a) $\mathbf{A}$ bir kuadripotent normal kısmi izometridir.

b) $\mathbf{A}$ bir kuadripotent normal matristir.

c) $\mathbf{H}$ üniter matris ve $\mathbf{\Delta} \in \mathbb{C}_{r\times r}$ de köşegen elemanları $\left\{1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$ kümesinden olan köşegen matris olmak üzere

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^*$$

şeklinde yazılabilir.

d) $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^2$ dir.

İspat: a)$\Rightarrow$b): Kuadripotentlik zaten vardır. $(G.3)$ ve Teorem2.1.8. kullanılırsa $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$ yazılabilir. Yani $\mathbf{A}$ normaldir.

b)$\Rightarrow$c): Normal matrislerin spektral ayrışımı ve herhangi bir kuadripotent matrisin özdeğerlerinin, yalnızca $\left\{0, 1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$ kümesinin elemanları olması gerçeğinden c) nin sağlandığı görülür.

c)$\Rightarrow$d): $\mathbf{\Delta}$ matrisinin tanımı göz önüne alındığında $\mathbf{\Delta}^2 = \mathbf{\Delta}^*$ olduğu kolayca görülür. Buradan $\mathbf{H}$ üniter olduğundan

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^* = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^* = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^* = \mathbf{A}^*$$

bulunur.

d)$\Rightarrow$a): $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^2$ olsun. Buradan

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}\mathbf{A})^* = (\mathbf{A}^2)^* = (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A} \tag{2.2.1}$$

ve

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^*\mathbf{A} \tag{2.2.2}$$

dır. Ayrıca

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A} \tag{2.2.3}$$

Bunun yanında $(2.2.2)$ sol taraftan $\mathbf{A}^*$ ile çarpılırsa, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ olur. Burada $\mathbf{A}^*\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ olduğu için

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^* \tag{2.2.4}$$

olur. O halde $(2.2.2)$, $(2.2.3)$, $(2.2.4)$ den $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\#$ olduğu görülür. ■

Tanım2.2.2. $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^2$ yi sağlayan $\mathbf{A}$ kare matrisine bir genelleştirilmiş projektör denir.

Teorem2.2.3. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{nxn}$ bir projektördür ancak ve ancak bir $\mathbf{G}$ genelleştirilmiş projektörü için $\mathbf{A} = \mathbf{G}^*\mathbf{G}$ dir.

İspat: $\mathbf{A}$ bir projektör yani $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ ve $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ olsun. Özel olarak $\mathbf{G} = \mathbf{A}$ seçilirse $\mathbf{G}^*\mathbf{G} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ yazılabilir. Burada $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ ve $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ olduğundan $\mathbf{G}^*\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ bulunur.

Tersine $\mathbf{A}=\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ olsun. Buradan $\mathbf{A}^*=(\mathbf{G}^*\mathbf{G})^*=\mathbf{G}^*\mathbf{G}=\mathbf{A}$ ve $\mathbf{G}$ genelleştirilmiş projektör olduğu için $\mathbf{A}^2=\mathbf{G}^*\mathbf{G}\mathbf{G}^*\mathbf{G}=\mathbf{G}^*\mathbf{G}\mathbf{G}^2\mathbf{G}=\mathbf{G}^*\mathbf{G}\mathbf{G}\mathbf{G}\mathbf{G}=\mathbf{G}^*\mathbf{G}^4$ dır. Teorem2.2.1. den $\mathbf{A}^2=\mathbf{G}^*\mathbf{G}=\mathbf{A}$ olur. ∎

Lemma2.2.4. Eğer $\mathbf{A}\in\mathbb{C}_{n\times n}$ bir genelleştirilmiş projektör ise o zaman $\mathbf{A}^d$, $\mathbf{A}$ nın Drazin tersini göstermek üzere,

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{3k+1},\ k\in\mathrm{N}, \tag{2.2.5}$$

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^2=\mathbf{A}^\#=\mathbf{A}^d=\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^{3k+2},\ k\in\mathrm{N} \tag{2.2.6}$$

dir.

İspat: $\mathbf{A}\in\mathbb{C}_{n\times n}$ bir genelleştirilmiş projektör olsun. $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{3k+1}$, $k\in\mathrm{N}$, olduğu tümevarım ile gösterilecek olursa;
$k=0$ için iddianın doğru olduğu ve Teorem2.2.1. den $k=1$ için de iddianın doğruluğu açıktır.
$k=n$ için doğru olsun. Yani, $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{3n+1}$, $n\in\mathrm{N}$, olsun.
$k=n+1$ için,
$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{3(n+1)+1}=\mathbf{A}^{3n+1}\cdot\mathbf{A}^3=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^4=\mathbf{A}$
olur. Sonuç olarak her $k\in\mathrm{N}$ için $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{3k+1}$ dir.

Her şeyden önce Teorem2.2.1. den $\mathbf{A}$ normal kısmi izometri ve Teorem2.1.8. den

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^\# \tag{2.2.7}$$

yazılabilir. (2.2.5) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa, $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}^{3k+2}$ olduğu da görülür. $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^2$ den $\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ dır. Dolayısı ile $\mathbf{A}$ normaldir. Teorem2.1.6. dan $\mathbf{A}$ EP, yani $\mathbf{A}^+\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ dır. Teorem2.1.4. den $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^\#$ dır. (2.2.7) den $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^+$

olduğu anlaşılır. Son olarak $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^d$ olduğunu göstermek kalır. Bunun için $\mathbf{A}^2$ nin $(D.1)$, $(D.2)$, $(D.3)$ şartlarını sağladığı gösterilmelidir:

$$(D.1)\ \mathbf{A}\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} \tag{2.2.8}$$

$(D.2)$ $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^{k+1}$ olduğu tümevarımla gösterilecek olursa;

$k=1$ için $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4$ ve Teorem2.2.1. den $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ dır.

$k=n$ için $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^{n+1}$ olsun.

Buradan, $k=n+1$ için $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^2\mathbf{A}\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^{(n+1)+1}$ elde edilir. Sonuç olarak $(D.2)$ sağlanır. Yani iddia her k için doğrudur.

$(D.3)$ Teorem2.2.1. göz önüne alınırsa $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^4\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^2\right)^2\mathbf{A}$ yazılabilir.

$(D.1)$, $(D.2)$, $(D.3)$ den $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^d$ dir. İspat tamamlanır. ■

Herhangi bir genelleştirilmiş projektör, yıldız-hançer matrisler $\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A}^*\right)$ sınıfına aittir. Bu durum, $\mathbf{A}$ bir genelleştirilmiş projektör olduğu durumda $(2.2.6)$ eşitliğinden görülür.

2.3. Hipergenelleştirilmiş Projektörler

EP olan kuadripotent matrislerin sınıfı genelleştirilmiş projektörler sınıfının daha ileri bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Teorem2.3.1. bununla ilgilidir.

Teorem2.3.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ ve $rk(\mathbf{A}) = r$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

a) $\mathbf{A}$ bir kuadripotent EP matristir.

b) $\mathbf{H}$ üniter matris ve $\mathbf{T} \in \mathbb{C}_{r\times r}$ de köşegen elemanları $\left\{1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$ kümesinden olan üst üçgensel matris olmak üzere

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}\begin{bmatrix}\mathbf{T} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{H}^*$$

şeklinde yazılabilir.

c) $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^+)^2$.

d) $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^2$.

İspat: a)$\Rightarrow$b): a) şıkkı sağlansın. $\mathbf{A}$ üniter olarak $\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ matrisine denktir [12, Corollary6.2]. Burada $\mathbf{K} \in \mathbb{C}_{r\times r}$ matrisi nonsinguler ve bütün özdeğerleri $\mathbf{A}$ nın sıfır olmayan özdeğerleri olan bir matristir. Teorem1.4.9. kullanılarak $\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ matrisi kolayca elde edilebilir. Burada $\mathbf{T} \in \mathbb{C}_{r\times r}$ matrisi $\mathbf{K}$ ile aynı özdeğerlere sahip üst üçgensel matristir. Bu da b) yi verir.

b)$\Rightarrow$c): $\mathbf{T}$ nin köşegen elemanlarının hepsi sıfırdan farklı (bütün özdeğerleri $\mathbf{A}$ nın sıfır olmayan özdeğerlerinden oluşmaktadır) olduğu için determinantı sıfırdan farklı, dolayısı ile tersi vardır. Ayrıca $\mathbf{T}$ nin köşegen elemanlarının $\left(\left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}\right)$ hepsinin 4. kuvveti yine kendine eşit olduğu için $\mathbf{T}$ kuadripotenttir. Yani $\mathbf{T}^4 = \mathbf{T}$ yazılabilir. Burada her iki taraf $\mathbf{T}^{-1}$ ile çarpılırsa, $\mathbf{T}^4\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} \Rightarrow \mathbf{T}^3 = \mathbf{I}$ elde edilir. Yine $\mathbf{T}^{-1}$ ile çarpılırsa $\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^{-1}$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafının karesi alınır ve $\mathbf{T}^4 = \mathbf{T}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^4 = (\mathbf{T}^{-1})^2 \tag{2.3.1}$$

bulunur. Bu durumda $\mathbf{A}^+$ olarak $\mathbf{A}^+ = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^*$ alınabilir. Gerçekten de;

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^*\mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^* = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{H}^* = \mathbf{H}\mathbf{H}^* = \mathbf{I} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^+\mathbf{A} \tag{2.3.2}$$

$$AA^{+} = H\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} H \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} = H \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} = HH^{*} = I \Rightarrow$$

$$(AA^{+})^{*} = AA^{+} \tag{2.3.3}$$

$$AA^{+}A = I \cdot A = A \tag{2.3.4}$$

$$A^{+}AA^{+} = I \cdot A^{+} = A^{+} \tag{2.3.5}$$

dır. Sonuç olarak, $(2.3.2)$, $(2.3.3)$, $(2.3.4)$ ve $(2.3.5)$ den $A^{+} = H\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*}$ olduğu görülür. Buradan

$$(A^{+})^{2} = A^{+}A^{+} = H\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} \cdot H \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} = H \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*}$$

$$= H \begin{bmatrix} (T^{-1})^{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*}$$

dır. Ayrıca $(2.3.1)$ den

$$(A^{+})^{2} = H \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} = A$$

olduğu görülür.

c)$\Rightarrow$d): $A^{2} = H\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} H \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} = H \begin{bmatrix} T^{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} = H \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^{*} = A^{+}$ dır.

d)$\Rightarrow$a): $A^{+} = A^{2}$ dan $AA^{+} = AA^{+}$ olduğu açıktır. Ayrıca $(M.1)$ den $A = AA^{+}A = AA^{2}A = A^{4}$ yazılabileceğinden A kuadripotenttir. ■

Tanım2.3.2. $A^{+} = A^{2}$ eşitliğini sağlayan herhangi bir A matrisine hipergenelleştirilmiş projektör denir.

$A^2 = A^*$ ifadesi Teorem2.2.1. ve Teorem2.3.1. den $A^2 = A^+$ yı sağladığı için, basitçe görülebilir ki; genelleştirilmiş projektörler sınıfı hipergenelleştirilmiş projektörler ve kısmi izometriler sınıflarının kesişimidir.

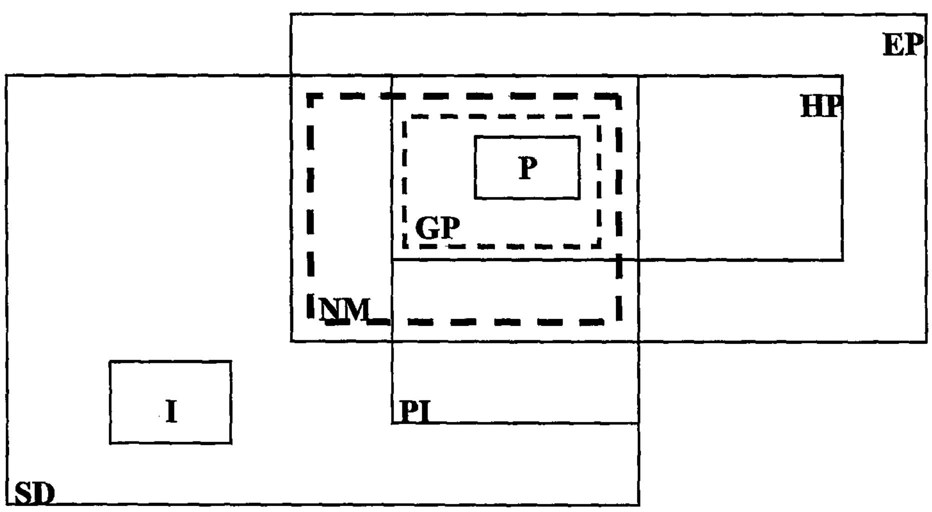
Sonuç2.3.3. $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ olsun. O zaman $A^2 = A^*$ ancak ve ancak $A^2 = A^+$ ve $A^+ = A^*$ dır.

İspat: $A^2 = A^*$ olsun. Lemma2.2.5. den $A^2 = A^+$ ve $A^+ = A^*$ olduğu görülür.

Tersine olarak $A^2 = A^+$ ve $A^+ = A^*$ ise $A^2 = A^+$ eşitliğinde A^+ yerine A^* yazılırsa $A^2 = A^+ \Rightarrow A^+ = A^*$ olur. ■

Bu kısıma kadar ismi geçen yıldız-hançer, EP, kısmi izometri, normal, idempotent, projektör, genelleştirilmiş projektör ve hipergenelleştirilmiş projektör kare matris tipleri sırası ile SD, EP, PI, NM, I, P, GP, HP ile gösterilsin. Bunlar arasındaki ilişki Şekil2.1. deki gibidir[12].

[12] de genelleştirilmiş projektörlerin, bir grup terse sahip matrisler olarak adlandırıldığını hatırlatmakta yarar vardır.



Şekil2.1.: Bazı matris kümeleri arasındaki ilişkiyi gösterir şekil.

2.4.Kısmi Sıralılar

Tanım2.4.1. $\mathbb{C}_{n\times n}$ de yıldız kısmi sıralı $\left(\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B}\right)$ ve eksi kısmi sıralı $\left(\mathbf{A}\overset{-}{\leq}\mathbf{B}\right)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{B} \text{ ve } \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{B}^*, \tag{2.4.1}$$

$$\mathbf{A}\overset{-}{\leq}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}_1^-\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^-\mathbf{B} \text{ ve } \mathbf{A}\mathbf{A}_2^- = \mathbf{B}\mathbf{A}_2^-. \tag{2.4.2}$$

Burada $\mathbf{A}_1^-$ ve $\mathbf{A}_2^-$, $\mathbf{A}$ nın herhangi genelleştirilmiş tersleridir.

Lemma2.4.2. $\mathbf{A}$ bir EP ve $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{C}_{n\times n}$ olsun. Bu durumda

$\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{AA} = \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$
dır[1, (1.11)].

Lemma2.4.3. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ idempotent olduğunda, $\mathbf{AA} = \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{A}\overset{-}{\leq}\mathbf{B}$ olmasıdır[14, Teorem5.1.].

$\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B}$ ve $\mathbf{B}$ idempotent (projektör) olduğunda $\mathbf{A}$ kendisi de idempotenttir (projektördür)[14, Kısım3]. Hipergenelleştirilmiş projektörler için benzer durum aşağıdaki teoremde gösterilmektedir.

Teorem2.4.4. $\mathbf{B}$ bir hipergenelleştirilmiş projektör ve $\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B}$ olmak üzere $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{C}_{n\times n}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}$ nın bir hipergenelleştirilmiş projektör olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{A}$ nın EP olmasıdır.

İspat: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n \times n}$ hipergenelleştirilmiş projektör olsun. Bu durumda Teorem2.3.1. den $\mathbf{A}$ EP dir.

Tersine $\mathbf{A}$ EP yani, $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ olsun. Lemma2.4.2. den

$$\mathbf{AA} = \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \tag{2.4.3}$$

yazılabilir. $(2.4.3)$ denkleminin ilk iki eşitliği sağdan $\mathbf{B}$ ile çarpılır ve $\mathbf{B}^{2} = \mathbf{B}^{+}$ olması göz önüne alınırsa

$$\mathbf{AAB} = \mathbf{AB}^{2} = \mathbf{AB}^{+} \tag{2.4.4}$$

olur. $(2.4.3)$ denkleminin 1. ve 3. kısmından oluşan eşitlik soldan $\mathbf{B}$ ile çarpılır ve $\mathbf{B}^{2} = \mathbf{B}^{+}$ olması göz önüne alınırsa

$$\mathbf{BAA} = \mathbf{B}^{2}\mathbf{A} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{A} \tag{2.4.5}$$

bulunur. $(2.4.4)$ soldan $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}$ ile çarpılır ve $\mathbf{A}$ nın EP olduğu ve $(M.2)$ dikkate alınırsa $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}\mathbf{AAB} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}\mathbf{AB}^{+} \Rightarrow \mathbf{A}^{+}\mathbf{AA}^{+}\mathbf{AB} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{AA}^{+}\mathbf{B}^{+}$ yazılabilir.Buradan

$$\mathbf{AA}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{AB} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{B}^{+} \tag{2.4.6}$$

bulunur. $(2.4.5)$ sağdan $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}$ ile çarpılır ve $\mathbf{A}$ nın EP olduğu ve $(M.2)$ dikkate alınırsa $\mathbf{BAAA}^{+}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{AA}^{+}\mathbf{A}^{+} \Rightarrow \mathbf{BAA}^{+}\mathbf{AA}^{+} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+}\mathbf{AA}^{+}$ yazılabilir.

$$\mathbf{BA}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{BAA}^{+} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+} \tag{2.4.7}$$

elde edilir. $(2.4.3)$ sırası ile önce soldan $\mathbf{A}^{+}$ ile çarpılıp, $\mathbf{A}$ nın EP olması ve $(M.1)$ dikkate alınırsa $\mathbf{A}^{+}\mathbf{AA} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{AB} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{AA}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{+}\mathbf{B}$ olur. Sonra $(2.4.3)$ sağdan yine $\mathbf{A}^+$ ile çarpılırsa $\mathbf{AAA}^+ = \mathbf{BAA}^+ \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{BA}^+\mathbf{A}$ bulunur. Bu elde edilenlerden

$$\mathbf{A} = \mathbf{AA}^+\mathbf{B} = \mathbf{BA}^+\mathbf{A} \tag{2.4.8}$$

yazılabilir. $(2.4.6)$, $(2.4.7)$ ve $(2.4.8)$ den

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+ \tag{2.4.9}$$

eşitliğine ulaşılır. $(2.4.8)$ den

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+\mathbf{BA}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{BA}^+ \tag{2.4.10}$$

elde edilir. $\mathbf{B}$ hipergenelleştirilmiş projektör olduğundan,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^4 = \mathbf{B}^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}^+\mathbf{B}^+ \tag{2.4.11}$$

dır. O halde $\mathbf{A}^+$ üzerinde $(2.4.10)$, $(2.4.11)$ ve $(2.4.9)$ sırası ile kullanılırsa $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{BA}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{B}^+\mathbf{B}^+\mathbf{A}^+ = \mathbf{AA}$, yani $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^2$ elde edilir. ■

Aşağıdaki örnekten anlaşılacağı gibi $\mathbf{B}$ bir hipergenelleştirilmiş projektör olduğunda $\mathbf{A} \overset{*}{\leq} \mathbf{B}$ olması otomatik olarak $\mathbf{A}$ nın EP olmasını gerektirmez

Örneğin, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ EP değil ve $\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ hipergenelleştirilmiş projektördür. Bununla birlikte $\mathbf{A} \overset{*}{\leq} \mathbf{B}$ dir. Gerçekten;

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^*\mathbf{B} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{AA}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{BA}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliklerinden $\mathbf{A} \overset{*}{\leq} \mathbf{B}$ olduğu görülür.

Burada $\mathbf{B}$ nin aslında üniter olarak genelleştirilmiş projektör olduğuna dikkat edilmelidir.

Eğer, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n \times n}$ bir hipergenelleştirilmiş projektör ise bu durumda

$$\wp = \{\mathbf{C} \in \mathbb{C}_{n \times n} : \mathbf{C} \overset{*}{\leq} \mathbf{A}; \mathbf{C} \overset{*}{\leq} \mathbf{A}^{+}\} \tag{2.4.12}$$

sınıfından $\mathbf{C} \in \mathbb{C}_{n \times n}$ matrisini ele almak ilginç olabilir. [21] de $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{+}$ ile gösterilen ve $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{A}^{+}$ nın yıldız kesişimi denilen $\wp$ deki yegane maksimal elemanı bulmak özel öneme sahiptir.

Lemma2.4.5. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n \times n}$ bir hipergenelleştirilmiş projektör olsun. Bu durumda $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{\#} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} - \frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ dır.

İspat: $(M.1)$, $(M.2)$, Teorem2.3.1., ve $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{+}$ olması aşağıdaki geçişlerde kullanılmak üzere;

$(G.3)$
$$\begin{aligned}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} - \frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right) &= \mathbf{I}_n - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} - \frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} - \mathbf{A} + \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} + \frac{2}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{I}_n - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathbf{A}\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} - \frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) &= \mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} + \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} - \frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} + \frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{I}_n - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathbf{A}\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.4.13) ve (2.4.14) den

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} - \frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right) = \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{3}\mathbf{A}^{+} - \frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \tag{2.4.15}$$

olduğu görülür.

$(G.1)$ $(2.4.13)$ aşağıda kullanılmak üzere

$$(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})\left(\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{2}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}\right)(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})=\left(\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^+-\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})$$

$$=\mathbf{I}_n-\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}^++\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^+-\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^++\frac{1}{3}\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}+\frac{1}{3}\mathbf{A}^+$$

$$=\mathbf{I}_n-\mathbf{A}$$

olduğu görülür.

$(G.2)$ $(2.4.14)$ aşağıda kullanılmak üzere

$$\left(\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{2}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}\right)(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})\left(\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{2}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}\right)=$$

$$=\left(\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^+-\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{2}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}\right)$$

$$=\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{2}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}^++\frac{1}{9}\mathbf{A}^+\mathbf{A}^++\frac{2}{9}\mathbf{A}^+\mathbf{A}^+\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^+$$
$$+\frac{1}{9}\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A}^++\frac{2}{9}\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A}^+\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}+\frac{1}{9}\mathbf{A}\mathbf{A}^++\frac{2}{9}\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A}$$

$$=\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{2}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}^++\frac{1}{9}\mathbf{A}+\frac{2}{9}\mathbf{A}^+-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}$$

$$+\frac{1}{9}\mathbf{A}^++\frac{2}{9}\mathbf{A}^+\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}+\frac{1}{9}\mathbf{A}^+\mathbf{A}+\frac{2}{9}\mathbf{A}$$

$$=\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{2}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{\#}=\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^+-\frac{2}{3}\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ dır.

Lemma2.4.6. $\mathbf{A}\in\mathbb{C}_{nxn}$ bir hipergenelleştirilmiş projektör olsun. Bu durumda $(\mathbf{A}-\mathbf{A}^+)^{\#}=\frac{1}{3}(\mathbf{A}^+-\mathbf{A})$ dır.

İspat: $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}^+$ olması, $(M.1)$, $(M.2)$ ve Teorem2.3.1. aşağıdaki geçişlerde kullanılmak üzere;

$$(G.3)\quad (\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})\cdot\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})=\frac{1}{3}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{2}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}+\mathbf{A}^{+}\mathbf{A})$$

$$=\frac{1}{3}\left[\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{2}\mathbf{A}^{2}+\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}-\frac{1}{3}\mathbf{A} \qquad (2.4.16)$$

$$\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})=\frac{1}{3}\left[\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{2}+\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right]=\frac{1}{3}\left[\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{2}\mathbf{A}^{2}-\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}-\frac{1}{3}\mathbf{A} \qquad (2.4.17)$$

(2.4.16) ve (2.4.17) den $(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})\cdot\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})=\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})$,

$$(G.1)\quad (\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})\cdot\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})=\left(\frac{2}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}-\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}+\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{2}+\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(3\mathbf{A}-3\mathbf{A}^{+})=\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+} \qquad (2.4.18)$$

$$(G.2)\quad \frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})\cdot\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})=\frac{1}{3}(2\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})\cdot\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})$$

$$=\frac{1}{9}(2\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}^{+}+\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}+\mathbf{A}^{2})$$

$$=\frac{1}{9}(3\mathbf{A}^{+}-3\mathbf{A})=\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}). \qquad (2.4.19)$$

Bu da ispatı tamamlar. ∎

Teorem2.4.7. $\mathbf{A}\in\mathbb{C}_{n\times n}$ bir hipergenelleştirilmiş projektör ve $\mathbf{I}_n-\mathbf{A}$ bir EP olsun. O zaman $\mathbf{A}\wedge\mathbf{A}^{+}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{A}^{i}$ dir.

İspat: $(2.4.13)$ den $(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{\#}-(\mathbf{I}_n-\mathbf{AA}^{+})=\frac{2}{3}\mathbf{AA}^{+}-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}-\frac{1}{3}\mathbf{A}$ yazılabilir. Bu özdeşlik $(2.4.16)$ ile birleştirildiğinde

$$(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{\#}-(\mathbf{I}_n-\mathbf{AA}^{+})=(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})^{\#} \qquad (2.4.20)$$

elde edilir. Bu durumda "$\mathbf{I}_n-\mathbf{A}$ EP $\Leftrightarrow \mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}$ EP dir" durumu ortaya çıkar. Gerçektende doğrudur:

$\mathbf{I}_n-\mathbf{A}$ EP olsun. Teorem2.1.4. den $(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})^{+}=(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})^{\#}$ veya denk olarak Lemma2.4.6. dan $(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})^{+}=\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})$ olduğu gösterilmelidir. $(2.4.20)$ den

$$\begin{aligned}\left[(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})\cdot\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})\right]^{*} &= \left[(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{+}-(\mathbf{I}_n-\mathbf{AA}^{+})\right]^{*}\\ &= \left[(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{+}\right]^{*}-(\mathbf{I}_n-\mathbf{AA}^{+})^{*}\\ &= (\mathbf{I}_n-\mathbf{A})(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{+}-\left(\mathbf{I}_n^{*}-(\mathbf{AA}^{+})^{*}\right)\\ &= (\mathbf{I}_n-\mathbf{A})(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{+}-(\mathbf{I}_n-\mathbf{AA}^{+})\\ &= \left[(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})\cdot\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})\right] \qquad (2.4.21)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $(M.3)$ sağlanır. Ayrıca $(2.4.21)$ in sağ ve sol yanındaki parantez içindeki ifadelerde $\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})=(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})^{\#}$ olduğu için

$$\left[\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})\right]^{*}=\left[\frac{1}{3}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A})(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+})\right] \qquad (2.4.22)$$

yazılabilir. Böylece $(M.4)$ sağlanır. Öte yandan $(2.4.18)$ ve $(2.4.19)$ dan $(M.1)$, $(M.2)$ nin sağladığı açıktır. Sonuç olarak

$$\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)^{\#}=\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)^{+} \tag{2.4.23}$$

yani $\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)$ EP dir.

Tersine $\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)$ EP olsun. Bu durumda Teorem2.1.4. den $\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{+}=\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{\#}$, yani $\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{+}=\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}-\frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ olduğu gösterilmelidir. Lemma2.4.5. den $(M.1)$, $(M.2)$ nin sağladığı açıktır. O halde $(2.4.20)$ ve Teorem2.1.4. göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
\left[\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)\cdot\left(\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}-\frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)\right]^{*} &= \left[\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)^{+}+\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)\right]^{*} \\
&= \left[\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)^{+}\right]^{*}+\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)^{*} \\
&= \left[\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)^{+}\right]^{*}+\mathbf{I}_n^{*}-\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)^{*} \\
&= \left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)^{+}+\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right) \\
&= \left(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{I}_n-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}-\frac{2}{3}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)
\end{aligned}$$

olur. Yani $(M.3)$ şart sağlanır. Ayrıca $(2.4.15)$ den de $(M.4)$ ün sağlandığı açıktır. Yani $\mathbf{I}_n-\mathbf{A}$ EP dir. [21] de Teorem4.2. (ii) nin uygulamasıyla $\mathbf{A}\wedge\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_n-\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)^{+}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)\right)$ elde edilir. Lemma2.4.6. $(G.2)$, Teorem2.1.4., $(M.1)$ ve $\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{2}$ olması göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\left[\mathbf{I}_n-\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)^{+}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{+}\right)\right] &= \mathbf{A}\left[\mathbf{I}_n-\frac{2}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}+\frac{1}{3}\mathbf{A}^{+}+\frac{1}{3}\mathbf{A}\right] \\
&= \mathbf{A}-\frac{2}{3}\mathbf{A}^{2}\mathbf{A}^{+}+\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}+\frac{1}{3}\mathbf{A}^{2} \\
&= \mathbf{A}-\frac{2}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}+\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{A}^{2}+\frac{1}{3}\mathbf{A}^{2} \\
&= \frac{1}{3}\mathbf{A}+\frac{1}{3}\mathbf{A}^{2}+\frac{1}{3}\mathbf{A}^{3}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{A}^{i}
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Uyarı2.4.8. $\mathbf{A}$ bir genelleştirilmiş projektör olduğunda $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ nın EP olduğu yukarıdakilerden anlaşılmaktadır.

Dikkat edilmelidir ki $\mathbf{A}$ bir hipergenelleştirilmiş projektör ise o zaman $\mathbf{P} = \frac{1}{3}\sum_i^3 \mathbf{A}^i$ matrisi $\mathbf{AP} = \mathbf{PA} = \mathbf{P}$, $\Re(\mathbf{P}) = \mathrm{N}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ ve $\mathrm{N}(\mathbf{P}) = \Re(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ ifadelerini sağlayan idempotent matristir. Bununla birlikte $\mathbf{P}$ bir hermityen matristir (bu yüzden bir projektördür) ancak ve ancak $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ bir EP dir.

Eğer $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ bir EP ise, bu durumda $\mathbf{P} = \mathbf{I}_n - (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^+$ ve aynı zamanda $\mathbf{P}$ 1 öz değeri ile ilişkili temel idempotent matristir[17, Sayfa 104].

GroB, Hauke ve Markiewicz [10] tarafından keşfedilen önemli bir özelliği aşağıdaki lemmada vermek sureti ile bu kısmı tamamlayalım.

Lemma2.4.9. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ kısmi izometriler olsun. Bu durumda $\mathbf{A} \overset{*}{\leq} \mathbf{B}$ dir $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A} \overset{-}{\leq} \mathbf{B}$ dir.

İspat: $\mathbf{A} \overset{*}{\leq} \mathbf{B}$ olsun. $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^+$ olması $(2.4.1)$ de kullanılırsa $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}^+\mathbf{B}$ ve $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{BA}^+$ yazılabilir. Burada $\mathbf{A}^+$ zaten $\mathbf{A}$ nın bir genelleştirilmiş tersi olduğu için $(2.4.2)$ den $\mathbf{A} \overset{-}{\leq} \mathbf{B}$ dir.

Tersine $\mathbf{A} \overset{-}{\leq} \mathbf{B}$ olsun. [1, (1.13)] den

$$\mathbf{A} = \mathbf{BB}^*\mathbf{A} = \mathbf{AB}^*\mathbf{B} = \mathbf{AB}^*\mathbf{A} \tag{2.4.24}$$

olur. Bu durumda $(2.4.24)$ den $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{BA}^*$ yazılabilir. Bu denklemin her iki yanı sağdan $\mathbf{B}$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}^*\mathbf{B} \tag{2.4.25}$$

elde edilir. Yani $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$ idempotenttir. Ayrıca $\mathbf{A}$ nın kısmi izometri olması göz önüne alınarak $(M.2)$ yazılırsa $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ olur ve $(2.4.24)$ denkleminden $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{B}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ elde edilir. Bu denklem $\mathbf{B}$ ile sağdan çarpılırsa

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{B}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{B} \tag{2.4.26}$$

bulunur. $(2.4.24)$ denkleminden $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{B}^*\mathbf{A}$ yazılabilir. Bu denklem $\mathbf{B}^*$ ile soldan çarpılırsa $\mathbf{B}^*\mathbf{A} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{B}^*\mathbf{A}$, yani:

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{B})^* = (\mathbf{A}^*\mathbf{B})^*\mathbf{A}^*\mathbf{B}(\mathbf{A}^*\mathbf{B})^* \tag{2.4.27}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left[(\mathbf{A}^*\mathbf{B})^*(\mathbf{A}^*\mathbf{B})\right]^* = (\mathbf{A}^*\mathbf{B})^*\left((\mathbf{A}^*\mathbf{B})^*\right)^* = (\mathbf{A}^*\mathbf{B})^*(\mathbf{A}^*\mathbf{B}) \tag{2.4.28}$$

ve

$$\left[(\mathbf{A}^*\mathbf{B})(\mathbf{A}^*\mathbf{B})^*\right]^* = \left((\mathbf{A}^*\mathbf{B})^*\right)^*(\mathbf{A}^*\mathbf{B})^* = (\mathbf{A}^*\mathbf{B})(\mathbf{A}^*\mathbf{B})^* \tag{2.4.29}$$

dir. $(2.4.26)$, $(2.4.27)$, $(2.4.28)$ ve $(2.4.29)$ eşitliklerinden $(\mathbf{A}^*\mathbf{B})^* = (\mathbf{A}^*\mathbf{B})^+$ olduğu görülür. O halde $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$ kısmi izometridir. Bu durumda [12, Sayfa 252] den (veya ikinci bölüm ikinci ve üçüncü kısımlara bakınız) $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$ projektördür. $\mathbf{A}$ nın kısmi izometri olmasından $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^2 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ ve $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ dolayısı ile $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\Re(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ üzerinde projektördür $(2.4.24)$ ve Teorem1.4.7. kullanılırsa $\Re(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \Re(\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{B}^*\mathbf{A})$ $= \Re\left((\mathbf{A}^*\mathbf{B})(\mathbf{A}^*\mathbf{B})^*\right) = \Re(\mathbf{A}^*\mathbf{B})$ yazılabilir. Buna bağlı olarak da $\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ eşitliği elde edilir. Buradan $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$ projektör olduğu için

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{B}^*\mathbf{A} \tag{2.4.30}$$

bulunur. (2.4.30) eşitliği soldan $\mathbf{B}$ ile çarpılır ve (2.4.24) kullanılırsa $\mathbf{BA}^*\mathbf{A} = \mathbf{BB}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}$, yani $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{AB}^*$ dır. Bu soldan $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa $\mathbf{AA}^* = \mathbf{AA}^*\mathbf{AB}^* = \mathbf{AB}^*$, ayrıca $\mathbf{AA}^*$ projektör ve $\mathbf{A}$ kısmi izometri olduğu için $(\mathbf{AA}^*)^* = (\mathbf{AB}^*)^* \Rightarrow \mathbf{AA}^* = \mathbf{BA}^*$ dır. Yani $\mathbf{A} \overset{-}{\leq} \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \overset{*}{\leq} \mathbf{B}$ olmasını sağlar. ■

2.5. Genelleştirilmiş ve Hipergenelleştirilmiş Projektörlerin Toplam, Fark ve Çarpımları

"İdempotent matrislerin toplam ve farklarının idempotent olması" problemi literatürde daha önceden bilinmektedir. Projektörler için bu problem [17] de ele alınmıştır. Aynı probleme benzer olarak bu bölümde; iki genelleştirilmiş projektörün toplam ve farkının da genelleştirilmiş projektör olması için bir gerek ve yeter koşul, iki hipergenelleştirilmiş projektörün toplam ve farkının da hipergenelleştirilmiş projektör olması için de bir yeter koşul verilmektedir. Ayrıca idempotentler, projektörler, genelleştirilmiş projektörler veya hipergenelleştirilmiş projektörler kümelerinden herhangi birine ait iki matrisin çarpımının da yine aynı kümede bir eleman olduğu durum da gösterilmiştir.

Teorem2.5.1. $\mathbf{\Omega}$, $\mathbb{C}_{n\times n}$ nin alt sınıfları olan idempotentler, genelleştirilmiş projektörler ve projektörler kümelerinin herhangi birini göstersin. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{\Omega}$ iken $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbf{\Omega}$ dir $\Leftrightarrow$ $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ dır.

İspat: Bu iddia [örneğin 17 den] idempotent ve projektörler için iyi bilinmektedir. O halde $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ genelleştirilmiş projektörler olduklarında ispatı yapmak yeterli olacaktır.

$\mathbf{A} + \mathbf{B}$ genelleştirilmiş projektör olsun. O zaman; $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^*$ dır. Buradan, $\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$ olur. Buradan da $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ elde edilir. Bu eşitlik sırası ile soldan ve sağdan $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{AAB} + \mathbf{ABA} = \mathbf{A}^*\mathbf{B} + \mathbf{ABA} = \mathbf{0} \tag{2.5.1}$$

ve

$$\mathbf{ABA} + \mathbf{BAA} = \mathbf{ABA} + \mathbf{BA}^* = \mathbf{0} \tag{2.5.2}$$

eşitlikleri elde edilir. $(2.5.1)$ ve $(2.5.2)$ nin eşitliğinden

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{BA}^* \tag{2.5.3}$$

olur. $(2.5.3)$ eşitliği de sırası ile soldan ve sağdan $\mathbf{A}^*$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* \tag{2.5.4}$$

ve

$$\mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* = \mathbf{BA}^*\mathbf{A}^* \tag{2.5.5}$$

bulunur. $(2.5.4)$ ve $(2.5.5)$ in eşitliğinden $\mathbf{A}^*\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{BA}^*\mathbf{A}^*$ olur. Teorem2.2.1. den $\Rightarrow \mathbf{A}^4\mathbf{B} = \mathbf{BA}^4 \;\; \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ ifadesi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ olmasını sağlar.

Tersine $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ olsun. O halde
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^* + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$,
yani $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^*$ dır. ■

Sonuç2.5.2. Eğer $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ hipergenelleştirilmiş projektörler ise bu durumda $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ nin hipergenelleştirilmiş projektör olması için yeterlidir.

İspat: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ olsun.

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+$, yani $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+$ bulunur. O halde $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^+ = \mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+$ olduğunu göstermek gerekmektedir. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ olması, $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{B}$ nin hipergenelleştirilmiş projektör olması ve Teorem2.3.1. göz önünde bulundurularak Moore-Penrose ters olma şartlarına bakılmalıdır.

$$(M.1)\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+)\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{AA}^+ + \mathbf{AB}^+ + \mathbf{BA}^+ + \mathbf{BB}^+)(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$
$$= \mathbf{AA}^+\mathbf{A} + \mathbf{AB}^+\mathbf{A} + \mathbf{BA}^+\mathbf{A} + \mathbf{BB}^+\mathbf{A} + \mathbf{AA}^+\mathbf{B} + \mathbf{AB}^+\mathbf{B} + \mathbf{BA}^+\mathbf{B} + \mathbf{BB}^+\mathbf{B}$$
$$= \mathbf{A}+\mathbf{B}$$

$$(M.2)\ (\mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+)\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+) = (\mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+)(\mathbf{AA}^+ + \mathbf{AB}^+ + \mathbf{BA}^+ + \mathbf{BB}^+)$$
$$= \mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{AB}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{BA}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{BB}^+ + \mathbf{B}^+\mathbf{AA}^+ + \mathbf{B}^+\mathbf{AB}^+ + \mathbf{B}^+\mathbf{BA}^+ + \mathbf{B}^+\mathbf{BB}^+$$
$$= \mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+$$

$$(M.3)\ \left[(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+)\right]^* = \left[\mathbf{AA}^+ + \mathbf{AB}^+ + \mathbf{BA}^+ + \mathbf{BB}^+\right]^* = (\mathbf{AA}^+)^* + (\mathbf{BB}^+)^*$$
$$= \mathbf{AA}^+ + \mathbf{BB}^+ = \mathbf{AA}^+ + \mathbf{BB}^+ + \mathbf{AB}^+ + \mathbf{BA}^+$$
$$= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+)$$

$$(M.4)\ \left[(\mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+)\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right]^* = \left[\mathbf{A}^+\mathbf{A} + \mathbf{A}^+\mathbf{B} + \mathbf{B}^+\mathbf{A} + \mathbf{B}^+\mathbf{B}\right]^* = (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^* + (\mathbf{B}^+\mathbf{B})^*$$
$$= \mathbf{A}^+\mathbf{A} + \mathbf{B}^+\mathbf{B} = \mathbf{A}^+\mathbf{A} + \mathbf{B}^+\mathbf{B} + \mathbf{A}^+\mathbf{B} + \mathbf{B}^+\mathbf{A}$$
$$= (\mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+)\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$

Yani $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ hipergenelleştirilmiş projektör ve $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ olduğunda $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ de hipergenelleştirilmiş projektördür. ■

Aşağıdaki teorem iki genelleştirilmiş projektör farkının da bir genelleştirilmiş projektör olması için gerek ve yeter koşul verir. Bu durum idempotentler ve projektörler için iyi bilinmektedir[örneğin bakınız 2].

Teorem2.5.3. $\mathbf{\Omega}$, $\mathbb{C}_{n\times n}$ in alt sınıfları olan idempotentler, projektörler ve genelleştirilmiş projektörlerden herhangi birini göstersin. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{\Omega}$ olduğunda $\mathbf{B}-\mathbf{A} \in \mathbf{\Omega} \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{-}{\leq} \mathbf{B}$ dir.

İspat: İdempotentler için bu iddia [14] de Teorem 5.1 de gösterildi. $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ genelleştirilmiş projektör olsun. Teorem2.2.1. den $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ aynı zamanda kısmi izometri olduğu için Lemma2.4.9. dan $\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B}$ olduğunu göstermek yeter. $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ genelleştirilmiş projektör olsun. Buradan $(\mathbf{B}-\mathbf{A})^2=(\mathbf{B}-\mathbf{A})^*$ $\Rightarrow \mathbf{B}^2-\mathbf{BA}-\mathbf{AB}+\mathbf{A}^2=\mathbf{B}^*-\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{B}^*-\mathbf{BA}-\mathbf{AB}+\mathbf{A}^*=\mathbf{B}^*-\mathbf{A}^*$

$$\Rightarrow 2\mathbf{A}^*=\mathbf{AB}+\mathbf{BA} \tag{2.5.6}$$

yazılabilir. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ genelleştirilmiş projektör olduğu için Şekil2.1. den $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ EP dir. O halde Lemma2.4.2. ye göre $\mathbf{AA}=\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(2.5.6)$ sağdan $\mathbf{A}^*$ ile çarpılır ve $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^2$ olması göz önüne alınırsa; $2\mathbf{A}^*\mathbf{A}^*=\mathbf{ABA}^*+\mathbf{BAA}^* \Rightarrow 2\mathbf{AA}^*\mathbf{A}=\mathbf{ABA}^*+\mathbf{BAA}^*$ yazılabilir. Teorem2.2.1. den $\mathbf{A}$ nın kısmi izometri olması $(M.1)$ ile birlikte düşünüldüğünde;

$$2\mathbf{A}=\mathbf{ABA}^*+\mathbf{BAA}^* \tag{2.5.7}$$

elde edilir. Yine aynı şartlar göz önüne alınarak $(2.5.6)$ bu kez soldan $\mathbf{A}^*$ ile çarpılırsa $\mathbf{A}^*2\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{AB}+\mathbf{A}^*\mathbf{BA} \Rightarrow 2\mathbf{AA}^2\mathbf{A}=\mathbf{A}^*\mathbf{AB}+\mathbf{A}^*\mathbf{BA}$

$$2\mathbf{A}=\mathbf{A}^*\mathbf{AB}+\mathbf{A}^*\mathbf{BA} \tag{2.5.8}$$

bulunur. $(2.5.7)$ ve $(2.5.8)$ den

$$\mathbf{ABA}^*+\mathbf{BAA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{AB}+\mathbf{A}^*\mathbf{BA} \tag{2.5.9}$$

olur. $(2.5.9)$ denklemi $\mathbf{A}$ ile sağdan çarpılır ve Teorem2.2.1. kullanılırsa $\mathbf{ABA}^*\mathbf{A}+\mathbf{BAA}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}^*\mathbf{ABA}+\mathbf{A}^*\mathbf{BAA} \Rightarrow \mathbf{BAA}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}^*\mathbf{ABA}+\mathbf{A}^*\mathbf{BA}^2-\mathbf{ABA}^*\mathbf{A}$ ve buradan

$$\mathbf{BA} = \mathbf{A}^*\mathbf{ABA} + \mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* - \mathbf{ABA}^*\mathbf{A} \tag{2.5.10}$$

elde edilir. $(2.5.9)$ $\mathbf{A}$ ile bu kez soldan çarpılır ve yine Teorem2.2.1. kullanılırsa

$$\mathbf{AABA}^* + \mathbf{ABAA}^* = \mathbf{AA}^*\mathbf{AB} + \mathbf{AA}^*\mathbf{BA}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* + \mathbf{ABAA}^* - \mathbf{AA}^*\mathbf{BA} = \mathbf{AB} \tag{2.5.11}$$

elde edilir. $(2.5.10)$ ve $(2.5.11)$ denklemleri alt alta toplanır, Teorem2.2.1. ve $(2.5.6)$ göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} + \mathbf{BA} &= \mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* + \mathbf{ABAA}^* - \mathbf{AA}^*\mathbf{BA} + \mathbf{A}^*\mathbf{ABA} + \mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* - \mathbf{ABA}^*\mathbf{A} \\ &= 2\mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* = 2\mathbf{A}^*\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* = \mathbf{A}^* \tag{2.5.12}$$

elde edilir. $(2.5.12)$ denklemi soldan ve sağdan $\mathbf{A}^*$ ile çarpılır, $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^2$ ve Teorem2.2.1. göz önüne alınırsa sırasıyla

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{ABA}^* = \mathbf{A} \tag{2.5.13}$$

ve

$$\mathbf{A}^*\mathbf{BA}^*\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{A}^*\mathbf{BA} = \mathbf{A} \tag{2.5.14}$$

bulunur. Bu kez $(2.5.12)$, hem sağ hem soldan $\mathbf{A}^*$ ile çarpılır ve Teorem2.2.1. göz önüne alınırsa $\mathbf{A}^*\mathbf{A}^*\mathbf{BA}^*\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{ABA} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}^*$

$$\mathbf{ABA} = \mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} \tag{2.5.15}$$

olur. O zaman $(2.5.10)$ ve $(2.5.11)$ de $(2.5.12)$, $(2.5.13)$, $(2.5.14)$ ve $(2.5.15)$ eşitlikleri yerine yazılır, $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^2$ olması ve Teorem2.2.1. göz önüne alınacak olursa

$$\mathbf{BA} = \mathbf{A}^*\mathbf{ABA} + \mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* - \mathbf{ABA}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{AA}^* + \mathbf{A}^* - \mathbf{AA}$$

$$\Rightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{A}^* \tag{2.5.16}$$

ve $\mathbf{AB} = \mathbf{A}^*\mathbf{BA}^* + \mathbf{ABAA}^* - \mathbf{AA}^*\mathbf{BA} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^*\mathbf{AA}^* - \mathbf{AA}$

$$\Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{A}^* \tag{2.5.17}$$

elde edilir. $(2.5.16)$ ve $(2.5.17)$ den

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} \tag{2.5.18}$$

yazılabilir. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ genelleştirilmiş projektörleri, Teorem2.2.1. ve Teorem2.1.6. dan görülebileceği gibi aynı zamanda EP oldukları için Lemma2.4.2. de $(2.5.18)$ düşünüldüğünde $\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B}$ olduğu görülür. Genelleştirilmiş projektörler, projektörleri de kapsadığı (Şekil2.1.) için iddia projektörler için de gösterilmiş olur. ∎

Uyarı2.5.4. Teorem2.5.3. de projektörler ve genelleştirilmiş projektörler için Lemma2.4.9. dan dolayı $\mathbf{A}\overset{-}{\leq}\mathbf{B}$ olma şartı yerine $\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B}$ olma şartı kullanılmıştır. Fakat idempotent bir matrisin kısmi izometri olması (Şekil2.1.) garanti edilemeyeceğinden idempotentler için $\mathbf{A}\overset{-}{\leq}\mathbf{B}$ şartı $\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B}$ ile değiştirilemez.

Sonuç2.5.5. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ hipergenelleştirilmiş projektörler olsun. Eğer $\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}-\mathbf{A}$ hipergenelleştirilmiş projektördür.

İspat:

$$\mathbf{A}\overset{*}{\leq}\mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{B}-\mathbf{A})^+ = \mathbf{B}^+ - \mathbf{A}^+ \tag{2.5.19}$$

olduğu bilinmektedir[13]. Teorem2.3.1. den $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ EP dir. Bu durumda Lemma2.4.2. den $(2.4.3)$ sağlanır. $(2.4.3)$ ve $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{B}$ nin hipergenelleştirilmiş projektör olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}-\mathbf{A})^{+} &= \mathbf{B}^{+}-\mathbf{A}^{+} = \mathbf{B}^{2}-\mathbf{A}^{2} = \mathbf{B}^{2}+\mathbf{A}^{2}-\mathbf{A}^{2}-\mathbf{A}^{2} = \mathbf{B}^{2}+\mathbf{A}^{2}-\mathbf{AA}-\mathbf{AA}\\ &= \mathbf{B}^{2}+\mathbf{A}^{2}-\mathbf{AB}-\mathbf{BA}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{B}-\mathbf{A})^{+} = (\mathbf{B}-\mathbf{A})^{2} \tag{2.5.20}$$

elde edilir. ■

Lemma2.5.6. Eğer $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{C}_{n\times n}$ hipergenelleştirilmiş projektörleri için $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ ise $(\mathbf{AB})^{+}=\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+}$ dır.

İspat: $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ olsun. $\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+}$, $\mathbf{AB}$ için Moore-Penrose ters olmanın dört şartını sağlamalıdır.

$(M.1)$ $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+})(\mathbf{AB}) = \mathbf{ABB}^{2}\mathbf{A}^{2}\mathbf{AB} = \mathbf{A}^{4}\mathbf{B}^{4} = \mathbf{AB}$

$(M.2)$ $\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+}\mathbf{ABB}^{+}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{B}^{2}\mathbf{A}^{2}\mathbf{ABB}^{2}\mathbf{A}^{2} = \mathbf{B}^{5}\mathbf{A}^{5} = \mathbf{B}^{2}\mathbf{A}^{2} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+}$

$(M.3)$ $$\begin{aligned}[(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+})]^{*} &= [\mathbf{ABB}^{2}\mathbf{A}^{2}]^{*} = [(\mathbf{BB}^{2})(\mathbf{AA}^{2}) = (\mathbf{AA}^{+})^{*}(\mathbf{B}^{+}\mathbf{B})^{*} = \mathbf{AA}^{+}\mathbf{BB}^{+}]^{*}\\ &= (\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+})\end{aligned}$$

$(M.4)$ $$\begin{aligned}[(\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+})\cdot(\mathbf{AB})]^{*} &= (\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{2}\mathbf{AB})^{*} = (\mathbf{B}^{+}\mathbf{AABA})^{*} = (\mathbf{B}^{+}\mathbf{ABAA})^{*} = (\mathbf{B}^{+}\mathbf{BAA}^{2})^{*}\\ &= [(\mathbf{B}^{+}\mathbf{B})(\mathbf{AA}^{+})]^{*} = (\mathbf{AA}^{+})^{*}(\mathbf{B}^{+}\mathbf{B})^{*} = (\mathbf{AA}^{+})(\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}) = \mathbf{A}^{3}\mathbf{B}^{3}\\ &= \mathbf{B}^{2}\mathbf{A}^{2}\mathbf{AB} = (\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+})(\mathbf{AB})\end{aligned}$$ ■

Teorem2.5.7. $\mathbf{\Omega}$, $\mathbb{C}_{n\times n}$ nin alt sınıfları olan idempotentler, projektörler, genelleştirilmiş projektörler veya hipergenelleştirilmiş projektörler sınıflarından herhangi birini göstersin. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}\in\mathbf{\Omega}$ olsun. O zaman eğer $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ ise $\mathbf{AB}\in\mathbf{\Omega}$ dir.

İspat:

a) İdempotentlik durumu:

$(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{ABAB} = \mathbf{AABB} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{AB}$ dir.

b) Projektör durumu:

a) dan $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{AB}$ dır. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ eşitliğinin her iki yanının eşlenik transpozesi alınırsa $(\mathbf{AB})^* = (\mathbf{BA})^* \Rightarrow (\mathbf{AB})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*$ olur. Burada $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ projektör dolayısı ile hermityen olduğu için $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{AB}$ dır.

c) Genelleştirilmiş projektör durumu:

$(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{ABAB} = \mathbf{AABB} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^* = (\mathbf{BA})^* = (\mathbf{AB})^*$ dır.

d) Hipergenelleştirilmiş projektör durumu:

Lemma2.5.6. dan $(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+ = \mathbf{B}^2\mathbf{A}^2 = \mathbf{BBAA} = \mathbf{BABA} = (\mathbf{BA})^2 = (\mathbf{AB})^2$ elde edilir. ■

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ projektörler olduklarında, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ olmasının gerektiği kolayca görülebilir. Fakat bu genelleştirilmiş projektörler, hipergenelleştirilmiş projektörler ve idempotentler durumunda gerekli değildir. Genelleştirilmiş projektörler durumuna bir sonraki bölümde değinilecektir.

BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ PROJEKTÖRLERİN LİNEER KOMBİNASYONU

3.1. Giriş

$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ olduğu durumda sıfır olmayan c_1 ve c_2 kompleks sayıları ve sıfır olmayan $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ ve $(\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2)$ matrisleri için iki farklı projektörün $\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ şeklindeki lineer kombinasyonunun da bir projektör olma probleminin tam bir çözümünü Baksalary ve Baksalary [2] de ortaya koymuşlardır. Ayrıca onlar $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ ortogonal projektörler olduklarında $\left(\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*, i = 1,2\right)$ $\mathbf{P}$ nin $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P} = -\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ den başka lineer kombinasyonları durumunda $\mathbf{P}$ nin projektör olmadığını göstermişlerdir. Bu bölümde aynı problem, genelleştirilmiş projektörler için ele alınmaktadır. Bunların sonuçlarını ilgilendiren ve bir önceki bölümde ele alınan $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$ toplamı ve $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$ farkı burada ispatlanan genel halin özel durumu olarak ortaya çıkmaktadır. c_1 ve c_2 skalerlerinin reel sayılara kısıtlanması halinde lineer kombinasyonlar sınıfının göz ardı edilemeyecek derecede daraldığı da ortaya konulmaktadır.

Daha önceki notasyonlara ek olarak bu bölümde $\bar{c}$, $c \in \mathbb{C}_{n\times n}$ in eşleniğini, $\mathbb{C}_n^{\mathrm{P}}$ projektörlerden oluşan $\mathbb{C}_{n\times n}$ in alt kümesi, $\mathbb{C}_n^{\mathrm{GP}}$ de genelleştirilmiş projektörlerden oluşan $\mathbb{C}_{n\times n}$ in alt kümesi anlamına gelmektedir. Yani $\mathbb{C}_n^{\mathrm{P}} = \{\mathbf{P} \in \mathbb{C}_{n\times n} : \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\}$ ve $\mathbb{C}_n^{\mathrm{GP}} = \{\mathbf{G} \in \mathbb{C}_{n\times n} : \mathbf{G}^2 = \mathbf{G}^*\}$ dir. Herhangi $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{P}}$ için sırasıyla $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ toplamı ve $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ farkının projektör olması için gerek ve yeter koşulun $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ olduğu iyi bilinir[11]. Aynı problem önceki bölümde kabul edilen toplamla ilgili kriterlerle genelleştirilmiş projektörler için incelenmektedir. Yani,

$$\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \in \mathbb{C}_n^{GP} \Leftrightarrow \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{0} = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 \tag{3.1.1}$$

ele alınmaktadır. Bu, fark ile ilgili olarak şu forma dönüşür:

$$\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 \in \mathbb{C}_n^{GP} \Leftrightarrow \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2^* = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 . \tag{3.1.2}$$

Lemma3.1.1. $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ sıfırdan ve birbirlerinden farklı ($\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2 \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{G}_1 \neq \mathbf{G}_2$) olan genelleştirilmiş projektörler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 \Leftrightarrow \mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$,

ii) $\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* \Rightarrow \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ ve

$\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* \Rightarrow \mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$,

iii) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olsun. Eğer $(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*)\mathbf{G}_1^* = \mathbf{0}$ ise $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1$ ve eğer $(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*)\mathbf{G}_2^* = \mathbf{0}$ ise $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2$ dir.

İspat:

i) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olsun. Bu denklemin her iki yanı sol taraftan $\mathbf{G}_1$ ile çarpılırsa $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ elde edilir. $\mathbf{G}_1^2 = \mathbf{G}_1^*$ olduğundan $\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$ dır.

Tersine $\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$ olsun. Bu denklemin her iki yanı soldan $\mathbf{G}_1^*$ ile çarpılırsa $\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$ olur. Buradan Teorem2.2.1. ve $\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$ den $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ bulunur.

ii) $\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$ olsun. Bu denklem sol yanından $\mathbf{G}_1^*$ ile çarpılırsa $\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* \Rightarrow \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$ elde edilir. i) den dolayı

$$\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 \tag{3.1.3}$$

yazılabilir. Ayrıca $\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*$ eşitliğinde $\mathbf{G}_1$ in genelleştirilmiş projektör olması ve i) şıkkı göz önüne alınırsa

$$\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

iii) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ ve $(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*)\mathbf{G}_1^* = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{G}_1^* - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* = \mathbf{0}$ olur. Bu denklem sağdan $\mathbf{G}_1^*$ ile çarpılır ve Teorem2.2.1. göz önüne alınırsa $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 = \mathbf{0}$ olur. Yani $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1$ elde edilir.

$\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ ve $(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*)\mathbf{G}_2^* = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{G}_2^* - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2^* = \mathbf{0}$ olur. Bu denklem sağdan $\mathbf{G}_2^*$ ile çarpılır ve Teorem2.2.1. göz önüne alınırsa $\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2$ $\Rightarrow \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2$ elde edilir.

3.2. Temel Sonuçlar

Teorem3.2.1. Sıfırdan farklı c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ birer kompleks sayı $(c_1, c_2 \neq 0)$ ve $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ genelleştirilmiş projektörleri de sıfırdan ve birbirlerinden farklı ($\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{G}_1 \neq \mathbf{G}_2$) ve $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G} = c_1\mathbf{G}_1 + c_2\mathbf{G}_2 \tag{3.2.1}$$

şeklinde bir lineer kombinasyon olsun. Ayrıca

$$\gamma_i = \frac{\overline{c}_i - c_i^2}{c_1c_2},\ i = 1,2 \tag{3.2.2}$$

$$\Im_0 = \left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}, \tag{3.2.3}$$

$$\Im_1 = \left\{-1, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}, \tag{3.2.4}$$

$$\Im_2 = \left\{\sqrt{3}i, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}, \tag{3.2.5}$$

$$\Im_3 = \left\{-\sqrt{3}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} \tag{3.2.6}$$

diyelim. Bu durumda;

I) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olduğunda, **G** nin genelleştirilmiş projektör olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ayrık koşullardan herhangi birisinin sağlanmasıdır:

a) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$ ve $c_1 \in \Im_0$, $c_2 \in \Im_0$;

b) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2^*$ ve $c_1 = 1$, $c_2 \in \Im_1$ veya $c_1 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c_2 \in \Im_2$ veya

$c_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c_2 \in \Im_3$;

c) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_2^*$ ve $c_1 = 1$, $c_2 \in \Im_2$ veya $c_1 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c_2 \in \Im_3$ veya

$c_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c_2 \in \Im_1$;

d) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_2^*$ ve $c_1 = 1$, $c_2 \in \Im_3$ veya $c_1 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c_2 \in \Im_1$ veya

$c_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c_2 \in \Im_2$;

e) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1^*$ ve $c_1 \in \Im_1$, $c_2 = 1$ veya $c_1 \in \Im_2$ $c_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ veya $c_1 \in \Im_3$,

$c_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

f) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_1^*$ ve $c_1 \in \Im_1$, $c_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ veya $c_1 \in \Im_2$, $c_2 = 1$ veya

$c_1 \in \Im_3$, $c_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

g) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_1^*$ ve $c_1 \in \Im_1$, $c_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ veya $c_1 \in \Im_2$,

$c_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ veya $c_1 \in \Im_3$, $c_2 = 1$;

h) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = -(\mathbf{G}_1^* + \mathbf{G}_2^*)$ ve c_1 ile c_2; $\bar{c}_1 - c_1^2 = -2c_1c_2 = \bar{c}_2 - c_2^2$ denklemlerinin herhangi sıfır olmayan çözümleridir.

i) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_1^* + \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_2^*$ ve c_1 ile c_2;

$(1+\sqrt{3}i)(\bar{c}_1 - c_1^2) = 4c_1c_2 = (1-\sqrt{3}i)(\bar{c}_2 - c_2^2)$ denklemlerinin herhangi sıfır olmayan çözümleridir.

j) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_1^* + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_2^*$ ve c_1 ile c_2;

$(1-\sqrt{3}i)(\bar{c}_1 - c_1^2) = 4c_1c_2 = (1+\sqrt{3}i)(\bar{c}_2 - c_2^2)$ denklemlerinin herhangi sıfır olmayan çözümleridir.

k) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1\mathbf{G}_1^* + \gamma_2\mathbf{G}_2^*)$ ve c_1, $c_2 \notin \Im_0$; $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\gamma_2^2 + 2\gamma_1)$ veya

$\gamma_1^2 + 2\gamma_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\gamma_2^2 + 2\gamma_1)$ denklemlerinin herhangi sıfır olmayan

çözümleridir. Burada $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 \neq 0$ ve (bu yüzden) $\gamma_2^2 + 2\gamma_1 \neq 0$ dır.

II) $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \neq \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olduğunda $\mathbf{G}$ bir genelleştirilmiş projektördür ancak ve ancak $c_1c_2(\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1) = (\bar{c}_1 - c_1^2)\mathbf{G}_1^* + (\bar{c}_2 - c_2^2)\mathbf{G}_2^*$ ve c_1, c_2 kompleks sayıları $(\bar{c}_1 - c_1^2)(\bar{c}_2 - c_2^2) = c_1^2c_2^2$ denkleminin herhangi sıfır olmayan çözümleridir.

İspat:

$\mathbf{G}^2 = \mathbf{G}^*$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$c_1^2\mathbf{G}_1^2 + c_1c_2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 + c_1c_2\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 + c_2^2\mathbf{G}_2^2 = \bar{c}_1\mathbf{G}_1^* + \bar{c}_2\mathbf{G}_2^*$$

$$\Rightarrow (\bar{c}_1 - c_1^2)\mathbf{G}_1^* + (\bar{c}_2 - c_2^2)\mathbf{G}_2^* = c_1c_2(\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1)$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{c}_1 - c_1^2)}{c_1c_2}\mathbf{G}_1^* + \frac{(\bar{c}_2 - c_2^2)}{c_1c_2}\mathbf{G}_2^* = \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$$

olmasıdır. Bu (3.2.2) notasyonu ile,

$$\gamma_1 \mathbf{G}_1^* + \gamma_2 \mathbf{G}_2^* = \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \tag{3.2.7}$$

şeklini alır. (3.2.7) denkleminin her iki yanı sol taraftan $\mathbf{G}_1$ ile çarpılırsa

$$\gamma_1 \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^* + \gamma_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2^* = \mathbf{G}_1^* \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \tag{3.2.8}$$

bulunur. (3.2.7) denkleminin her iki tarafı sağ taraftan $\mathbf{G}_1$ ile çarpılırsa

$$\gamma_1 \mathbf{G}_1^* \mathbf{G}_1 + \gamma_2 \mathbf{G}_2^* \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^* \tag{3.2.9}$$

elde edilir.

$$\mathbf{G}_i^* \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^3 = \mathbf{G}_i \mathbf{G}_i^* \tag{3.2.10}$$

olduğundan, (3.2.8) denkleminden (3.2.9) denklemi çıkarılırsa

$$\gamma_2 \left(\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2^* - \mathbf{G}_2^* \mathbf{G}_1 \right) = \mathbf{G}_1^* \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^* \tag{3.2.11}$$

ifadesi bulunur. (3.2.7) sol taraftan $\mathbf{G}_2$ ile çarpılırsa

$$\gamma_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^* + \gamma_2 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^* = \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2^* \mathbf{G}_1 \tag{3.2.8$'$}$$

ve sağdan $\mathbf{G}_2$ ile çarpılırsa

$$\gamma_1 \mathbf{G}_1^* \mathbf{G}_2 + \gamma_2 \mathbf{G}_2^* \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2^* + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \tag{3.2.9$'$}$$

elde edilir. Buradan (3.2.10) göz önüne alınıp $(3.2.8)'$ denklemi $(3.2.9)'$ den çıkarılırsa

$$\gamma_1\left(\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2-\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*\right)=\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2^*-\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1 \tag{3.2.12}$$

elde edilir. $(3.2.12)$ denkleminin $(3.2.11)$ de yerine yazılmasıyla

$$\gamma_1\gamma_2\left(\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2-\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^*\right)=\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2-\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* \tag{3.2.13}$$

ifadesi bulunur. Bu durumda $(3.2.7)$ nin bir alternatifi

$$\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2=\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* \text{ veya } \gamma_1\gamma_2=1 \tag{3.2.14}$$

dir. $(3.2.14)$ denklemindeki ilk şart Lemma3.1.1. i) den $(3.2.7)$ denklemi

$$\gamma_1\mathbf{G}_1^*+\gamma_2\mathbf{G}_2^*=2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \tag{3.2.15}$$

biçimini alır. Bu durum teoremin I) kısmına karşılık gelir. II) kısmı ise $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\neq\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ ve $(3.2.7)$ yi sağlayan c_1, c_2 ler için

$$\gamma_1\gamma_2=1 \tag{3.2.16}$$

durumuna karşılık gelir. Şimdi ispata geçilebilir.

I) Lemma3.1.1. i) den

$$\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2=\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1^* \tag{3.2.17}$$

dır. $(3.2.15)$ denklemi sol taraftan $\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*$ ile çarpılırsa $\gamma_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^*+\gamma_2\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_2^*=2\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$ olur. Teorem2.2.1. kullanılırsa

$$\gamma_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^*+\gamma_2\mathbf{G}_2^*=2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \tag{3.2.18}$$

yazılabilir. (3.2.18) ile (3.2.15) den $\gamma_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* + \gamma_2\mathbf{G}_2^* = \gamma_1\mathbf{G}_1^* + \gamma_2\mathbf{G}_2^*$ $\Rightarrow -\gamma_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* + \gamma_1\mathbf{G}_1^* = \mathbf{0} \Rightarrow \gamma_1(\mathbf{G}_1^* - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^*) = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \gamma_1(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*)\mathbf{G}_1^* = \mathbf{0} \tag{3.2.19}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{G}_1 \neq \mathbf{0}$ olduğuna göre iki durum söz konusudur: $\gamma_1 = 0$ veya $(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*)\mathbf{G}_1^* = \mathbf{0}$. (3.2.1) ve Lemma3.1.1. iii) göz önüne alınırsa

$$\bar{c}_1 - c_1^{\,2} = 0 \text{ veya } \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1 \tag{3.2.20}$$

yazılabilir. (3.2.15) sol taraftan $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*$ ile çarpılır ve Teorem2.2.1. göz önüne alınırsa $\gamma_1\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_1^* + \gamma_2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2^* = 2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$

$$\Rightarrow \gamma_2\mathbf{G}_1^* + \gamma_2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2^* = 2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \tag{3.2.21}$$

elde edilir. (3.2.15) ve (3.2.21) den $\gamma_1\mathbf{G}_1^* + \gamma_2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2^* = \gamma_1\mathbf{G}_1^* + \gamma_2\mathbf{G}_2^*$ $\Rightarrow \gamma_2(\mathbf{G}_2^* - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2^*) = \mathbf{0}$

$$\gamma_2(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*)\mathbf{G}_2^* = \mathbf{0} \tag{3.2.22}$$

denklemi elde edilir. Buradan $\mathbf{G}_2 \neq \mathbf{0}$ olduğundan $\gamma_2 = 0$ olmalı veya $(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*)\mathbf{G}_2^* = \mathbf{0}$ olmalıdır. O halde (3.2.2) ve Lemma3.1.1. iii) düşünülürse

$$\bar{c}_2 - c_2^{\,2} = 0 \text{ veya } \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2 \tag{3.2.23}$$

olur. Bu ise (3.2.15) denklemine (3.2.20) den başka bir alternatif olarak ortaya çıkar. (3.2.20) ve (3.2.23) denklemlerinin ilk parçalarından c_1 ve $c_2 \in \mathbb{C}$ sayıları herhangi $c \in \mathbb{C}$ gibi düşünüldüğünde $\bar{c} - c^2 = 0$ denkleminin elde edildiği görülür.

Elde edilen bu denklemin (c_1, $c_2 \neq 0$ kabulünden dolayı) sıfır olmayan çözümleri kümesi (3.2.3) ile tanımlanan $\Im_0$ kümesidir. Bu durumda (3.2.20) ve (3.2.23) denklemlerinin birleşimi gösterir ki, eğer $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ ise o zaman (3.2.15) eşitliği aşağıdaki dört ayrık durumda düşünülebilir:

$$c_1 \in \Im_0,\ c_2 \in \Im_0, \tag{3.2.24}$$

$$c_1 \in \Im_0,\ c_2 \notin \Im_0,\ \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2, \tag{3.2.25}$$

$$c_1 \notin \Im_0,\ c_2 \in \Im_0,\ \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1, \tag{3.2.26}$$

$$c_1 \notin \Im_0,\ c_2 \notin \Im_0,\ \mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2,\ \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1. \tag{3.2.27}$$

Şimdi teoremin I) kısmındaki şıkların ispatına geçilebilir.

a) (3.2.24) durumunda (3.2.2) ile tanımlı γ_1 ve γ_2 daima sıfıra eşit olacağı için (3.2.15) denklemi $2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$ a indirgenir. Bu da a şıkkının ispatıdır.

b) (3.2.25) durumunda ise (3.2.15) denklemi $c_1 \in \Im_0$ dolayısı ile $\gamma_1 = 0$ olacağı için $\gamma_2\mathbf{G}_2^* = 2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$ şeklinde belirtilebilir. Bu denklemde $\mathbf{G}_2^*$ yalnız bırakılırsa

$$\mathbf{G}_2^* = 2\gamma_2^{-1}\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \tag{3.2.28}$$

denklemi elde edilir. Burada aslında (3.2.25) deki üçüncü şartın gereksiz olduğu anlaşılır. Teorem2.2.1. göz önüne alınarak (3.2.28) denkleminin her iki tarafının karesi alınırsa $\left(\mathbf{G}_2^*\right)^2 = \mathbf{G}_2 = 4\gamma_2^{-2}\mathbf{G}_1^2\mathbf{G}_2^2$

$$\Rightarrow \mathbf{G}_2 = 4\gamma_2^{-2}\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* \tag{3.2.29}$$

yazılabilir. (3.2.28) denkleminin her iki yanının eşlenik transpozesi alınırsa

$$\mathbf{G}_2 = 2\overline{\gamma}_2^{-1}\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* \tag{3.2.30}$$

denklemi elde edilir. $(3.2.29)$ ve $(3.2.30)$ dan $2\overline{\gamma}_2^{-1}\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* = 4\gamma_2^{-2}\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^*$ $\Rightarrow \left(2\overline{\gamma}_2^{-1} - 4\gamma_2^{-2}\right)\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* = \mathbf{0}$ bulunur. $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ sıfırdan farklı olduğu için $2\overline{\gamma}_2^{-1} - \left(2\gamma_2^{-1}\right)^2 = 0$ olmalıdır. Yani $\overline{c} - c^2 = 0$ denkleminde olduğu gibi $2\gamma_2^{-1} \in \Im_0$ olmalıdır. $(3.2.3)$ e göre $c \in \Im_0 \Leftrightarrow c^{-1} \in \Im_0$ olması ve $(3.2.2)$ den

$$\frac{1}{2}\gamma_2 = \frac{\overline{c}_2 - c_2^2}{2c_1c_2} \tag{3.2.31}$$

yazılabilir. Bunun anlamı $\frac{1}{2}\gamma_2 \in \Im_0$ dır. Bu yüzden çözüm $\left(c_1, \frac{1}{2}\gamma_2\right) \in \Im_0 \times \Im_0$ ın dokuz farklı durumunda incelenebilir. Eğer $\frac{1}{2}\gamma_2 = 1$ ise, c_1 in üç farklı olabilirliğine göre

$$c_1 = 1 \Rightarrow \overline{c}_2 - c_2^2 = 2c_2 \tag{3.2.32}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \overline{c}_2 - c_2^2 = \left(-1 - \sqrt{3}i\right)c_2 \tag{3.2.33}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \overline{c}_2 - c_2^2 = \left(-1 + \sqrt{3}i\right)c_2 \tag{3.2.34}$$

durumları mevcuttur.

$(3.2.32)$ denklemini sağlayan c_2 ler: $c_2 = -1$ ve $c_2 = -\frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dir.

$(3.2.33)$ denklemini sağlayan c_2 ler: $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ve $c_2 = \sqrt{3}i$ dir.

$(3.2.34)$ denklemini sağlayan c_2 ler: $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ve $c = -\sqrt{3}i$ dir.

Buna göre $(3.2.32)$ den $(3.2.34)$ e kadar olan denklemlerin çözümleri sırasıyla $(3.2.4)$ den $(3.2.6)$ ya kadar belirtildikleri gibi sırası ile $\Im_1$, $\Im_2$, $\Im_3$ kümeleridir. Yani $(3.2.32)$ düşünüldüğünde $c_1 = 1$ iken $c_2 \in \Im_1$, $(3.2.33)$ düşünüldüğünde $c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken $c_2 \in \Im_2$ ve $c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken $c_2 \in \Im_3$ bulunur. Ayrıca $(3.2.28)$ de $2\gamma_2^{-1} = 1$ olması da yerine yazılırsa $\mathbf{G}_2^* = 2\gamma_2^{-1}\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \Rightarrow \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2^*$ eşitliği bulunur. Bu da b) nin ispatını tamamlar.

c) Eğer $\frac{1}{2}\gamma_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ alınırsa, $(3.2.28)$ denklemi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_2^*$ şekline dönüşür ve eğer $c_1 = 1$ ise c_2 için denklemler $(3.2.31)$ denklemi göz önüne alındığında $\frac{1}{2}\gamma_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\bar{c}_2 - c_2^2}{2 \cdot 1 \cdot c_2} \Rightarrow \bar{c}_2 - c_2^2 = \left(-1 - \sqrt{3}i\right)c_2$ olur. Bu ise $(3.2.33)$ durumuna karşılık gelir. Yani $c_1 = 1$ iken $c_2 \in \Im_2$ bulunur. Eğer $c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ise c_2 için denklemler $\frac{1}{2}\gamma_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\bar{c}_2 - c_2^2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot c_2}$

$\Rightarrow \bar{c}_2 - c_2^2 = \left(-1 + \sqrt{3}i\right)c_2$ bulunur. Bu, $(3.2.34)$ durumuna denk gelir. Yani $c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken $c_2 \in \Im_3$ dür. Son olarak $c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ olabilir. Bu durumda $\frac{1}{2}\gamma_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\bar{c}_2 - c_2^2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot c_2} \Rightarrow \bar{c}_2 - c_2^2 = 2c_2$ olur. Yani $(3.2.32)$ durumu ortaya çıkar. O halde $c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken $c_2 \in \Im_1$ dir. Bu da c) nin ispatını tamamlar.

d) Bu kez $\frac{1}{2}\gamma_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ olsun. Bu durumda $(3.2.28)$ denklemi

$\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_2^*$ şekline dönüşür ve yine c_1 in üç alabileceği değer için üç durum ortaya çıkar. Eğer $c_1 = 1$ ise $\frac{1}{2}\gamma_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\bar{c}_2 - c_2^2}{2\cdot 1\cdot c_2}$ $\Rightarrow \bar{c}_2 - c_2^2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)c_2$, yani $(3.2.34)$ denklemi elde edilir. O halde $c_1 = 1$ iken $c_2 \in \Im_3$ dür. Eğer $c_1 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ise $\frac{1}{2}\gamma_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\bar{c}_2 - c_2^2}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot c_2}$

$\Rightarrow \bar{c}_2 - c_2^2 = 2c_2$, yani $(3.2.32)$ denklemi elde edilir. Bu durumda $c_1 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken $c_2 \in \Im_1$ dir. Eğer $c_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ise $\frac{1}{2}\gamma_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\bar{c}_2 - c_2^2}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot c_2}$

$\Rightarrow \bar{c}_2 - c_2^2 = \left(-1-\sqrt{3}i\right)c_2$, yani $(3.2.33)$ denklemi elde edilir. O halde $c_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken $c_2 \in \Im_2$ dir. Dolayısı ile d) şıkkı sağlanır.

e) $(3.2.26)$ durumunda ise $c_2 \in \Im_0$ olduğunda $\gamma_2 = 0$ olacağı için $(3.2.15)$ denklemi $\gamma_1\mathbf{G}_1^* = 2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$ şeklinde belirtilebilir. Bu denklemde $\mathbf{G}_1^*$ yalnız bırakılırsa

$$\mathbf{G}_1^* = 2\gamma_2^{-1}\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \qquad (3.2.28)'$$

denklemi elde edilir. Burada aslında $(3.2.26)$ daki 3. şartın gereksiz olduğu görülüyor. Teorem2.2.1. kullanılarak $(3.2.28)'$ denkleminin her iki tarafının karesi alınırsa $\left(\mathbf{G}_1^*\right)^2 = \mathbf{G}_1 = 4\gamma_2^{-2}\mathbf{G}_1^2\mathbf{G}_2^2$ yani,

$$\mathbf{G}_1 = 4\gamma_2^{-2}\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* \qquad (3.2.29)'$$

elde edilir. $(3.2.28)'$ denkleminin her iki tarafının eşlenik transpozesi alınırsa

$$\mathbf{G}_1 = 2\bar{\gamma}_1^{-1}\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* \qquad (3.2.30)'$$

denklemi bulunur. $(3.2.29)'$ ve $(3.2.30)'$ den $2\bar{\gamma}_1^{-1}\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* = 4\gamma_1^{-1}\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^*$ $\Rightarrow \left(2\bar{\gamma}_1^{-1} - 4\gamma_1^{-1}\right)\mathbf{G}_2^*\mathbf{G}_1^* = \mathbf{0}$ olur. $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ sıfırdan farklı olduğu için bu eşitlik $2\bar{\gamma}_1^{-1} - \left(2\gamma_1^{-1}\right)^2 = 0$ olmasını, $\bar{c} - c^2 = 0$ denkleminde olduğu gibi $2\gamma_1^{-1} \in \Im_0$ olmasını gerektirir. $(3.2.3)$ e göre $c \in \Im_0 \Leftrightarrow c^{-1} \in \Im_0$ gerçeğinden ve $(3.2.2)$ den

$$\frac{1}{2}\gamma_1 = \frac{\bar{c}_1 - c_1^2}{2c_1c_2} \qquad (3.2.31)'$$

elde edilir. Bunun anlamı $\frac{1}{2}\gamma_1 \in \Im_0$ dır. Bu yüzden çözüm $\left(c_2, \frac{1}{2}\gamma_1\right) \in \Im_0 \times \Im_0$ ın dokuz farklı durumda incelenebilir. Bunlar $\left(c_1, \frac{1}{2}\gamma_2\right) \in \Im_0 \times \Im_0$ için incelendi. O halde durum bir indis değişikliği ile aynıdır. Yani $\frac{1}{2}\gamma_1 = 1$ için

$$c_2 = 1 \Rightarrow \bar{c}_1 - c_1^2 = 2c_1 \qquad (3.2.32)'$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \bar{c}_1 - c_1^2 = \left(-1 - \sqrt{3}i\right)c_1 \qquad (3.2.33)'$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \bar{c}_1 - c_1^2 = \left(-1 + \sqrt{3}i\right)c_1 \qquad (3.2.34)'$$

olup $(3.2.32)'$ nü sağlayan c_1 ler, $c_1 \in \Im_1$; $(3.2.33)'$ nü sağlayanlar $c_1 \in \Im_2$ ve $(3.2.34)'$ nü sağlayanlar $c_1 \in \Im_3$ şartlarını sağlamaktadırlar. Ayrıca $\frac{1}{2}\gamma_1 = 1$ kabul edildiği için $(3.2.28)'$ denklemi $\mathbf{G}_1^* = \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$ ye dönüşür. Dolayısı ile e) nin şartları sağlanır.

f) Bu kez $\frac{1}{2}\gamma_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ seçilirse $(3.2.28)'$ denklemi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\mathbf{G}_1^*$ biçimine dönüşür. Burada $c_2 = 1$ ise c_1 için denklemler $(3.2.33)'$ ye denk gelir. Yani $c_2 = 1$ iken $c_1 \in \Im_2$ elde edilir. $c_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken c_1 denklemleri $(3.2.34)'$ ne dönüşür. Yani $c_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken $c_1 \in \Im_3$ dür. Son olarak $c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken c_1 denklemleri $(3.2.32)'$ durumuna karşılık gelir. O halde $c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iken $c_1 \in \Im_1$ bulunur. Bu da f) nin ispatını tamamlar.

g) Son olarak $\frac{1}{2}\gamma_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ de olabilir. Bu durumda $(3.2.28)'$ denklemi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{G}_1^*$ şekline dönüşür ve yine c_2 nin üç alabileceği değer için üç durum ortaya çıkar. Eğer $c_2 = 1$ ise c_1 için denklemler $(3.2.34)'$ denklemleri olur. O halde $c_2 = 1$ iken $c_1 \in \Im_3$ dür. $c_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ise c_1 denklemleri $(3.2.32)'$ denklemleri ile çakışır. Yani $c_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ise $c_1 \in \Im_1$ olur. Eğer $c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ise o zaman c_1, $(3.2.33)'$ denklemlerine sahiptir. Yani $c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ise $c_1 \in \Im_2$ dir. O halde g) şıkkı da sağlanmıştır.

h) Bundan sonra $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olduğu durum için kontrol edilmesi gereken yalnızca $(3.2.27)$ durumu kalır. Teorem2.2.1. ve $(3.2.27)$ denklemi göz önüne alınıp $(3.2.15)$ denklemi soldan $\gamma_1\mathbf{G}_1^*$ ve sağdan $\gamma_2\mathbf{G}_2^*$ ile çarpılırsa sırası ile

$$\gamma_1\mathbf{G}_1^*\gamma_1\mathbf{G}_1^* + \gamma_1\mathbf{G}_1^*\gamma_2\mathbf{G}_2^* = \gamma_1\mathbf{G}_1^* 2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \;\Rightarrow \gamma_1^2\mathbf{G}_1 + \gamma_1\gamma_2\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2^* = 2\gamma_1\gamma_2$$

ve

$$\gamma_1\mathbf{G}_1^*\gamma_2\mathbf{G}_2^* + \gamma_2\mathbf{G}_2^*\gamma_1\mathbf{G}_2^* = 2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\gamma_2\mathbf{G}_2^* \;\Rightarrow \gamma_1^2\mathbf{G}_1 + \gamma_1\gamma_2\mathbf{G}_1^*\mathbf{G}_2^* + \gamma_2^2\mathbf{G}_2 = 2\gamma_2\gamma_2$$

denklemleri elde edilir. Bu iki eşitliğin farkı alınırsa

$$\left(\gamma_1^2 + 2\gamma_2\right)\mathbf{G}_1 = \left(\gamma_2^2 + 2\gamma_1\right)\mathbf{G}_2 \qquad (3.2.35)$$

bulunur. $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ sıfırdan farklı kabul edildiği için eğer $\gamma_1^2+2\gamma_2$ veya $\gamma_2^2+2\gamma_1$ denklemlerinden herhangi biri sıfır ise diğeri de sıfır olmak zorundadır.

$$\gamma_1^2+2\gamma_2=0 \text{ ve } \gamma_2^2+2\gamma_1=0 \tag{3.2.36}$$

$(3.2.36)$ dan $\gamma_1^2+2\gamma_2=\gamma_2^2+2\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1^2-\gamma_2^2=2(\gamma_1-\gamma_2)$
$\Rightarrow(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1+\gamma_2)=2(\gamma_1-\gamma_2)$ yazılabilir. Burada iki farklı durum vardır.

Eğer $\gamma_1-\gamma_2=0$ ise $(\gamma_1,\gamma_2)=(0,0)$ veya $(\gamma_1,\gamma_2)=(-2,-2)$ dır.

Eğer $\gamma_1-\gamma_2\neq 0$ ise $(\gamma_1,\gamma_2)=(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i)$ veya $(\gamma_1,\gamma_2)=(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i)$ dır.

O halde $(3.2.36)$ denklemlerinin her ikisinin de sıfır olduğu durumda dört olası durum ($\gamma_1=0$ ve $\gamma_2=0$; $\gamma_1=-2$, $\gamma_2=-2$; $\gamma_1=1-\sqrt{3}i$, $\gamma_2=1+\sqrt{3}i$; $\gamma_1=1+\sqrt{3}i$, $\gamma_2=1-\sqrt{3}i$) vardır. Bu durumlardan $\gamma_1=0$ ve $\gamma_2=0$ olduğu durum zaten daha önce incelenmişti. $\gamma_1=-2$, $\gamma_2=-2$ olduğu durumda ise $(3.2.15)$ den $-2\mathbf{G}_1^*-2\mathbf{G}_2^*=2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \Rightarrow \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2=-(\mathbf{G}_1^*+\mathbf{G}_2^*)$ elde edilir. Ayrıca γ_1 ve γ_2 nin aldığı değerler, $(3.2.2)$ için düşünüldüğünde;

$$\frac{\overline{c}_1-c_1^2}{c_1c_2}=\gamma_1 \Rightarrow \overline{c}_1-c_2^2=-2c_1c_2 \tag{3.2.37}$$

ve

$$\frac{\overline{c}_2-c_2^2}{c_1c_2}=\gamma_2 \Rightarrow \overline{c}_2-c_2^2=-2c_1c_2 \tag{3.2.38}$$

yazılabilir. Dolayısı ile $(3.2.37)$ ve $(3.2.38)$ den $\overline{c}_1-c_2^2=-2c_1c_2=\overline{c}_2-c_2^2$ elde edilir. h) şıkkının ispatı tamamlanır.

i) $(3.2.36)$durumlarından eğer $\gamma_1 = 1-\sqrt{3}i$ ve $\gamma_2 = 1+\sqrt{3}i$ olduğu duruma bakılırsa; $\gamma_1 = 1-\sqrt{3}i$ için $(3.2.2)$ den

$$\frac{\overline{c}_1 - c_1^2}{c_1 c_2} = 1-\sqrt{3}i \qquad (3.2.39)$$

olur. Buradan

$$(1+\sqrt{3}i)\overline{c}_1 - c_1^2 = 4c_1c_2 \qquad (3.2.40)$$

elde edilir. Bunun yanında $\gamma_2 = 1+\sqrt{3}i$ için $(3.2.2)$ den

$$1+\sqrt{3}i = \frac{\overline{c}_2 - c_2^2}{c_1 c_2} \qquad (3.2.41)$$

olur. Buradan da

$$(1-\sqrt{3}i)(\overline{c}_2 - c_2^2) = 4c_1c_2 \qquad (3.2.42)$$

bulunur. $(3.2.40)$ ve $(3.2.42)$ den

$$1+\sqrt{3}i(\overline{c}_1 - c_1^2) = 4c_1c_2 = (1-\sqrt{3}i)(\overline{c}_2 - c_2^2) \qquad (3.2.43)$$

yazılabilir. Ayrıca $(3.2.15)$ de, $\gamma_1 = 1-\sqrt{3}i$ ve $\gamma_2 = 1+\sqrt{3}i$ değerleri yerine yazılırsa
$(1-\sqrt{3}i)\mathbf{G}_1^* + (1+\sqrt{3}i)\mathbf{G}_2^* = 2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \Rightarrow$

$$\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\mathbf{G}_1^* + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\mathbf{G}_2^* \qquad (3.2.44)$$

elde edilir. $(3.2.43)$ ve $(3.2.44)$ i) şıkkının ispatını tamamlar.

j) $(3.2.36)$ nın son durumu olarak $\gamma_1 = 1+\sqrt{3}i$ ve $\gamma_2 = 1-\sqrt{3}i$ değerleri $(3.2.15)$ de yazılırsa $(1+\sqrt{3}i)\mathbf{G}_1^* + (1-\sqrt{3}i)\mathbf{G}_2^* = 2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$ olur. Buradan

$$\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\mathbf{G}_1^* + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\mathbf{G}_2^* \tag{3.2.45}$$

elde edilir. $(3.2.2)$ den $\gamma_1 = 1+\sqrt{3}i$ olması kullanılırsa $\dfrac{\overline{c}_1 - c_1^2}{c_1 c_2} = 1+\sqrt{3}i$ olur. Buradan

$$(1-\sqrt{3}i)(\overline{c}_1 - c_1^2) = 4c_1c_2 \tag{3.2.46}$$

bulunur. $(3.2.2)$ den $\gamma_2 = 1-\sqrt{3}i$ olması kullanılırsa $\dfrac{\overline{c}_2 - c_2^2}{c_1 c_2} = 1-\sqrt{3}i$ olur. Buradan

$$(1+\sqrt{3}i)(\overline{c}_2 - c_2^2) = 4c_1c_2 \tag{3.2.47}$$

elde edilir. $(3.2.45)$, $(3.2.46)$, $(3.2.47)$ den j) nin sağlandığı görülür.

k) h), i) ve j) nin çözümünde $(3.2.35)$ denklemlerinde $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ sıfırdan farklı kabul edildiğinde $(3.2.36)$ durumu ortaya çıktı. $(3.2.36)$ durumu dışında bir de $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 \neq 0$ ve $\gamma_2^2 + 2\gamma_1 \neq 0$ olduğu durum vardır.

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_1^2 + 2\gamma_2}{\gamma_2^2 + 2\gamma_1} \tag{3.2.48}$$

şeklinde tanımlandığında $(3.2.35)$ denklemi

$$\mathbf{G}_2 = \gamma_{12}\mathbf{G}_1 \tag{3.2.49}$$

halini alır. Dolayısı ile $\Re(\mathbf{G}_1) = \Re(\mathbf{G}_2)$ dir . Bu yüzden $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^* = \mathbf{G}_1^3$ ve $\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^* = \mathbf{G}_2^3$ projektörleri özdeş olur. Yani

$$\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^* = \mathbf{G}_1^3 = \mathbf{G}_2^3 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^* \tag{3.2.50}$$

dir. (3.2.49) da her iki tarafın küpü alınırsa $\mathbf{G}_2^3 = \gamma_{12}^3\mathbf{G}_1^3$ olur. (3.2.50) den $\mathbf{G}_1^3 = \gamma_{12}^3\mathbf{G}_1^3 \Rightarrow \mathbf{G}_1^3 - \gamma_{12}^3\mathbf{G}_1^3 = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \mathbf{G}_1^3(\gamma_{12}^3 - 1) = \mathbf{0} \tag{3.2.51}$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{G}_1 \neq \mathbf{0}$ olduğu için $(\gamma_{12}^3 - 1) = 0$ olur. Buradan $\gamma_{12} = 1$ ve $\gamma_{12} = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$ kökleri elde edilir. $\gamma_{12} = 1$ olması durumunda (3.2.49) denkleminden $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1$ bulunur. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $\gamma_{12} = 1$ olamaz. Eğer $\gamma_{12} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ olursa, (3.2.48) denklemi $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\gamma_2^2 + 2\gamma_1)$ şekline dönüşür. Eğer $\gamma_{12} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ise (3.2.48) denklemi $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\gamma_2^2 + 2\gamma_2)$ biçiminde yazılabilir. (3.2.15) denklemi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$ yalnız bırakılınca $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1\mathbf{G}_1^* + \gamma_2\mathbf{G}_2^*)$ şeklinde yazılabileceği için, k) şıkkının da şartları sağlanmış olur.

II) (3.2.2) denklemi (3.2.7) denkleminde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$(\bar{c}_1 - c_1^2)\mathbf{G}_1^* + (\bar{c}_2 - c_2^2)\mathbf{G}_2^* = c_1^2c_2^2(\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1) \tag{3.2.52}$$

elde edilir. (3.2.2), bu kez (3.2.16) da yerine yazılırsa $\left(\frac{\bar{c}_1 - c_1^2}{c_1c_2}\right)\cdot\left(\frac{\bar{c}_2 - c_2^2}{c_1c_2}\right) = 1$

$$\left(\bar{c}_1 - c_1^2\right)\cdot\left(\bar{c}_2 - c_2^2\right) = c_1^2 c_2^2 \qquad (3.2.53)$$

elde edilir. (3.2.52) ve (3.2.53) den II) nın sağlandığı görülür. ∎

(3.2.3) den anlaşılacağı üzere Teorem3.2.1. in I) kısmındaki a) şıkkı Teorem2.5.1. i genelleştirilmiş projektörler için kapsar. Benzer olarak Teorem3.2.1. in yine I) kısmındaki b) şıkkı da Teorem2.5.3. ü genelleştirilmiş projektörler için kapsar. c_1 ve c_2 reel sayılara kısıtlandığında, problemin çözümlerinin nasıl hatırı sayılır miktarda azaldığı ilgi çekicidir.

Sonuç3.3.2. c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ sayıları sıfırdan farklı $(c_1, c_2 \neq 0)$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ genelleştirilmiş projektörleri sıfırdan ve birbirlerinden farklı $((\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \neq \mathbf{0})\text{ve}(\mathbf{G}_1 \neq \mathbf{G}_2))$ olsunlar. $\mathbf{G} = c_1\mathbf{G}_1 + c_2\mathbf{G}_2$ lineer kombinasyonunun bir genelleştirilmiş projektör olmasının gerek ve yeter koşulu aşağıdakilerden herhangi birinin sağlanmasıdır:

a) $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$ ifadesi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{0} = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olduğunda sağlanır;

b) $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$ ifadesi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2^* = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olduğunda sağlanır;

c) $\mathbf{G} = -\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$ ifadesi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1^* = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olduğunda sağlanır;

d) $\mathbf{G} = -\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$ ifadesi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = -\left(\mathbf{G}_1^* + \mathbf{G}_2^*\right) = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ olduğunda sağlanır;

e) Herhangi $c \in \mathbb{R}/\{0,1\}$ için $\mathbf{G} = c\mathbf{G}_1 + (1-c)\mathbf{G}_2$ ifadesi $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \neq \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1^* + \mathbf{G}_2^*$ olduğunda sağlanır. Burada ikinci şart $(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2)^2 = \mathbf{0}$ olmasına denktir.

İspat:a)-c) şıklarının ispatı; Teorem3.2.1. in I) kısmının a) şıkkının koşullarını sağlayan yegane reel sayı ikilisinin $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$, olması, b) ve e) şıklarına karşılık gelen yegane reel sayı ikililerinin $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ ve $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ olması ve c), d), f) ve g) şıklarında içerilen koşulları gerçekleyen reel sayı ikililerinin olmaması gerçeğinden görülür.

Bu sonucun d) şıkkı Teorem3.2.1 in I) kısmının h) şıkkındaki denklemlerdeki $\bar{c}_1$ ve $\bar{c}_2$ sırasıyla c_1 ve c_2 ile yer değiştirildiğinde $\bar{c}_1 - c_1^2 = -2c_1c_2 = \bar{c}_2 - c_2^2$

$$\Rightarrow c_1 - c_1^2 = -2c_1c_2 = c_2 - c_2^2 \tag{3.2.54}$$

elde edilir. $(3.2.54)$ den $c_1(1-c_1) = -2c_1c_2$, $c_1 \neq 0$ olduğundan

$$c_1 - 2c_2 = 1 \tag{3.2.55}$$

elde edilir. Yine $(3.2.54)$ ve $c_1 \neq 0$ olduğundan

$$c_2 - 2c_1 = 1 \tag{3.2.56}$$

bulunur. $(3.2.55)$ ve $(3.2.56)$ denklemlerinden $c_1 = -1$ ve $c_2 = -1$ yegane çözümü elde edilir. Bu da d) şıkkının ispatını tamamlar.

Teorem3.2.1. I) kısmının i) şıkkı incelenecek olursa

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(c_1 - c_1^2\right) = 4c_1c_2 = \left(1-\sqrt{3}i\right)\left(c_2 - c_2^2\right) \tag{3.2.57}$$

denkleminde c_1 ve c_2 reel sayı olabilmesinin tek yolu $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olmasıdır. Bu ise $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ kabulü ile çeliştiği için c_1 ve c_2 bu şıkta reel olamayacaktır. Aynı durum j) şıkkı için de geçerlidir. Teorem3.2.1. in k) şıkkındaki durum ise $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\gamma_2^2 + 2\gamma_1\right)$ ve $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\gamma_2^2 + 2\gamma_1\right)$ denklemlerinin γ_1 ve γ_2 reel olduğunda ($c_1, c_2 \in \mathrm{IR}$ olmasının direk bir sonucudur) sağlanması için bu denklemlerin sağ taraflarının reel olması gerekir. Bu durumda $(3.2.36)$ denklemleri yani $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 = 0$ ve $\gamma_2^2 + 2\gamma_1 = 0$ elde edilir. Bu da zaten k) nın $\gamma_1^2 + 2\gamma_2 \neq 0$ ve $\gamma_2^2 + 2\gamma_1 \neq 0$ kabulü ile çelişir. l) şıkkından $\left(c_1 - c_1^2\right)\left(c_2 - c_2^2\right) = c_1^2c_2^2 \quad \Rightarrow c_1(1-c_1)\cdot c_2(1-c_2) - c_1^2c_2^2 = 0$ olur. $c_1, c_2 \neq 0$ olduğundan $(1-c_1)(1-c_2) - c_1c_2 = 0 \quad \Rightarrow 1 - c_2 - c_1 + c_1c_2 - c_1c_2 = 0 \quad \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$ elde edilir. Bu da sonucun e) şıkkının ispatını tamamlar. ■

Açıktır ki eğer bu bölümde düşünülen problem $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ nin konveks kombinasyonlarına (yani, $\mathbf{G} = c_1\mathbf{G}_1 + c_2\mathbf{G}_2$ ve $c_1 + c_2 = 1$) kısıtlanırsa o zaman yalnızca Sonuç3.2.2. nin e) şıkkı göz önüne alınabilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçta içerilmektedir.

Sonuç3.2.3. Herhangi bir $c \in (0,1)$ sayısı için, $\mathbf{G} = c\mathbf{G}_1 + (1-c)\mathbf{G}_2$ sıfırdan ve birbirlerinden farklı $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{G}_1 \neq \mathbf{G}_2)$ $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ genelleştirilmiş projektörlerinin bir konveks kombinasyonunun da bir genelleştirilmiş projektör olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \neq \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1^* + \mathbf{G}_2^*$ olmasıdır. Burada ikinci şart $(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2)^2 = \mathbf{0}$ ifadesine denktir.

BÖLÜM4. TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Bu çalışmanın ikinci bölümünde normal (genelleştirilmiş projektörler) ve EP (hipergenelleştirilmiş projektörler) olan kuadripotent matrisler incelendi. Ayrıca genel anlamda kuadripotent matrislerin sınıfını veya daha genellemesi olarak $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^5$ i sağlayan matrisler sınıfını da ele almak mümkündür. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^4 \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{\#}$ ve $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^5 \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^d$ olduğunu görmek kolaydır. Bununla birlikte bu sınıflar için elde edilen sonuçlar aşağıdaki gösterimden de görüldüğü gibi daha karmaşıktır. Schur'un üniter üçgenleştirme teoremine göre herhangi bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matrisi üniter olarak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \tag{4.1.1}$$

matrisine denktir. Burada $\mathbf{U} \in \mathbb{C}_{r\times r}$ matrisi, köşegeninde $\mathbf{A}$ nın r tane nontrivial özdeğerlerini (yalnızca sıfır olmayan özdeğerlerini) içeren nonsinguler üst üçgensel matristir. $\mathbf{N}$ de köşegeni üzerinde yalnızca sıfırlar bulunan nilpotent üst üçgensel matristir.

Bu durumda $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^5 \Leftrightarrow \mathbf{U}^2 = \mathbf{U}^5$, yani $\mathbf{U}^3 = \mathbf{I}_r$ ve $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ olduğunu göstermek kolaydır. İkinci özdeşlik $rk(\mathbf{A}^2) = rk(\mathbf{A}^3)$ ün, $rk(\mathbf{N}^2) = rk(\mathbf{N}^3)$ e denk olmasından görülür. $\mathbf{N}$ nilpotent olduğundan bu da $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ a götürür.

Buradan kuadripotent matrislerin sınıfı $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ koymak sureti ile elde edilir. Hipergenelleştirilmiş projektörler sınıfı buna ek olarak $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ koymak sureti ile ve genelleştirilmiş projektörler sınıfı da buna ek olarak $\mathbf{U}$ daki köşegen üzerinde olmayan tüm elemanları sıfır almak sureti ile elde eldir. Bu yöntemin aynı zamanda

Teorem2.2.1. ve Teorem2.3.1. den genelleştirilmiş ve hipergenelleştirilmiş projektörlerin kanonik formlarını da vereceğine dikkat edilmelidir.

EP olmayan $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^5$ matrisleri göz önüne alındığında durum özellikle de "kısmi sıralılar" ile ilgili halde daha zordur. Çünkü blok üçgen yapılarda çok fazla önkoşul altında işlemler yürütülebilir. Aksi taktirde işlemler çok fazla değişime uğrar. Bu manada da detaylı araştırmalar yapılabilir ve sözü geçen kavramlarla ilgili farklı özellikler ortaya konulabilir. Ancak yukarıda belirttiğimiz gibi bu yapısal olarak çok daha karmaşık olacaktır.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde ise c_1 ve c_2 kompleks sayıları sıfırdan farklı ve $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ genelleştirilmiş projektörleri sıfırdan ve birbirinden farklı olmak üzere $\mathbf{G} = c_1\mathbf{G}_1 + c_2\mathbf{G}_2$ şeklindeki lineer kombinasyonun da genelleştirilmiş projektör olma problemi incelendi. Bununla ilgili olarak $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ hipergenelleştirilmiş projektörler olarak alındığında bu lineer kombinasyonun hipergenelleştirilmiş projektör olma problemi incelenebilir.

Yani sonuç olarak ikinci ve üçüncü bölümde ana konu olarak ele alınan anlamda çalışmalar yapmak mümkündür. Örneğin, hipergenelleştirilmiş projektörler, EP matrisleri vs. nin lineer kombinasyonları üzerinde durulabilir ve bu kombinasyonların aynı özelliklere haiz olmanın getireceği ve kobinasyonun içerdiği matrisler üzerine gelecek kısıtlamalar altında ikinci bölümde incelenen özelliklerin ne dereceye kadar gerçekleneceği, yani ne gibi eksilerin ve artıların olabileceği incelemeye değerdir.

KAYNAKLAR

[1] BAKSALARY, J. K., PUKELSHEIM, F. and STYAN, G. P. H., Some properties of matrix partial orderings, Linear Algebra Appl., 119: 57-87 (1989).

[2] BAKSALARY, J. K. and BAKSALARY, O. M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 321: 3-7 (2000).

[3] BAKSALARY, J. K. and BAKSALARY, O. M., On linear combinations of generalized projectors, Linear Algebra Appl., xxx(2003)xxx-xxx (article in press).

[4] BEN-ISRAEL, A. and GREVILLE, T.N.E., Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley, New York, 1974.

[5] BRONSON, R., Schaum's outlines of theory and problems of matrix operations, The United States of America, 1989.

[6] CAMPBELL S. L. and MEYER, C. D., Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London, 1979.

[7] ERDELYI, I., Normal partial isometries closed under multiplication on unitary spaces, Lincei Rend. Sci. Fis. Mat. e Nat. XLIV: 186-190 (1968).

[8] GRAYBİLL, F. A., Introduction to matrices with aplications in statistics, Wadsworth Publishing Company inc., California, 1969.

[9] GROB, J. and TRENKLER, G., Generalized and hypergeneralized projectors, Linear Algebra Appl., 264: 463-474 (1997).

[10] GROB, J., HAUKE, J. and MARKIEWICZ, A., Characterizations of partial orderings via a new preordering, Linear Algebra Appl., submitted for publication.

[11] HALMOS, P. R., Finite-Dimensional Vector Spaces, Van Nostrand, Princeton, 1958.

[12] HARTWIG, R. E. and SPINDELBOCK, K., Matrices for which $\mathbf{A}^*$ and $\mathbf{A}^+$ commute, Linear and Multilinear Algebra, 12:241-256 (1984).

[13] HARTWIG, R. E. and STYAN, G. P. H., On some characterizations of the "star" partial ordering for matrices and rank subtractivity, Linear Algebra Appl., 82:145-161 (1986).

[14] HARTWIG, R. E. and STYAN, G. P. H., Partially ordered idempotent matrices, in Proseding of the Second International Tampere Conference in Statistics (T. Pukkila and S. Puntanen, Eds.), pp. 361-383 (1987).

[15] HORN R. A. and JOHNSON, C. R., Matrix Analysis, Cambridge U. P., Cambridge, 1985.

[16] MIRSKY, L., An Introduction to Linear Algebra, Clarendon Press, Oxford, 1955 (Reprint:Dover, New York, 1990).

[17] RAO, C. R. and MITRA, S. K., Generalized inverse of matrices and its Applications, Wiley, New York, 1971.

[18] SEARLE, R. S., Matrix Algebra Useful For Statistics, Canada, 1982

[19] SEBER, G. A. F., Linear regression analysis, John Wiley and sons, inc., New York, 1977.

[20] STYAN, G. P. H. and HARTWIG, R. E., The pyramid decomposition and singular values, unpublished report, 1986.

[21] WERNER, H. J., A closed form formula for the intersection of two complex matrices under the star order, Linear Algebra Appl. 140:13-30 (1990).

ÖZGEÇMİŞ

Murat SARDUVAN, 05.06.1980 tarihinde Sakarya'nın Kaynarca ilçesinde doğdu. İlkokulu Kaynarca Merkez İlkokulu'nda 1991 de, ortaokul ve liseyi Kaynarca Lisesin de 1997 yılında tamamladı. Aynı yıl Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. Buradan 2001 de mezun oldu. Yine aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans programına kaydoldu. Eylül 2001 den Aralık 2002 tarihine kadar Kaynarca Çok Programlı Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalıştı. Aralık 2002 de Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı ve halen Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.