

153100

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa ERÖZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK  
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

Aralık 2004

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa ERÖZ

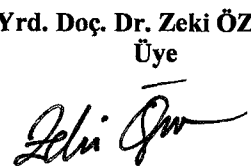
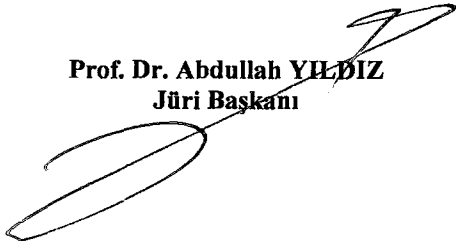
Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 04/01/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah YILMAZ  
Jüri Başkanı

Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI  
Üye

Yrd. Doç. Dr. Zeki ÖZCAN  
Üye



## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma hazırlanırken fikir ve desteklerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Abdullah YILDIZ'a Őükranlarımı sunarım. Çeşitli aŐamalarda yardımlarına baŐvurduğum değerli hocalarıma ve desteklerini her zaman sürdüren değerli eŐim Ahu ERÖZ'e teŐekkürlerimi sunarım.

Mustafa ERÖZ  
Sakarya, 2004



## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	x
TABLolar LİSTESİ.....	xii
ÖZET.....	xiii
SUMMARY.....	xiv
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN VARYASYONEL FORMÜLASYONU.....	4
2.1. Yaklaşımda Varyasyonel Metodlar.....	6
2.1.1. Giriş.....	6
2.1.2. Ritz metodu.....	6
2.1.3. Ağırlıklı kalanlar metodu.....	8
2.1.3.1. Galerkin metodu.....	10
2.1.3.2. En küçük kareler metodu.....	11
2.1.3.3. Kollokasyon metodu.....	11
2.1.3.4. Courant metodu.....	12
2.1.4. Zamana bağlı problemler.....	12
2.2. Bir Boyutlu Poisson Probleminin Varyasyonel Formülasyonu.....	16
2.2.1. Giriş.....	16
2.2.2. Dirichlet problemi.....	17
2.2.2.1. Klasik çözüm.....	17

2.2.2.2. Minimizasyon prensibi.....	17
2.2.2.1. Zayıf çözüm.....	19
2.2.3. Neumann problemi.....	22
2.2.3.1. Klasik çözüm.....	22
2.2.3.2. Minimizasyon prensibi.....	24
2.2.3.2.1. Minimizasyon prensibinin ifade edilmesi.	24
2.2.3.2.2. İspat.....	24
2.2.3.3. Zayıf çözüm.....	25
2.2.3.3.1. Zayıf çözümün ifade edilmesi.....	25
2.2.3.3.2. Temel ve doğal sınır koşulları.....	26
2.2.4. Homojen olmayan Dirichlet koşulları.....	27
2.2.4.1. Klasik çözüm.....	27
2.2.4.2. Minimizasyon prensibi.....	27
2.2.4.3. Zayıf çözüm.....	28
2.3. Bir Boyutlu Poisson Probleminin Ayrıklaştırılması: Formülasyon Safhası.....	28
2.3.1. Dirichlet problemi.....	28
2.3.1.1. Klasik çözüm.....	28
2.3.1.2. Minimizasyon prensibi.....	29
2.3.1.3. Zayıf çözüm.....	29
2.3.1.4. Genelleştirme.....	30
2.3.1.5. Regülerlik veya iyi tanımlılık.....	31
2.3.2. Neumann problemi.....	31
2.3.2.1. Klasik çözüm.....	31
2.3.2.2. Minimizasyon prensibi.....	32
2.3.2.3. Zayıf çözüm.....	32
2.3.2.4. Genelleştirme.....	33
2.3.3. Rayleigh-Ritz yaklaşımı.....	33
2.3.3.1. Düğüm yapısı.....	33
2.3.3.2. $X_h \subset X$ yaklaşım uzayı.....	34
2.3.3.3. Baz.....	35
2.3.3.4. İzdüşüm.....	36

2.3.3.5. J fonksiyonelinin kısıtlanması: $J _{x_h}$ .....	37
2.3.3.6. Minimizasyon.....	39
2.3.3.7. $J^R$ paraboloidi.....	41
2.3.3.8. İzdüşümün sonucu.....	42
2.3.4. Galerkin yaklaşımı.....	42
2.3.4.1. İzdüşüm.....	43
2.3.4.2. Varyasyon prensibi.....	44
2.3.4.3. Ağırlıklı kalanlar yöntemleri.....	46
2.3.5. Ayrık denklemler.....	47
2.3.5.1. $[A_h]$ matrisinin elemanları.....	47
2.3.5.2. $\{F_h\}$ sağ taraf yada yük vektörünün elemanları.....	49
2.3.6. Kütle matrisi.....	50
2.3.5.1. Kütle matrisinin tanımı ve uygulamaları.....	50
2.3.5.2. Kütle matrisinin özellikleri.....	51
2.4. Bir Boyutlu Poisson Probleminin Ayrıklaştırılması: Teori	
Safhası.....	52
2.4.1. Amaçlar.....	52
2.4.1.1. Önceden hata tespiti.....	52
2.4.1.2. Sonradan hata tespiti.....	52
2.4.2. İzdüşüm.....	53
2.4.3. Baz fonksiyonları.....	55
2.4.3.1. Polinom interpolasyonu.....	55
2.4.3.2. İnterpolasyon.....	57
2.4.4. Hata: enerji normu.....	60
2.4.4.1. Tanım.....	60
2.4.4.2. Diklik.....	60
2.4.4.3. Genel sınırlama.....	61
2.4.4.4. Özel bir sınırlama.....	63
2.4.5. Hata: $H^1$ normu.....	64
2.4.5.1. Kalan terimler.....	64
2.4.5.2. $H^1$ normu için genel sonuç.....	65
2.4.5.3. $H^1$ normu için özel bir sonuç.....	67

2.4.6. Hata: $L^2$ normu.....	67
2.4.6.1. $L^2$ normunun tanımı.....	67
2.4.6.2. $L^2$ normu için özel bir sonuç.....	67
2.4.7. Lineer fonksiyoneller.....	69
2.4.7.1. Lineer fonksiyoneller hakkında ön bilgi.....	69
2.4.7.2. Lineer fonksiyoneller için genel sonuç.....	70
2.4.7.3. Lineer fonksiyoneller için probleme bağlı sonuç.....	72
2.5. Bir Boyutlu Poisson Probleminin Ayrıklaştırılması: Uygulama	
Safhası.....	72
2.5.1. Prototip soru.....	73
2.5.1.1. Prototip soru için uzay ve baz.....	73
2.5.1.2. Prototip sorunun tanımı.....	73
2.5.1.3. Ayrık denklemler.....	74
2.5.2. Elemanlar ile ilgili nicelikler.....	75
2.5.2.1. Elemanlar için yerel tanımlar.....	75
2.5.2.2. Pilot eleman.....	75
2.5.2.3. Pilot eleman uzayı ve bazı.....	76
2.5.2.4. Lokal sertlik matrisi.....	77
2.5.2.5. Bir elemana ait yükler: sağ taraf vektörü.....	80
2.5.3. Birleştirme.....	82
2.5.3.1. Birleştirme fikri.....	82
2.5.3.2. Birleştirmenin algoritması.....	86
2.5.4. Sınır koşulları.....	88
2.5.4.1. Giriş.....	88
2.5.4.2. Homojen Dirichlet sınır koşulları.....	88
2.5.4.3. Homojen olmayan Dirichlet sınır koşulları.....	90
2.6. Bir Boyutlu Uzayda Çözülmüş Problemler.....	92

### BÖLÜM 3.

İKİ BOYUTLU PROBLEMLERİN SONLU ELEMAN ANALİZİ.....	98
3.1. Model Poisson Problemi.....	98
3.1.1. Model problemin klasik çözümü.....	98
3.1.2. Minimizasyon prensibi ve zayıf formülasyon.....	99

3.1.3. Fonksiyonellerin regüleriği.....	100
3.2. Sonlu Eleman Ayrıklaştırması.....	101
3.2.1. Üçgenleştirme.....	101
3.2.2. Sonlu eleman yaklaşımı.....	103
3.2.3. İzdüşüm.....	105
3.2.4. Ayrık denklemler.....	105
3.3. Teorik Analiz.....	108
3.3.1. Genel sonuçlar.....	108
3.3.2. Özel sonuçlar.....	109
3.4. İki Boyutlu Poisson Probleminin Ayrıklaştırılması: Uygulama Safhası.....	110
3.4.1. Prototip soru.....	111
3.4.1.1. Prototip soru için uzay ve baz.....	111
3.4.1.2. Prototip sorunun varyasyonel ifadesi.....	111
3.4.1.3. Ayrık denklemler.....	112
3.4.2. Elemanlar ile ilgili nicelikler.....	112
3.4.2.1. Elemanlar ile ilgili yerel tanımlar.....	112
3.4.2.2. Pilot eleman.....	113
3.4.2.3. Elemana ait sertlik matrisi. ....	114
3.4.2.4. Elemana ait sağ taraf vektörü.....	115
3.4.3. Birleştirme.....	116
3.4.3.1. $\theta(k, \alpha)$ dizisi.....	116
3.4.3.2. $[\hat{A}_h]$ matrisinin elde edilmesi için yöntem.....	116
3.4.3.3. $\{\hat{F}_h\}$ matrisinin elde edilmesi için yöntem.....	117
3.4.4. Sınır koşulları.....	117
3.4.4.1. Homojen Dirichlet sınır koşulları.....	117
3.5. $[A_h] \{u_h\} = \{F_h\}$ için Çözüm Yöntemleri.....	118
3.6. İki Boyutlu Uzayda Çözülmüş Problemler.....	119

## BÖLÜM 4.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	126
---------------------------	-----



KAYNAKLAR.....	127
ÖZGEÇMİŞ.....	128



## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

- $C(a,b)$  :  $(a,b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı
- $C^n(a,b)$  :  $(a,b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde n. mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı
- $C^\infty(a,b)$  :  $(a,b) \subset \mathbb{R}$  üzerinde bütün türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı
- $H^{-1}(a,b)$  :  $(a,b)$  aralığında sınırlı fonksiyonlar uzayı
- $H^1(a,b)$  :  $(a,b)$  aralığında kendisinin ve türevinin karelerinin Lebesgue anlamında integrali alınabilen fonksiyonlar uzayı
- $H_0^1(a,b)$  :  $H^1(a,b)$  uzayında, a ve b noktalarında sıfır değerini alan fonksiyonların oluşturduğu uzay
- $L^2(\Omega)$  : Karelerinin Lebesgue integrali alınabilen fonksiyonlar uzayı
- $W^{m,p}(\Omega)$  :  $= \left\{ v : \frac{d^j v}{dx^j} \in L^p(\Omega), j = 0,1,\dots,m \right\}$  Sobolev uzayı
- $a(\dots)$  : a bilinear formu
- $l(\dots)$  : l linear formu
- $\nabla^2$  : Laplasiyen operatörü
- S.P.T. : Simetrik pozitif tanımlı
- $\delta J_v(u)$  :  $J(u)$  fonksiyonelinin birinci varyasyonu
- $|\cdot|_{H(\Omega)}$  :  $= \left( \int_{\Omega} \left( \frac{d^m v}{dx^m} \right)^2 dx \right)^{1/2}$   $H^m(\Omega)$  uzayında yarı-norm
- $[A_h]$  : Global sertlik matrisi
- $\{F_h\}$  : Global sağ taraf yük vektörü
- $\{u_h\}$  : Sonlu eleman çözüm vektörü

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Dügüm yapısı.....	33
Şekil 2.2. $X_h$ uzayında örnek bir $v$ test fonksiyonu.....	35
Şekil 2.3. $J$ paraboloidini $X_h$ uzayında minimize eden $u_h$ fonksiyonu.....	37
Şekil 2.4. $n=2$ seçildiğinde $J$ paraboloidini minimize eden argüman.....	39
Şekil 2.5. Yaklaşım uzayının geometrik yorumu.....	44
Şekil 2.6. $\phi_i$ ve $d\phi_i/dx$ fonksiyonlarının grafiği.....	47
Şekil 2.7. $d\phi_i/dx$ türevlerinin elemanlara göre dağılımının grafiği.....	47
Şekil 2.8. İlk elemana ait baz fonksiyonunun ve türevinin grafiği.....	48
Şekil 2.9. ....	49
Şekil 2.10. $y$ 'nin $Z$ uzayı üzerindeki izdüşümü.....	54
Şekil 2.11. $X_h$ uzayında örnek bir $v$ test fonksiyonu.....	57
Şekil 2.12. Verilen bir $w \in X$ elemanı için $I_h w$ yaklaşım fonksiyonu.....	58
Şekil 2.13. $w$ fonksiyonu ile $I_h w$ yaklaşımı arasındaki farkın ve türevinin grafiği.....	60
Şekil 2.14. Hatanın test fonksiyonuna $a$ normuna göre dikliği.....	62
Şekil 2.15. Homojen olmayan Dirichlet koşulu için yaklaşım uzayı.....	73
Şekil 2.16. $T_h$ bölgesünün bir elemanı ve yerel düğüm noktaları.....	75
Şekil 2.17. Pilot eleman.....	76
Şekil 2.18. Pilot eleman ile bölgedeki bir eleman arasındaki dönüşümler...	76
Şekil 2.19. Pilot eleman baz fonksiyonları.....	77
Şekil 2.20. Baz fonksiyonlarının bir eleman üzerine kısıtlanması.....	77
Şekil 2.21. Bölgeden bir eleman ve pilot eleman üzerindeki baz fonksiyonları.....	79
Şekil 2.22. Baz fonksiyonlarının bir eleman üzerine kısıtlanması.....	81
Şekil 2.23. Bölgeden bir eleman ve pilot eleman üzerindeki baz fonksiyonları.....	81

Şekil 2.24. Bölgedeki baz fonksiyonları.....	82
Şekil 2.25. $\theta(k, \alpha)$ dönüşümü.....	86
Şekil 2.26. Homojen olmayan Dirichlet koşulu için baz fonksiyonları.....	88
Şekil 2.27. Homojen olmayan Dirichlet koşulu için yaklaşım fonksiyonu...	90
Şekil 2.28. ....	93
Şekil 3.1. Tanım bölgesi ve $T_h$ üçgenleştirilmesi.....	101
Şekil 3.2. Bölgeden bir üçgen eleman.....	103
Şekil 3.3. $\varphi_i$ baz fonksiyonunun dayanağı.....	104
Şekil 3.4. Düzgün bölge.....	106
Şekil 3.5. $\varphi_i$ baz fonksiyonlarının kısmi türevleri.....	107
Şekil 3.6. $\varphi_i$ baz fonksiyonlarının $x$ 'e göre kısmi türevi.....	107
Şekil 3.7. $\varphi_i$ baz fonksiyonlarının $y$ 'ye göre kısmi türevi.....	107
Şekil 3.8. Global matristeki $i$ . satırın sıfırdan farklı değerleri.....	108
Şekil 3.9. $T_h$ üçgenleştirilmesi.....	111
Şekil 3.10. Bölgeden bir elemanın yerel ve global düğüm numaraları.....	113
Şekil 3.11. ....	119
Şekil 3.12. ....	122

## TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1. ....	92
Tablo 2.2. ....	93
Tablo 2.3. ....	94
Tablo 2.4. ....	95
Tablo 2.5. ....	96
Tablo 2.6. ....	97
Tablo 3.1. ....	120
Tablo 3.2. ....	121
Tablo 3.3. ....	123
Tablo 3.4. ....	125

## ÖZET

Anahtar Kelimeler: Sonlu eleman, klasik çözüm, minimizasyon prensibi, zayıf çözüm, varyasyonel problem, eliptik problem.

Bu çalışmada, bir ve iki boyutlu uzaylarda sonlu eleman analizi yapılmıştır.

Öncelikle; bir boyutlu uzaylarda sonlu elemanlar yöntemi incelenmiştir. Yaklaşım teorisindeki varyasyonel metodlar incelenmiş, zamana bağlı problemler hakkında bilgi verilmiştir. Model örnek olarak Poisson problemi alınmıştır. Bir boyutlu uzayda Poisson probleminin varyasyonel formülasyonu yapılarak ayrık denklemler elde edilmiştir. Bununla birlikte, çeşitli normlarda hata analizi yapılmıştır. Bölüm sonunda çözülmüş problemler verilmiştir.

İkinci olarak; iki boyutlu uzaylarda sonlu elemanlar yöntemi incelenmiştir. sonlu eleman ayrıklaştırması esnasında elemanlara ait ayrık denklemler oluşturulmuştur. Elemanlara ait bu niceliklerden problemin global denklem sistemi elde edilmiştir. Sınır koşullarına bağlı olarak denklemlerde ne gibi değişiklikler meydana geleceği incelenmiştir. Bölüm sonunda çözümlü örnekler verilmiştir.

## **FINITE ELEMENT METHOD**

### **SUMMARY**

**Keywords:** Finite element, strong formulation, minimization principle, weak solution, variational problem, elliptic problem.

In this work, which is called “Finite Element Method”, analysis of finite element method in one and two dimensional space is done.

First; finite element method in one dimensional space is examined. Variational methods in approximation theory is examined and time dependent problems are studied. Moreover; having the variational formulation of the Poisson problem, we get the discrete equations. Also, error analysis in various norms is done. At the end of this section, some solved problems are given.

Second; finite element method in two dimensional space is examined. During finite element discretization, we get local discrete equations belonging to an individual element. By assembly procedure global equation system is attained. According to boundary conditions the difference in the equations is examined. At the end of this section, some solved problems in two dimensional space are given.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematik ile doğa ve mühendislik bilimleri arasındaki ilişkiler matematik modelleme ve bunların çözüm yöntemleri vasıtasıyla kurulur. Matematik modellerin temel aldıkları fiziksel hadiseler ile uyumluluğu önemlidir. Matematik modeller genellikle diferansiyel denklemler ile ilgili sınır değer problemleri, fark denklemleri, integral denklemleri gibi olabilirler. Bu modellerin fiziksel modellere en uygun biçimi varyasyonel problemlerdir. Çünkü; giriş verileri üzerine konulan süreklilik ve diferansiyellenebilirlik koşulları açısından, varyasyonel problem kendi özdeşi olan sınır değer problemi ile karşılaştırıldığında, daha geniş ve uygulamalar açısından daha önemli bir problemler sınıfına hitap eder. Matematik modelleme işleminin, modelin varyasyonel problem olarak ifade edilmesinden sonraki aşaması, bilgisayar aracılığı ile çözülmesi hedeflenen ayrık modelin oluşturulmasıdır. Doğadaki olaylar, fizik kurallarının yardımıyla farklı niceliklere bağlı olarak matematiksel anlamda tarif edilebilirler. Deniz yada atmosferdeki kirlilik oranlarının tespit edilmesi, hava durumu tahminleri için rüzgar ve fırtınaların mekaniklerinin incelenmesi, bir basınç kabındaki gerilim dağılımı bunlara yalnızca birkaç örnektir. Bu problemleri ifade eden denklemlerin analizdeki klasik yöntemler ile çözümleri mümkün olmayabilir. Bu gibi durumlarda, analizdeki yaklaşım metodları çözümün bulunmasında alternatif yollar sağlar. Bunlar arasında, sonlu farklar metodu, Ritz ve Galerkin metodları gibi varyasyonel metodlar daha fazla kullanılır. Sonlu elemanlar yöntemi, yaklaşım fonksiyonlarının kurulmasında sistematik bir yöntem sağladığı için varyasyonel metodlardaki zorlukların üstesinden gelmektedir. Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili matematik modellerin ayrık benzeşiklerinin oluşturulması ve elde edilen ayrık problemin bilgisayarda çözümlenmesi açısından en kapsamlı ve evrensel yöntem, sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden farkı, sınır değer problemini değil buna karşılık gelen varyasyonel problemi temel almasıdır. Bu nedenle sonlu elemanlar yöntemi bilimsel ve teknolojik problemlerin sayısal çözümlenmesinde en çok kullanılan yöntemlerin başında gelmektedir.



Sonlu elemanlar yöntemini diğer metodlara göre üstün kılan iki basit özelliği vardır. Birincisi; sorunun karmaşık geometrik tanım bölgesini basit alt bölgeler ile temsil edilmesini sağlayan sonlu elemanlardır. İkincisi; sürekli herhangi fonksiyonun cebirsel polinomların lineer kombinasyonu biçiminde yazılabileceği gerçeği kullanılarak her bir sonlu eleman üzerinde yaklaşım fonksiyonlarının çıkarılmasıdır. Böylece, sonlu elemanlar yöntemi varyasyonel metodların parçalı bir uygulaması olarak yorumlanabilir. Burada kullanılan yaklaşım fonksiyonları cebirsel polinomlardır. Sorunun tanım kümesinin sınırları ve içinden seçilmiş sonlu sayıda noktalar düğüm noktaları olmak üzere; belirlenmiş parametreler, çözümün bu düğüm noktalarındaki değerlerini temsil ederler. İnterpolasyon teorisinden bilindiği üzere; interpolate edici bir polinomun mertebesi yada derecesi elemandaki düğüm noktası sayısına bağlıdır.

Diferansiyel denklemlerin varyasyonel çözümünde iki basit adım vardır:

1. Verilen diferansiyel denklemi varyasyonel forma çevirmek.
2. Ritz, Galerkin gibi bir varyasyonel yöntem kullanarak yaklaşık çözümü belirlemek.

Verilen bir diferansiyel denklemde, kullanılan test fonksiyonu ile bağımlı değişken arasında diferansiyel aktarımı yapılarak, denklemi denk bir integral yapıya getirme işlemine zayıf formülasyon denir. Lineer problemlerin birçoğunda zayıf formülasyon, mekanik problemlerinde toplam potansiyel enerji olarak adlandırılan  $J(u)$  kuadratik fonksiyonelinin minimumlaştırılması ile birbirine denktir. Adi bir fonksiyonun minimumunda olduğu gibi, kuadratik bir fonksiyonelin bağımlı değişkene bağlı birinci türevi sıfır olmalıdır. Bazen bu birinci türeve birinci varyasyon adı da verilir. Varyasyonel analizden bilindiği üzere, minimize eden fonksiyon diferansiyel denklemin klasik çözümüdür. Verilen bir sınır değer probleminin klasik çözümü yerine onun minimizasyon formülasyonu veya daha ileri gidilerek zayıf formülasyonu kurulur. Bu işlem  $X$  çözüm uzayının, lineer ve bilinear formların belirlenmesidir. Sonlu eleman yönteminin başlangıç noktası burasıdır. Bu formülasyonlar ile sınır şartları da çözüme dahil edilmiş olurlar. Burada; esas sınır

koşulları  $X$  çözüm uzayına, doğal sınır koşulları da lineer ve bilineer formlara yansıtılarak çözüme etki ettirilir.

Sonlu elemanlar yönteminin matematiksel yorumu fiziksel yorumun cevapsız bıraktığı yakınsama, hata sınırları, baz fonksiyonlarının gereksinimleri gibi sorulara cevap arar. Ayrıca; matematiksel yorum, elektromanyetik, ısı transferi ve benzeri problemlerde yapıları görsel olarak algılanamayacak soruları da cevaplar.

Sonlu elemanlar yönteminin kısaca gelişimine bakıldığında aşağıdaki ilerleyiş görülecektir. 1941'de Hrenikoff tarafından düzlemsel bir elastik ortam, çubuk ve kirişlerin bir kümesi olarak gösterildi. Bilinmeyen fonksiyonlara yaklaşım için parçalı sürekli fonksiyonların bir alt tanım kümesinde kullanımı Courant'ın çalışmasında (1943) görülmüştür. Courant, St.Venant bükülme probleminde minimum potansiyel enerji prensibi ve üçgen elemanların birleştirilmesini kullanmıştır. Bu çalışmalarda da görülmesine karşın, sonlu elemanlar yönteminin sunulması Argyris ve Kelsey(1960) ile Turner, Clough, Martin ve Topp(1956)'a atfedilir. Bununla birlikte, "sonlu eleman" terimi ilk kez 1960'ta Clough tarafından kullanılmıştır.

## BÖLÜM 2. SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN VARYASYONEL FORMÜLASYONU

Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemi diferansiyel denklem çözümünde varyasyonel temelli bir teknik olarak tanıtılmıştır. İlk olarak; diferansiyel denklemde tanımlanmış sürekli bir problem, denk bir varyasyonel yapıya dönüştürülür. Yaklaşık çözümün,  $\varphi_j$  yaklaşım fonksiyonlarının  $\sum c_j \varphi_j$  biçimindeki bir lineer kombinasyonu olduğu varsayılır. Elde edilen varyasyonel yapıdan  $c_j$  parametreleri belirlenir. Sonlu elemanlar metodu, karmaşık geometrik bölgelerin temsil edilebileceği basit alt bölgeler için yaklaşım fonksiyonlarının kurulabileceği sistematik bir teknik sağlar. Sonlu elemanlar metodunda yaklaşım fonksiyonları parçalı polinomlardan, yani sadece bir alt bölge üzerinde tanımlanmış polinomlardan meydana gelir.

Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan varyasyonel yöntemler bunların zayıf çözüm kavramına dayanmaktadır. Bu nedenle; klasik çözüm ve minimizasyon prensibinden yola çıkılarak, sınır değer problemlerinin zayıf çözüm kuramına varılacaktır. Burada metrik uzay, Hilbert ve Sobolev uzayları, dual uzay, genelleşmiş fonksiyon ve türevi kavramlarının bilindiği kabul edilecektir. Aşağıdaki tanım ve teoremlerde geçen uzayların tanımı için simgeler listesine bakınız.

### Tanım 2.1.

$$Au \equiv -(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \quad , a < x < b \quad (2.1)$$

$$u(a)=u(b)=0 \quad (2.2)$$

sınır değer problemi ele alınsın.  $[a,b]$  kapalı aralığında sürekli ve  $(a,b)$  açık aralığında ikinci türevi dahi sürekli olmak üzere,  $(a,b)$  aralığında (2.1) denklemini ve  $x=a$ ,  $x=b$

değerlerinde (2.2) koşullarını sağlayan  $u(x) \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$  fonksiyonuna (2.1)-(2.2) sınır değer probleminin klasik çözümü denir.

**Tanım 2.2.**

$$(Au - f, v) \equiv \int_a^b [Au - f]v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(a, b)$$

eşitliğini sağlayan  $u(x) \in H^2(a, b) \cap H_0^1[a, b]$  fonksiyonuna (2.1)-(2.2) probleminin hemen hemen her yerde çözümü denir.

**Teorem 2.1.**  $u(x) \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$  fonksiyonu (2.1)-(2.2) probleminin klasik çözümü ise, bu fonksiyon aynı zamanda hemen hemen her yerde çözümdür. Bunun tersi de geçerlidir;  $u(x) \in H^2(a, b) \cap H_0^1[a, b]$  fonksiyonu (2.1)-(2.2) probleminin hemen hemen her yerde çözümü ve  $u \in C^2(a, b)$  ise, aynı zamanda klasik çözümdür.

**Tanım 2.3.**

$$\int_a^b [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(a, b)$$

integral özdeşliğini sağlayan  $u \in H_0^1(a, b)$  fonksiyonuna (2.1)-(2.2) probleminin zayıf çözümü denir.

**Teorem 2.2.**  $H$  bir Hilbert uzayı olsun.  $u \in H$  elemanının,  $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - l(u)$

olmak üzere

$$u \in H: J(u) = \inf_{v \in H} J(v), \quad v \in H$$

en küçük değer probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul,  $u \in H$ 'nin

$$u \in H: a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H$$

varyasyonel probleminin çözümü olmasıdır.

**Teorem 2.3.** A lineer operatörü H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanmış kendine eş ve pozitif tanımlı operatör olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2}(Au, u) - (F, u) = \inf_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}(Av, v) - (F, v) \right\}$$

en küçük değer probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul, bunun

$$(Au, v) = (F, v) \quad , \forall v \in H$$

varyasyonel probleminin çözümü olmasıdır.

## 2.1. Yaklaşımda Varyasyonel Metodlar

### 2.1.1. Giriş

Bu bölümde Ritz metodu, Galerkin metodu, Petrov-Galerkin metodu, en küçük kareler metodu ve kollokasyon metodu incelenecektir. Bu metodlar; yaklaşık çözümü, uygun yaklaşım fonksiyonlarının lineer bir kombinasyonu biçiminde ararlar. Denklemin zayıf çözümü veya kuadratik fonksiyonelin minimum yapılması ile lineer kombinasyondaki parametreler belirlenir. Yukarıda bahsedilen metodlar yaklaşım fonksiyonların seçiminden dolayı birbirinden farklılık gösterirler. Sonlu elemanlar yöntemi, elemanların ayık denklemlerinin oluşturulması için varyasyonel metodu kullanır. Ayrıca, sonlu elemanlar yönteminde yaklaşım fonksiyonlarının seçimi klasik varyasyonel metodlardan farklıdır.

### 2.1.2. Ritz metodu

u fonksiyonu üzerindeki sınır koşullarının homojen yapısını sağlayan ve yeterince diferansiyellenebilen bütün v fonksiyonları için

$$B(u, v) = l(v) \quad (2.3)$$

biçimindeki  $u$  çözümünün bulunması varyasyonel problemi ele alınsın.  $B$  fonksiyoneli bilinear, simetrik ve  $l$  fonksiyoneli lineer olduğunda, (2.3) problemi

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u, u) - l(u) \quad (2.4)$$

kuadratik fonksiyonelinin minimize edilmesine denktir. Ritz metodu (2.3) denkleminin

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0 \quad (2.5)$$

sonlu serisi yapısında yaklaşık bir çözüm arar.  $v = \varphi_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) (2.3) denklemini sağlamak üzere, buradaki  $c_j$  Ritz katsayıları

$$B\left(\varphi_i, \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0\right) = l(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N$$

biçiminde seçilirler.  $B$  fonksiyonelinin bilinear olduğu durumlarda

$$\sum_{j=1}^N B(\varphi_i, \varphi_j) c_j = l(\varphi_i) - B(\varphi_i, \varphi_0) \quad (2.6)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem,  $N$  tane  $c_j$  sabiti içeren  $N$  tane lineer cebirsel denklem sistemini göstermektedir. (2.6) katsayılar matrisinin tersinin varolması için sütunlarının lineer bağımsız olması gerekir.

Simetrik bilinear formlar için Ritz metodunda,  $J(u)$  kuadratik fonksiyonelinin minimum yapılması ile  $c_j$  katsayıları elde edilir. Böylece (2.5) yapısındaki çözümler elde edilir. (2.5) denklemini (2.4) de  $u$  yerine yazılıp integrali alınırsa,  $J(u)$  fonksiyoneli  $c_j$  parametrelerine bağlı adi bir kuadratik fonksiyon haline gelir. Daha

sonra  $J(c_1, c_2, \dots, c_N)$  ifadesinin her bir parametreye göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial J(c_j)}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial J(c_j)}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial J(c_j)}{\partial c_N} = 0$$

Böylece; (2.6) sisteminin aynısı elde edilmiş olur. B fonksiyonelinin simetrik olmadığı durumlarda kuadratik fonksiyonel elde edilemez. Yani, (2.6) ifadesi daha genel durumlar için kullanılabilir. Problemlerin çoğunda simetrik bilineer forma sıkça rastlanmaktadır.

Yukarıdaki  $\varphi_0$  problemin esas sınır koşullarını sağlayacak biçimde seçilir. Homojen sınır koşulları için  $\varphi_0 = 0$  olacaktır.  $\varphi_i$ 'ler esas sınır koşullarını sağlayacağından  $v = \varphi_i$ 'lerin test fonksiyonu olarak seçilmeleri uygundur. Bunlara ek olarak,  $\varphi_i$  fonksiyonları aşağıdaki koşulları da sağlamalıdır:

1.a.  $B(\varphi_i, \varphi_j)$  iyi-tanımlı ve sıfırdan farklı olmalıdır. Yani,  $B(.,.)$  bilineer formu için  $\varphi_i$ 'nin gerekli miktarda diferansiyeli alınabilmelidir.

b.  $\varphi_i$  problemin esas sınır koşullarını sağlamalıdır.

2. Herhangi bir N için  $B(\varphi_i, \varphi_j)$  matrisinin satırları ve sütunları lineer bağımsız olmalıdır.

3.  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  ifadesi tam olmalıdır.

### 2.1.3. Ağırlıklı kalanlar metodu

Denklem lineer olsun veya olmasın, bir diferansiyel denklemin integral formu her zaman yazılabilir. Bununla birlikte, lineer olmayan bir denklem için simetrik bir varyasyonel yapı ve fonksiyonel kurmak her zaman mümkün değildir. Ritz metodu lineer olmayan problemlere uygulansa da, yaklaşım için kullanılan test

fonksiyonlarının seçimini sınırlar. Ağırlıklı kalanlar metodu Ritz metodunun genel bir halidir. Bu metotta, test fonksiyonları bağımsız bir fonksiyon kümesinden seçilebilir. Bundan başka; zayıf formülasyon elde edilemediği durumlarda, ağırlıklı kalanlar metodu denklemin integral formuna yaklaşım için kullanılabilir. İntegral form problemin doğal sınır koşullarını içermediği için, yaklaşık çözümün problemin sınır koşullarını sağlayacağı şekilde yaklaşım fonksiyonları seçilmelidir. Diğer yandan, test fonksiyonları yaklaşım fonksiyonlarından bağımsız olarak seçilebilir. Bu esneklik lineer olmayan problemlerde avantaj sağlar.

A operatörü u bilinmeyen bağımlı değişken üzerinde bir operatör ve f bilinen bir yer değiştirme fonksiyonu olmak üzere,  $\Omega$  tanım bölgesinde

$$Au=f \quad (2.7)$$

operatör denklemini verilsin. Herhangi  $\alpha, \beta$  skaleri ve u, v bağımlı değişkenleri için

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$$

bağıntısını sağlayan A operatörüne lineer operatör denir. Bu bağıntıyı sağlamayan operatöre lineer olmayan operatör denir. u fonksiyonu sadece yukarıdaki bağıntıyı değil, operatörden kaynaklanan sınır koşullarını da sağlamalıdır. Ağırlıklı kalanlar metodu da Ritz metoduna benzer şekilde

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.8)$$

yaklaşık çözümünü teklif eder. (2.8) ifadesi (2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$E \equiv A(u_N) - f \neq 0 \quad (2.9)$$

kalanını verecektir.  $\phi_0$  ve  $\phi_j$  'ler seçilince E,  $c_j$  parametrelerine bağlı bir fonksiyon olacaktır. Ağırlıklı kalanlar metodunda,



$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) E(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.10)$$

integrali sıfıra eşitlenerek  $c_j$  parametreleri bulunur. Burada,  $\psi_i$ 'ler ağırlık fonksiyonlarıdır ve genellikle  $\phi_i$  yaklaşım fonksiyonları ile aynıdır. Operatör uygunsa; çözümdeki türevler ağırlık fonksiyonlarına aktararak yaklaşım fonksiyonunun süreklilik koşulu hafifletilebilir. A lineer bir operatör ise (2.10) denklemi

$$\sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} A(\phi_j) dx dy \right) c_j = \int_{\Omega} \psi_i [f - A\phi_0] dx dy$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = f_i \quad (2.11)$$

yapısına indirgenebilir.

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji}$$

elemanlarından oluşan  $[A]$  katsayılar matrisi simetrik değildir.

$\psi_i \neq \phi_i$  olduğu durumlarda bu metoda Petrov-Galerkin metodu denir.

### 2.1.3.1. Galerkin metodu

$\psi_i = \phi_i$  için ağırlıklı kalanlar metodu Galerkin metodu olarak bilinir. Çift mertebeli lineer bir operatör varsa, Galerkin metodu Ritz metoduna indirgenir. Çünkü;

türevlerin yarısı ağırlık fonksiyonlarına aktarılır ve meydana gelen katsayı matrisi simetrik olur.

### 2.1.3.2. En küçük kareler metodu

En küçük kareler metodu (2.8) yapısında bir çözüm arar. Bunun için, (2.9) kalanının karesinin integralini minimize ederek  $c_j$  sabitlerini belirler.

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} E^2(x, y, c_j) dx dy = 0$$

veya

$$\int_{\Omega} \frac{\partial E}{\partial c_i} E dx dy = 0 \quad (2.12)$$

yazılır. (2.12) denklemi (2.10) denklemi ile karşılaştırıldığında  $\psi_i = \frac{\partial E}{\partial c_i}$  olduğu görülür. A lineer bir operatör ise, (2.12) denklemi

$$\sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} A(\varphi_i) A(\varphi_j) dx dy \right) c_j = \int_{\Omega} A(\varphi_i) [f - A(\varphi_0)] dx dy \quad (2.13)$$

halini alır. Buradan simetrik bir katsayılar matrisi elde edilir.

### 2.1.3.3. Kollokasyon metodu

Kollokasyon metodu; (2.7) denkleminde,  $\Omega$  tanım kümesi içinde seçilmiş N tane  $x^i \equiv (x^i, y^i)$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) noktasında kalanı sifira denk olan (2.8) yapısında yaklaşık bir çözüm arar. Yani,

$$E(x^i, y^i, c_j) = 0 \quad i=1,2,\dots,N$$

olur.  $x^i$  noktalarının seçimi hassas sonuçlara ulaşmak ve iyi-konumlu bir sistem elde etmek açısından çok önemlidir.

$$\int_{\Omega} f(x)\delta(x-\xi)dx = f(\xi)$$

ifadesindeki  $\delta(x)$  Dirac delta fonksiyonu olmak üzere  $\psi_i = \delta(x-x^i)$  için kollokasyon metodu (2.10) denkleminin özel bir hali olarak gösterilebilir.

#### 2.1.3.4. Courant metodu

Courant metodu, lineer operatörler için Ritz ve en küçük kareler metodlarının temel fikirlerini birleştirir. A lineer iken  $\gamma$  ceza parametresi ve  $J(u)$  fonksiyoneli  $Au=f$  ile kurulmuş olan kuadratik fonksiyonel olmak üzere

$$J_p(u_N) = J(u_N) + \frac{\gamma}{2} \|Au_N - f\|^2$$

fonksiyonelinin minimize edilmesi ile (2.8) yapısında çözümler arar. Bu metodun fonksiyonel formülasyona izin veren operatör denklemlerinde çalıştığı açıktır. Bu yöntem daha fazla işlem içerse de yakınsaklığı garantilemektedir. Yani,  $N \rightarrow \infty$  iken  $J_p(u_N) = J(u)$  olmaktadır. Aslında; Courant metodu akışkan akışı problemlerinde kullanılan ceza metodundan başka bir şey değildir.

#### 2.1.4. Zamana bağlı problemler

Zamana bağlı problemlerde (2.5) denklemindeki belirlenmemiş  $c_i$  parametrelerinin zamana bağlı bir fonksiyon olduğu ve  $\phi_i$  fonksiyonlarının ise uzaysal koordinatlara bağlı olduğu kabul edilir. Bu durum, çözümü her biri yaklaşım metodları içeren iki aşamaya götürür. Zamana bağlı problemlerde, uzaysal yaklaşım ilk olarak ele alınır, sonra zaman yaklaşımı yapılır. Bu yöntem yarı-ayrık yaklaşım adı verilir. Uzayda yarı-ayrık yaklaşım, zamana bağlı bir adi diferansiyel denklem takımı verir. Buradan, yaklaşım ile bir cebirsel denklem takımı elde edilir. Uzaysal yaklaşım

$$[A]\left\{\frac{\partial c}{\partial t}\right\} + [B]\{c\} = \{P\}$$

yapısında bir matris diferansiyel denklem üretir. Burada  $[A]$  matrisinin elemanları

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx dy$$

eşitliği ile elde edilir.

Birinci mertebeden türev içeren

$$[A]\{\dot{c}\} + [B]\{c\} = \{P\} \quad 0 < t \leq T_0 \quad (2.14)$$

matris diferansiyel denklem sistemi verilsin.  $[A]$ ,  $[B]$  ve  $\{P\}$  bilinen matrisler ve  $\{c\}$  bilinmeyen parametrelerden oluşan sütun matris olmak üzere yaklaşık çözüm incelenecektir.  $\{\dot{c}\}$ 'nin üzerindeki nokta  $\{c\}$ 'nin zamana bağlı türevini göstermektedir.  $\theta$  yaklaşım ailesi ile iki zaman adımında zamana bağlı türevere lineer olarak yaklaşılabılır. Bunun için  $0 \leq \theta \leq 1$  olmak üzere,

$$\theta\{\dot{c}\}_{n+1} + (1-\theta)\{\dot{c}\}_n = \frac{\{c\}_{n+1} - \{c\}_n}{\Delta t_{n+1}} \quad (2.15)$$

denklemini kullanılır.  $t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$  ve  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  olmak üzere  $\{\cdot\}_n$  ifadesi  $t = t_n$  anındaki  $\{c\}$  değerini verir. Eşit zaman aralıkları kullanıldığında  $t_n = n\Delta t$  olur.  $\theta$  değeri seçilerek iyi bilinen bazı fark yöntemlerine ulaşılır:

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{ileri - fark (Euler) yöntemi} \\ \frac{1}{2} & \text{Crank - Nicolson yöntemi} \\ \frac{2}{3} & \text{Galerkin yöntemi} \\ 1 & \text{geri - fark yöntemi} \end{cases}$$

(2.15) denklemini  $t_n$  ve  $t_{n+1}$  adımları için yazılıp (2.14)'de yerine konulursa

$$[A]\{c\}_{n+1} = [A]\{c_n\} + \theta \Delta t_{n+1} (\{P\}_{n+1} - [B]\{c\}_{n+1}) + (1-\theta) \Delta t_{n+1} (\{P\}_n - [B]\{c\}_n)$$

elde edilir.  $\{c\}_{n+1}$  adımını  $\{c\}_n$  adımı cinsinden yazmak için denklem yeniden düzenlenirse

$$[\hat{A}] = [A] + \theta \Delta t_{n+1} [B]$$

$$[\hat{B}] = [A] - (1-\theta) \Delta t_{n+1} [B]$$

olmak üzere

$$[\hat{A}]\{c\}_{n+1} = [\hat{B}]\{c\}_n + \{P\}_{n,n+1} \equiv \{\hat{P}\}_{n,n+1} \quad (2.16)$$

elde edilir.  $t=0$  anında başlangıç koşullarından çözüm bulunabilir.  $t = t_{n+1}$  anındaki çözüm,  $t = t_n$  anındaki bilinen çözümden  $[\hat{A}]$  matrisinin tersi alınarak bulunabilir.  $\{P\}$  vektörü her zaman diliminde bilineceğinden  $\{P\}_{n+1}$  dolayısıyla bilinmiş olur. Zaman adımı ne kadar küçük seçilirse o kadar iyi sonuçlar beklenir. Bununla birlikte, işlemleri azaltmak için zaman aralığı olabildiğince uzun seçilir. Böyle bir seçim yapıldığı zaman, sonuçların doğruluğu azalacaktır.

$$\det([\hat{B}] - \lambda[\hat{A}]) = 0$$

denkleminin minimum  $\lambda$  özdeğeri negatif değilse (2.16) sayısal yöntemi stabildir.

Ayrıca;

salınım yapmaksızın stabil	$0 < \lambda < 1$
salınlı stabil	$-1 < \lambda < 0$
stabil değil	$\lambda < -1$

incelenerek (2.16)'nın stabilliğine bakılabilir.

Dinamikteki hareket problemleri ikinci mertebeden zamana bağlı türevler içerir. Denklemlerin yarı-ayrık yaklaşımı

$$[A]\{\ddot{c}\} + [B]\{c\} = \{F\} \quad 0 < t < t_0 \quad (2.17)$$

yapısında bir denklem verir. Bu tür denklemler için genellikle Newmark direkt integral metodu kullanılır. Bu metodda; zamana göre birinci türev  $\{\dot{c}\}$  ve  $\{c\}$  zaman fonksiyonuna (n+1). adımda

$$\begin{aligned} \{\dot{c}\}_{n+1} &= \{\dot{c}\}_n + [(1-\alpha)\{\ddot{c}\}_n + \alpha\{\ddot{c}\}_{n+1}]\Delta t \\ \{c\}_{n+1} &= \{c\}_n + \{\dot{c}\}_n \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{c}\}_n + \beta \{\ddot{c}\}_{n+1} \right] (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

ifadeleri ile yaklaşılır. Yukarıda n indisi n. zaman adımını,  $\alpha$  ve  $\beta$  parametreleri de yöntemin doğruluk ve stabilliğini belirler.  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 1/4$  seçimi sabit-ortalama ivme metoduna karşılık gelmektedir. Lineer problemlerde bu metod şartsız olarak stabildir.  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 1/6$  durumu ise lineer ivme metoduna karşılık gelmektedir.

(2.17) ve (2.18) denklemleri yeniden düzenlenerek

$$\begin{aligned} [\hat{A}] &= [B] + a_0[A] \\ \{\hat{F}\} &= \{F\}_{n+1} + [A](a_0\{c\}_n + a_1\{\dot{c}\}_n + a_2\{\ddot{c}\}_n) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$[\hat{A}]\{c\}_{n+1} = \{\hat{F}\}_{n,n+1} \quad (2.19)$$

denkleme ulaşılır. Buradan;  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$  anında  $\{c\}$  çözümü bilinirse  $\{c\}$ 'nin birinci ve ikinci türevleri, yani hız ve ivme hesaplanabilir. Bunun için, (2.18) denklemleri düzenlenerek

$$\{\ddot{c}\}_{n+1} = a_0 (\{c\}_{n+1} - \{c\}_n) - a_1 \{\dot{c}\}_n - a_2 \{\ddot{c}\}_n$$

$$\{\dot{c}\}_{n+1} = \{\dot{c}\}_n + a_3 \{\ddot{c}\}_n + a_4 \{\ddot{c}\}_{n+1}$$

$$a_0 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, \quad a_1 = a_0 \Delta t, \quad a_2 = \frac{1}{2\beta} - 1, \quad a_3 = (1 - \alpha)\Delta t, \quad a_4 = \alpha \Delta t$$

ifadeleri kullanılır.

( $T_{\min}$  doğal titreşim için en küçük zaman aralığı olmak üzere,  $\Delta t = \frac{T_{\min}}{\pi}$  zaman aralığı, seçilebilecek en iyi zaman aralığıdır.)

## 2.2. Bir Boyutlu Poisson Probleminin Varyasyonel Formülasyonu

### 2.2.1. Giriş

Poisson probleminin klasik çözümü, minimizasyon prensibi ve zayıf çözümü vardır. Regülerlik ve kabul edilebilir veri açısından minimizasyon prensibi veya zayıf çözüm, klasik çözüme göre daha geneldir. Minimizasyon prensibi ve zayıf çözüm; bir  $X$  uzayı, bir  $a$  bilinear formu ve bir  $l$  lineer formu ile tanımlanır. Esas sınır koşulları Dirichlet koşulları olarak adlandırılır ve  $X$  uzayına etki eder. Doğal sınır koşulları Neumann koşulları olarak adlandırılır ve  $a$  bilinear formu ile  $l$  lineer formuna etki eder. Sonlu elemanlar yöntemi için başlangıç noktası genel olarak zayıf çözümdür. Eğer  $a$  bilinear formu simetrik pozitif tanımlı ise minimizasyon da yapılabilir.

## 2.2.2. Dirichlet problemi

### 2.2.2.1. Klasik çözüm

$\nabla^2$ , Laplasiyen operatörü,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.20)$$

ve  $\Omega$ ,  $\mathbb{R}^2$ 'de sınırı  $\Gamma$  olan bir tanım kümesi olmak üzere,

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= f & \Omega \text{ da} \\ u|_{\Gamma} &= 0 & \Gamma \text{ da} \end{aligned} \quad (2.21)$$

şartlarını sağlayan  $u$  fonksiyonunu bulma problemine Dirichlet problemi denir. Genel olarak,  $\Omega$ 'nın Lipschitzyen olması istenir. Tek değişkenli  $w$  fonksiyonu, her  $x$  ve  $y$  için  $|w(x) - w(y)| \leq \kappa|x - y|$  olacak şekilde bir  $\kappa$  sabiti varsa, Lipschitz koşulunu sağlar.  $\Gamma$  sınırındaki herhangi bir nokta yerel olarak Lipschitz gösterimine uygunsa,  $\Omega$  tanım kümesi Lipschitzyen olur. Yani, sınır çok kırıklı veya tekil olamaz. Burada aksi belirtilmedikçe, açık  $\Omega$  tanım kümelerinden bahsedilecektir.

### 2.2.2.2. Minimizasyon prensibi

Sonlu elemanlar yöntemi klasik çözüm aramak yerine minimizasyon veya daha genel olarak zayıf çözümü yaklaşık bulmak esasına dayanır. Bu yüzden sonlu eleman metoduna devam etmeden önce bu formülasyonlara bakılacaktır.

$$X = \{ \text{yeterince düzgün } w \mid w|_{\Gamma} = 0 \}$$

lineer bir uzay ve



$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla w \nabla w \, dA - \int_{\Omega} f w \, dA \quad (2.22)$$

olmak üzere,

$$u = \arg \min_{w \in X} J(w) \quad (2.23)$$

biçiminde  $u$  fonksiyonu bulmaya minimizasyon prensibi denir. Diğer bir deyişle;  $X$  uzayındaki bütün  $w$  fonksiyonları üzerinde

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= f & \Omega \text{ da} \\ u|_{\Gamma} &= 0 & \Gamma \text{ da} \end{aligned} \quad (2.24)$$

şartlarını sağlayan  $u$  fonksiyonu,  $J(w)$  fonksiyoneline mümkün olan en küçük değerini verir. Bu ifadenin ispatı aşağıda verilmiştir.

$w = u + v$  olsun. Bu durumda,

$$J \left( \begin{array}{c} \overbrace{u+v}^{w \in X} \\ \underbrace{u}_{\in X} + \underbrace{v}_{\in X} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla(u+v) \nabla(u+v) \, dA - \int_{\Omega} f(u+v) \, dA \quad (2.25)$$

yazılır.  $u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0$  olması  $w|_{\Gamma} = 0$  eşitliğini gerektirir. Böylece  $w \in X$  olur.  $w|_{\Gamma}$  ifadesinin anlamı;  $w$ 'nun  $\Gamma$ 'ya kısıtlanması, yani  $\Gamma$  üzerinde hesaplanmasıdır.

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \nabla u \, dA - \int_{\Omega} f u \, dA & J(u) \\ &+ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dA - \int_{\Omega} f v \, dA & \delta J_v(u) \text{ birinci varyasyon} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dA & v \neq 0 \text{ için } > 0 \end{aligned}$$

$J(u+v)$  ifadesi  $u$  civarında bir Taylor serisi olarak düşünülebilir.  $J$  kuadratik olduğundan,  $J(u+v)$  bir sabit terim, bir lineer terim (gradiyen) ve bir kuadratik terim (Hessiyen) içerir. Daha sonra bu ifade sıfırlanır. Her  $v \in X$  için,

$$\begin{aligned}\delta J_v(u) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dA - \int_{\Omega} f v \, dA \\ &= \int_{\Omega} \nabla(v \nabla u) \, dA - \int_{\Omega} v \nabla^2 u \, dA - \int_{\Omega} f v \, dA \\ &= \int_{\Gamma} \nabla v \cdot \hat{n} \, dS + \int_{\Omega} v \left( \underbrace{-\nabla^2 u - f}_0 \right) \, dA \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Bir fonksiyonun gradiyeni, fonksiyonun minimum değerinde sıfırdır. Benzer şekilde, bir fonksiyonelin birinci varyasyonu da minimumda sıfır olacaktır. Burada  $\hat{n}$ ,  $\Gamma$  sınırındaki birim normal vektördür. Buradan

$$J\left(\underbrace{u+v}_w\right) = J(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dA \quad , \forall v \in X \quad (2.26)$$

$v \neq 0$  için  $> 0$

yazılır. Yani;  $J(w) > J(u)$ ,  $\forall w \in X$ ,  $w \neq u$  olmasının gerek ve yeter koşulu  $u$  fonksiyonunun  $J(w)$  fonksiyonelinin minimum yapmasıdır. Minimizasyon prensibi ancak simetrik pozitif tanımlı operatörler ile kurulan K.D.D.lerde elde edilebilir. Varyasyonel analizin genel yapısı uygulanarak yukarıdaki sonuca ulaşılabilir. Bu anlamda;  $-\nabla u = f$  eşitliğine  $J$  fonksiyonelinin minimize edilmesi ile kurulmuş Euler veya Euler-Lagrange denklemleri olarak bakılabilir.

### 2.2.2.3. Zayıf çözüm

Her  $v \in X$  için  $\delta J_v(u) = 0$  olacak şekilde  $u$  fonksiyonunun bulunması,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dA = \int_{\Omega} f v \, dA \quad , \forall v \in X \quad (2.27)$$

ifadesine denktir. Yukarıda, genel matematiksel tanımlar kullanılarak öz bir ifade ile zayıf çözüm kavramı verildi. Türevlerin bir kısmı üzerine aktarılmış  $v$  fonksiyonu test fonksiyonudur. Bir K.D.D.in minimizasyon prensibi bulunmadığı hallerde bile zayıf çözümün varlığı söz konusudur. Bu yüzden; sonlu elemanlar yönteminin en genel başlangıç noktası zayıf çözümdür.

Şimdi, bazı kavramlar verilerek yukarıdaki zayıf çözüm yeniden ifade edilecektir.

Verilen bir  $Y$  kümesinde

$$\forall v_1, v_2 \in Y \text{ için } v_1 + v_2 \in Y$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in Y \text{ için } \alpha v \in Y$$

toplama ve skalerle çarpma işlemleri grup özelliklerine sahipse,  $Y$  bir lineer uzaydır. Lineer uzaylara vektör uzayı adı da verilir.

$L: Y \rightarrow \mathbb{R}$  ile tanımlı  $L(v)$  fonksiyoneli,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  ve  $\forall v_1, v_2 \in Y$  için

$$L(\alpha v_1 + v_2) = \alpha L(v_1) + L(v_2)$$

koşulunu sağlarsa  $L(v)$  fonksiyoneline lineer form adı verilir.

$B: Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}$  ile tanımlı  $B(w, v)$  fonksiyoneli argümanlardan her birine göre lineer ise bilinear form adı adını alır.

$B(w, v)$  fonksiyoneli tanım kümesinin elemanları aynı kümeden seçildiğinde,  $B: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  halini alır. Bu durumda;  $\forall 0 \neq w \in X$  için  $B(w, w) > 0$  ve  $B(w, v) = B(v, w)$  şartları sağlanıyorsa,  $B(w, v)$  fonksiyoneline simetrik pozitif tanımlı (S.P.T.) bilinear form denir.

Bu yeni kavramlar kullanılarak zayıf çözüm yeniden tarif edilebilir.  $a(w, v)$  fonksiyoneli, her  $w, v \in X$  için

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dA \quad (2.28)$$

biçiminde bir SPT bilinear form olsun.  $l(v)$  fonksiyoneli, her  $v \in X$  için

$$l(v) = \int_{\Omega} f v \, dA \quad (2.29)$$

biçiminde bir lineer form olsun. Bu durumda minimizasyon prensibi,

$$u = \arg \min_{w \in X} \underbrace{\frac{1}{2} a(w, w) - l(w)}_{J(w)} \quad (2.30)$$

ile verilir. Zayıf çözüm ise,  $u \in X$  olmak üzere

$$\underbrace{a(u, v) = l(v)}_{\Leftrightarrow \delta J_v(u) = 0}, \forall v \in X \quad (2.31)$$

biçiminde yazılır.

Verilen bir  $l \in H^{-1}(\Omega)$  için

$$a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.32)$$

olacak biçimde  $u \in H_0^1(\Omega)$ 'nin bulunması probleminde iyi-konumluluk;  $u$  çözümünün varlığı,  $u$  çözümünün tekliliği ve çözümün verilen data'lara sürekli bağımlı olması yani,

$u$  vardır,

$u$  çözümü tektir,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|l\|_{H^{-1}(\Omega)} \text{-stabilite} \quad (2.33)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Lax-Milgram Teoremi. a bilineer formu sürekli ve koarsif (coercive) ise yukarıda belirtilen yapıdaki bir problem tek bir çözüme sahiptir. Koarsiflik ile

$$\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(v, v) \quad , \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

olacak şekilde bir pozitif  $\alpha$  sayısının varlığı kastedilmektedir. (2.21) sorusunda Pioncare-Friedrichs eşitsizliği ile  $\alpha$  sayısının varlığı görülür. Süreklilik ile

$$a(w, v) \leq \beta \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad , \forall w, v \in H^1(\Omega)$$

koşulu kastedilmektedir. (2.21) denkleminde  $\beta = 1$  alınıp Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak bu koşul sağlanır. Son olarak stabilğin ispatı yapılabilir.  $u \in H_0^1(\Omega)$  olduğundan,  $v=u$  olarak

$$\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) = l(u)$$

bulunur. Böylece,

$$\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{l(u)}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \leq \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{l(v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = \|l\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

olur. Buradan, (2.33) denklemindeki c,  $\alpha^{-1}$  olarak bulunur.

### 2.2.3. Neumann problemi

#### 2.2.3.1. Klasik çözüm

$\Gamma^D$  boş olmamak ve  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}^D \cup \bar{\Gamma}^N$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
-\nabla^2 u &= f & , \Omega \text{ da} \\
u &= 0 & , \Gamma^D \text{ da} \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g & , \Gamma^N \text{ da}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

koşullarını sağlayan  $u$  fonksiyonunu bulma problemine Neumann problemi denir.

Neumann probleminin çözümünün olması için  $\Gamma^D$  kümesinin boş kümeden farklı olması gerekir. Sınır koşullarından

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int \nabla u \cdot \hat{n} dS = \int g dS \tag{2.35}$$

eşitliği söz konusuysen

$$-\int \nabla^2 u dA = \int -\nabla u \cdot \hat{n} dS = \int f dA \tag{2.36}$$

eşitliği de vardır. (2.34) Neumann problemi ısı transferi olarak düşünülürse, üretilen ısı ile içeri giren ısı birbirini dengeleyeceğinden,  $\int f dA + \int g dS$  ifadesinin sıfır olacağı açıktır.  $f$  ve  $g$ 'ye bağlı çözülebilirlik koşulu sağlanırsa, problemin çözümü vardır. Ancak çözüme eklenecek her sabit denklemi sağlayacağından sonsuz çözüm söz konusudur.  $u$  fonksiyonu bir çözüm ise,  $u + \text{sabit}$  fonksiyonu da çözüm olacaktır. Çözümü bir fonksiyona indirgemek için

$$\int u dA = 0 \tag{2.37}$$

koşulu verilmelidir. Bu koşul probleme bağlı olarak değişebilir. Pratikte,  $u$  fonksiyonunun herhangi bir noktadaki değerinin bilinmesi de çözümü bire indirir.

Karışık problem olarak adlandırılan,  $\Gamma^D$  kümesinin boş küme olmadığı durumlarda bu türlü çözülebilirlik tartışmaları ortaya çıkmaz.  $\Gamma^D$  üzerindeki ısı akımı dengeyi oluşturur.

### 2.2.3.2. Minimizasyon prensibi

#### 2.2.3.2.1. Minimizasyon prensibinin ifade edilmesi

$$X = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma^D} = 0\} \quad (2.38)$$

ve

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dA - \int_{\Omega} f v \, dA - \int_{\Gamma_N} g w \, dS \quad (2.39)$$

olmak üzere,

$$u = \arg \min_{w \in W} J(w) \quad (2.40)$$

koşulunu sağlayan  $u$  fonksiyonunu bulmaya (2.34) probleminin minimizasyon prensibi denir.

#### 2.2.3.2.2. İspat

$w = u + v$  olsun. Bu durumda,

$$J\left(\begin{array}{c} \overbrace{u+v}^{w \in X} \\ \underbrace{u}_{\in X} + \underbrace{v}_{\in X} \end{array}\right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla(u+v) \nabla(u+v) \, dA - \int_{\Omega} f(u+v) \, dA - \int_{\Gamma_N} g(u+v) \, dS$$

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \nabla u \, dA - \int_{\Omega} f u \, dA - \int_{\Gamma_N} g u \, dS \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dA - \int_{\Omega} f v \, dA - \int_{\Gamma_N} g v \, dS \rightarrow \delta J_v(u) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dA \end{aligned}$$

bulunur.  $\delta J_v(u)$  birinci varyasyonu;

$$\begin{aligned}
\delta J_v(u) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dA - \int_{\Omega} f v \, dA - \int_{\Gamma_N} g v \, dS \\
&= \int_{\Omega} \nabla(v \nabla u) \, dA - \int_{\Omega} v \nabla^2 u \, dA - \int_{\Omega} f v \, dA - \int_{\Gamma_N} g v \, dS \\
&= \int_{\Gamma_D} \hat{v} \nabla u \cdot \hat{n} \, dS + \int_{\Omega} v \underbrace{\left( -\nabla^2 u - f \right)}_0 \, dA + \int_{\Gamma_N} v \underbrace{\left( -\nabla u \cdot \hat{n} - g \right)}_0 \, dS \\
&= 0 \quad , \forall v \in X
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani,

$$J(u+v) = J(u) + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dA}_{v \neq 0 \text{ olduğunda } > 0} \quad , \forall v \in X \quad (2.41)$$

eşitliği elde edilir.  $\Gamma^D$  kümesinin boş olması halinde,  $v$ =sabit sondaki terimi sıfır yapar. Böylece,  $u$  fonksiyonu fonksiyonele minimum değerini veren tek fonksiyon olmaktan çıkar.  $u$ +sabit fonksiyonlarının hepsi aynı sonuca ulaştırır. Bu durumda;  $J(w) \geq J(u)$ ,  $\forall w \in X$  olmasının gerek ve yeter koşulu  $u$  fonksiyonunun  $J(w)$  fonksiyoneli minimum yapmasıdır.

### 2.2.3.3. Zayıf çözüm

#### 2.2.3.3.1. Zayıf çözümün ifade edilmesi

$$\begin{aligned}
\delta J_v(u) &= 0 \quad , \forall v \in X \\
&\Updownarrow \\
\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dA &= \int_{\Omega} f v \, dA + \int_{\Gamma_N} g v \, dS \quad \forall v \in X
\end{aligned} \quad (2.42)$$

denkliğini sağlayacak şekilde bir  $u \in X$  fonksiyonunun bulunmasına Neumann probleminin zayıf çözümü denir.

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dA \quad , \forall w, v \in X \quad (2.43)$$



olacak şekilde bir a SPT bilinear formu ve

$$l(v) = \int_{\Omega} fv \, dA + \int_{\Gamma^N} gv \, dS \quad (2.44)$$

olacak şekilde bir  $l \in H^{-1}(\Omega)$  sınırlı lineer formu verilsin. Burada,  $l \in H^{-1}(\Omega)$  olmasını sağlamak için g'nin  $\Gamma^N$  üzerinde yeterince türevinin alınabilmesi gerekmektedir. Ayrıca, a bilinear formunun SPT olması için  $\Gamma^D$  boş kümeden farklı olmalıdır.

Bu durumda minimizasyon prensibi,

$$u = \arg \min_{w \in X} \underbrace{\frac{1}{2} a(w, w) - l(w)}_{J(w)} \quad (2.45)$$

ile verilir. Zayıf çözüm ise  $u \in X$  olmak üzere

$$\underbrace{a(u, v) = l(v)}_{\Leftrightarrow \delta J_v(u) = 0}, \forall v \in X \quad (2.46)$$

biçiminde yazılır.

### 2.2.3.3.2. Temel ve doğal sınır koşulları

Temel sınır koşulları, operatörün tanım kümesine bu koşulları sağlayan elemanların alınması ile çözüme dahil edilir. Doğal sınır koşulları ise  $J(u)$  fonksiyoneli ile yani  $a(u, v)$  ve  $l(v)$  formları ile çözüme dahil edilir. (2.34) problemi için

$$\text{Temel sınır koşulları} \Leftrightarrow \text{Dirichlet koşulları} (v|_{\Gamma^D} = 0)$$

$$\text{Doğal sınır koşulları} \Leftrightarrow \text{Neumann koşulları} (v|_{\Gamma^N})$$

olur. Doğal sınır koşullarını açıklamak faydalı olacaktır.  $\nabla u \in L^2(\Omega)$  olduğundan,  $\nabla u \cdot \hat{n} = g$  eşitliği tam anlamıyla kabul edilemez. Yani,  $L^2(\Omega)$  uzayında bir fonksiyonun izi veya sınır limiti çok küçük farklılıklar doğurur, çünkü sıçramalara izin verilir ve sonlu sayıdaki noktalar ihmal edilir. Bu yüzden, bu sınır koşulları başka bir biçimde belirlenmelidir. Böylece herhangi bir normal türevi hesap etmeye gerek kalmayacaktır.

Temel sınır koşullarının her zaman Dirichlet sınır koşulu olmayacağı gibi, doğal sınır koşulları da her zaman Neumann sınır koşulu olmaz.  $H^1(\Omega)$  uzayındaki  $\nabla u$ 'ya ve  $L^2(\Omega)$  uzayındaki  $u$ 'ya direkt yaklaşıldığında karışık formülasyonlar oluşacaktır. Bu durumda,  $\nabla u$  çözüm uzayına dahil edilir, böylece Neumann koşulu temel sınır koşulu olur.  $u$  fonksiyonu kuvvetli bir biçimde belirlenemeyeceğinden Dirichlet koşulu doğal sınır koşulu halini alır.

## 2.2.4. Homojen olmayan Dirichlet koşulları

### 2.2.4.1. Klasik çözüm

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= f & , \Omega \text{ da} \\ u &= u^D & , \Gamma^D = \Gamma \end{aligned} \quad (2.47)$$

ile verilen  $u$  fonksiyonunu bulma problemine homojen olmayan Dirichlet koşulları ile verilmiş problem denir. Sınır koşulu için verilmiş olan  $u^D$  verisi  $\Gamma^D$  kümesindeki birtakım regüler olma koşullarını sağlamalıdır.

### 2.2.4.2. Minimizasyon prensibi

$$X^D = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma^D} = u^D\} \quad (2.48)$$

$$X = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma^D} = 0\} \quad (2.49)$$

olmak üzere,

$$u = \arg \min_{w \in X^D} J(w) \quad (2.50)$$

argümanının bulunması homojen olmayan Dirichlet koşulu ile verilmiş (2.47) problemi için minimizasyon prensibidir. Burada,  $X^D$  lineer bir uzay değildir. ancak, tabii ki  $X^D$  uzayının iki elemanının farkı  $X$  uzayının bir elemanı olacaktır. Burada  $J(w)$  fonksiyoneli

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{\nabla w \nabla w}_{a(w,w)} dA - \int_{\Omega} \underbrace{fw}_{l(w)} dA \quad (2.51)$$

ile verilir.

### 2.2.4.3. Zayıf çözüm

$$\begin{aligned} \delta J_v(u) = 0 \quad , \forall v \in X \equiv H_0^1(\Omega) \\ \Downarrow \\ \int_{\Omega} \underbrace{\nabla u \nabla v}_{a(u,v)} dA = \int_{\Omega} \underbrace{fv}_{l(v)} dA \quad , \forall v \in X \end{aligned} \quad (2.52)$$

denliğini sağlayacak şekilde bir  $u \in X^D$  fonksiyonunun bulunmasına homojen olmayan Dirichlet probleminin zayıf çözümü denir.

## 2.3. Bir Boyutlu Poisson Probleminin Ayrıklaştırılması: Formülasyon Safhası

### 2.3.1. Dirichlet problemi

#### 2.3.1.1. Klasik çözüm

Tanım kümesi  $\Omega = (0,1)$  olmak üzere verilen bir  $f$  fonksiyonu için

$$-u_{xx} = f \quad (2.53)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2.54)$$

olan  $u$  fonksiyonunu bulma problemini örnek problem olarak alalım.

### 2.3.1.2. Minimizasyon prensibi

$X = H_0^1(\Omega)$  olsun. Bu durumda minimizasyon prensibi,

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_x^2 dx - \int_{\Omega} fw dx \quad (2.55)$$

olmak üzere

$$u = \arg \min_{w \in X} J(w) \quad (2.56)$$

$u$  fonksiyonunu bulmak haline gelir. Bu ifade, (2.22) de  $dA$  yerine  $dx$  ve  $\nabla w$  yerine  $w_x$  yazılarak elde edilir.

### 2.3.1.3. Zayıf çözüm

$\forall v \in X$  için  $\delta J_v(u) = 0$  olacak şekilde  $u \in X$  fonksiyonunu bulma ifadesinin kısım 2.2.4.3 teki denkleğinden  $\nabla u \nabla v$  yerine  $u_x v_x$  yazılarak

$$\int_{\Omega} u_x v_x dx = \int_{\Omega} fv dx, \quad \forall v \in X \quad (2.57)$$

bulunur.

### 2.3.1.4. Genelleştirme

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_{\Omega} w_x v_x \, dx \\ l(v) &= \int_{\Omega} f v \, dx \end{aligned} \quad (2.58)$$

olsun. Bu durumda, minimizasyon prensibi

$$u = \arg \min_{w \in X} \frac{1}{2} a(w, w) - l(w) \quad (2.59)$$

biçiminde ve zayıf çözüm de,  $u \in X$  için

$$a(u, v) = l(v) \quad , \forall v \in X \quad (2.60)$$

olacak şekilde  $u \in X$  in belirlenmesi olur. Herhangi bir  $l(v) \in H^{-1}(\Omega)$  için

$$u = \arg \min_{w \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} a(w, w) - l(w) \quad (2.61)$$

veya

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ için } a(u, v) = l(v) \quad (2.62)$$

olacak şekilde  $u \in H_0^1(\Omega)$  bulmaktır. Örneğin;  $l(v) = \langle \delta_{x_0}, v \rangle = v(x_0)$  fonksiyoneli kabul edilebilir. Ancak,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  olduğunda, yani iki boyutlu uzayda delta Dirac  $l(v)$  fonksiyoneli olarak alınamaz.

### 2.3.1.5. Regülerlik veya iyi tanımlılık

Öncelikle,  $\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (v_{xx}^2 + v_x^2 + v^2) dx$  olduğunu hatırlayalım.

Yukarıda belirtilen  $l(v)$  fonksiyoneli ve aranan  $u$  fonksiyonu için bazı sınırlamalar getirilebilir.  $l \in H^{-1}(\Omega)$  ise,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|l\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.63)$$

olur.  $l \in H^2(\Omega)$  ise,  $l(v) = \int_{\Omega} f v dx$  için

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.64)$$

olur. Bu eşitsizlik;  $f \in L^2(\Omega)$  olmak üzere  $l(v) = \int_{\Omega} f v dx$  ise,  $H^{-1}$  normu  $L^2$  normu ile sınırlanacağından  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|l\|_{H^1(\Omega)}$  ifadesinden elde edilir. Ancak, klasik çözüm  $-u_{xx} = f$  'den  $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$  olduğu görülür. Böylece,  $c_0$ 'ın  $(1+c)^{1/2}$  olduğu sonucuna varılır.  $f$  fonksiyoneli iyi-tanımlı olduğunda  $u$  fonksiyonunun da iyi-tanımlı oluşu sonlu elemanlar yöntemi için bazı önemli sonuçlara sahiptir. Bunlar arasında; yakınsama hızının tespiti, önceden ve sonradan yapılan hata analizleri vardır.

### 2.3.2. Neumann problemi

#### 2.3.2.1. Klasik çözüm

Tanım kümesi  $\Omega = (0,1)$  olmak üzere verilen bir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için

$$\begin{aligned} -u_{xx} &= f \\ u(0) &= 0 \\ u_x(1) &= g \end{aligned} \quad (2.65)$$

olan  $u$  fonksiyonunu bulma problemi örnek problem olarak verilsin.

### 2.3.2.2. Minimizasyon prensibi

$X \equiv \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = 0\}$  olarak tanımlansın. Bu durumda minimizasyon prensibi,

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2 dx - \int_0^1 fw dx - gw(1) \quad (2.66)$$

olmak üzere

$$u = \arg \min_{w \in X} J(w) \quad (2.67)$$

fonksiyonunu bulmak haline gelir. Bu durum, kısım 2.2.3.de  $\int_{\Omega} gv dA$  integralinin  $g.v(1)$  olduğu göz önünde bulundurularak bulunur. Ayrıca,  $\forall v \in X$  için

$$\delta J_v(u) = \int_0^1 v(-u_{xx} - f) dx + v(1)(u_x(1) - g) = 0 \quad (2.68)$$

olduğunu bulmak için kısmi integrasyon yapılır.

### 2.3.2.3. Zayıf çözüm

$\forall v \in X$  için  $\delta J_v(u) = 0$  olacak şekilde  $u \in X$  fonksiyonunu bulma ifadesi

$$\int_0^1 u_x v_x dx = \int_0^1 f v dx + g v(1) \quad , \forall v \in X \quad (2.69)$$

ile denk olur.

### 2.3.2.4. Genelleştirme

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_0^1 w_x v_x dx \\ l(v) &= \int_0^1 f v dx + g v(1) \end{aligned} \quad (2.70)$$

olsun. Bu durumda, minimizasyon prensibi

$$u = \arg \min_{w \in X} \frac{1}{2} a(w, w) - l(w) \quad (2.71)$$

biçiminde ve zayıf çözüm de

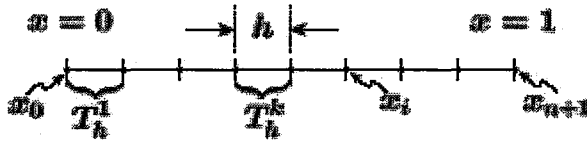
$$u \in X \text{ için } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in X \quad (2.72)$$

biçiminde elde edilir.

### 2.3.3. Rayleigh-Ritz yaklaşımı

#### 2.3.3.1. Düğüm yapısı

Burada, aksi belirtilmediği sürece Dirichlet problemi incelenecektir.



Şekil 2.1. Düğüm yapısı.

$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K T_h^k$  dir.  $k=1, 2, \dots, K=n+1$  için  $T_h^k$  ifadesi sonlu elemanları,  $i=0, 1, \dots, n+1$  için

$x_i$  ifadesi de düğüm noktalarını belirtmektedir. Bu şekilde elde edilmiş parçalanmaya  $T_h$  üçgenleştirmesi denilecektir. Bir boyutlu R uzayında elemanlar



gerçekte üçgen değildirler. Sonlu elemanlar;  $R^2$ 'de doğru parçaları,  $R^3$ 'de üçgen veya çokgenler,  $R^3$ 'de dörtyüzlüler olarak seçilirler. Genel olarak,  $T_h$  üçgenleştirilmesi ile kastedilen, birleşimleri  $\Omega$  tanım kümesini oluşturan  $T_h^k$  elemanlarının koleksiyonudur. Buradaki  $T_h^k$  elemanları açık kümelerdir. Yani tanım kümesinin kapanışı olan  $\bar{\Omega}$ ,  $T_h^k$  elemanlarının kapanışlarının birleşimidir. Sonlu farklar yaklaşımında olduğu gibi burada da düğüm noktaları vardır. Ancak düğüm noktaları burada yaklaşımı tanımlayan elemanlardır.

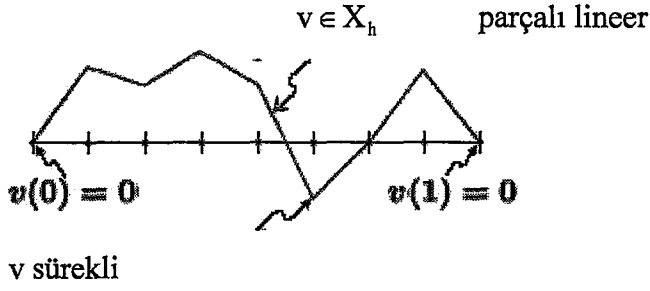
$T_h^k$  ifadesinde,  $k$  eleman numarasını ve  $h$  elemanın boyunu verir. Genel olarak, elemanların farklı  $h^k$  boyunda olduğu düğüm yapıları düşünülebilir. Bu durumda,  $T_h$  ifadesindeki  $h$ , bütün elemanlar üzerindeki en büyük adım aralığıdır.  $h \rightarrow 0$  iken elde edilen  $T_h$  üçgenleştirme dizisinde  $h_{\min}/h_{\max}$  oranı alttan sınırlı ise bu üçgenleştirme dizisinin yarı-regüler olduğu söylenir. Bu çalışmada da üçgenleştirme dizisinin yarı-regüler olduğu kabul edilecektir. Daha yüksek boyutlarda ise eleman şekline bağlı olarak iyi-tanımlılık da tanımlanacaktır.  $T_h^k$  ifadesindeki  $k$  eleman numarası bazen ihmal edilerek yazılmayabilir.

### 2.3.3.2. $X_h \subset X$ yaklaşım uzayı

Sonlu eleman yaklaşım uzayı  $X_h$

$$X_h = \left\{ v \in X : v|_{T_h^k} \in P_1(T_h^k), k=1, \dots, K \right\} \quad (2.73)$$

biçiminde tanımlanır. (2.73) denkleminde  $K$  sonlu bir tamsayıdır.  $v|_{T_h^k}$  ifadesi  $v$  fonksiyonunun  $T_h^k$  elemanına kısıtlanmasıdır.  $P_1(T_h^k)$  ise,  $T_h^k$  elemanı üzerindeki bütün lineer polinomlar uzayıdır. Yukarıdaki ifadeden,  $X_h$  uzayındaki bir  $v$  elemanın  $X = H_0^1(\Omega)$  'da olması gerektiği anlaşılır. Ayrıca  $v$  fonksiyonları, her bir eleman üzerinde parçalı lineerdir.



Şekil 2.2.  $X_h$  uzayında örnek bir  $v$  test fonksiyonu.

### 2.3.3.3. Baz

Sonlu elemanlar yöntemindeki baz kavramından önce genel baz kavramını vermekte yarar vardır.  $Y$  lineer bir uzay,  $y_j \in Y$ ,  $j=1, \dots, M$  olmak üzere,  $y_j$  elemanlarının kümesinin  $Y$  için bir baz olmasının gerek ve yeter şartı, her  $y \in Y$  için

$$y = \sum_{j=1}^M \alpha_j y_j \quad (2.74)$$

olacak şekilde yalnız bir  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  bulunmasıdır. Bu durumda;  $Y$  uzayının boyutu  $\dim(Y)=M$  olur. Düğüm noktalarını temel alan bazda düğüm noktası ifadesi, bazdaki katsayıların sadece Fourier-tipi katsayılar olmadığını, ayrıca fiziksel yapı anlamında da öneme sahip olduklarını gösterir.  $v \in X_h$  ise, baz tanımından

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x) \quad (2.75)$$

yazılabilir.  $\varphi_i(x)$  fonksiyonları  $x_j$  haricindeki tüm düğüm noktalarında sıfır olduğundan

$$v(x_j) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x_j) = v_j, \quad j=1, \dots, n \quad (2.76)$$

yazılabilir.  $\delta_{ij}$  Kronecker delta sembolünü göstermek üzere,  $\varphi_i(x)$  fonksiyonu,  $\varphi_i \in X_h$  ve  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$  koşulları ile tek türlü tanımlanabilir. Dirichlet sınır koşulları gereği  $v(0) = v(1) = 0$  olacağından, baz içerisinde  $\varphi_0$  ve  $\varphi_{n+1}$  fonksiyonları yoktur. Böylece,  $v$  fonksiyonunun  $x = x_i$ 'deki değeri olan  $v_i = v(x_i)$  ifadesi; her eleman üzerindeki doğru parçaları olan  $\sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x)$  ile  $v$  fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değerlerini birleştirir. Bu durumda;  $x=0$  ve  $x=1$ 'de sıfır olan herhangi bir parçalı-lineer  $v$  sürekli fonksiyonu  $v_i = v(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  ile gösterilebilir. Ayrıca;  $v_i = v(x_i)$  seçimi tek türlü yapılabileceğinden,  $\varphi_j$ 'lerin oluşturduğu küme bir baz olur.

#### 2.3.3.4. İzdüşüm

$u_h \in X_h$  olmak üzere, yaklaşık çözüm

$$u_h = \sum_{j=1}^n u_{hj} \varphi_j(x) \quad (2.77)$$

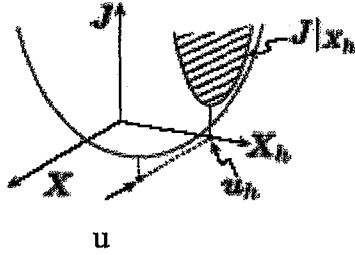
biçiminde olsun. Bunu bulmak için,

$$J \left( \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j \right) \quad (2.78)$$

fonksiyoneli minimize eden  $u_{hj} = w_j$  oluşturulsun. Daha açık bir ifade ile,  $u_{hj}$ 'nin (2.78) fonksiyoneli minimize ettiği kabul edilsin. Yani;

$$u_{hj} = \arg \min J \left( \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j \right) \quad (2.79)$$

olması istenmektedir. Bu örnek soruda, Rayleigh-Ritz yaklaşımındaki uzayın ve bazın özel olarak seçilmesi ile sonlu eleman yaklaşımı yapılmaktadır. Aşağıda; sonlu eleman yaklaşımı geometrik olarak verilmiştir.



Şekil 2.3. J paraboloidini  $X_h$  uzayında minimize eden  $u_h$  fonksiyonu.

Şekil 2.3 te;  $u$ , fonksiyoneli  $X$  uzayındaki minimize eden argüman,  $u_h$  ise  $X_h$  uzayındaki minimize eden argümandır.

$X_h$  uzayının herhangi bir elemanı  $\phi_j$  'ler üzerinde toplam yapılarak gösterilebilir. Bu yüzden,  $J(w)$  fonksiyoneli minimize eden  $u_h$  fonksiyonu  $X_h$  uzayındaki bütün fonksiyonlar üzerinden bulunmaktadır. Böylece; baz seçimi katsayıları etkileyecek, minimum değeri ise etkilemeyecektir. Yukarıdaki şekilde görüleceği üzere,  $J|_{X_h}$  bir paraboloiddir.  $J$  fonksiyonelinin  $X$  üzerindeki genişlemesi ise sonsuz boyutlu bir paraboloid olacaktır.  $X_h$  sonlu eleman yaklaşım uzayı büyüdükçe  $X$  uzayının daha fazlasını içine alacaktır. Böylece, eleman sayısı artırıldığında  $u_h$  yaklaşım fonksiyonu da  $u$  klasik çözümüne yaklaşır.  $J(w)$  fonksiyoneli minimum yapan  $J(u_h)$  değeri  $X$  uzayının bir  $X_h$  alt uzayında olduğundan,  $J(u_h) \geq J(u)$  eşitsizliği söz konusudur.

### 2.3.3.5. J fonksiyonelinin $X_h$ uzayına kısıtlanması: $J|_{X_h}$

(2.78) de verilen  $J(w)$  fonksiyoneli yerine yazılırsa,

$$J\left(\sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) = \frac{1}{2} a\left(\sum_{i=1}^n w_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) - l\left(\sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right)$$

ifadesi elde edilir.  $a(w, w)$  bilinear formunda

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^n w_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) &= a\left(w_1 \varphi_1 + \sum_{i=2}^n w_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) \\ &= w_1 a\left(\varphi_1, \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) + a\left(\sum_{i=2}^n w_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i a\left(\varphi_i, \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \left(a\left(\varphi_i, w_1 \varphi_1 + \sum_{j=2}^n w_j \varphi_j\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \left(a\left(\varphi_i, \varphi_1\right) w_1 + a\left(\varphi_i, \sum_{j=2}^n w_j \varphi_j\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n a\left(\varphi_i, \varphi_j\right) w_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i a\left(\varphi_i, \varphi_j\right) w_j \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer adımlar  $l(w)$  lineer formu uygulanarak

$$\begin{aligned} l\left(\sum_{i=1}^n w_i \varphi_i\right) &= l(w_1 \varphi_1) + l\left(\sum_{i=2}^n w_i \varphi_i\right) \\ &= w_1 l(\varphi_1) + l\left(\sum_{i=2}^n w_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i l(\varphi_i) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitlikler  $J(w)$  fonksiyonelinde yerine yazılırsa

$$J\left(\sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i a\left(\varphi_i, \varphi_j\right) w_j - \sum_{i=1}^n w_i l(\varphi_i)$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıda elde edilen denklemler matris ve vektörler kullanarak ifade edilecek olursa;  $J$  fonksiyoneli kullanılarak  $J^R$

$$J^R \equiv J\left(\sum_{j=1}^n w_j \varphi_j\right) = \frac{1}{2} \{w\}^T [A_h] \{w\} - \{w\}^T \{F_h\} \quad (2.80)$$

olarak tanımlanır. Burada  $J|_{X_h} : X_h \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X_h$ 'teki fonksiyonlar cinsinden ifade edilirken,  $J^R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ise baz katsayıları cinsinden ifade edilir. Minimum yapan argümanın aynı kalacağına dikkat edilmelidir:  $J^R(u_{hj}) = J|_{X_h}(u_h) = J(u_h)$ .  $\{w\}$  ifadesi  $\{w_1, \dots, w_n\}^T$  vektörünü temsil etmektedir. Benzer şekilde,  $\{u_h\}$  ifadesi de  $u_h$ 'nin baz katsayıları yani düğüm noktalarındaki değerleri olan  $\{u_{h1}, \dots, u_{hn}\}^T$  vektörünü temsil etmektedir. Ayrıca,  $\{F_h\}$

$$\{F_h\} \in \mathbb{R}^n : F_{hi} \equiv l(\varphi_i) \left( = \int_{\Omega} f \varphi_i dx \right) \quad (2.81)$$

vektörünü ve  $[A_h]$  ise

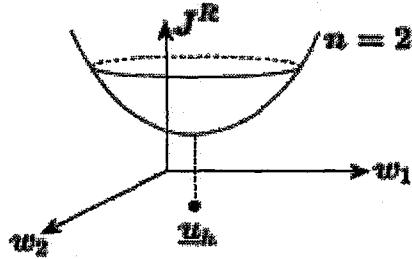
$$[A_h] \in \mathbb{R}^{n \times n} : A_{hij} \equiv a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx \quad (2.82)$$

matrisini temsil etmektedir.

### 2.3.3.6. Minimizasyon

$\{u_h\} = \arg \min_{\{w\} \in \mathbb{R}^n} J^R(\{w\})$  olsun.  $J^R(\{w\} = \{u_h\} + \{v\})$  ifadesinin açılımını yapalım.

$\{v\} = 0$  olmadıkça  $J^R(\{w\}) > J^R(\{u_h\})$  olması istenmektedir.



Şekil 2.4.  $n=2$  seçildiğinde  $J$  paraboloidini minimize eden argüman.

$$\begin{aligned}
J^R(\{\mathbf{u}_h\} + \{\mathbf{v}\}) &= \frac{1}{2}(\{\mathbf{u}_h\} + \{\mathbf{v}\})^T [\mathbf{A}_h] (\{\mathbf{u}_h\} + \{\mathbf{v}\}) - (\{\mathbf{u}_h\} + \{\mathbf{v}\})^T \{\mathbf{F}_h\} \\
&= \frac{1}{2}\{\mathbf{u}_h\}^T [\mathbf{A}_h] \{\mathbf{u}_h\} - \{\mathbf{u}_h\}^T \{\mathbf{F}_h\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\{\mathbf{v}\}^T [\mathbf{A}_h] \{\mathbf{u}_h\} + \frac{1}{2}\{\mathbf{u}_h\}^T [\mathbf{A}_h] \{\mathbf{v}\} - \{\mathbf{v}\}^T \{\mathbf{F}_h\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\{\mathbf{v}\}^T [\mathbf{A}_h] \{\mathbf{v}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J^R(\{\mathbf{u}_h\} + \{\mathbf{v}\}) &= J^R(\{\mathbf{u}_h\}) \\
&\quad + ([\mathbf{A}_h] \{\mathbf{u}_h\} - \{\mathbf{F}_h\})^T \{\mathbf{v}\} \quad \rightarrow \quad \delta J_{\{\mathbf{v}\}}^R(\{\mathbf{u}_h\}) \quad \text{SPT} \\
&\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\{\mathbf{v}\}^T [\mathbf{A}_h] \{\mathbf{v}\}}_{>0, \forall \{\mathbf{v}\} \neq 0} \quad \text{SPT}
\end{aligned}$$

Bu ifade asıl olarak  $\mathbf{u}_h$  civarında bir Taylor serisidir.  $J^R$  kuadratik olduğundan bu Taylor serisi de kuadratik terimle son bulur.

$$\delta J_{\{\mathbf{v}\}}^R(\{\mathbf{u}_h\}) = 0, \quad \forall \{\mathbf{v}\} \in \mathbb{R}^n \quad (2.83)$$

olmasının gerek ve yeter şartı

$$\nabla J^R(\{\mathbf{u}_h\}) = [\mathbf{A}_h] \{\mathbf{u}_h\} - \{\mathbf{F}_h\} = 0 \quad (2.84)$$

olmasıdır. (2.83)-(2.84) çift yönlü şartlı gerektirmesi varsa,

$$J^R(\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{u}_h\} + \{\mathbf{v}\}) > J^R(\{\mathbf{u}_h\}), \quad \forall \{\mathbf{v}\} \neq 0 \quad (2.85)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Eğer  $[\mathbf{A}_h] \{\mathbf{u}_h\} - \{\mathbf{F}_h\} \neq 0$  ise, yeterince küçük bir  $\epsilon$  için  $\{\mathbf{v}\} = -\epsilon([\mathbf{A}_h] \{\mathbf{u}_h\} - \{\mathbf{F}_h\})$  seçilerek kuadratik terimler ihmal edilmiş olur. Böylece,  $J^R$  ifadesi azalır. Bu durum,  $[\mathbf{A}_h] \{\mathbf{u}_h\} - \{\mathbf{F}_h\}$  ifadesi sıfırdan farklı ise,  $J^R$  ifadesinin minimum olamayacağını gösterir.

Şimdi,  $\{A_h\}\{u_h\} - \{F_h\} = 0$  olsun. Bu durumda,  $\{v\} = 0$  olmadıkça

$$J^R(\{u_h\} + \{v\}) = J^R(\{u_h\}) + \frac{1}{2}\{v\}^T [A_h] \{v\} > J^R(\{u_h\}) \quad (2.86)$$

olacaktır. Bu, ispatı tamamlar.

### 2.3.3.7. $J^R$ paraboloidi

$[A_h]$  matrisi SPT olduğundan  $[Q]^T [A_h] [Q] = [\Lambda]$  biçiminde köşegenleştirilebilir. Burada,  $[Q]$ ,  $[A_h]$  matrisinin ortonormal öz vektörlerinden oluşan matris ve  $[\Lambda]$  matrisi  $i=1, \dots, n$  olmak üzere  $\lambda_i$  pozitif reel öz değerlerinden oluşan köşegen matristir.  $J^R$  fonksiyoneli

$$J^R\left(\underbrace{\{u_h\} + \{v\}}_{\{w\}}\right) = J^R(\{u_h\}) + \frac{1}{2}\{v\}^T [A_h] \{v\} \quad (2.87)$$

olarak verilmişti. Herhangi bir  $\{v\}$  vektörü eksenlerin döndürülmesi olarak  $[Q]\{z\}$  biçiminde ifade edilirse

$$\begin{aligned} J^R(\{u_h\} + \{v\}) &= J^R(\{u_h\}) + \frac{1}{2}\{z\}^T [\Lambda] \{z\} \\ &= J^R(\{u_h\}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{1/\lambda_i} \end{aligned} \quad (2.88)$$

elde edilir. Böylece;  $J^R(\{w\})$  ifadesi minimumu  $J^R(\{u_h\})$  olan ve elipsoidal yan kesitlere sahip olan bir paraboloid olur.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{1/\lambda_i} = \text{sabit} \quad (2.89)$$



olduğunda  $J^R(\{w\})$  sabittir. Bu denklem,  $R^n$ 'de asal eksenini  $1/\sqrt{\lambda_{\min}}$  ve yedek eksenini  $1/\sqrt{\lambda_{\max}}$  olan bir elipsoidin denklemdir. Buradan,  $J: X \rightarrow R$  sonsuz boyutlu bir paraboloid olarak elde edilir.

### 2.3.3.8. İzdüşümün sonucu

$$\underbrace{[A_h]}_{a(\varphi_i, \varphi_j)} \{u_h\} = \underbrace{\{F_h\}}_{l(\varphi_i)} \quad (2.90)$$

olacak şekilde  $\{u_h\} \in R^n$ 'nin bulunması, yaklaşık sonucun

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_{hj} \varphi_j(x) \quad (2.91)$$

yapısında olacağı sonucuna götürür. Farklı bazlar seçildiğinde bant genişliği, kondisyon yapısı ve sparse -sıfırlı yapısı farklı olan  $[A_h]$  matrisleri ve dolayısıyla farklı  $\{u_h\}$  vektörleri elde edilir. Örneğin;  $a(\cdot, \cdot)$  iç çarpımında ortonormal olan  $\varphi_i$  fonksiyonları baz olarak alındığında  $[A_h]$  matrisi köşegen matris olur. Ancak,  $u_h(x)$  yaklaşık çözümü sadece uzayın seçimine bağlıdır, baz seçiminden bağımsızdır.

Ayrıca, SPT yapısı çözümün varlığını ve tekliğini garantilemektedir.

### 2.3.4. Galerkin yaklaşımı

Galerkin yaklaşımı zayıf çözüm üzerine inşa edilir. Minimizasyon prensibinin varolmadığı durumlarda bile zayıf çözümün varlığından, Galerkin yaklaşımı çok daha geniş bir alana uygulanabilir. Galerkin yaklaşımı sonlu eleman analizinin bir köşe taşı olarak nitelendirilir. Aşağıda izah edilen yöntem her denklem, her problem ve her ayrıklaştırma için çalışır. Her durum için  $X$ ,  $X_h$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  ve  $l(\cdot)$  ifadeleri değişecektir. Galerkin metodu sonlu elemanlar dışında da yaygın olarak kullanılır.

$T_h$  üçgenleştirmesi,  $X_h$  yaklaşım uzayı ve  $X_h$  yaklaşım uzayının bazı  $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  Rayleigh-Ritz yaklaşımına benzer olarak belirlensin.

### 2.3.4.1. İzdüşüm

$u_h(x) \in X_h$  yaklaşım fonksiyonu

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_{hj} \varphi_j(x) \quad (2.92)$$

yapısında teklif edilsin. Bu durumda,  $u_{hj}$  katsayıları

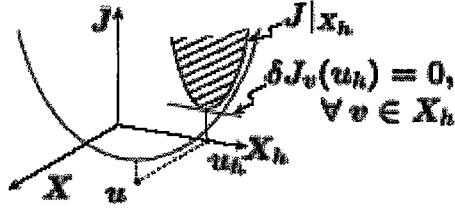
$$\delta J_v(u_h) = 0, \forall v \in X_h \quad \Leftrightarrow \quad a(u_h, v) = l(v), \forall v \in X_h \quad (2.93)$$

denkliğini sağlayacak şekilde oluşturulur.

$J(w)$  fonksiyonelinin tanımından,

$$\begin{aligned} J(u_h + v) &= \frac{1}{2} a(u_h + v, u_h + v) - l(u_h + v) \\ &= J(u_h) + a(u_h + v) - l(v) + \frac{1}{2} a(v, v) \\ &= J(u_h) + \delta J_v(u_h) + \frac{1}{2} a(v, v) \end{aligned}$$

olduğu bellidir.  $\delta J_v(w) = a(w, v) - l(v)$  olduğundan,  $\delta J_v(u_h) = a(u_h, v) - l(v)$  eşitliği bulunur. Her  $w \in X_h$  için  $J(w)$  fonksiyonelinin minimumunun  $J(u_h)$  olması isteniyorsa; ya her  $v \in X_h$  için  $\delta J_v(u_h) = 0$  olmalı, yada her  $v \in X_h$  için  $a(u_h, v) = l(v)$  olmalıdır.



Şekil 2.5. Yaklaşım uzayının geometrik yorumu.

Minimizasyon koşulunu göz önüne alalım.  $\forall v \in X$  için  $\delta J_v(u_h) \neq 0$  olacaktır.  $u$  gerçek çözümü  $X_h$  yaklaşım uzayında olmadığı sürece;  $\delta J_v(u_h) \neq 0$  değeri için  $X$  uzayında  $J(w)$  fonksiyoneli düşük değerlere götürecek  $u_h$  'lar vardır.  $u$  gerçek çözümü  $X_h$  yaklaşım uzayında ise  $\delta J_v(u_h) = 0$  olacaktır.

Minimizasyon prensibinden bağımsız hareket edilebilir.  $u \in X$  çözümü

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in X \quad (2.94)$$

koşulunu sağlıyorsa,  $u_h \in X_h$  yaklaşık çözümünün de

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in X_h \quad (2.95)$$

koşulunu sağlaması beklenir. Bu koşulun her bir nokta için sağlanması istenmeyecektir. Belirli  $v$  test fonksiyonları için integral anlamında sağlanması talep edilecektir.

### 2.3.4.2. Varyasyon prensibi

Herhangi bir  $v \in X_h$  test fonksiyonu

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(x) \quad (2.96)$$

biçiminde yazılabileceğinden,

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in X_h \quad (2.97)$$

eşitliğinin gerek ve yeter şartı

$$a(u_h, \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x)) = l(\sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x)), \quad \forall \{v\} \in \mathbb{R}^n \quad (2.98)$$

olmasıdır. Ancak,  $u_h = \sum_{j=1}^n u_{hj} \varphi_j(x)$  olduğundan,

$$a(\sum_{j=1}^n u_{hj} \varphi_j, \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i) = l(\sum_{i=1}^n v_i \varphi_i), \quad \forall \{v\} \in \mathbb{R}^n$$

yazılabilir. Bilineerlik ve lineerlik kullanılarak,

$$\{v\}^T [A_h] \{u_h\} = \{v\}^T \{F_h\}, \quad \forall \{v\} \in \mathbb{R}^n$$

yazılır. Önceden tanımlanmış olan  $[A_h]$  ve  $\{F_h\}$  matrisleri için

$$\{v\}^T [A_h] \{u_h\} = \{v\}^T \{F_h\}, \quad \forall \{v\} \in \mathbb{R}^n$$

matris yapısında olan

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i a(\varphi_i, \varphi_j) u_{hj} = \sum_{i=1}^n v_i l(\varphi_i), \quad \forall \{v\} \in \mathbb{R}^n \quad (2.99)$$

eşitliğine ulaşmak için  $v_i$  ve  $u_{hj}$  dışarı alınacaktır.

$\{v\} = (1, 0, \dots, 0)^T$  alınırsa  $\sum_{j=1}^n A_{h1j} u_{hj} = F_{h1}$  elde edilir.

$\{v\} = (0, 1, \dots, 0)^T$  alınırsa  $\sum_{j=1}^n A_{h2j} u_{hj} = F_{h2}$  elde edilir.

Benzer adımlar takip edilerek,

$$\{v\}^T [A_h] \{u_h\} = \{v\}^T \{F_h\}, \forall \{v\} \in R^n \Leftrightarrow [A_h] \{u_h\} = \{F_h\} \quad (2.100)$$

denkliği elde edilir. Farklı  $v$  test vektörleri alınsaydı, farklı ve hatta simetrik olmayan denklemler elde edilirdi. Buna karşın,  $\{u_h\}$  vektörü aynı kalırdı. Galerkin yöntemine göre, burada seçilen test fonksiyonu  $v$  ve yaklaşım fonksiyonu  $u_h$  uzaylarının bazıları aynıdır.

### 2.3.4.3. Ağırlıklı kalanlar yöntemleri

Bir  $L$  operatörü ve  $L$  ile kurulan  $Lu-f=0$  kısmi diferansiyel denklemi verilsin. Ağırlıklı kalanlar yöntemi,

$$\int_{\Omega} v \underbrace{(Lu - f)}_{\text{kalan}} dA = 0, \forall v \in X_2 \quad (2.101)$$

olacak biçimde bir  $\hat{u} \in X_1 \subset X$  çözümü arar. Burada, noktasal anlamda değil,  $v$  test fonksiyonlarına bağlı olarak integral anlamında  $Lu-f=0$  olması istenmektedir.  $X_1$  ve  $X_2$  uzayları genişledikçe  $\hat{u}$  çözümü  $u$  gerçek çözümüne yaklaşır.  $X_1$  ve  $X_2$  uzaylarının farklı seçimleri ile bir çok farklı yöntem elde edilir. Galerkin yönteminde  $X_1$  ve  $X_2$  uzayları birbirine eşittir,  $X_1 = X_2$ .

$L = -\nabla^2 u$  olduğunda,  $\int_{\Omega} v Lu dA = \int_{\Omega} -\nabla^2 uv dA$  yazmaktansa,

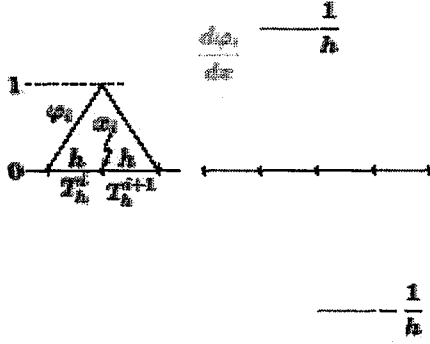
$$\int_{\Omega} v Lu dA = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dA \quad (2.102)$$

yazmak daha akıllıcadır. Çünkü; daha genel bir ifadedir. Ayrıca, daha uygun yaklaşım uzaylarına izin vermektedir; burada  $X_h$  yaklaşım uzayı  $C^0(\Omega)$  seçilebilir,  $C^1(\Omega)$  uzayına gerek yoktur. Üstelik, bu denklem ile doğal sınır koşullarının sağlanması garantilenmektedir.

### 2.3.5. Ayrık denklemler

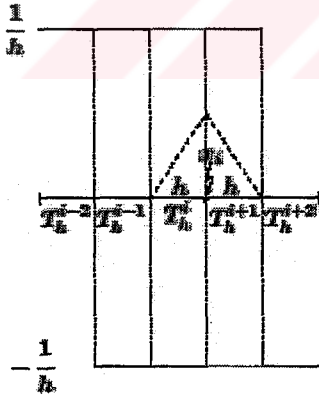
#### 2.3.5.1. $[A_h]$ matrisinin elemanları

Öncelikle  $\varphi_i(x)$  baz fonksiyonları incelenirse



Şekil 2.6.  $\varphi_i$  ve  $d\varphi_i/dx$  fonksiyonlarının grafiği.

olduğu görülür. Baz fonksiyonlarının türevleri olan  $d\varphi_i/dx$  ifadeleri incelenirse



Şekil 2.7.  $d\varphi_i/dx$  türevlerinin elemanlara göre dağılımının grafiği.

olduğu görülür. Şimdi,  $[A_h]$  matrisinin herhangi bir satırı ele alınsın.

$$A_{h,ij} = \int_{\Omega} \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \int_{T_h^i} \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx + \int_{T_h^{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx \quad (2.103)$$

elemanı sadece  $j=i-1, i, i+1$  olduğunda sıfırdan farklı olur. Bu elemanlar incelenirse,

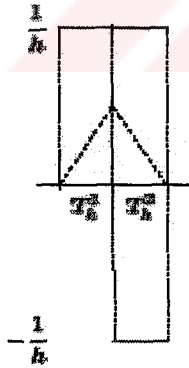
$$A_{h ii} = \frac{1}{h^2} \cdot h + \frac{1}{h^2} \cdot h = \frac{2}{h}$$

$$A_{h ii-1} = \frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot h = -\frac{1}{h}$$

$$A_{h ii+1} = \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot \frac{1}{h} \cdot h = -\frac{1}{h}$$

olduğu görülür.  $\varphi_i(x)$  baz fonksiyonlarının dayanağı çok küçük olduğundan ikişerli çarpımlarından çok az kısmı sıfırdan farklı olarak matrise yerleşir. Böylece  $[A_h]$  matrisinde sparse bir yapı açığa çıkar.

$[A_h]$  matrisinin sınırındaki yani ilk ve son satırlarındaki elemanları incelendiğinde



Şekil 2.8. İlk elemana ait baz fonksiyonunun ve türevinin grafiği.

$$A_{h 11} = \frac{2}{h}, \quad A_{h 12} = -\frac{1}{h}, \quad A_{h nn} = \frac{2}{h}, \quad A_{h n n-1} = -\frac{1}{h}$$

olduğu görülür. Yukarıda elde edilenler birleştirildiğinde  $[A_h]$  matrisi

$$[A_h] = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

olarak bulunur.  $[A_h]$  matrisinin özellikleri SPT, baskın köşegenli, sparse ve üç köşegenli yapıda olarak sıralanabilir. Bir  $h$  çarpanı dışında buradaki matris sonlu farklar yaklaşımı ile aynıdır.

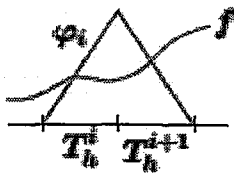
### 2.3.5.2. $\{F_h\}$ sağ taraf yada yük vektörü elemanları

Genel olarak  $l(v)$  fonksiyoneli için  $l(v): F_{hi} = l(\varphi_i)$  durumu söz konusudur. Örnek olarak;

$$l(v) = \langle \delta_{x_i^*}, v \rangle \quad l(\varphi_i) = \langle \delta_{x_i^*}, \varphi_i \rangle = \varphi_i(x_i^*) = \delta_{ii^*}$$

durumu alınabilir. Burada,  $i^*$  seçilmiş bir düğüm noktasıdır.  $F_{hi} = \delta_{ii^*}$  ifadesinin anlamı, birim olan  $i^*$  terimi hariç  $\{F_h\}$  vektörünün elemanlarının sıfır olmasıdır.

Model problemdeki,  $l(v) = \int_{\Omega} f v dx$  durumu alındığında,  $i=1,2,\dots,n$  için



Şekil 2.9.

$$F_{hi} = \int_{T_h^i} f \varphi_i dx + \int_{T_h^{i+1}} f \varphi_i dx \quad (2.105)$$

ifadesi elde edilir.



(2.104) ve (2.105) denklemlerindeki  $[A_h]$  matrisi ve  $\{F_h\}$  vektörü kullanılarak global denklem sistemi

$$\frac{1}{h} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{[A_h]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{h1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{hn} \end{bmatrix}}_{\{u_h\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{h1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{hn} \end{bmatrix}}_{\{F_h\}} \quad (2.106)$$

biçiminde elde edilir. Sonlu eleman çözümü  $\{u_h\} \in R^n$  vektörü bu denklemi sağlar. Bu denklem sisteminde  $[A_h]$  matrisi global sertlik matrisi veya sistem matrisi olarak adlandırılır.  $\{F_h\}$  vektörü global sağ taraf vektörü veya yük vektörü olarak adlandırılır.

### 2.3.6. Kütle matrisi

#### 2.3.6.1. Kütle matrisinin tanımı ve uygulamaları

Elemanları,

$$M_{h \ ij} = \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \ dx}_{(w,v)_{L^2(\Omega)}} \quad (2.107)$$

yapısında olan  $[M_h] \in R^{n \times n}$  matrisine kütle matrisi adı verilir. Bu matrise sonlu eleman I birim operatörü de denir. Burada seçilen  $\varphi(x)$  fonksiyonları, aksi belirtilmedikçe, düğüm noktasını temel alan baz fonksiyonlarıdır.

Birim operatör

1. verilen  $-u_{xx} + Iu = f$  diferansiyel operatörünün bir parçası olarak,
2.  $-u_{xx} = \lambda Iu$  özdeğer problemlerinde,



sparse olan, üç köşegenli ve bantlı formda bir  $[M_h]$  kütle matrisi elde edilir.  $[M_h]$  kütle matrisi I birim matrisine yakın bir formdadır.

Kütle matrisi ismini, kütle terimi bulunduran dinamik denklemlerinden veya ısı denklemlerinden almaktadır.  $[M_h]$  kütle matrisinin tüm terimleri toplanırsa birime, yani  $\Omega$  tanım bölgesinin hacmine yakın bir ifade bulunur. Burada birim elde edilememesinin sebebi Dirichlet sınır koşullarıdır.

## 2.4. Bir Boyutlu Poisson Probleminin Ayrıklaştırılması: Teori Safhası

### 2.4.1. Amaçlar

#### 2.4.1.1. Önceden hata tespiti

$u$  gerçek çözüm ve  $u_h$  da yaklaşımı olmak üzere önceden hata tespiti;  $u - u_h$  farkının değişik ölçümlerini  $c$  problem parametresi,  $h$  adım aralığı ve  $u$  gerçek çözümü cinsinden sınırlandırmaktır. Önceden hata tespiti  $u$  bilinmeyen gerçek çözümü cinsinden ifade edileceğinden,  $u_h$  yaklaşımının yeterince doğru olup olmadığını belirlemede kullanışlı değildir. Bununla birlikte önceden hata tespiti, farklı ayrıklaştırmaları karşılaştırmada kullanışlıdır. Hangisi hangi normlarda daha hızlı yakınsar? Hangisi daha etkindir? İkinci olarak, hızlı yakınsama için gereken şartların belirlenmesinde kullanışlıdır.  $u$  fonksiyonunun yeterince düzgün olup olmadığını kontrol eder. Üçüncüsü, bir metodun doğru uygulanıp uygulanmadığının belirlenmesinde kullanılır.  $u_h \rightarrow u$  yakınsamasını kontrol eder.

#### 2.4.1.2. Sonradan hata tespiti

Sonradan hata tespiti;  $u - u_h$  farkının değişik ölçümlerini  $c$  problem parametresi,  $h$  adım aralığı ve  $u_h$  yaklaşık çözümü cinsinden sınırlandırmaktır.  $u_h$  yaklaşık çözümü bilineceğinden dolayı, sonradan hata tespiti önceden hata tespitine nispeten daha kullanışlıdır. Bununla birlikte sonradan hata tespiti için kullanılan metodların çoğunda  $c$  sabitleri bilinmezler. Bu sabitlerin belirlenmesi için birçok ek işlem

gereklidir. Buna rağmen, sonradan hata analizi pratikte sonlu elemanlar yönteminin giderek önem kazanan bir yanıdır.

Örnek olarak alınan  $-u_{xx} = f$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  probleminde yukarıda bahsedilen  $u$  ve  $u_h$  aşağıdaki şekilde belirlenen fonksiyonlar olurlar.

$u$  fonksiyonu:

$$a(u, v) = l(v) \quad , \forall v \in X \quad (2.109)$$

$$a(w, v) = \int_{\Omega} w_x v_x dx, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v dx \quad (2.110)$$

$$X = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = v(1) = 0\} \quad (2.111)$$

$l(v)$  fonksiyoneli  $H^{-1}(\Omega)$  uzayından herhangi bir lineer fonksiyonel olabilir. Yani, herhangi bir  $v \in H_0^1(\Omega)$  için  $|l(v)| \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$  şartını sağlayan bir lineer fonksiyonel olabilir. Örneğin,  $l(v) = \langle \delta_{x_0}, v \rangle = v(x_0)$  alınabilir.

$u_h$  yaklaşım fonksiyonu:

$$a(u_h, v) = l(v) \quad , \forall v \in X_h \quad (2.112)$$

$$a(w, v) = \int_{\Omega} w_x v_x dx, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v dx \quad (2.113)$$

$$X_h = \{v \in X : v|_{T_h} \in P_1(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h\} \quad (2.114)$$

Burada sunulan bu teori Neumann problemine ve homojen olmayan Dirichlet problemine benzer şekilde uygulanabilir.

#### 2.4.2. İzdüşüm

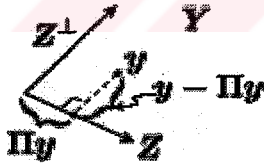
Genel olarak izdüşüm ve interpolasyon tanımı kullanılarak ileride yapılacak analizlere ışık tutulacaktır.  $Z \subset Y$  olmak üzere  $Y$  ve  $Z$  Hilbert uzayları verilsin.

$$\left( \underbrace{\Pi y, v}_{\in Z} \right)_Y = \left( \underbrace{y, v}_{\in Y} \right)_Y, \forall v \in Z \quad (2.115)$$

ifadesi ile  $y$ 'nin  $Z$  üzerindeki  $\Pi y$  izdüşümü tanımlanır. Burada,  $\Pi: Y \rightarrow Z$ 'dir. Bu operatörün en önemli özelliği  $\Pi y$  izdüşümünün her  $z \in Z$  için  $\|y - z\|_Y^2$  ifadesini minimize etmesidir. Bunu görmek için;  $z = \Pi y + v$ ,  $Z$  nin keyfi bir elemanı olsun.

$$\begin{aligned} \|y - (\Pi y + v)\|_Y^2 &= ((y - \Pi y) - v, (y - \Pi y) - v)_Y \\ &= \|y - \Pi y\|_Y^2 - 2 \underbrace{(y - \Pi y, v)}_{0: v \in Z} + \|v\|_Y^2, \forall v \in Z \end{aligned}$$

yazılır.  $z = \Pi y + v \in Z$  ve  $\Pi y \in Z$  olduğundan  $v \in Z$  bulunur. Buradan, her  $v \in Z$  için  $(\Pi y, v)_Y = (y, v)_Y$  olduğundan,  $(y - \Pi y, v)_Y = 0$  olur. Yukarıdaki sonuç her  $z \neq \Pi y$  için  $\|y - \Pi y\|_Y^2 < \|y - z\|_Y^2$  olduğunu belirtir. Diğer bir deyişle;  $y$ 'nin  $\|\cdot\|_Y$  normunda  $Z$  içerisindeki en iyi yaklaşımı  $\Pi y$  olur. Burada bahsedilen  $\Pi y$  izdüşümü



Şekil 2.10.  $y$ 'nin  $Z$  uzayı üzerindeki izdüşümü.

Şekil 2.10 da verilmiştir. Burada  $Z^\perp$ ,  $Z$  uzayının  $Y$  uzayındaki dik tümleyenidir. Yani,  $Y$  uzayının elemanlarının tamamı  $Z$  uzayının elemanlarına diktir. Her  $v \in Z$  için  $(y - \Pi y, v)_Y = 0$  olduğu, yani dik oldukları açıktır.  $z = \Pi y$ 'yi  $Z$  ekseninde  $y$ 'ye en yakın olarak bulmak isteniyorsa,  $y - \Pi y$  farkı  $(\cdot, \cdot)_Y$  iç çarpımına göre  $Z$  eksenine dik olmalıdır.

### 2.4.3. Baz fonksiyonları

#### 2.4.3.1. Polinom interpolasyonu

$n+1$  tane  $(x_i, w_i)$  data noktası verilsin. Burada  $w_i$ ,

$$w_i = w(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n+1$$

değerlerini temsil etmektedir. Polinom interpolasyonu ile kastedilen

$$p(x_i) = w_i \quad 0 \leq i \leq n+1 \quad (2.116)$$

eşitliğini sağlayan en küçük dereceli  $p(x)$  polinomunun bulunmasıdır. Derecesi en fazla  $n$  olan tek bir  $p_n(x)$  polinomunun varlığı ispatlanabilir. İspat için [9] numaralı kaynağa başvurulabilir.

İnterpolasyon polinomunun Lagrange formu

$$p(x) = \sum_{k=0}^n w_k l_k(x) \quad (2.117)$$

şeklinde verilir. Burada  $l_0, l_1, \dots, l_n$  polinomları  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktalarına bağlı, ancak  $w_k$  lara bağımlı olmayan  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$  koşulu ile belirlenen polinomlardır.  $l_i(x)$  polinomu genel olarak

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.118)$$

formundadır.

Hermite interpolasyonunda verilen  $x_i$  noktalarında fonksiyon değerleri ile birlikte bazı türevlerinin de aranan polinomla uyuşması istenir. Örneğin; fonksiyon değerleri ile beraber birinci türevlerinin de bu noktalardaki değerleri aranan polinom ile eşitlensin. Yani,

$$\begin{aligned} p(x_i) &= w(x_i) \\ p'(x_i) &= w'(x_i) \end{aligned} \quad (2.119)$$

olsun. Bu durumda  $p(x)$  polinomu

$$p(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x) + d_j \psi_j(x) \quad (2.120)$$

Burada,  $c_j$  parametresi yaklaşık çözümün kendisinin,  $d_j$  parametresi yaklaşık çözümün birinci türevinin  $x_j$  noktasındaki değerlerini ifade etmek üzere

$$p(x_i) = c_i \quad \text{ve} \quad p'(x_i) = d_i \quad (2.121)$$

koşulları kullanılarak

$$c_i = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x_i) + d_j \psi_j(x_i) \quad (2.122)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \text{ve} \quad \psi_j(x_i) = 0 \quad (2.123)$$

durumunda geçerlidir. Benzer şekilde  $p(x)$  polinomunun türevi alınarak  $d_i$  belirlenip

$$\varphi_j'(x_i) = 0 \quad \text{ve} \quad \psi_j'(x_i) = \delta_{ij} \quad (2.124)$$

durumu elde edilir. Daha genel olarak  $x_i$  noktasında;

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij} \quad 0 \leq j \leq k_i - 1, 0 \leq i \leq n \quad (2.125)$$

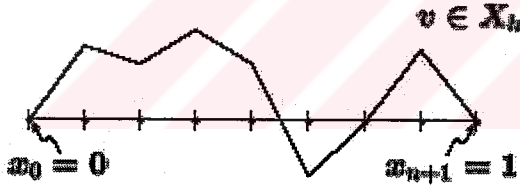
interpolasyon koşulları verilsin.  $p(x)$  polinomu için toplam  $(m+1)$  şart koşulmuş ise

$$m+1 = k_0 + k_1 + \dots + k_n \quad (2.126)$$

eşitliği vardır.  $\Pi_m$  m. derece polinom uzayında yukarıdaki şartları sağlayan  $p(x)$  polinomu tek türlü belirlenebilmektedir. Bu ifadenin ispatı için [9] numaralı kaynağa bakılabilir.

### 2.4.3.2. İnterpolasyon

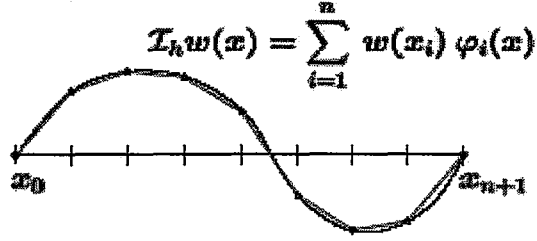
$X_h$  uzayı  $X_h = \{v \in X : v|_{T_h} \in P_1(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h\}$  biçiminde verilsin.  $X_h$  uzayının bir elemanı



Şekil 2.11.  $X_h$  uzayında örnek bir  $v$  test fonksiyonu.

biçiminde verilebilir. Verilen bir  $w \in X$  elemanı için  $I_h w$   $w$ 'yu interpolate eden (interpolant) fonksiyon olsun.  $I_h w \in X_h$  ve  $i=0, \dots, n+1$  için  $I_h w(x_i) = w(x_i)$  koşullarını sağlar. Şekil 2.12. ye bakınız.





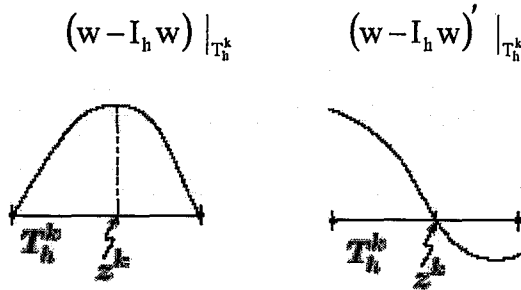
Şekil 2.12. Verilen bir  $w \in X$  elemanı için  $I_h w$  yaklaşım fonksiyonu.

Şimdi burada kullanılan yaklaşım teorisini inceleyelim.  $w \in X$  ve  $\forall T_h \in \mathcal{T}_h$  için  $w|_{T_h} \in C^2(T_h)$  ise

$$\|w - I_h w\|_{H^1(\Omega)} \leq h \max_{T_h \in \mathcal{T}_h} \left( \max_{x \in T_h} |w''| \right) \quad (2.127)$$

$$\|w - I_h w\|_{L^2(\Omega)} \leq h^2 \max_{T_h \in \mathcal{T}_h} \left( \max_{x \in T_h} |w''| \right) \quad (2.128)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada kullanılan yarı-norm ve norm ifadeleri;  $\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int v_x^2 dx$ ,  $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int v^2 dx$  ve  $\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$  ile verilir.  $(w - I_h w)|_{T_h^k}$  fonksiyonu ve türevi



Şekil 2.13.  $w$  fonksiyonu ile  $I_h w$  yaklaşımı arasındaki farkın ve türevinin grafiği.

ile gösterilebilir.

$$\left| (w - I_h w)' \Big|_{T_h^k} (x) \right| = \left| \int_k^k (w - I_h w)'' dx \right| = \left| \int_k^k w'' dx \right| \leq h \max_{x \in T_h^k} |w''|$$

$$\sum_{k=1}^K \int_{T_h^k} (w - I_h w)' \Big|_{T_h^k}^2 dx \leq \frac{1}{h} h \left( h \max_{k=1, \dots, K} \max_{x \in T_h^k} |w''| \right)^2$$

Birinci satır Rolle teoreminden elde edilir. Rolle teoremi,  $w$  fonksiyonunun burada olduğu gibi  $w|_{T_h} \in C^1(T_h)$  olmasını gerektirir. İkinci satırda,  $K=1/h$  ile  $h \times$  integrantın maksimumunun integrali sınırlandırılır. Bununla birlikte,  $w''$  türevinin düğüm noktalarında değil sadece elemanın içerisinde tanımlı olması istenmektedir. Böylece; düğüm noktalarına delta dağılımı yerleştirilse bile, bu hipotez Poisson probleminin u çözümleri için hala sağlanır.

$(I_h w)' \Big|_{T_h^k}$  türevi sabit olduğundan,  $w'$  türevine bir sabit ile yaklaşılmaktadır.  $T_h^k$  elemanında  $w'$  türevi sıçramalara sahipse, yani ikinci türev sonsuz ise bu yaklaşım iyi bir sonuç vermeyecektir.  $w''$  türevinin çok büyük değerler almasıyla hata da çok büyüyecektir.

$w \in X$  ve  $w \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  ise,

$$\|w - I_h w\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{h}{\pi} \|w\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)} \quad (2.129)$$

$$\|w - I_h w\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{h^2}{\pi^2} \|w\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)} \quad (2.130)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada,

$$\|w\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 \equiv \sum_{k=1}^K \|w\|_{H^2(T_h^k)}^2 = \sum_{k=1}^K \int_{T_h^k} (w_{xx}^2 + w_x^2 + w^2) dx \quad (2.131)$$

tir.

## 2.4.4. Hata: enerji normu

### 2.4.4.1. Tanım

Enerji normu  $\|v\|$  ile gösterilip

$$\|v\|^2 = a(v, v) \quad (2.132)$$

ile tanımlanır. Enerji normuna  $a$  normu adı da verilir. Enerji normunun probleme bağlı olarak değiştiğini belirtmekte yarar vardır. Bu çalışmada seçilen örnekler doğrultusunda, enerji normu

$$\|v\|^2 = \int_{\Omega} v_x^2 dx = |v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (2.133)$$

biçiminde ifade edilir.  $a(\cdot, \cdot)$  bir SPT bilinear form olduğundan,  $(a(v, v))^{1/2}$  ifadesi norm olma şartlarını sağlar.  $H^1$  yarı normunun aslında  $H_0^1(\Omega)$  üzerinde bir norm olduğunu hatırlamak bu ifadenin norm olduğunu görmeyi kolaylaştırır.

$u(x)$  klasik çözüm ve  $u_h(x)$  sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözüm olsun.  $e(x) = (u - u_h)(x)$  hata ifadesi olmak üzere  $\|e\|$  normu için  $h$  ve  $u$  cinsinden bir sınır bulunmalıdır. (2.137) ye bakınız.

### 2.4.4.2. Diklik

$$a(u, v) = l(v) \quad , \forall v \in X \quad (2.134)$$

olduğundan,  $X_h \subset X$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= l(v) & , \forall v \in X_h \\ -a(u_h, v) &= -l(v) & , \forall v \in X_h \end{aligned} \quad (2.135)$$

yazılabilir. Böylece bilineerlikten

$$a(u - u_h, v) = 0, \forall v \in X_h \quad (2.136)$$

elde edilir.

### 2.4.4.3. Genel sınırlama

Herhangi bir  $w_h = u_h + v_h \in X_h$  ve  $v_h \in X_h$  için

$$\begin{aligned} \frac{a(u - w_h, u - w_h)}{\|u - w_h\|^2} &= a((u - u_h) - v_h, (u - u_h) - v_h) \\ &= \underbrace{a(u - u_h, u - u_h)}_{\|e\|^2} - \underbrace{2a(u - u_h, v_h)}_{=0: \text{diklikten}} + \underbrace{a(v_h, v_h)}_{v_h \neq 0 \text{ ise } >0} \end{aligned}$$

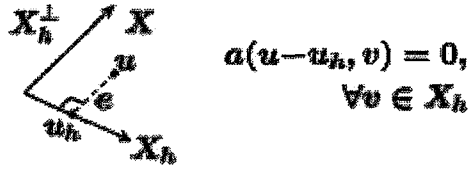
Buradan

$$\|u - u_h\| = \|e\| = \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\| \quad (2.137)$$

olur. Yani,  $u$  klasik çözümünü bilseniz bile,  $X_h$  uzayında enerji normuna göre  $u_h$  sonlu eleman çözümünden daha hassas bir  $w_h$  fonksiyonu bulunamaz.

Enerji normu veya  $a$  normu kullanıldığı sürece klasik sonuç bilinse de bilinmese de, sonlu eleman yöntemi işletilebilir. Sonlu elemanlar yöntemi, bir K.D.D.'nin ayrıklaştırılması problemini yaklaşım teorisine dönüştürür.

Yukarıda anlatılanların geometrik yorumu



Şekil 2.14. Hatanın test fonksiyonuna  $a$  normuna göre dikliği.

biçiminde yapılabilir. Bu durumda,  $a$  normuna göre  $u$  fonksiyonunun  $X_h$  üzerine izdüşümü yani  $u$  fonksiyonuna en yakın noktası olan  $u_h$ ,

$$u_h = \Pi_h^a u \quad (2.138)$$

olur. Bu ifade zayıf çözümde yerine yazılırsa

$$a\left(\underbrace{\Pi_h^a u}_{u_h}, v\right) = a(u, v), \quad \forall v \in X_h \quad (2.139)$$

olur.  $u$  klasik çözümü bilinmiyor, ancak  $l(v)$  hesaplanabileceğinden

$$a(u, v) = a\left(\underbrace{\Pi_h^a u}_{u_h}, v\right) = \underbrace{l(v)}_{\text{hesaplanabilir}}, \quad \forall v \in X_h \quad (2.140)$$

yazılır. Sadece enerji iç çarpımında  $u$  klasik çözümü bilinmeden  $\Pi_h u$  hesap edilebilir. Sınırın  $\|e\| = \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|$  olduğu (2.137) de görüldü. Yani,  $u_h = \Pi_h^a u$  ifadesi herhangi bir uzay boyutu, herhangi bir  $X_h$  sonlu eleman uzayı, herhangi sınır koşulu ve herhangi bir  $a$  SPT bilinear formu için doğrudur. Zayıf çözümde  $a$  bilinear formunun SPT olduğu herhangi bir lineer problem için değişen tek şey normun tanımınıdır. Genelde böyle olmamasına rağmen, burada incelenen soruda  $\|e\| = |e|_{H^1(\Omega)}$ 'dir. Ancak  $\inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|$  ifadesinin  $h$ ,  $u$  ve problem parametrelerine

nasıl bağılı olduğu henüz belirtilmemiştir. Bunun için, sonlu eleman yaklaşım uzayının özelliklerine ihtiyaç vardır.

#### 2.4.4.4. Özel bir sınırlama

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{h}{\pi} \|u\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)} \quad (2.141)$$

olduğu bilinmektedir. Böylece;  $\|u\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)}$  normunun sonlu olduğu kabul edilerek,

$$\begin{aligned} \|e\| &= \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\| \leq \|u - I_h u\| \\ &= \|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{h}{\pi} \|u\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)} \end{aligned}$$

bulunur.

$w_h$  yerine  $I_h w$  interpolate edici fonksiyonundan ziyade  $u_h$  izdüşümü tercih edilir. Bununla birlikte, interpolate edici fonksiyon ile çalışmak hem daha kolaydır, hem de h bağımlılığını doğru olarak verir. Burada incelenen soruda tesadüfen  $u_h = I_h u$ 'dır. h'nin kuvveti arttırılamayacağından buradaki yaklaşım optimaldir.  $\|e\|$  normunun h'den daha hızlı azalmadığı bir çok problem vardır.

Yukarıda bahsedilenler temel değişikliklere uğratılmadan Neumann problemine uygulanabilir.

Yakınsaklık ve düzgünlük incelendiğinde, ilk olarak, en azından a normunda  $u_h$ 'nin u gerçek çözümüne yakınsayacağı görülür. İkinci olarak, bu yakınsamanın h ile orantılı olduğu görülür. Üçüncüsü ise, bu yakınsama hızına ulaşmak için u klasik çözümünün yeterince düzgün yani  $\|u\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)}$  kırık normunda sonlu olması gerekmektedir. Burada zayıf çözüm, sadece  $H^1(\Omega)$  uzayında bulunan  $u_h$  yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılmasına rağmen, hızlı bir yakınsama elde edilmek isteniyorsa u gerçek çözümünün daha düzgün olması istenir. Bundan başka, daha

yüksek mertebeden sonlu elemanlar düşünüldüğünde, en iyi yakınsama hızlarını elde etmek için daha fazla düzgünlük gereksinimi ortaya çıkar. Örneğin; kuadratik sonlu elemanlar için,  $\|e\| \leq ch^2 \|u\|_{H^3(\Omega)}$  eşitsizliği söz konusudur. Burada  $h$ 'nin daha büyük bir kuvveti fakat  $u$  gerçek çözümünün daha büyük bir normu kullanılmıştır.

## 2.4.5. Hata: $H^1$ normu

### 2.4.5.1. Kalan terimler

$H^1$  normu

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 &= |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int v_x^2 dx + \int v^2 dx \end{aligned} \quad (2.142)$$

biçimindedir. Yani  $\|e\|_{H^1(\Omega)}$  normu,  $e$  ve  $e_x$  ifadelerini ölçer.

$a(\cdot, \cdot)$  bilinear formunun koarsifliği,  $\forall v \in X$  için

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (2.143)$$

olacak biçimde en az bir  $\alpha > 0$  bulunması anlamındadır. Yani,

$$\int v_x^2 dx \geq \alpha \left( \int v_x^2 dx + \int v^2 dx \right) \quad (2.144)$$

olmasıdır.

$a(\cdot, \cdot)$  bilinear formunun sürekliliği ise,

$$a(w, v) \leq \beta \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.145)$$

olacak biçimde en az bir  $\beta(=1) > 0$  bulunması anlamındadır. Buradaki eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak elde edilebilir.

#### 2.4.5.2. $H^1$ normu için genel sonuç

$e = u - u_h$  hatası

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \underbrace{\inf_{w \in X_h} \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)}}_{\substack{u \text{ 'nun } X_h \text{ üzerindeki} \\ \text{iz düşümü'nün } H^1 \text{ deki hatası}}}} \quad (2.146)$$

eşitsizliğini sağlar. Genel olarak;  $u_h$  yaklaşık çözümü,  $u$  klasik çözümünün  $X_h$  üzerindeki  $H^1$  izdüşümü değildir. Bu ifadenin ispatı aşağıda verilmiştir.

Herhangi bir  $w_h \in X_h$  için

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - w_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(u_h - w_h, u_h - w_h) && \text{koarsif} \\ &= a(u_h - w_h + (u - u_h), u_h - w_h) && \text{diklik} \\ &= a(u - w_h, u_h - w_h) \\ &\leq \beta \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} \|u_h - w_h\|_{H^1(\Omega)} && \text{süreklilik} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|u_h - w_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)}$$

bulunur. Ancak, her  $w_h \in X_h$  için

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &= \|u - w_h + w_h - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} + \|u_h - w_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$



olur ve buradan

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)}$$

yazılır. Burada simetri kullanılmadığına dikkat edilmelidir. Zayıf çözümdeki  $a$  bilinear formu alttan sınırlı ve sürekli olan herhangi bir lineer probleme bu ispat uygulanabilir.

Simetriklik özelliği ve dolayısıyla minimizasyon ifadesi kullanılarak yukarıdaki sonuç daha da iyileştirilebilir. Enerji normunda

$$a(u - u_h, u - u_h) = \inf_{w_h \in X_h} a(u - w_h, u - w_h) \quad (2.147)$$

yazmak mümkündür. Koarsiflik ve süreklilikten

$$\alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \inf_{w_h \in X_h} \beta \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (2.148)$$

veya

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.149)$$

yazılabilir. Yukarıdaki ispatlar sonlu farklardaki benzer ispatlar ile karşılaştırıldığında, alttan sınırlılık durağanlık yerine, diklik ise tutarlılık veya uyumluluk yerine geçmekte olduğu görülür. Bunlar beraberce yakınsaklığı gerektirmektedir.

### 2.4.5.3. $H^1$ normu için özel bir sonuç

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{2} \frac{h}{\pi} \|u\|_{H^2(\Omega, \tau_h)} \quad (2.150)$$

olduğu bilinmektedir. Burada  $\sqrt{2}$  sabiti,  $(1 + h^2/\pi^2)^{1/2}$  için bir sınırdan ibaret olup,  $H^1$  normuna  $H^1$  yarı normu ve  $L^2$  normundan gelen katkıdan oluşmuştur. Böylece;

$$\begin{aligned} \|e\|_{H^1(\Omega)} &= \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{h}{\pi} \|u\|_{H^2(\Omega, \tau_h)} \end{aligned}$$

bulunur. İki norm denk olduklarından,  $H^1$  normundaki hata enerji normundaki hata ile aynı oranda ilerler.

### 2.4.6. Hata: $L^2$ normu

#### 2.4.6.1. $L^2$ normunun tanımı

$L^2$  normu

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.151)$$

olup,  $\|e\|_{L^2(\Omega)}$  normu  $e$ 'yi ölçer.

#### 2.4.6.2. $L^2$ normu için özel bir sonuç

$L^2$  normundaki hata,  $h$  ve  $u$ 'dan bağımsız bir  $c$  sabiti için

$$\begin{aligned}\|e\|_{L^2(\Omega)} &\leq ch \|e\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq ch^2 \|e\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)}\end{aligned}\quad (2.152)$$

eşitsizliğini sağlar. Bu ifadenin ispatı Aubin-Nitsche hilesi olarak bilinen bir yöntemle yapılacaktır. Yardımcı bir soru olarak;  $e$ ,  $u - u_h$  hatasını belirtmek üzere

$$a(v, \phi) = \int_{\Omega} v \phi dx \quad (2.153)$$

olacak biçimde  $\phi \in X = H_0^1(\Omega)$  fonksiyoneli bulma sorusu seçilsin.  $v=e$  olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} e \phi dx = a(e, \phi) \\ &= a(e, \phi - I_h \phi) \\ &\leq \beta \|e\|_{H^1(\Omega)} \|\phi - I_h \phi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \beta \|e\|_{H^1(\Omega)} \frac{h}{\pi} \|\phi\|_{H^2(\Omega)}\end{aligned}$$

elde edilir. Son satır (2.127)-(2.128) den kaynaklanmaktadır. Bir önceki satır ise; kısım 2.3.1.5.te (2.64) ten;  $e \in L^2(\Omega)$  olduğundan  $\phi$  fonksiyoneli  $\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|e\|_{L^2(\Omega)}$  eşitsizliğini sağlar. Bu eşitsizlik yukarıda yerine yazılıp her iki taraf  $\|e\|_{L^2(\Omega)}$  ile bölünürse

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|e\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.154)$$

elde edilir.

Burada kullanılan farklı ifadelerdeki  $c$  sabitleri  $h$  adım aralığı ve  $u$  klasik çözümünden bağımsız ve birbirlerinden farklıdır. Yapılan ispatta koarsiflik ve simetri kullanılmamış sadece süreklilik talep edilmiştir.  $\|e\|_{L^2(\Omega)}$  normunun  $\|e\|_{H^1(\Omega)}$  normundan daha hızlı yakınsaması sonradan hata tahmininde öneme sahiptir.

## 2.4.7. Lineer fonksiyoneller

### 2.4.7.1. Lineer fonksiyoneller hakkında ön bilgi

$l^0 : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  sınırlı bir lineer fonksiyonel olsun.

$$|l^0(v)| \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.155)$$

olmak üzere, bir lineer fonksiyonel çıktısı  $s$

$$s = l^0(u) + c^0 \quad (2.156)$$

ile tanımlanır. Buradaki  $s$  çıktısı  $c^0$ 'a bağlı olarak afindir, lineer değildir. Bu  $s$  çıktısı için örnek vermek gerekirse;

$s$ :  $D \subset \Omega$  üzerinde ortalama

$$l^0(v) = \int_{\Omega} v \, dx$$

ile gösterilir. Başka bir örnek olarak sınırdeki akı miktarı  $u_x(0)$  ise,

$$l^0(v) = - \int_{\Omega} (1-x)_x v_x \, dx, \quad c^0 = \int_{\Omega} f(1-x) \, dx$$

ile verilebilir. Burada kullanılan  $s$  çıktı fonksiyonelinin sınırlı olması çok önemlidir. İlk örnekte,  $l^0 \in H^{-1}(\Omega)$  olduğu yani sınırlı olduğu açıktır. İkinci durumda ise,  $l^0(v) = v_x(0)$  seçimi yazıldığında,  $H_0^1(\Omega)$  uzayında  $v$  için sınırlı bir fonksiyonel olamaz. Örneğin;  $x \rightarrow 0$  iken  $v$  fonksiyoneli  $x^{3/4}$  olsa,  $v \in H_0^1(\Omega)$  olur. Ancak,  $v_x(0)$  sonsuzdur.  $u_x(0)$ 'ı hesaplamak için  $v_x(0)$  fonksiyoneli kullanılmak zorunda olsaydı, zayıf yakınsama elde edilirdi. Buna karşın, yukarıdaki

$$l^0(v) = - \int_0^1 (1-x)_x v_x dx = \int_0^1 v_x dx \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

seçimi, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile sınırlıdır.

Ancak, beklenildiği üzere  $l^0(u) + c^0 = u_x(0)$  olur mu? Bunu görmek için,  $f \in L^2(\Omega)$  kabul edilerek  $u$  fonksiyonunun  $-u_{xx} = f$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  koşullarının sağladığı hatırlanırsa;

$$\begin{aligned} l^0(u) + c^0 &= - \int_0^1 [(1-x)_x u_x - (1-x)f] dx \\ &= -(1-x)u_x \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x)(-u_{xx} - f) dx = u_x(0) \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki  $l^0(v)$  ve  $v_x(0)$  birbirine denk görünmektedir.  $v=u$  için her ikisi de  $u_x(0)$  değerini hesaplar, ancak genel bir  $v \in H_0^1(\Omega)$  için sınırlı seçim daha iyi sonuç verir.

Şimdi  $s = l^0(u) + c^0$  için  $s_h = l^0(u_h) + c^0$  sonlu eleman yaklaşımı olmak üzere, hata

$$|s - s_h| = |l^0(u) - l^0(u_h)| = |l^0(u - u_h)| = |l^0(e)| \quad (2.157)$$

biçimindedir. Yukarıdaki ifadede,  $e = u - u_h$ 'dir. İkinci adım  $l^0(v)$ 'nin lineerliğinden yazılmıştır.

#### 2.4.7.2. Lineer fonksiyoneller için genel sonuç

$l^0 \in H^{-1}(\Omega)$  olduğunda

$$|l^0(e)| \leq c \|e\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.157)$$

eşitsizliği geçerlidir.  $l^0 \in L^2(\Omega)$  olduğunda ise

$$|l^0(e)| \leq c \|e\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.158)$$

eşitsizliği söz konusudur. Yukarıdaki ifadeler  $l^0$  fonksiyonelinin sınırlılığını belirtir.

$$a(v, \psi) = -l^0(v) \quad , \forall v \in X \quad (2.159)$$

$$a(v, \psi_h) = -l^0(v) \quad , \forall v \in X_h \quad (2.160)$$

olmak üzere herhangi bir  $l^0 \in H^{-1}(\Omega)$  için

$$|l^0(e)| \leq c \|e\|_{H^1(\Omega)} \|\psi - \psi_h\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.161)$$

olur. Burada,  $\psi$  bir dual değişkendir.  $\psi$  için klasik çözüm orijinal denklem olarak da görülebilen  $-\psi_{xx} = -l^0$  ifadesidir. Burada çıktı olarak elde edilen fonksiyonel sanki giriş verisi olarak kullanılmıştır. Simetrik olmayan operatörlerin bulunması durumunda, tek numaralı türevlerin işaretleri orijinal denkleme bağlı olarak değişmek üzere dual operatörü tarafından  $\psi$ 'ye işlem yapılır.  $\psi$ 'ye hangi değer verildiğinden bağımsız olarak yukarıdaki sonuç ispatlanabilir.  $e \in X$  olduğundan,

$$l^0(e) = a(e, \psi) \quad (2.162)$$

bulunur. Ancak, diklikten ve  $\psi_h \in X_h$  olduğu sürece  $a(e, \psi_h) = 0$  olacağından,  $a(e, \psi) = a(e, \psi - \psi_h)$  elde edilir. Böylece, süreklilik kullanılarak

$$|l^0(e)| \leq c \|e\|_{H^1(\Omega)} \|\psi - \psi_h\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.163)$$

bulunur.  $a(\cdot, \cdot)$  bilinear formunda  $\psi$  ikinci argüman olarak kullanıldığından, bu durum simetrik olmayan ve hatta alttan sınırlı olmayan operatörlere de uygulanabilir.

### 2.4.7.3. Lineer fonksiyoneller için probleme bağlı sonuç

Lineer sonlu elemanlar kullanıldığında  $\|e\|_{H^1(\Omega)}$  ve  $\|e\|_{L^2(\Omega)}$  hata normları için önceden elde edilmiş sınırlardan

$$l^0 \in H^{-1}(\Omega) \text{ için } |l^0(e)| \leq c h \|u\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)} \quad (2.164)$$

$$l^0 \in L^2(\Omega) \text{ için } |l^0(e)| \leq c h^2 \|u\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)} \quad (2.165)$$

yazılabilir. Daha iyi bir durum olarak

$$l^0 \in L^2(\Omega) \text{ için } |l^0(e)| \leq c h^2 \|u\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)} \|\psi\|_{H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)} \quad (2.166)$$

elde edilir. Son adımda  $H^1$  hata tahmini dual probleme uygulanmıştır. Bu dual problem pratikte açığa çıkmaz. Sadece  $h^2$  yakınsama hızını tanıtmak için teoride kullanılır. Pratik anlamda  $h^2$  yakınsama hızı öneme sahiptir. Çünkü, ilgilenilen nicelikler hızlı bir şekilde yakınsamaktadırlar.

Yukarıda,  $h^2$  yakınsama hızının elde edilmesi için  $u$ 'nun ve ayrıca  $\psi$ 'nin  $H^2$  kırık normunda bulunması istenmektedir. Bu durum,  $l^0$  fonksiyonelinin genelleşmiş kısmının düğüm noktalarına kısıtlanması durumunda ortaya çıkar. Son olarak, sonlu elemanlar hata analizinde ele alınan normlar matematik açılarından kullanışlıdır, ancak pratikte birbirleri ile ilgileri yoktur.

## 2.5. Bir Boyutlu Poisson Probleminin Ayrıklaştırılması: Uygulama Safhası

Uygulama esnasında dört adım takip edilecektir:

- 1- Prototip soru
- 2- Elemanlar ile ilgili nicelikler
- 3- Birleştirme
- 4- Sınır koşulları





Yukarıda verilen soru bütün homojen Neumann sınır koşullarına karşılık gelmektedir.  $l(1) \neq 0$  ise problemin çözümü olmayabilir. Eğer problemin çözümü varsa, bu şartlar altında sonsuz çözüm elde edilir. Ancak,  $\hat{u}_h$  yaklaşık çözümü hiçbir zaman bulunmayacağı için bir karışıklık oluşmayacaktır.

### 2.5.1.3. Ayrık denklemler

Daha önce elde edilen denklemlere benzer olarak

$$[\hat{A}_h] \{\hat{u}_h\} = \{\hat{F}_h\} \quad (2.170)$$

lineer cebirsel denklem sistemi yazılır. Burada yaklaşık çözüm

$$\hat{u}_h(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{u}_{hi} \varphi_i(x) \quad (2.171)$$

ile verilir. Denklem sistemindeki matris elemanları ise

$$\begin{aligned} \hat{A}_{hij} &= a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_b^a \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx, \quad 0 \leq i, j \leq n+1 \\ \hat{F}_{hi} &= l(\varphi_i) \left( = \int_b^a f \varphi_i dx \right), \quad 0 \leq i \leq n+1 \end{aligned} \quad (2.172)$$

ile verilir. Dikkat edilirse,  $i=0, n+1$  ve  $j=0, n+1$  satır ve sütunları hariç buradaki denklem sistemi 2.3.5.te elde edilen denklem sistemi ile aynıdır. Rayleigh-Ritz veya Galerkin yaklaşımı kullanılarak bu denklem sistemi elde edilebilir. Bunun için  $\hat{u}_h$  yerine  $\varphi_i$  ve  $v$  yerine  $\varphi_j$  yazılır. Buradaki  $[\hat{A}_h]$  matrisi açık yazıldığında

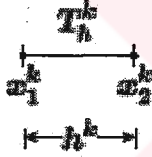
$$[\hat{A}_h] = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.173)$$

ilk ve son satırlar Neumann satırları olarak adlandırılır.  $[\hat{A}_h]$  matrisi simetriktir, ancak sadece pozitif yarı-tanımlıdır.

## 2.5.2. Elemanlar ile ilgili nicelikler

### 2.5.2.1. Elemanlar için yerel tanımlar

$T_h$  bölgüsü içerisinde bir  $T_h^k$  elemanı alınsın.



Şekil 2.16.  $T_h$  bölgüsünün bir elemanı ve yerel düğüm noktaları.

Şekil 2.16 daki gösterimde;  $x_k^1$ ,  $T_h^k$  elemanının 1. yerel düğüm noktasını,  $x_k^2$ ,  $T_h^k$  elemanının 2. yerel düğüm noktasını ve  $h^k$ ,  $T_h^k$  elemanının uzunluğunu belirtmektedir. Düğüm noktalarının bir eleman içerisinde 1 ve 2 olarak gösterilmesi yerel gösterimdir. Aynı yerel düğüm noktalarının global numaraları farklı olacaktır. Bölüm 2.5.3.2 de bu iki numaralandırma arasında birebir bir eşleme yapılacaktır.

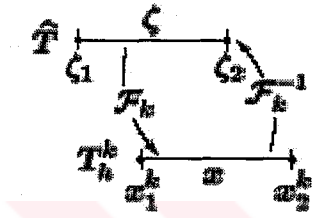
### 2.5.2.2. Pilot eleman

$(-1,1)$  açık aralığı  $\hat{T}$  pilot elemanı olsun.



Şekil 2.17. Pilot eleman.

$\zeta_1$  pilot elemanın 1. yerel düğüm noktası ve  $\zeta_2$  pilot elemanın 2. yerel düğüm noktası olsun. Bölgedeki her  $T_h^k$  elemanını  $\hat{T}$  pilot elemanına bağlayan afin dönüşüm



Şekil 2.18. Pilot eleman ile bölgedeki bir eleman arasındaki dönüşümler.

$$F_k(\zeta) = x_1^k + \frac{1}{2}(1+\zeta)h^k \quad F_k^{-1}(x) = 2\frac{x-x_1^k}{h^k} - 1 \quad (2.174)$$

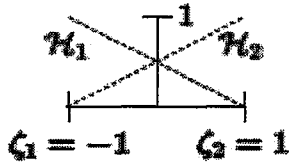
biçiminde kurulabilir. Afin dönüşümler lineer eşlemelere bir sabit eklenerek elde edilirler. Afin dönüşümlerin sonlu elemanlar yöntemini ilgilendiren özelliklerinden biri; p. dereceden polinomları yine p. derece polinomlara dönüştürmeleridir.

### 2.5.2.3. Pilot eleman uzayı ve bazı

$\hat{T}$  pilot elemanı üzerinde bütün lineer polinomlardan oluşan  $\hat{X}$  uzayı tanımlansın.  $\hat{X} = P_1(\hat{T})$  ile gösterilip,  $\dim(\hat{X}) = 2$ 'dir.  $H_1(\zeta)$  ve  $H_2(\zeta)$  Lagrange interpolasyon fonksiyonları

$$H_1(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2}, H_2(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2} \quad (2.175)$$

ile verilmek üzere,  $\hat{X}$  uzayı için bir baz teşkil ederler.



Şekil 2.19. Pilot eleman baz fonksiyonları.

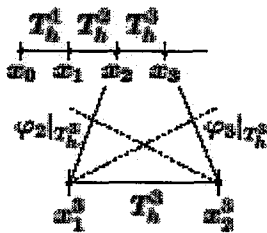
Herhangi bir  $v \in \hat{X}$  için  $v(\zeta) = \sum_{i=1}^2 v(\zeta_i) H_i(\zeta)$  olacağı açıktır.

#### 2.5.2.4. Lokal sertlik matrisi

$[\hat{A}_h]$  matrisinin herhangi bir elemanının

$$\hat{A}_{h,ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_b \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx \quad (2.176)$$

ile hesaplanacağı bölüm 2.5.1.3.te verildi. Örnek olarak;  $T_h^3$ , bölgenin 3. elemanı alınsın.



Şekil 2.20. Baz fonksiyonlarının bir eleman üzerine kısıtlanması.

$T_h^3$  elemanının  $[\hat{A}_h]$  matrisine katkısı

$$\int_{T_h^3} \frac{d\varphi_{2yada3}}{dx} \Big|_{T_h^3} \cdot \frac{d\varphi_{2yada3}}{dx} \Big|_{T_h^3} dx \quad (2.177)$$

olarak bulunur. Değişken değiştirerek  $T_h^3$  elemanından  $\hat{T}$  pilot elemanına geçilebilir. Değişken değiştirirken

$$\varphi_{2yada3} \Big|_{T_h^3}(x) = H_{1yada2}(F_3^{-1}(x)) \quad (2.178)$$

olduğu açıktır. Ayrıca;  $F_k(\zeta)$  kullanılarak

$$\frac{dx}{d\zeta} \Big|_{T_h^3} = \frac{dF_3}{d\zeta} = \frac{h^3}{2}, \quad \frac{d\zeta}{dx} \Big|_{T_h^3} = \frac{dF_3^{-1}}{dx} = \frac{2}{h^3} \quad (2.179)$$

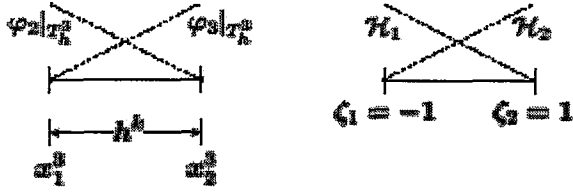
elde edilir. Böylece

$$\int_{T_h^3} \frac{d\varphi_{2yada3}}{dx} \cdot \frac{d\varphi_{2yada3}}{dx} dx = \int_{T_h^3} \frac{d}{dx} H_{1yada2}(F_3^{-1}(x)) \frac{d}{dx} H_{1yada2}(F_3^{-1}(x)) dx \quad (2.180)$$

olur. Burada,  $F_3^{-1}(x)$  ters dönüşümü yerine  $\zeta$  yazılarak

$$\begin{aligned} & \int_{T_h^3} \frac{d}{dx} H_{1yada2}(F_3^{-1}(x)) \frac{d}{dx} H_{1yada2}(F_3^{-1}(x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{d}{d\zeta} H_{1yada2} \cdot \frac{d\zeta}{dx} \cdot \frac{d}{d\zeta} H_{1yada2} \cdot \frac{d\zeta}{dx} d\zeta \frac{h^3}{2} \\ &= \frac{h^3}{2} \int_{-1}^1 \frac{dH_{1yada2}}{d\zeta} \cdot \frac{dH_{1yada2}}{d\zeta} d\zeta \end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 2.21. Bölgeden bir eleman ve pilot eleman üzerindeki baz fonksiyonları.

Bu durumda

$$\int_{T_h^3} \frac{d\varphi_{2\text{yada}3}}{dx} \cdot \frac{d\varphi_{2\text{yada}3}}{dx} dx \quad (2.181)$$

yerine

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{dH_{1\text{yada}2}}{d\zeta} \cdot \frac{2}{h^k} \right) \cdot \left( \frac{dH_{1\text{yada}2}}{d\zeta} \cdot \frac{2}{h^k} \right) \left( \frac{h^k}{2} \right) \quad (2.182)$$

kullanılarak  $[\hat{A}_h]$  matrisine katkı hesap edilebilir.

Daha yüksek boyutlarda ve daha karmaşık dönüşümlerde, eğri tanım aralıkları için, bu detaylı değişken değiştirme işlemi bir gereklilik halini alacaktır.

k. elemana ait yerel sertlik matrisi  $[A^k] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  olsun. Bu durumda,  $\{H\}$  vektörü

$$\{H\} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (2.183)$$

ve  $\alpha, \beta = 1, 2$  olmak üzere,  $[A^k]$  yerel sertlik matrisinin elemanları

$$\frac{2}{h^k} \int_{-1}^1 \frac{dH_\alpha}{d\zeta} \cdot \frac{dH_\beta}{d\zeta} d\zeta = \frac{2}{h^k} \int_{-1}^1 \frac{d}{d\zeta} \{H\} \cdot \frac{d}{d\zeta} \{H\}^T d\zeta = \frac{1}{h^k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv [A^k] \quad (2.184)$$

biçiminde tanımlanır.  $[A^k]$  yerel sertlik matrisi  $[\hat{A}_h]$  global sertlik matrisine k. elemandan gelen katkıyı temsil eder. Burada,  $[A^k]$  yerel sertlik matrisinin  $[\hat{A}_h]$  global sertlik matrisine doğru global numaralarla yerleştirilmesine dikkat edilmelidir.

$$\frac{2}{h^k} \int_{-1}^1 \frac{d}{d\zeta} \{H\} \cdot \frac{d}{d\zeta} \{H\}^T d\zeta = \frac{2}{h^k} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{dH_1}{d\zeta} \\ \frac{dH_2}{d\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dH_1}{d\zeta} & \frac{dH_2}{d\zeta} \end{bmatrix} d\zeta = \frac{1}{h^k} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.185)$$

ifadesi diyadik form olarak adlandırılır. (2.185) diyadik formu kullanılarak elemanlara ait lokal sertlik matrislerinin ranklarının bir olduğu, dolayısıyla tekil oldukları anlaşılır. Sıfır uzayları ise  $(1 \ 1)^T$  dir.  $[A^k]$  yerel sertlik matrisi, tek elemandan oluşan bir tanım bölgesi üzerindeki Neumann problemine denk düştüğünden matrislerin tekilliği doğaldır. Bilindiği üzere, Neumann probleminin sabit çözümü yoktur, birden çok çözüm söz konusudur. Bu durum  $[A^k]$  yerel sertlik matrisinin  $(1 \ 1)^T$  sıfır uzayına yansımıştır.

#### 2.5.2.5. Bir elemana ait yükler: sağ taraf vektörü

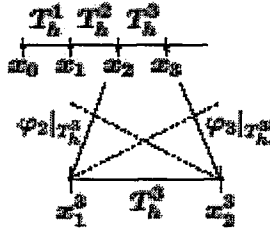
Sağ taraf vektörünün elemanları

$$\hat{F}_{h_i} = l(\varphi_i) = \int \varphi_i dx \quad (2.186)$$

ile bulunur. Örnek olarak;  $T_h^3$ , bölgenin 3. elemanı alınsın.  $T_h^3$  elemanı global sağ taraf vektörüne

$$\int_{T_h^3} \varphi_2 \text{ yada } \varphi_3 dx \quad (2.187)$$

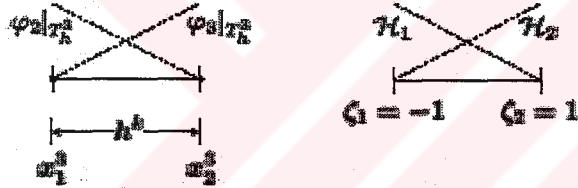
olarak katkı sağlar.



Şekil 2.22. Baz fonksiyonlarının bir eleman üzerine kısıtlanması.

Burada  $l(v) = \int f v dx$  olmak üzere  $l \in L^2(\Omega)$  için işlem sırası sunulmuştur. Delta genelleşmiş fonksiyonu kullanıldığında hangi elemanın hangi elemana bağlanacağı konusunda karar verilmesi gerekmektedir.

Değişken değiştirme yapılarak  $T_h^3$  elemanından  $\hat{T}$  pilot elemanına geçilebilir.



Şekil 2.23. Bölgeden bir eleman ve pilot eleman üzerindeki baz fonksiyonları.

Bu durumda

$$\int_{x_1^3}^{x_2^3} f \varphi_2 \text{ yada } 3 \, dx \quad (2.188)$$

yerine

$$\frac{h^k}{2} \int_{-1}^1 f H_1 \text{ yada } 2 \, d\zeta \quad (2.189)$$



kullanılarak  $\{\hat{F}_h\}$  sağ taraf vektörüne katkı hesap edilebilir. k. elemana ait sağ taraf vektörü  $\{F^k\} \in \mathbb{R}^2$  olsun. Bu durumda,  $\alpha, \beta = 1, 2$  olmak üzere  $\{F^k\}$  vektörünün elemanları

$$F_\alpha^k = \frac{h^k}{2} \int_{-1}^1 f H_\alpha d\zeta \quad (2.190)$$

biçiminde hesaplanabilir. Vektör notasyonu kullanılırsa aynı denklem

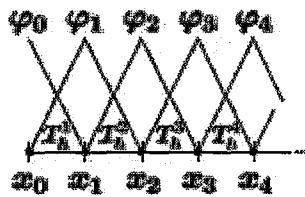
$$F_\alpha^k = \frac{h^k}{2} \int_{-1}^1 f \{H\} d\zeta \quad (2.191)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

### 2.5.3. Birleştirme

#### 2.5.3.1. Birleştirme fikri

Birleştirme fikri, yapısal anlamda sonlu eleman yönteminin köklerini çağrıştıran, direkt sertlik işlemini belirtir. Birleştirme kavramı ve ilgili algoritma elektrik devreleri, iskelet yapıları gibi ayrık sistemlere de uygulanabilir.



Şekil 2.24. Bölgedeki baz fonksiyonları.

Yukarıdaki şekil bölge ve baz fonksiyonlarını göstermektedir. Örnek olarak incelenmekte olan  $T_h^3$  elemanının  $[\hat{A}_h]$  matrisine katkısı incelenirse:

$$\hat{A}_{h\ ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_b^a \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} dx \quad (2.192)$$

$$\int_{T_h^3} \frac{d\varphi_{2yada3}}{dx} \cdot \frac{d\varphi_{2yada3}}{dx} dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^3} & -\frac{1}{h^3} \\ -\frac{1}{h^3} & \frac{1}{h^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} = [A^3] \quad (2.193)$$

	$[A^3]$ 'ün 1. sütunu	$[A^3]$ 'ün 2. sütunu
$[A^3]$ 'ün 1. satırı	$\hat{A}_{22}$ 'ye eklenir	$\hat{A}_{23}$ 'e eklenir
$[A^3]$ 'ün 2. satırı	$\hat{A}_{32}$ 'ye eklenir	$\hat{A}_{33}$ 'e eklenir

olduğu görülür. Yani

$$[A^3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^3} & -\frac{1}{h^3} \\ -\frac{1}{h^3} & \frac{1}{h^3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{R1} \\ \text{R2} \\ \text{R3} \\ \vdots \end{matrix} \begin{bmatrix} \text{C0} & \text{C1} & \text{C2} & \text{C3} & \text{C4} & \dots \\ & & & \frac{1}{h^3} & -\frac{1}{h^3} & \\ & & & -\frac{1}{h^3} & \frac{1}{h^3} & \\ & & & \frac{1}{h^3} & \frac{1}{h^3} & \end{bmatrix} \quad (2.194)$$

$T_h^3$  elemanı hesaplanmış  $[\hat{A}_h]$  matrisi

$T_h^3$  elemanının 1. düğüm noktasının global sırası 2 ve 2. düğüm noktasının global sırası 3 olduğundan,  $[A^3]$  yerel sertlik matrisinin elemanları  $[\hat{A}_h]$  global sertlik matrisinin 2. ve 3. satır ve sütunlarına ekleneceklerdir.

Yukarıdaki işlemler  $T_h^4$  elemanı için tekrarlanırsa:

$$\int_{x_h^3} \frac{d\varphi_{3yada4}}{dx} \cdot \frac{d\varphi_{3yada4}}{dx} dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^4} & -\frac{1}{h^4} \\ -\frac{1}{h^4} & \frac{1}{h^4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} = [A^4] \quad (2.195)$$

	$[A^4]$ 'ün 1. sütunu	$[A^4]$ 'ün 2. sütunu
$[A^4]$ 'ün 1. satırı	$\hat{A}_{33}$ 'e eklenir	$\hat{A}_{34}$ 'e eklenir
$[A^4]$ 'ün 2. satırı	$\hat{A}_{43}$ 'e eklenir	$\hat{A}_{44}$ 'e eklenir

olduğu görülmüştür. Yani

$$[A^4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^4} & -\frac{1}{h^4} \\ -\frac{1}{h^4} & \frac{1}{h^4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} R2 \\ R3 \\ R4 \\ \vdots \end{matrix} \begin{bmatrix} C2 & C3 & C4 & \dots \\ \frac{1}{h^3} & -\frac{1}{h^3} & & \\ -\frac{1}{h^3} & \frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^4} & -\frac{1}{h^4} & \\ \frac{1}{h^4} & -\frac{1}{h^4} & \frac{1}{h^4} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

$T_h^4$  elemanı hesaplanmış  $[\hat{A}_h]$  matrisi

$T_h^4$  elemanının 1. düğüm noktasının global sırası 3 ve 2. düğüm noktasının global sırası 4 olduğundan,  $[A^4]$  yerel sertlik matrisinin elemanları  $[\hat{A}_h]$  global sertlik matrisinin 3. ve 4. satır ve sütunlarına ekleneceklerdir.

$[\hat{A}_h]$  matrisinin her bir satırı  $v = \varphi_i$ 'ye bağlı olarak  $\delta J_v(u_h)$  birinci varyasyonuna katkı olarak düşünülebilir.  $[\hat{A}_h]$  matrisinin R3 satırı  $\varphi_3(x)$  fonksiyonunun dayanağı olan  $T_h^3$  ve  $T_h^4$  elemanlarından değerler olarak oluşmaktadır. Yukarıda incelenen örnekte R3 satırı tamamlanmıştır.  $h^3 = h^4 = h$  alınırsa, bu satırın  $\frac{1}{h}(\dots -1 \ 2 \ -1\dots)$  biçiminde olduğu görülür. Ancak  $[\hat{A}_h]$  matrisinin diğer satırları henüz tamamlanmamıştır.

Benzer düşünce ile sağ taraf oluşturulabilir.  $T_h^3$  elemanının  $\{\hat{F}_h\}$  sağ taraf vektörüne katkısı

$$\hat{F}_{h,i} = l(\varphi_i) = \int_{\Omega} f\varphi_i \, dx \quad (2.197)$$

eşitliği göz önünde bulundurularak

$$\int_{\Omega_h^3} f\varphi_{2 \text{ yada } 3} \, dx = \begin{bmatrix} \frac{h^3}{2} \int_{-1}^1 fH_1 \, d\zeta \\ \frac{h^3}{2} \int_{-1}^1 fH_2 \, d\zeta \end{bmatrix} = \{F^3\} \quad (2.198)$$

olarak hesaplanabilir.  $\{F^3\}$  yerel sağ taraf vektörünün 1. satırı  $\hat{F}_{h,2}$  elemanına, 2. satırı ise  $\hat{F}_{h,3}$  elemanına eklenecektir.

$$\{F^3\} = \begin{bmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ R2 \\ F_1^3 \\ R3 \\ F_2^3 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

$T_h^3$  elemanı hesaplanmış  $\{\hat{F}_h\}$  vektörü

Benzer düşünce  $T_h^3$  elemanının  $\{\hat{F}_h\}$  sağ taraf vektörüne katkısı

$$\hat{F}_{h,i} = l(\varphi_i) = \int_{\Omega} f\varphi_i \, dx \quad (2.200)$$

eşitliği göz önünde bulundurularak

$$\int_{\Omega_h^4} f\varphi_{3 \text{ yada } 4} \, dx = \begin{bmatrix} \frac{h^4}{2} \int_{-1}^1 fH_1 \, d\zeta \\ \frac{h^4}{2} \int_{-1}^1 fH_2 \, d\zeta \end{bmatrix} = \{F^4\} \quad (2.201)$$

olarak hesaplanabilir.  $\{F^4\}$  yerel sağ taraf vektörünün 1. satırı  $\hat{F}_{h,3}$  elemanına, 2. satırı ise  $\hat{F}_{h,4}$  elemanına eklenecektir.

$$\{F^4\} = \begin{bmatrix} F_1^4 \\ F_2^4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 + F_1^4 \\ F_2^4 \end{bmatrix} \quad (2.202)$$

$T_h^4$  elemanı hesaplanmış  $\{\hat{F}_h\}$  vektörü

### 2.5.3.2. Birleştirmenin algoritması

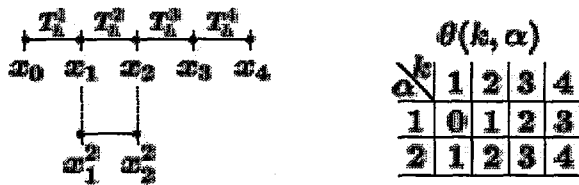
Yerel sıralamadan global sıralamaya dönüşüm olan

$$\theta(k, \alpha): \underbrace{\{1, 2, \dots, K\}}_{\text{eleman numarası}} \times \underbrace{\{1, 2\}}_{\text{yerel düğüm numarası}} \rightarrow \underbrace{\{0, 1, \dots, n+1\}}_{\text{global düğüm numarası}} \quad (2.203)$$

dönüşümü tanımlansın.  $x_\alpha^k$ , k. elemanın  $\alpha$ . düğüm noktası ve  $x_{\theta(k, \alpha)}$ ,  $\theta(k, \alpha)$  global düğüm noktası olmak üzere

$$x_\alpha^k = x_{\theta(k, \alpha)} \quad (2.204)$$

eşitliği ile bu dönüşüm yapılır. Örneğin; bölgede 5 tane düğüm noktası olsun. Yani,  $K=4$  alınsın. Bu durumda,  $\theta(k, \alpha)$  dönüşümü



Şekil 2.25.  $\theta(k, \alpha)$  dönüşümü.

biçiminde olacaktır. Burada karşılaşılabilecek problemlerden biri sıralama olur. Farklı sıralamalar sonucunda farklı dönüşümlerin oluşacağına dikkat edilmelidir.  $[\hat{A}_h]$  matrisinin elde edilmesi için bir iş-akış şeması

$[\hat{A}_h]$  matrisinin elemanları sıfır olarak kabul edilsin;

{k=1,...,K için

{ $\alpha=1,2$  için

$i = \theta(k, \alpha);$

{ $\beta=1,2$  için

$j = \theta(k, \beta);$

$\hat{A}_{h ij} = \hat{A}_{h ij} + A_{\alpha\beta}^k ; \}}\}$

olarak çıkarılabilir. Bu işlem sırasında;  $[A^k]$  matrisinin  $\alpha$ . satırı  $[\hat{A}_h]$  matrisinin  $\varphi_{\theta(k,\alpha)}$  baz fonksiyonuna bağlı birinci varyasyonuna karşılık gelen  $\theta(k, \alpha)$  satırına yerleştirilmektedir. Örneğin; yukarıda tanımlı  $\theta(k, \alpha)$  dönüşümü için  $[A^2]$  yerel sertlik matrisinin 1.satırı  $[\hat{A}_h]$  global sertlik matrisinin  $\theta(2,1)=1$ .satırına gidecektir.

$\{\hat{F}_h\}$  matrisinin elde edilmesi için bir iş-akış şeması

$\{\hat{F}_h\}$  matrisinin elemanları sıfır olarak kabul edilsin;

{k=1,...,K için

{ $\alpha=1,2$  için

$i = \theta(k, \alpha);$

$\hat{F}_{h i} = \hat{F}_{h i} + F_{\alpha}^k ; \}}\}$

olarak çıkarılabilir. Direkt sertlik işlemi bütün sonlu elemanlar program kodlarının en temel taşıdır. Bu işlemde  $\theta(k, \alpha)$  dönüşümü ile elemanlar arasındaki etkileşimler doğru olarak hesaplanır. Elemanları temel alan birleştirme safhasının baz



ile ve  $X$  uzayı

$$X = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = v(1) = 0\} \quad (2.208)$$

ile tanımlansın. Sınır koşullarını soruya dahil etme işlemi iki ayrı yolla gerçekleştirilebilir.

Açık eliminasyon.  $X$  uzayında sınır değerleri verildiğinden  $\varphi_0$  ve  $\varphi_{n+1}$  baz fonksiyonları ile elde edilmiş varyasyonlar kabul edilemezler. Bu yüzden,  $[\hat{A}_h]$  matrisinden  $R_0$  ve  $R_{n+1}$  satırları çıkarılmalıdır. Diğer yandan;  $\hat{u}_{h_0} = \hat{u}_{h_{n+1}} = 0$  olduğundan, bu ifadeler ile çarpılacak olan  $C_0$  ve  $C_{n+1}$  sütunları da  $[\hat{A}_h]$  matrisinden çıkarılmalıdır. Böylece;

$$[A_h] \{u_h\} = \{F_h\} \quad (2.209)$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Büyük sayı yaklaşımı.  $\epsilon$  sayısı 1'den çok küçük olmak üzere,  $\hat{A}_{h_0}$  ve  $\hat{A}_{h_{n+1}}$  elemanları yerine  $1/\epsilon$  yazılsın.  $\hat{F}_{h_0}$  ve  $\hat{F}_{h_{n+1}}$  elemanları ise sıfır ile değiştirilsin. Böylece, basit bir yolla  $R_0$  ve  $R_{n+1}$  satırları  $\hat{u}_{h_0} \cong \hat{u}_{h_{n+1}} \cong 0$  ile değiştirilmiş olur. Özellikle büyük boyutlarda,  $[\hat{A}_h]$  matrisinin yapısında değişikliğe gerek olmadığından uygulanması en kolay yol budur. Pratikte,  $\epsilon$  sayısı  $[\hat{A}_h]$  matrisinin  $R_0$  ve  $R_{n+1}$  satırı elemanlarından çok küçük olmalıdır.  $\epsilon$  sayısının küçük olması matrisin kondisyon sayısı açısından bakıldığında problem çıkarabilir. Ancak sonlu elemanlar yönteminde bu durumla karşılaşılmaz.

Buraya kadar anlatılanlar direkt çözüm yöntemine aittir. Ardışık çözüm yöntemlerinde sınır koşulları farklı bir biçimde soruya dahil edilirler.

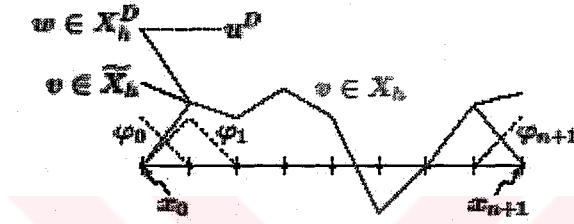


### 2.5.4.3. Homojen olmayan Dirichlet sınır koşulları

$u_h \in X_h^D$  yaklaşık çözümü

$$a(u_h, v) = l(v), \forall v \in X_h \quad (2.210)$$

varyasyonel problemi sağlayacak şekilde olsun.  $X_h$  yaklaşım uzayı  $v(0)=v(1)=0$  olmasını gerektirir.  $X_h^D$  yaklaşım uzayı ise,  $w(0)=u^D$ ,  $w(1)=0$  olmasını gerektirir.



Şekil 2.27. Homojen olmayan Dirichlet koşulu için yaklaşım fonksiyonu.

Sınır koşullarını soruya dahil etme işlemi iki ayrı yolla gerçekleştirilebilir.

Açık eliminasyon.  $X_h$  uzayında sınır değerleri verildiğinden  $\phi_0$  ve  $\phi_{n+1}$  baz fonksiyonları ile elde edilmiş varyasyonlar kabul edilemezler. Bu yüzden,  $[\hat{A}_h]$  matrisinden  $R_0$  ve  $R_{n+1}$  satırları çıkarılmalıdır. Diğer yandan;  $X_h^D$  uzayında  $\hat{u}_{h_0} = u^D$  ve  $\hat{u}_{h_{n+1}} = 0$  olduğundan  $-u^D \cdot C_0 - 0 \cdot C_{n+1}$  sütunları  $\{\hat{F}_h\}$  sağ taraf vektörünün bulunduğu tarafa geçirilir. Böylece,



## 2.6. Bir Boyutlu Uzayda Çözölmüş Problemler

### Örnek 3.6.1.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \quad , 0 < x < 1 \quad (2.212)$$

diferansiyel denkleml

$$u(0) = 0 \quad , u'(1) = 1 \quad (2.213)$$

başlangıç koşulları ile verilsin. Bu problemlin analitik çözümlü

$$u(x) = \frac{2 \cos(1-x) + \sin x}{\cos 1} + x^2 - 2 \quad (2.214)$$

fonksiyonudur. 1. tip Lagrange baz fonksiyonları kullanılarak 4 sonlu eleman ile sonlu eleman çözümlü yapıldığında Tablo 2.1 deki veriler elde edilmiştir.

Tablo 2.1.

x	Analitik Çözüml	Sonlu Eleman Çözümlü
0.1	0.1262	0.0124
0.2	0.2513	0.0248
0.3	0.3742	0.1468
0.4	0.4943	0.3784
0.5	0.6112	0.6100
0.6	0.7244	0.7204
0.7	0.8340	0.8308
0.8	0.9401	0.9372
0.9	1.0433	1.0396
1.0	1.1442	1.1420

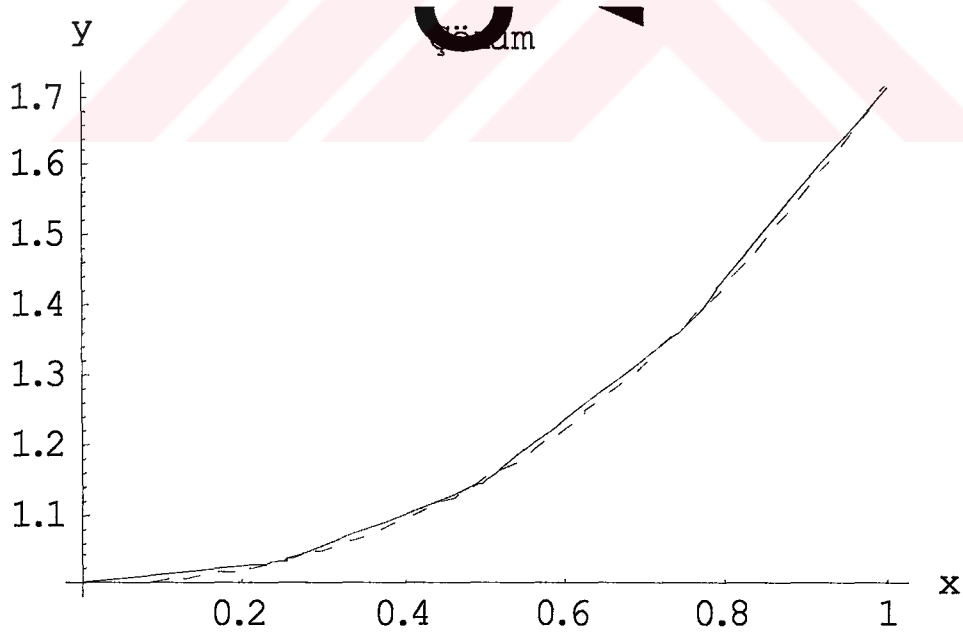
**Örnek 2.6.2.**  $x \in [0,1]$  olmak üzere  $y'' - y = x$  diferansiyel denklemi  $y(0)=1$  ve  $y'(1)=e-1$  sınır değerleri ile verilsin.

Bu denklemin analitik çözümü  $y(x) = e^x - x$  fonksiyonudur. 1. tip Lagrange baz fonksiyonları kullanılarak 4 sonlu eleman ile sonlu eleman çözümü yapıldığında Tablo 2.2 deki veriler elde edilmiştir.

Tablo 2.2.

x	Analitik Çözüm	Sonlu Eleman Çözümü
0.25	1.034025	1.03254
0.50	1.148721	1.14609
0.75	1.367000	1.3636
1.00	1.718281	1.7146

Elde edilen veriler ile analitik çözümün karşılaştırılması Şekil 2.28 de yapılmıştır.



Şekil 2.28.

**Örnek 2.6.3.** Örnek 2.6.2 de sınır koşulları ile verilen diferansiyel denklem 2. tip Lagrange baz fonksiyonları kullanılarak 4 eleman ile sonlu eleman yöntemi kullanarak çözüldüğünde Tablo 2.3 teki veriler elde edilmiştir.

Tablo 2.3.

X	Analitik Çözüm	Sonlu Eleman Çözümü
0.25	1.034025	1.034020
0.50	1.148721	1.148720
0.75	1.367000	1.367000
1.00	1.718281	1.718210

**Örnek 2.6.4.**

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = x, \quad x \in (0,1) \quad (2.215)$$

dördüncü mertebe diferansiyel denklemi

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (2.216)$$

$$y''(1) = 0, \quad y'''(1) = -\frac{2}{3} \quad (2.217)$$

sınır koşulları ile verilsin. Bu sınır değer problemi, Hermite tipi baz fonksiyonları kullanılarak 4 sonlu eleman için sonlu elemanlar yöntemi ile çözüldüğünde Tablo 2.4 teki veriler elde edilir.

Tablo 2.4.

x	Analitik Çözüm		Sonlu Eleman Çözümü	
	y	y'	u <sub>h</sub>	u' <sub>h</sub>
0.25	1.27822	1.2137	1.27822	1.21370
0.50	1.60095	1.35677	1.60095	1.35677
0.75	1.95120	1.43506	1.95120	1.43506
1.00	2.31389	1.45833	2.31389	1.45833

**Örnek 2.6.5.** Bir boyutlu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < 1 \quad (2.218)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \quad (2.219)$$

sınır koşulları ve

$$u(x, 0) = 1 \quad (2.220)$$

başlangıç koşulu ile ele alınsın. Burada u bağımlı değişkeni, t zamanı ve x bağımsız değişkeni göstermektedir. Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x}{\lambda_n}, \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (2.221)$$

serisi ile verilir.

Bu problemde  $\theta = \frac{1}{2}$  olmak üzere Crank-Nicolson yaklaşımı ve  $\Delta t = 0.05$  zaman aralığı kullanılarak Tablo 2.5 teki veriler elde edilmiştir.

Tablo 2.5

t	x	Analitik Çözüm	Sonlu Eleman Çözümü
0.2	0.5	0.5532	0.554761
	1.0	0.7723	0.784782
0.4	0.5	0.3356	0.337188
	1.0	0.4745	0.477079
0.6	0.5	0.2049	0.204958
	1.0	0.2897	0.289990
0.8	0.5	0.1251	0.124583
	1.0	0.1769	0.176269
1.0	0.5	0.0764	0.075727
	1.0	0.1080	0.107145
1.2	0.5	0.0466	0.046030
	1.0	0.0659	0.065127
1.4	0.5	0.0285	0.279795
	1.0	0.0402	0.039587

**Örnek 2.6.6.** Örnek 2.6.5 teki ısı problemi tekrar ele alınsın. Yarı-ayrık yaklaşım esnasında başlangıç vektörü  $c_0 = \{1,0\}^T$  olsun.  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.2$ ,  $x_3 = 1.0$  seçilerek düzgün olmayan bir bölgede  $\theta = \frac{1}{2}$  olmak üzere Crank-Nicolson yaklaşımı ve  $\Delta t = 0.05$  zaman aralığı için Tablo 2.6 daki veriler elde edilir.

Tablo 2.6.

<b>t</b>	<b>Anolitik Çözüm u(1,t)</b>	<b>Sonlu Eleman Çözümü (2 lineer eleman ile)</b>
0.2	0.7723	0.812811
0.4	0.4745	0.460472
0.6	0.2897	0.261692
0.8	0.1769	0.148737
1.0	0.1080	0.084537





## BÖLÜM 3. İKİ BOYUTLU PROBLEMLERİN SONLU ELEMAN ANALİZİ

### 3.1. Model Poisson Problemi

#### 3.1.1. Model problemin klasik çözümü

Bu bölümde; basit ancak konuyu anlamaya yardımcı bir problem incelenecektir.  $R^2$  uzayında Poisson problemi;  $\Omega$  çokgensel tanım bölgesi üzerinde

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= f & \Omega \text{ da} \\ u &= 0 & \partial\Omega = \Gamma \text{ da} \end{aligned} \quad (3.1)$$

olacak biçimde bir  $u$  fonksiyonunun bulunması olarak verilir.

İlk olarak, burada tanım kümesi çokgen olması istenmektedir. Tanım kümeleri, genellikle eğri sınırlı elemanlardan oluşan izoparametrik dönüşümler gerektirmektedir. Bu türden elemanların uygulanmasına bu çalışmada yer verilmeyecektir.

İkinci olarak, homojen Dirichlet sınır koşulları göz önüne alınmıştır. Formülasyon, analiz ve uygulama açısından bakıldığında bir boyutlu uzayda homojen ve homojen olmayan Dirichlet sınır koşulları arasında küçük farklılıklar söz konusudur. İki boyutlu uzayda ise, ancak  $u^D$  homojen olmayan Dirichlet sınır koşulu parçalı polinom olduğunda sonlu eleman yaklaşım uzayınca tam olarak temsil edilebilir. burada incelenecek sınır koşulu parçalı lineerdir. Uygulamada,  $u^D$  yerine onu interpolate eden fonksiyon yazılabilir. Ancak bu durum, teorik anlamda sorunlar açığa çıkarabilir.

Neumann ve Robin sınır koşullarının sonlu elemanlar ile uygulanması burada anlatılan yol takip edilerek yapılabilir. Yüksek mertebeden uzaylarda, tanım bölgesinin sınırında gradiyen ve normallerin hesaplanması çok karmaşık bir işlemdir. Bu yüzden doğal sınır koşullarının verilmesi daha yararlı olur. Neumann sınır koşulları için de bu durum söz konusudur.

Üçüncü olarak, problem iki boyutlu uzayda çözülecektir. Aslında, üç boyutlu uzayda soru çözümünü iki boyuttakine benzerdir. Ancak, uygulama çok karmaşıktır ve çok daha fazla işleme mal olmaktadır.

### 3.1.2. Minimizasyon prensibi ve zayıf formülasyon

$X$  çözüm uzayı,  $a(w,v)$  SPT bilineer formu ve  $l(v)$  sınırlı lineer formu

$$X = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma} = 0 \} \equiv H_0^1(\Omega) \quad (3.2)$$

$$a(w,v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dA \quad (3.3)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v \, dA \quad (3.4)$$

olmak üzere, minimizasyon prensibi

$$u = \arg \min_{w \in X} \underbrace{\frac{1}{2} a(w,w) - l(w)}_{J(w)} \quad (3.5)$$

biçimindeki  $u$  fonksiyonunun bulunmasıdır. Zayıf formülasyon ise,

$$a(u,v) = l(v) \quad , \forall v \in X \quad (3.6)$$

eşitliğini sağlayan  $u$  fonksiyonunun bulunmasıdır.

$f$  fonksiyoneli  $L^2(\Omega)$ 'da olmak zorunda değildir. Herhangi bir  $l \in H^{-1}(\Omega)$  seçilebilir.

Örneğin;  $\Gamma_{\ell}$  sınırında  $l(v)=1$  ve diğer yerlerde sıfır olan bir “doğru kaynağı”

seçilebilir.  $\Gamma_i$ ,  $\Omega$  tanım bölgesindeki herhangi bir sonlu elemanın sınırındaki bir doğrudur. Ancak,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  tanım bölgesi için;  $H^{-1}(\Omega)$  uzayının elemanı olmadığından,  $\delta$  Dirac fonksiyonu seçilemez.

### 3.1.3. Fonksiyonların regülerliği

Genel olarak;  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$  eşitsizliği söz konusudur.  $f \in L^2(\Omega)$  ve  $\Omega$  tanım kümesi konveks olmak üzere,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.7)$$

eşitsizliği yakınsama hızı için önemli bir ifadedir. Yukarıda  $H^1(\Omega)$  ve  $H^{-1}(\Omega)$  normları

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dA \quad (3.8)$$

ve

$$\|1\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{l(v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \quad (3.9)$$

biçimindedir.  $\mathbb{R}^2$  uzayında ise,  $H^2$  normu diğer türevler ile birlikte çapraz türevleri de içermektedir.

Bir boyutlu uzayda,  $u$  fonksiyonunun  $H^2(\Omega)$ 'da olmasını garanti etmek için  $f$  fonksiyonelinin düzgün oluşu yeterli oluyordu. İki boyutlu uzayda; sınır koşulları ve denklemin türevler üzerindeki etkileri karışıklık meydana getirdiğinden yukarıda söylenenler geçerliliğini yitirir. Bununla birlikte;  $\Omega$  tanım kümesinin konveks olması durumunda,  $u$  fonksiyonunun  $H^2(\Omega)$ 'da olmasını garanti etmek için  $f$  fonksiyonelinin  $L^2(\Omega)$ 'da olması yeterlidir.  $\Omega$  tanım kümesinin konveks olmadığı

durumda da  $u$  fonksiyonunun  $H^2(\Omega)$  uzayında olabilir, ancak bu durum burada incelenmeyecektir. Konveks olmayan tanım kümelerinde köşeler ve tekillikler ile karşılaşılacaktır. En karmaşık durum ise  $2\pi$ 'lik bir açı ile meydana gelen köşe olan çatlak durumudur. Bu durumda dahi, çözüm  $H^1(\Omega)$  uzayında kalır.

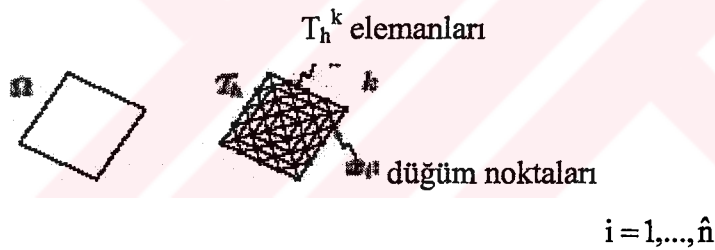
### 3.2. Sonlu Eleman Ayrıklaştırması

#### 3.2.1. Üçgenleştirme

Problemin tanım kümesi  $\Omega$ ,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T_h \in \mathcal{T}_h} \bar{T}_h \quad (3.10)$$

biçiminde  $T_h$  kümelerine parçalansın.



Şekil 3.1. Tanım bölgesi ve  $T_h$  üçgenleştirmesi.

$x_i$  düğüm noktaları,  $i=1,2,\dots,n$  için iç düğüm noktalarını ve  $i=n+1,\dots,\hat{n}$  için sınırdaki düğüm noktalarını belirtmektedir. Yukarıda yapılan düğüm noktası sıralaması yerleşim uyumluluğu içindir. Bu sayede, uzayların ve bazların tanımları ile sınır koşullarının soruya dahil edilmeleri büyük ölçüde kolaylaşır. Genel anlamda sınır koşulları düşünüldüğünde, etkin olması açısından bu sıralama en iyi olarak görülmeyebilir. Ancak, global denklem sistemi oluşturulurken  $\theta(k,\alpha)$  dönüşümü kullanılarak yeniden sıralama yapılabileceği unutulmamalıdır.

Genelde, sonlu elemanlar yapısı önceden belirlenmemiş bölgüler üzerinde kurulurlar. Böylece esnekliğe sahip olurlar. Bununla birlikte, F.F.T. ve tensörler gibi bazı kavramlardan mahrum kalırlar.

İki boyutlu uzaylarda üçgenleştirme çok zor bir işlem halini alabilir. Düğüm yapısının üretilmesi bazen sorunun işlemlerinden daha fazla zaman alabilmektedir. İlk olarak, üçgenlerin kapanışlarının birleşimi tanım kümesinin örtmelidir. İkinci olarak, elemanlar birbirleri ile kesişmemelidir. Üçüncüsü; herhangi bir elemanın kapanışı ile diğer bir elemanın kapanışının kesişimi, ya her iki elemanın bir kenarı, ya bir köşe noktası, yada boş küme olmalıdır. Burada sayılan üç koşula sıfırncı merteye kısıtlamalar adı verilir. Bunlar üçgenleştirmenin yapıldığı uzayda var olmalıdır. Konform olmayan dönüşümlerde ise bu koşullardan bazıları hafifletilebilmektedir.

Yukarıdaki sıfırncı merteye kısıtlamaların yanı sıra, kurulan sonlu elemanlar uzayının yakınsama özelliklerinin iyi olması için sağlanması gereken birinci merteye kısıtlamalar vardır. Bunlardan ilki, regülerliktir. Bir çok isimle anılmakla birlikte;  $h$  sifira giderken herhangi bir elemanın en küçük açısının sıfır olmaması anlamındadır. Böylece; ortak bir köşeyi paylaşan üçgen sayısı sınırlanır, uzun kenarına oranla kısa kenar sifira gitmez.  $T_h$  üçgenleştirmesinin çapı olan  $h$  sayısı,  $h^k$  sayılarının en büyüğüdür.  $h^k$  sayısı da,  $T_h^k$  elemanının en uzun kenarının boyudur.  $T_h$  üzerine konulan son koşul bir boyutlu uzaylarda incelenmiştir.  $h$  sifira giderken  $h^k$  sayılarının minimumunun maksimumuna oranı sıfırdan farklı olmalı ve sınırlı kalmalıdır.

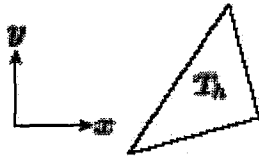
Son olarak ikinci merteye kısıtlamalar vardır. Çözümün çok hızlı değiştiği bölgelere daha fazla eleman yerleştirilmelidir. Sonradan yapılan hata analizine göre düğüm yapısı yenilenmelidir. Elemanların tabanlarının yüksekliklerine oranlarının belirlenmesi, çözümün belirli özelliklere sahip olması ve sertlik matrisinin kondisyon sayısı açısından önemlidir.

### 3.2.2. Sonlu elemanlar yaklaşımı

Sonlu elemanlar yaklaşımı için kullanılan sonlu boyutlu  $X_h$  uzayı

$$X_h = \left\{ \begin{array}{l} v \in X \\ v|_{T_h} \in P_1(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h \\ v|_{\Gamma} = 0 \\ v \in C^0(\Omega) \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

ile verilir.



Şekil 3.2. Bölgeden bir üçgen eleman.

$$P_1(T_h): v|_{T_h} = c_0 + \underbrace{c_x}_{v_x} x + \underbrace{c_y}_{v_y} y, \quad c, c_x, c_y \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

Bir boyutlu uzayda olduğu gibi lineer polinom yaklaşımı kullanılacaktır. Aslında sonucun geçerliliği açısından kuadratik elemanların kullanılması en iyisidir. Bu çalışmada üçgen elemanlar incelenecektir. Bununla birlikte, dörtgen elemanların bir çok avantajı söz konusudur.

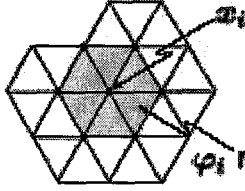
Yukarıda bahsedilen sonlu elemanlar yaklaşım uzayı  $\varphi_i$  baz fonksiyonları cinsinden

$$X_h = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \quad (3.13)$$

biçimindedir.  $\varphi_i$  baz fonksiyonu  $1 \leq i, j \leq n$  olmak üzere

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (3.14)$$

biçiminde tanımlanır.  $\varphi_i$  baz fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu bölgeye  $\varphi_i$  fonksiyonunun dayanağı adı verilir. Bunun geometrik anlamı



sıfırdan farklı

Şekil 3.3.  $\varphi_i$  baz fonksiyonunun dayanağı.

biçiminde olur. Üçgenleştirirminin geometrik yapısı üzerindeki gereksinimler uzay ve baz üzerinde etkiler meydana getirir. Örneğin; bir kenarda kesişen iki elemanın kenarın tamamı boyunca kesişmesi istenmektedir. Böylece, verilen iki düğüm noktası ile oluşan kenarda baz fonksiyonu sürekli olacaktır.

Yukarıdaki düğüm noktası sıralaması gereğince  $x_j, j=1, \dots, n$  noktaları iç noktalardır. Böylece,  $j=n+1, \dots, \hat{n}$  için  $\varphi_i \in X_h \subset X$  baz fonksiyonları göz önüne alınırsa  $\varphi_i(x_j)=0$  olduğu görülür.

Düğüm noktası yorumu. Sonlu eleman yaklaşım uzayı  $X_h$ 'den seçilen  $v$  test fonksiyonları için

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x) \quad (3.15)$$

yazılır. Buradan,

$$v(x_j) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x_j) = \sum_{i=1}^n v_i \delta_{ij} \Rightarrow v_j = v(x_j) \quad (3.16)$$

elde edilir.

### 3.2.3. İzdüşüm

Rayleigh-Ritz metodunda  $u_h$  yaklaşım fonksiyonu

$$u_h = \arg \min_{w \in X_h} \underbrace{\frac{1}{2} a(w, w) - l(w)}_{J(w)} \quad (3.17)$$

biçimindedir.

Galerkin metodunda  $u_h$  yaklaşım fonksiyonu  $X_h$  sonlu eleman yaklaşım uzayının elemanı olur ve

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in X_h \quad (3.18)$$

varyasyonel problemini sağlar.

### 3.2.4. Ayrık denklemler

Verilen model problemin genel şeması çıkarılsın.  $i=1, \dots, n$  için  $v = \varphi_i(x)$  ve

$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_{hj} \varphi_j(x)$  olsun.  $u_h \in \mathbb{R}^n$  için ayrık denklemler

$$[A_h] \{u_h\} = \{F_h\} \quad (3.19)$$

biçimindedir. Burada;  $[A_h]$  global sertlik matrisi ve  $\{F_h\}$  sağ taraf vektörünün elemanları

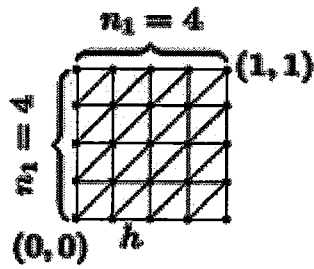
$$A_{hij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.20)$$

$$F_{hi} = l(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.21)$$

eşitlikleri ile hesaplanır.



Düzgün bir bölge kullanılarak



Şekil 3.4. Düzgün bölge.

üçgenleştirilmesi elde edilir. Burada elemanların çapları  $\sqrt{2}h$  birimdir. Genellik bozulmadan,  $\sqrt{2}h$  yerine  $h$  alınacaktır. Burada,

$$K = 2n_1^2$$

$$\hat{n} = (n_1)^2$$

$$n = (n_1 - 1)^2$$

$$h = 1/n_1$$

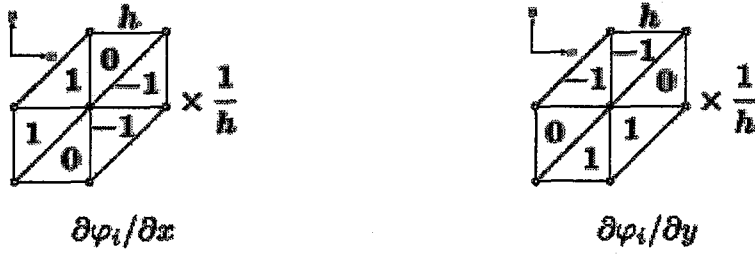
olarak hesaplanabilir.

$[A_h]$  global sertlik matrisinin elemanları

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dA = \int_{\Omega} (w_x v_x + w_y v_y) \, dA$$

$$\Rightarrow A_{h \, ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) \, dA \quad , 1 \leq i, j \leq n \quad (3.22)$$

eşitlikleri ile hesaplanabilir. Yukarıdaki eşitlikte bulunan  $\varphi_i$  baz fonksiyonlarının kısmi türevleri incelenirse

Şekil 3.5.  $\varphi_i$  baz fonksiyonlarının kısmi türevleri

elemanlar üzerinde parçalı olarak sabit kaldıkları görülür. Buradaki kısmi türevler kullanılarak  $\int_{\Omega} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} dA$  integrali

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \begin{pmatrix} \partial\varphi_N/\partial x \\ \partial\varphi_{NE}/\partial x \\ \partial\varphi_E/\partial x \\ \partial\varphi_{SE}/\partial x \\ \partial\varphi_S/\partial x \\ \partial\varphi_{SW}/\partial x \\ \partial\varphi_W/\partial x \\ \partial\varphi_{NW}/\partial x \\ \partial\varphi_i/\partial x \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2/h^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2/h^2 \\ 0 \\ 4/h^2 \end{pmatrix} \frac{h^2}{2}$$

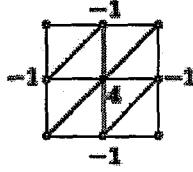
Şekil 3.6.  $\varphi_i$  baz fonksiyonlarının x'e göre kısmi türevi.

olarak hesaplanabilir. Aynı yol izlenerek,  $\int_{\Omega} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} dA$  integrali de hesaplanabilir.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} \begin{pmatrix} \partial\varphi_N/\partial y \\ \partial\varphi_{NE}/\partial y \\ \partial\varphi_E/\partial y \\ \partial\varphi_{SE}/\partial y \\ \partial\varphi_S/\partial y \\ \partial\varphi_{SW}/\partial y \\ \partial\varphi_W/\partial y \\ \partial\varphi_{NW}/\partial y \\ \partial\varphi_i/\partial y \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} -2/h^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2/h^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4/h^2 \end{pmatrix} \frac{h^2}{2}$$

Şekil 3.7.  $\varphi_i$  baz fonksiyonlarının y'ye göre kısmi türevi.

Yukarıda yapılanlar özetlenirse;  $[A_n]$  global sertlik matrisinin i. satırının sıfırdan farklı elemanlarının



Şekil 3.8. Global matristeki  $i$ . satırın sıfırdan farklı değerleri.

olduğu görülür. Bu satır sonlu farklar yöntemindeki ile aynıdır. Ancak sonlu eleman yöntemi ile elde edilen matris sonlu farklar ile elde edilen matristen  $h^2$  çarpanı kadar büyüktür. Bu bölümde,  $\varphi_i$  baz fonksiyonlarının  $[A_h]$  matrisinin oluşumuna etkisi görülmüştür.

### 3.3. Teorik Analiz

#### 3.3.1. Genel sonuçlar

Daha önce belirtildiği üzere, enerji normu

$$\|v\|^2 \equiv a(v, v) = |v|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dA \quad (3.23)$$

ile verilir. Buradan;  $u_h$ ,  $u$  fonksiyonunun  $X_h$  uzayındaki enerji normunda izdüşümü olmak üzere

$$\|e\| = \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\| \quad (3.24)$$

olur. (3.24) ün ispatı bir boyutlu uzaydaki ile aynıdır.

$H^1(\Omega)$  normu daha önce belirtildiği üzere,

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dA \quad (3.25)$$

ile verilir. Buradan;  $\alpha > 0$  koarsiflik sabiti ve  $\beta$  süreklilik sabiti olmak üzere

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.26)$$

olur. (3.26) nin ispatı bir boyutlu uzaydaki ile aynıdır.

### 3.3.2. Özel sonuçlar

$\Omega$  konveks tanım kümesi üzerinde  $f \in L^2(\Omega)$  için

$$\|e\| \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (3.27)$$

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (3.28)$$

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (3.29)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu ifadelerin ispatları bir boyutlu uzaydakiler ile aynıdır. Bununla birlikte,  $\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)}$  ifadesi için sınırı bulmak oldukça güçtür. Burada da bir boyutlu uzayda olduğu gibi  $h$  bağımlılığı bulunur.

Burada;  $H^2$  normu, “kırık”  $H^2$  normu ile değiştirilebilir. Böylece, daha az regüler bir  $f$  fonksiyoneline gereksinim duyulur. Yüksek boyutlu uzaylarda asıl mesele tekilliğin indirgenmesidir. Burada,  $\Omega$  tanım kümesi konveks olmak üzere  $f \in L^2(\Omega)$  ise  $u \in H^2(\Omega)$  olmalıdır. Konveks olmayan tanım kümeleri için de bu durum söz konusu olabilir. Ancak genel olarak  $f \in L^2(\Omega)$  için bu durum söz konusu olmaz. Bir boyutlu uzayda, düğüm noktası olmayan bir noktada  $\delta$  Dirac fonksiyonu yerleştirilse enerji normunda  $\sqrt{h}$  yakınsaması elde edilir. Burada,  $u \notin H^2(\Omega)$  ise  $\sigma < 1$  için  $H^1$  normundaki yakınsama  $h^\sigma$ ’ya dönüşecektir. Tekilliğin bulunduğu yerin etrafına daha küçük elemanlar yerleştirilirse bu durumdan kurtulmak söz konusu olur. Bazen tekillik düşünülerek yapılan eleman yenileme işlemi önemini yitirir. Çünkü

yakınsama hızı düşükte olsa, çok küçük hatalar oluştuğundan sonuçlarda pek değişiklik oluşmaz.

Son olarak,  $\Gamma$  sınırı bir fonksiyon kabul edilirse, yani tanım bölgesi bir çokgen olmazsa yüksek mertebeden izoparametrik fonksiyonlar ile yakınsama hızına ulaşılır.

$s = I^0(u) + c^0$  ve  $s_h = I^0(u_h) + c^0$  olduğunu hatırladıktan sonra, konveks bir  $\Omega$  tanım kümesi ve  $f \in L^2(\Omega)$  için

$$I^0 \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow |s - s_h| = |I^0(e)| \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (3.30)$$

ve

$$I^0 \in L^2(\Omega) \Rightarrow |s - s_h| = |I^0(e)| \leq ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (3.31)$$

olur. Aslında; daha geniş bir fonksiyonel sınıfta  $h^2$  yakınsama hızını elde etmek için R bir boyutlu uzayındaki benzer düşünceler kullanılabilir.

### 3.4. İki Boyutlu Poisson Probleminin Ayrıklaştırılması: Uygulama Safhası

Uygulama esnasında dört adım takip edilecektir:

- 1- Prototip soru
- 2- Elemanlar ile ilgili nicelikler
- 3- Birleştirme
- 4- Sınır koşulları

### 3.4.1. Prototip soru

#### 3.4.1.1. Prototip soru için uzay ve baz

$$\begin{aligned}\hat{X}_h &= \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{T_h} \in P_1(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h \right\} \\ &= \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}\end{aligned}\quad (3.32)$$

olsun.



Şekil 3.9.  $T_h$  üçgenleştirmesi.

$x_i$  düğüm noktaları  $i=1, \dots, n$  için iç nokta,  $i=n+1, \dots, \hat{n}$  için ise sınır noktasıdır. Sınır düğüm noktaları ile kurulan şapka fonksiyonları aşağıda tanımlanmıştır.  $\hat{X}_h$  uzayının herhangi bir  $v$  elemanı  $v_i = v(x_i)$  olmak üzere

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} v_i \varphi_i(x) \quad (3.33)$$

biçiminde yazılabilir.

#### 3.4.1.2. Prototip sorunun varyasyonel ifadesi

Burada aranan  $\hat{u}_h \in \hat{X}_h$  fonksiyonu

$$a(\hat{u}_h, v) = l(v), \quad \forall v \in \hat{X}_h \quad (3.34)$$

varyasyonel problemini sağlamalıdır. Aslında bu problem hiçbir zaman çözülmez. Sadece bir hazırlık safhası olarak rol alır.

### 3.4.1.3. Ayrık denklemler

$$\hat{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} u_{h,i} \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (3.35)$$

yaklaşım fonksiyonu alınsın. Yukarıda düşünceler uygulandığında,  $1 \leq i, j \leq \hat{n}$  olmak üzere elemanları

$$\hat{A}_{h,ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dA \quad (3.36)$$

ve

$$\hat{F}_{h,i} = l(\varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i \quad (3.37)$$

olan

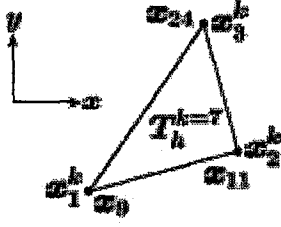
$$[\hat{A}_h] \{ \hat{u}_h \} = \{ \hat{F}_h \} \quad (3.38)$$

denklem sistemi elde edilir. Düğüm noktalarının sıralanmasından dolayı  $[A_h]$  matrisi ile  $[\hat{A}_h]$  matrisi basit bir şekilde bağlantılıdır. Yani,  $[A_h]$  matrisi  $[\hat{A}_h]$  matrisinin  $n \times n$  lik alt matrisidir. Bu  $n \times n$  lik matris  $[\hat{A}_h]$  matrisinin sol üst köşesindeki matristir. Farklı sıralamalar söz konusu olduğunda  $[A_h]$  matrisi  $[\hat{A}_h]$  matrisine bu kadar yakın olmayacaktır.

### 3.4.2. Elemanlar ile ilgili nicelikler

#### 3.4.2.1. Elemanlar ile ilgili yerel tanımlar

Yerel düğüm noktaları.  $T_h$  bölgesünden  $T_h^7$  elemanı örnek olarak alınarak bu elemana ait nicelikler verilmiştir.



Şekil 3.10. Bölgeden bir elemanın yerel ve global düğüm numaraları.

Yukarıda seçilen  $T_h^7$  elemanının alanı  $Alan^k$  ile, yerel düğüm noktaları  $x_1^k, x_2^k, x_3^k$  ile gösterilmiştir. Bu yerel düğüm noktalarına karşılık gelen yerel düğüm noktaları ise örneğin  $x_9, x_{11}, x_{24}$  olsun.

Yerel baz fonksiyonları. Yerel baz fonksiyonları  $\alpha = 1, 2, 3$  olmak üzere  $H_\alpha^k$  ile gösterilsin. Bu durumda yukarıdaki sıralama sürdürülürse,

$$H_1^7 = \varphi_9|_{T_h^7}, \quad H_2^7 = \varphi_{11}|_{T_h^7}, \quad H_3^7 = \varphi_{24}|_{T_h^7} \quad (3.39)$$

olarak elde edilir. Buradaki yerel baz fonksiyonları,  $H_\alpha^k \in P_1(T_h^k)$  ve  $H_\alpha^k(x_\beta^k) = \delta_{\alpha\beta}$  özelliklerine sahiptir. Herhangi bir  $v \in \hat{X}_h$  elemanının  $T_h^k$  elemanına kısıtlanması  $H_\alpha^k$  yerel baz fonksiyonları cinsinden yazılabileceğinden,  $T_h^k$  elemanının  $[\hat{A}_h]$  ve  $\{\hat{F}_h\}$  matrislerine katkısını Lagrange interpolasyon fonksiyonları cinsinden yazmak mümkündür.

### 3.4.2.2. Pilot eleman

Burada; köşeleri  $(0,0), (1,0), (0,1)$  noktaları olan bir pilot  $\hat{T}$  üçgeni tanımlanır. Daha sonra, her bir elemanı pilot elemanın basit bir görüntüsü haline getirecek olan afin bir dönüşüm tanımlanır. Bir boyutlu uzaya nazaran buradaki dönüşümler ve değişken değiştirme işlemleri daha zahmetlidir. Bu sebeple, yerel düğüm noktaları ve baz fonksiyonları kullanılacak, pilot elemana başvurulmayacaktır.  $\alpha = 1, 2, 3$  olmak üzere



$H_\alpha^k$  yerel baz fonksiyonlarının ifadelerini bulmak için  $H_\alpha^k = c_\alpha^k + c_{x\alpha}^k x + c_{y\alpha}^k y$  olsun.

Her  $\alpha$  yerel düğüm noktası için  $H_\alpha^k$  baz fonksiyonu 1 değerini alacağından

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^k & y_1^k \\ 1 & x_2^k & y_2^k \\ 1 & x_3^k & y_3^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\alpha^k \\ c_{x\alpha}^k \\ c_{y\alpha}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ yada } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ yada } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\alpha=1 \text{ için}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\alpha=2 \text{ için}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\alpha=3 \text{ için}}$

biçimindeki üç tane lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu üç sistem ayrı ayrı çözümlenerek her bir düğüm noktasına ait baz fonksiyonu oluşturulur.

### 3.4.2.3. Elemana ait sertlik matrisi

$[\hat{A}_h]$  global sertlik matrisinin bir elemanı

$$\hat{A}_{h \ ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dA \quad (3.41)$$

ile hesaplanır. Örneğin;  $T_h^7$  elemanının  $[\hat{A}_h]$  global sertlik matrisine katkısının

$$\begin{aligned} & \int_{T_h^7} \left( \frac{\partial \varphi_{9,11 \text{ yada } 24}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_{9,11 \text{ yada } 24}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{9,11 \text{ yada } 24}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_{9,11 \text{ yada } 24}}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_{T_h^7} \left( \underbrace{\frac{\partial H_{1,2 \text{ yada } 3}^7}{\partial x}}_{\text{sabit}} \cdot \underbrace{\frac{\partial H_{1,2 \text{ yada } 3}^7}{\partial x}}_{\text{sabit}} + \underbrace{\frac{\partial H_{1,2 \text{ yada } 3}^7}{\partial y}}_{\text{sabit}} \cdot \underbrace{\frac{\partial H_{1,2 \text{ yada } 3}^7}{\partial y}}_{\text{sabit}} \right) dA \end{aligned}$$

olduğu görülür.  $[A^k] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matrisi k elemanına ait yerel sertlik matrisi olsun. Bu durumda,  $[A^k]$  yerel sertlik matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta}^k &= \int_{T_h^k} \left( \frac{\partial H_\alpha^k}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_\beta^k}{\partial x} + \frac{\partial H_\alpha^k}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_\beta^k}{\partial y} \right) dA \\
&= \text{Alan}^k \cdot (c_{x\alpha}^k c_{x\beta}^k + c_{y\alpha}^k c_{y\beta}^k) \quad , 1 \leq \alpha, \beta \leq 3
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Çünkü, türevler  $T_h^k$  elemanı üzerinde sabitlerden oluşmaktadır.

#### 3.4.2.4. Elemana ait sağ taraf vektörü

$\{\hat{F}_h\}$  global sağ taraf vektörünün bir elemanı

$$\hat{F}_{h,i} = l(\varphi_i) = \int_{\Omega} f\varphi_i dA \quad (3.42)$$

ile hesaplanır. Örneğin;  $T_h^7$  elemanının  $\{\hat{F}_h\}$  global sağ taraf vektörüne katkısının

$$\int_{T_h^7} f\varphi_{9,11 \text{ yada } 24} dA = \int_{T_h^7} fH_{1,2 \text{ yada } 3}^7 dA \quad (3.43)$$

olduğu görülür.  $\{F^k\} \in \mathbb{R}^3$  vektörü  $k$  elemanına ait yerel sağ taraf vektörü olsun. Bu durumda,  $\{F^k\}$  yerel sağ taraf vektörünün elemanları,

$$F_\alpha^k = \int_{T_h^k} fH_\alpha^k dA \quad , \alpha = 1,2,3 \quad (3.44)$$

olarak bulunur. Yukarıda yaklaşımın integral hesabı sayısal integre etme teknikleri ile yapılabilir.

### 3.4.3. Birleştirme

#### 3.4.3.1. $\theta(k, \alpha)$ dizisi

Burada kullanılan ana fikir bir boyutlu R uzayı ile aynıdır.  $x_\alpha^k$ , k. elemanın  $\alpha$ . düğüm noktası ve  $x_{\theta(k, \alpha)}$ ,  $\theta(k, \alpha)$ . global düğüm noktası olmak üzere

$$x_\alpha^k = x_{\theta(k, \alpha)} \quad (3.45)$$

olacak şekilde bir yerel sıralamadan global sıralamaya dönüşüm olan

$$\theta(k, \alpha): \underbrace{\{1, 2, \dots, K\}}_{\text{eleman numarası}} \times \underbrace{\{1, 2\}}_{\text{yerel düğüm numarası}} \rightarrow \underbrace{\{0, 1, \dots, \hat{n}\}}_{\text{global düğüm numarası}} \quad (3.46)$$

ile elemanların global sertlik matrisindeki yerleri belirlenir. Örneğin; yukarıdaki sıralama korunarak,  $k=7$ . eleman için  $\theta(7,1)=9$ ,  $\theta(7,2)=11$  ve  $\theta(7,3)=24$  olduğu görülebilir.

#### 3.4.3.2. $[\hat{A}_h]$ matrisinin elde edilmesi için yöntem

$[\hat{A}_h]$  matrisini oluşturmak için aşağıdaki işlem sırası takip edilir.

$[\hat{A}_h]$  matrisinin elemanları sıfır olarak kabul edilsin;

$\{k=1, \dots, K$  için

$\{\alpha=1, 2, 3$  için

$i = \theta(k, \alpha);$

$\{\beta=1, 2, 3$  için

$j = \theta(k, \beta);$

$\hat{A}_{h \ ij} = \hat{A}_{h \ ij} + A_{\alpha\beta}^k ; \}}\}}}$

Dikkat edilirse,  $R^2$  uzayındaki bu işlem sırası  $R^1$  uzayındaki ile aynıdır. Ancak  $R^2$ 'deki bu uygulama  $R^1$  uzayına göre çok daha yararlıdır. Çünkü;  $[\hat{A}_h]$  matrisinin elemanlarının  $\varphi_i$  ve  $\varphi_j$  baz fonksiyonları üzerinden hesaplanmaları oldukça güç olmasına karşın, yukarıdaki birleştirme işlemi çok kolaydır. Yani; her bir düğüm noktası üzerinden hareket ederek ona katkı sağlayan elemanları ve baz fonksiyonlarını bulmaktansa, elemanlar üzerinden hareket ederek bulunan verileri global matriste uygun yere yerleştirmek çok daha iyidir.

### 3.4.3.3. $\{\hat{F}_h\}$ matrisinin elde edilmesi için yöntem

$\{\hat{F}_h\}$  vektörünü oluşturmak için aşağıdaki işlem sırası takip edilir.

$$\begin{aligned} & \{\hat{F}_h\} \text{ matrisinin elemanları sıfır olarak kabul edilsin;} \\ & \{k=1, \dots, K \text{ için} \\ & \quad \{\alpha=1, 2, 3 \text{ için} \\ & \quad \quad i = \theta(k, \alpha); \\ & \quad \quad \hat{F}_{hi} = \hat{F}_{hi} + F_{\alpha}^k ; \} \} \end{aligned}$$

Yukarıdaki iş akış şeması bir önceki şema ile birleştirilerek  $[\hat{A}_h]$  matrisi ve  $\{\hat{F}_h\}$  vektörü aynı iş akış şeması içinde oluşturulabilir.

### 3.4.4. Sınır koşulları

#### 3.4.4.1. Homojen Dirichlet sınır koşulu

Bu kısımda sadece homojen Dirichlet sınır koşulları dikkate alınacaktır. Homojen olmayan Dirichlet ve Neumann koşulları benzer fikirler ile lineer cebirsel denklem sistemine dahil edilebilirler.

$u_h \in X_h$  olmak üzere  $u_h$  fonksiyonunun sınırdaki değeri  $u_h|_{\Gamma} = 0$  olsun.

$$a(u_h, v) = l(v), \forall v \in X_h, \quad v|_{\Gamma} = 0 \quad (3.47)$$

varyasyonel probleminin çözümü olan  $u_h$  fonksiyonu aranmaktadır. Burada

$$X_h = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \quad (3.48)$$

olmasına karşın

$$\hat{X}_h = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_{\hat{n}}\} \quad (3.49)$$

olduğunu hatırlayın.

Bir boyutlu uzayda olduğu gibi iki ayrı yöntem ile sınır koşulları sisteme dahil edilebilir.

1. Açık eliminasyon.  $X_h$  uzayında sınır değerleri verildiğinden  $\varphi_{n+1}, \dots, \varphi_{\hat{n}}$  baz fonksiyonları ile elde edilmiş varyasyonlar kabul edilemezler. Bu yüzden,  $[\hat{A}_h]$  matrisinden  $R_{n+1}, \dots, R_{\hat{n}}$  satırları ve  $C_{n+1}, \dots, C_{\hat{n}}$  sütunları çıkarılır. Böylece,  $u_h$  fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değerlerinden oluşan  $\hat{u}_{h, n+1}, \hat{u}_{h, n+2}, \dots, \hat{u}_{h, \hat{n}}$  bileşenleri sınır koşullarına uygun olarak sıfır olurlar.

2. Büyük sayı yaklaşımı.  $\epsilon$  sayısı 1'den çok küçük olmak üzere  $i = n+1, \dots, \hat{n}$  için  $[\hat{A}_h]$  matrisinin  $\hat{A}_{h, ii}$  elemanları  $1/\epsilon$  ile değiştirilsin.  $i = n+1, \dots, \hat{n}$  için  $\{\hat{F}_h\}$  vektörünün  $\hat{F}_{h, i}$  elemanları sıfır sayısı ile değiştirilsin. Böylece,  $\hat{u}_{h, n+1} \cong \dots \cong \hat{u}_{h, \hat{n}} \cong 0$  olacaktır.

### 3.5. $[A_h]\{u_h\} = \{F_h\}$ İçin Çözüm Yöntemleri

Denkleminin çözüm yöntemleri olarak; direkt yöntemler ve iteratif yöntemler sıralanabilir. Direkt yöntemlere örnek olarak bantlı yapıdaki LU, iteratif yöntemlere

örnek olarak da konjuge gradiyen yöntemi verilebilir. Ancak bu çalışmada bunlara yer verilmeyecektir.

### 3.6. İki Boyutlu Uzayda Çözülmüş Problemler

**Örnek 3.6.1.** İki boyutlu  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$  bölgesinde

$$-\nabla^2 T = 1 \quad (3.50)$$

Poisson denklemi

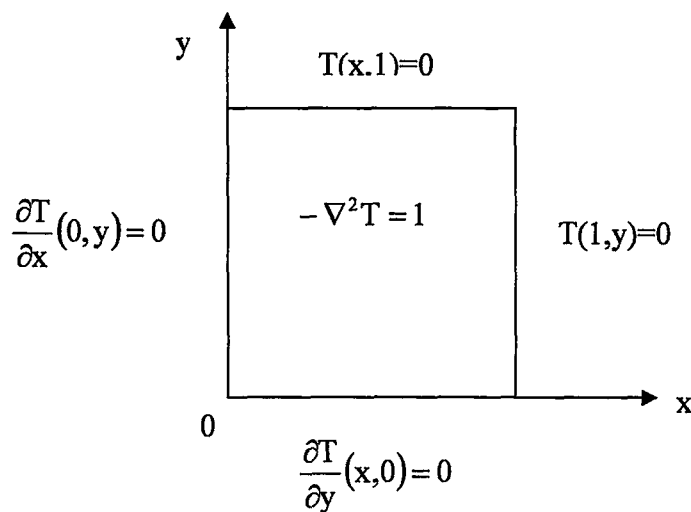
$$T(1, y) = T(x, 1) = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (3.52)$$

sınır koşulları ile verilsin. Bu Poisson denkleminin analitik çözümü

$$T(x, y) = \frac{1}{2} \left[ (1 - y^2) + \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left[(2n-1)\pi \frac{y}{2}\right] \cosh\left[(2n-1)\pi \frac{x}{2}\right]}{(2n-1)^3 \cosh(2n-1)\frac{\pi}{2}} \right] \quad (3.53)$$

fonksiyonu ile verilir.



Şekil 3.11.

4x4 dikdörtgen elemandan oluşan bir bölge kullanarak sonlu eleman çözümü yapıldığında Tablo 3.1 deki veriler elde edilmiştir.

Tablo 3.1.

(x,y)	Analitik Çözüm	Sonlu Eleman Çözümü (Dikdörtgen eleman)
(0,0)	0.294685	0.298393
(0.25,0)	0.278882	0.282395
(0.50,0)	0.229334	0.232195
(0.75,0)	0.139649	0.141370
(0,0.25)	0.278882	0.282395
(0.25,0.25)	0.264148	0.267516
(0.50,0.25)	0.217804	0.220624
(0.75,0.25)	0.133400	0.135009
(0,0.50)	0.229340	0.232195
(0.25,0.50)	0.217799	0.220624
(0.50,0.50)	0.181141	0.183810
(0.75,0.50)	0.112686	0.114571
(0,0.75)	0.139729	0.141370
(0.25,0.75)	0.133328	0.135009
(0.50,0.75)	0.112739	0.114571
(0.75,0.75)	0.072842	0.075056

**Örnek 3.6.2.** Örnek 3.6.1. deki Robin sınır koşulları ile verilmiş olan Poisson denklemini ele alınsın. 4x4 dikdörtgen elemandan oluşan bölge her elemanı ikiye bölerek 4x4x2 üçgen elemandan oluşan bir bölgeye dönüştürülebilir.

Burada dikkat edilecek nokta, global düğüm noktalarının sayısı değişmeden daha fazla sonlu eleman elde edilmiş olmasıdır. Bu şartlar altında lineer baz fonksiyonları kullanılarak sonlu eleman çözümü yapıldığında Tablo 3.2 deki veriler elde edilir.

Tablo 3.2.

(x,y)	Analitik Çözüm	Sonlu Eleman Çözümü (Üçgen eleman)
(0,0)	0.294685	0.321691
(0.25,0)	0.278882	0.290441
(0.50,0)	0.229334	0.234375
(0.75,0)	0.139649	0.141544
(0,0.25)	0.278882	0.290441
(0.25,0.25)	0.264148	0.271599
(0.50,0.25)	0.217804	0.221507
(0.75,0.25)	0.133400	0.134651
(0,0.50)	0.229340	0.234375
(0.25,0.50)	0.217799	0.221507
(0.50,0.50)	0.181141	0.182904
(0.75,0.50)	0.112686	0.113051
(0,0.75)	0.139729	0.141544
(0.25,0.75)	0.133328	0.134651
(0.50,0.75)	0.112739	0.113051
(0.75,0.75)	0.072842	0.072150

**Örnek 3.6.3.**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (3.54)$$

Laplace denklemi

$$u_y(x,0) = \pi(\cos \pi x + \cos 2\pi x), \quad u_y(x,1) = 0, \quad 0 < x \leq 1 \quad (3.55)$$

$$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 0, \quad 0 < y \leq 1 \quad (3.56)$$

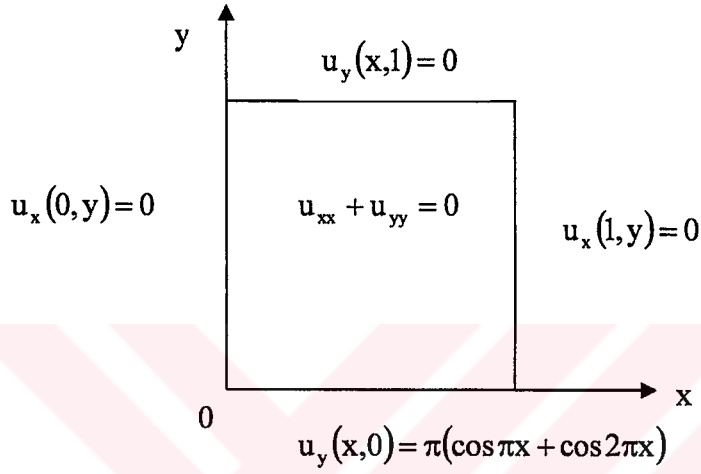
Neumann sınır koşulları ile verilsin.  $u(0,0)=0$  koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.



Bu sorunun analitik çözümü

$$u(x, y) = \frac{-\cos \pi x \cdot \cosh(\pi - \pi y)}{\sinh \pi} - \frac{\cos 2\pi x \cdot \cosh[2(\pi - \pi y)]}{2 \sinh 2\pi} + \coth \pi + \frac{1}{2} \coth 2\pi \quad (3.57)$$

fonksiyonudur.



Şekil 3.12.

4x4 dikdörtgen elemandan oluşan bir bölge kullanarak sonlu eleman çözümü yapıldığında Tablo 3.3 teki veriler elde edilmiştir.

Tablo 3.3.

<b>(x,y)</b>	<b>Analitik Çözüm</b>	<b>Sonlu Elaman Çözümü (Dörtgen eleman)</b>
(0,0)	0	0
(0.25,0.00)	0.793993	0.786550
(0.50,0.00)	2.003750	1.988070
(0.75,0.00)	2.213500	2.203340
(1.00,0.00)	2.007480	2.003640
(0.00,0.25)	0.938902	0.992684
(0.25,0.25)	1.177840	1.184080
(0.50,0.25)	1.607690	1.557580
(0.75,0.25)	1.829650	1.805810
(1.00,0.25)	1.860690	1.871930
(0.00,0.50)	1.264830	1.289540
(0.25,0.50)	1.350110	1.355330
(0.50,0.50)	1.525390	1.502900
(0.75,0.50)	1.657380	1.634560
(1.00,0.50)	1.699370	1.684430
(0.00,0.75)	1.384360	1.394940
(0.25,0.75)	1.422640	1.424950
(0.50,0.75)	1.508430	1.495970
(0.75,0.75)	1.584850	1.564930
(1.00,0.75)	1.613760	1.592900
(0.00,1.00)	1.415290	1.422120
(0.25,1.00)	1.442520	1.443630
(0.50,1.00)	1.505610	1.495200
(0.75,1.00)	1.564970	1.546260
(1.00,1.00)	1.588470	1.567250

**Örnek 3.6.4.** Örnek 3.6.3 te Neumann sınır koşulu ile verilen Laplace denklemi ele alınsın.  $4 \times 4$  dörtgen elemandan oluşan bölge her elemanı ikiye bölerek  $4 \times 4 \times 2$  üçgen elemandan oluşan bölgeye dönüştürülebilir. Bu bölgede lineer baz fonksiyonları kullanılarak sonlu eleman çözümü yapıldığında Tablo 3.4 teki veriler elde edilmiştir.



Tablo 3.4.

<b>(x,y)</b>	<b>Analitik Çözüm</b>	<b>Sonlu Elaman Çözümü (Üçgen eleman)</b>
(0,0)	0	0
(0.25,0.00)	0.793993	0.619452
(0.50,0.00)	2.003750	1.357940
(0.75,0.00)	2.213500	1.496670
(1.00,0.00)	2.007480	1.416670
(0.00,0.25)	0.938902	0.630749
(0.25,0.25)	1.177840	0.829388
(0.50,0.25)	1.607690	1.130520
(0.75,0.25)	1.829650	1.266090
(1.00,0.25)	1.860690	1.282050
(0.00,0.50)	1.264830	0.864218
(0.25,0.50)	1.350110	0.936830
(0.50,0.50)	1.525390	1.068670
(0.75,0.50)	1.657380	1.155100
(1.00,0.50)	1.699370	1.179370
(0.00,0.75)	1.384360	0.952463
(0.25,0.75)	1.422640	0.985041
(0.50,0.75)	1.508430	1.052230
(0.75,0.75)	1.584850	1.106290
(1.00,0.75)	1.613760	1.125210
(0.00,1.00)	1.415290	0.975551
(0.25,1.00)	1.442520	0.998640
(0.50,1.00)	1.505610	1.048930
(0.75,1.00)	1.564970	1.092600
(1.00,1.00)	1.588470	1.108910

## BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonlu elemanlar metodu, uygulamalı matematik ve mühendislik bilimlerinde, sayısal simülasyonlar için en fazla kabul gören genel amaçlı bir teknik halini almıştır. Sonlu elemanlar metodunun temel uygulamaları sürekli ortamlar mekaniği, sıvı akışı ve termodinamik alanlarında ortaya çıkmaktadır. Bu alanlarda bilgisayar temelli metodlar gereklilik arz eder. Bu nedenle, bilgisayar teknolojisindeki inanılmaz gelişmelerden bu alanlarda faydalanılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodu, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin içeren sofistike bir yöntemdir. Ayrıca; bu metod, varyasyonel problemlerin sonlu boyutlu uzaylarda yaklaşımları hadisesi olarak da yorumlanabilir.

Bu metod; sonlu elemanlar uzaylarının inşa edilmesi, yaklaşım teorisi, sayısal hesaplama yöntemleri, problemin verildiği bölgenin ayrıklaştırılması, sonlu elemanlar baz sistemlerinin seçilmesi, sınır koşullarının sınıflandırılması ve sisteme dahil edilmesi ve hata analizi gibi değişik konuları içermektedir. Dolayısıyla bu metodun etkinliği bilgisayara uygulanması ile mümkün olmaktadır. Bu yüzden ki; yukarıda bahsedilen herhangi bir konudaki iyileştirmeler bu metoda bir yenilik katacaktır. Son yıllarda bu konuda yapılan çalışmaların çokluğu söylenen işleve yöneliktir.

Mesela; sonlu eleman baz fonksiyonlarının daha kullanışlı bir seçimi daha iyi bir çözüm yönteminin gelişmesini sağlar. Son zamanlarda düğüm noktalarını temel alan baz fonksiyonları yerine spline fonksiyonlarının kullanılması buna örnektir.

İkinci bir örnek olarak; verilen diferansiyel operatörün iyileştirilerek daha iyi sonuçlar elde edilmesi verilebilir.

**KAYNAKLAR**

- [1] Brenner, S.C., Scott, L.R., The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer-Verlag, 1994
- [2] Buchanan, R.G., Theory and Problems of Finite Element Analysis, McGraw-Hill, 1995
- [3] Felippa, C.A., Lecture notes for the course Introduction to Finite Element Methods, 2003
- [4] Hasanoğlu, A., Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi, Literatür, 2001
- [5] Li, Z., Lecture notes for the course Numerical Solution of PDEs
- [6] Patera, A.T., Lecture notes for the course Numerical Methods for PDEs, MIT, 2003
- [7] Reddy, J.N.:, An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill, 1984
- [8] Reddy, J.N.:, Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, McGraw-Hill, 1986
- [9] Ward, C., Kincaid, C., Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing, Brooks/Cole, 1991

## ÖZGEÇMİŞ

Mustafa ERÖZ 19 Ağustos 1976'da Sakarya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Sakarya'da tamamladı. Marmara Üniversitesi Matematik Öğretmenliği bölümünü 1998'de bitirdi. Milli eğitime bağlı özel ve devlete ait orta öğrenim kurumlarında matematik öğretmenliği yaptı. 2003 yılı itibariyle Sakarya Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir.

