

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selma ÇAYLAN

153057

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

HAZİRAN 2004

T.C
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selma ÇAYLAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

Bu tez ²³⁰⁶.././2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. A. YILDIZ

Jüri Başkanı

Prof. H. ARIKAN

Jüri Üyesi

Doç. Dr. H. M. T. ÜTÜNEL

Jüri Üyesi

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın her aőamasında çok değerli destekleri için hocam Prof. Dr. Abdullah YILDIZ'a, Matematik bۆlümü hocalarımıza ve yardımlarından dolayı Araştırma Gۆevlisi arkadaşlarıma teőekkürlerimi sunarım.

Matematięin temeline ve kullandığı dile ne kadar hakim olunursa onu anlamakta ve yۆkseltmekte de o kadar baőarılı olunacağına inanarak, tezimin tۆm okuyuculara yararlı olmasını dilerim.

Selma AYLAN

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
TABLOLARLİSTESİ	viii
ÖZET.....	ix
SUMMARY.....	x

BÖLÜM 1.

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KALİTATİF ANALİZİ.....	1
1.1. Nitel Teori.....	1
1.2. Kararlılık ve Faz Düzlemi.....	1

BÖLÜM 2.

LİNEER ve LİNEERİMSİ SİSTEMLER.....	5
2.1. Lineer Sistemin Denge Noktaları.....	6
2.2. Lineer Sistemlerin Kararlılığı.....	15
2.3. Lineerimsi Sistemler.....	27
2.4. Av-Avcı Denklemleri.....	35

BÖLÜM 3.

LIAPUNOV'un İKİNCİ METODU.....	45
--------------------------------	----

BÖLÜM 4.

LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERDE ÇEVİRİLER, DALLANMALAR ve KAOS.....	57
4.1. Limit Çevriler.....	57
4.2. Poincare-Bendixon Alternatifleri.....	64

4.3. Dallarmlar.....72

BÖLÜM 5.

SONUÇLAR ve TARTIŞMALAR.....85

KAYNAKLAR.....87

ÖZGEÇMİŞ.....88



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.2.1.....	3
Şekil 2.1.1.....	7
Şekil 2.1.2.....	9
Şekil 2.1.3.....	9
Şekil 2.1.4.....	9
Şekil 2.1.5.....	9
Şekil 2.1.6.....	10
Şekil 2.1.7.....	10
Şekil 2.1.8.....	12
Şekil 2.1.9.....	12
Şekil 2.1.10.....	13
Şekil 2.1.11.....	13
Şekil 2.1.12.....	14
Şekil 2.1.13.....	14
Şekil 2.2.1.....	20
Şekil 2.2.2.....	20
Şekil 2.2.3.....	21
Şekil 2.2.4.....	23
Şekil 2.2.5.....	24
Şekil 2.2.6.....	25-26
Şekil 2.2.7.....	27
Şekil 2.2.8.....	27
Şekil 2.3.1.....	34
Şekil 2.4.1.....	38
Şekil 2.4.2.....	38
Şekil 2.4.3.....	43

Şekil 2.4.4.....	44
Şekil 2.4.5.....	44
Şekil 2.4.6.....	44
Şekil 2.4.7.....	44
Şekil 4.1.1.....	60
Şekil 4.1.2.....	61
Şekil 4.1.3.....	61
Şekil 4.1.4.....	63
Şekil 4.2.1.....	65
Şekil 4.2.2.....	67
Şekil 4.2.3.....	70
Şekil 4.3.1.....	73
Şekil 4.3.2.....	73
Şekil 4.3.3.....	74
Şekil 4.3.4.....	74
Şekil 4.3.5.....	74
Şekil 4.3.6.....	74
Şekil 4.3.7.....	75
Şekil 4.3.8.....	75
Şekil 4.3.9.....	75
Şekil 4.3.10.....	75
Şekil 4.3.11.....	76
Şekil 4.3.12.....	76
Şekil 4.3.13.....	77
Şekil 4.3.14.....	77
Şekil 4.3.15.....	79
Şekil 4.3.16.....	79
Şekil 4.3.17.....	79
Şekil 4.3.18.....	79
Şekil 4.3.19.....	79
Şekil 4.3.20.....	81
Şekil 4.3.21.....	81
Şekil 4.3.22.....	82

Şekil 4.3.23.....	82
Şekil 4.3.24.....	83
Şekil 4.3.25.....	83
Şekil 4.3.26.....	83
Şekil 4.3.27.....	84
Şekil 4.3.28.....	84
Şekil 4.3.29.....	84
Şekil 4.3.30.....	84



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 2.1.1.....	14
Tablo 2.3.1.....	33



ÖZET

Anahtar Kelimeler: Kararlılık, faz düzlemi, otonom sistem, Dallanma ve Kaos

Bu çalışmada, bir diferansiyel denklem takımı ile modellenen bir hadisenin kalitatif analizi yapılmaktadır. Diferansiyel denklem sistemleri için iki tip önemli konu vardır. Bunlardan birincisi, çözümün varlığı ve tekliğidir. İkincisi ise, sistemin kararlılığı ve kararsızlığıdır.

Sistem parametrelerinin değişmesi ve başlangıç datalarının küçük değişimleri çözümleri nasıl etkiler, çözümlerin asimptotik davranışı nasıldır, sistemin periyodik çözümleri var mıdır, sistem kaotik davranışa geçer mi? ... gibi sorular önem kazanmaktadır. Sistemin analitik çözümleri elde edilerek de bu tarz davranışların incelenmesi mümkündür. Fakat analitik çözülebilen problemlerin çok az oluşu kalitatif analizin önemini arttırmaktadır.

Kalitatif analiz diye karakterize edilen bu konu, bu tezde elemanter seviyeden alınarak işlenmiş ve örneklenmiştir. Bu bağlamda bazı önemli dinamik sistemlerinin analizleri verilmiştir.

STABILITY ANALYSIS OF DYNAMICAL SYSTEMS

SUMMARY

Keywords : Stability, Phase Plane, Autonomous System, Bifurcation and Chaos

In this study, the qualitative analysis in a circumstance modelled with a differential equation is done. There are two important subjects in the differential equation systems. First one is existence and uniqueness of solution. Second one is the stability or instability of the system.

It is important that small changing in some parameters and initial data how affects solutions, what is the asymptotic behaviour of the solutions, are there periodical solutions in the system and does the system show chaotic behaviour? Examining these type behaviours is also possible by obtaining analytical solutions of the system.

In this thesis, the subject characterized as qualitative analysis was taken elementary level, performed and given an example. Also analysis of some important dynamical systems were given.

BÖLÜM 1 DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KALİTATİF (NİTEL) ANALİZİ

1.1. Nitel Teori

Lineer olmayan denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi mümkün olmayabilir. Eğer mümkünse nümerik çözümler yapılabilir. Bir başka yaklaşım ise çözümlerin davranışlarının nitel durumlarını incelemektir. Nitel bilgi denklemin çözmeden çözüm hakkında bilgi elde etmektir. Bunlardan en önemlisi çözümün kararlılığıdır. Diferansiyel denklem sistemleri ve çözümleri hakkındaki sorular iki kategoriye ayrılır:

- 1) Çözüm var mıdır? Eğer varsa kaç tanedir?
- 2) Sistem kararlı mıdır? Sistemin parametreleri değiştiğinde çözümlere ne olur? Çözümlerin asimptotik davranışları nasıldır? Sistem periyodik çözümlere sahip midir? Kaotik davranış oluşur mu?

Bu sorular reel sistemlerin tasarım ve analizinde ortaya çıkar. Sistemin nitel özellikleri çözüm formüllerine sahip olmadan elde edilebilir.

1.2. Kararlılık ve Faz Düzlemi

Birinci dereceden iki boyutlu

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

formundaki, açık bir şekilde t bağımsız değişkenini içermeyen sistem otonom sistem olarak adlandırılır. Yani otonom sistem, yalnızca sol kısmının dt diferansiyelinde t

bağımsız değişkenini içerir. Burada F ve G nin xy düzlemindeki herhangi bir D bölgesinde sürekli kısmi türevelere sahip sürekli fonksiyonlar olduğunu farz edelim. xy düzlemine (1.2.1) sisteminin faz düzlemi denir. Yani x ve y düzlemi faz düzlemidir. Öyleyse, Varlık ve Teklik teoremine göre, verilen t_0 ve (x_0, y_0) reel sayı çifti için (1.2.1) in $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ olacak şekilde t_0 ı içeren (a, b) açık aralığında tanımlı ve

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \quad (1.2.2)$$

başlangıç koşullarına uyan tek bir çözümü vardır.

$x = x(t)$, $y = y(t)$ denklemleri bir parametrik çözüm eğrisi tanımlar. Bu eğri faz düzleminde (1.2.1) sisteminin yörüngesi olarak adlandırılır. (1.2.1) sisteminde

$$F(x_*, y_*) = G(x_*, y_*) = 0 \quad (1.2.3)$$

şartını sağlayan (x_*, y_*) noktasına denge noktası denir. Eğer (x_*, y_*) sistemin denge noktası ise sabit değerli

$$x(t) \equiv x_* \quad , \quad y(t) \equiv y_* \quad (1.2.4)$$

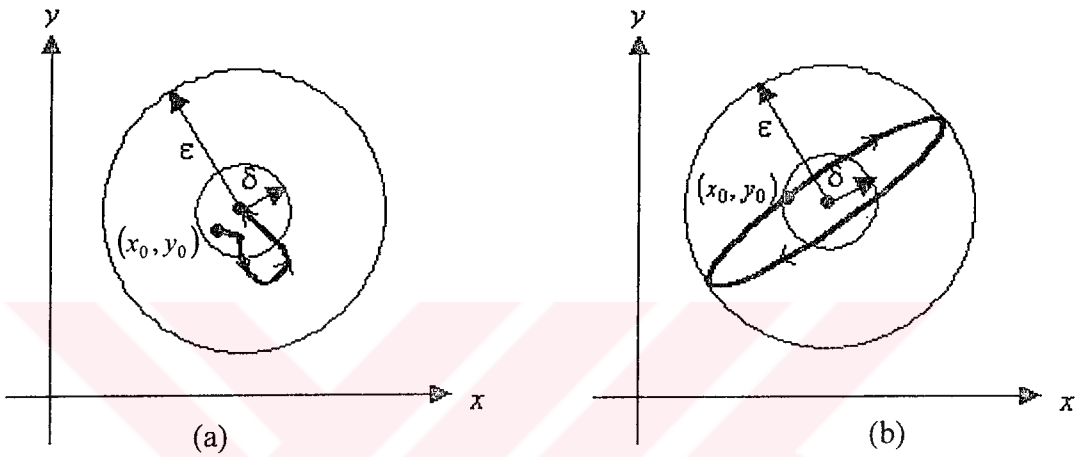
fonksiyonları (1.2.1) denklemini sağlar. Bu şekildeki sabit değerli bir çözüm, sistemin denge çözümü olarak adlandırılır. Denge noktası komşuluğunda yani; merkezi (x_*, y_*) noktasında olan herhangi bir çemberin içerisinde (1.2.1) sisteminin başka hiçbir denge noktası yoksa (x_*, y_*) noktasına ayrık denge noktası denir. (1.2.4) deki denge çözümünün yörüngesi faz düzleminde (x_*, y_*) noktasından meydana gelir.

Eğer $t=0$ anında (x_0, y_0) başlangıç noktası (x_*, y_*) a yeterince yakın başlayıp $t > 0$ olduğunda (x_*, y_*) a keyfi yakın kalıyorsa (1.2.1) otonom sisteminin (x_*, y_*) noktası kararlıdır. Yani, vektör notasyonu ile gösterecek olursak, $\mathbf{x} = (x, y)$, başlangıç noktası $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ ve denge noktası $\mathbf{x}^* = (x_*, y_*)$ olmak üzere, \mathbf{x}_0 ve \mathbf{x}^* noktaları arasındaki mesafe $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| = \sqrt{(x_0 - x_*)^2 + (y_0 - y_*)^2}$ dir. Böylece, \mathbf{x}^* denge noktası kararlıysa, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\exists \delta > 0$ için, $t = 0$ anında $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| < \delta$ iken $t > 0$ olduğunda $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| < \varepsilon$ olur.

Eğer (x_*, y_*) denge noktası kararlı ve bununla birlikte (x_*, y_*) a yeterince yakın başlayan her yörünge $t \rightarrow +\infty$ olduğunda da (x_*, y_*) a yaklaşırsa (x_*, y_*) denge noktası asimptotik kararlıdır denir. Yani, $\exists \delta > 0$ için,

$$|x_0 - x_*| < \delta \text{ iken } \lim_{t \rightarrow \infty} x = x_*$$

dır.



Şekil 1.2.1 (a) Asimptotik Kararlı. (b) Kararlı.

Eğer, x_* noktasını kapsayan D bölgesinde $\lim_{t \rightarrow \infty} x = x_*$ ise (1.2.1) sisteminin $x_*(x_*, y_*)$ denge noktasına çekici denir.

Böylece, (1.2.1) sistemi $x_*(x_*, y_*)$ noktasında kararlı ve bu nokta bir çekici ise asimptotik kararlıdır.

(1.2.1) sistemi (x_*, y_*) denge noktasında kararlı ama asimptotik kararlı değilse sisteme nötral (neutrally) kararlıdır denir.

BÖLÜM 2. LİNEER ve LİNEERİMSİ SİSTEMLER

$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ eşitliğini sağlayan (x_0, y_0) ayrık denge noktası civarında

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad (2.1)$$

otonom sisteminin çözümlerinin davranışlarını inceleyelim. F ve G fonksiyonlarının, (x_0, y_0) komşulunda sürekli diferansiyellenebilir olduğunu farz edelim.

Genel halde, (x_0, y_0) , (2.1) sisteminin bir çözümlüyse, $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ şeklinde bir dönüşüm yaparak, bu çözümlü başka bir sistemin sıfır çözümlüne dönüştürmek mümkündür. Yani; (2.1) sistemi, $dx/dt = du/dt$ ve $dy/dt = dv/dt$ olmak üzere, $(0,0)$ ayrık denge noktasına sahip

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F(u + x_0, v + y_0) = F_1(u, v) \\ \frac{dv}{dt} &= G(u + x_0, v + y_0) = G_1(u, v) \end{aligned} \quad (2.2)$$

sistemine denktir.

Örnek 2.1

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - x^2 - xy = x(3 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= y + y^2 - 3xy = y(1 - 3x + y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

sisteminin denge noktalarından biri $(1,2)$ noktasıdır. $u = x - 1$, $v = y - 2$ yi yani $x = u + 1$, $y = v + 2$ ifadelerini yerlerine yazalım. Öyleyse,

$$3 - x - y = 3 - (u + 1) - (v + 2) = -u - v$$

ve

$$1 - 3x + y = 1 - 3(u + 1) + (v + 2) = -3u + v$$

olur. Böylece (2.3) sistemi

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (u + 1)(-u - v) = -u - v - u^2 - uv \\ \frac{dv}{dt} &= (v + 2)(-3u + v) = -6u + 2v + v^2 - 3uv \end{aligned} \quad (2.4)$$

halini alır ve (0,0) denge noktasına sahiptir. Eğer (0,0) civarında (2.4) sisteminin yörüngelerini belirleyebilirsek, (0,0) ı (1,2) ye taşıyan değişmez hareket altında yörünge dönüşümleri, (2.3) deki orijinal sistemin (1,2) civarındaki yörüngeleri olacaktır.

2.1. Lineer Sistemlerin Denge Noktaları

A katsayı matrisi olmak üzere; $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, yani;

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

lineer sistemini çözmek için özdeğer-özvektör metodunu kullanabiliriz. A nın λ_1 ve λ_2 özdeğerleri

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1.2)$$

karakteristik denkleminin çözümleridir.

(0,0) ın, (2.1.1) sisteminin ayırık denge noktası olduğunu farz edelim. Bu nedenle $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ sisteminin $ad - bc$ katsayı determinantı sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $\lambda = 0$, (2.1.2) nin bir çözümü değildir ve A matrisinin her iki özdeğeri sıfırdan farklıdır.

(0,0) ayırık denge noktasının özelliği, A nın sıfırdan farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerinin

- a. reel, farklı, aynı işaretli
- b. reel, farklı, zıt işaretli
- c. reel ve eşit
- d. sıfırdan farklı reel kısma sahip eşlenikler
- e. sırf imajiner

olup olmamasına bağlıdır. Bu 5 durumu ayrı ayrı inceleyeceğiz. Her bir durumda $(0,0)$ denge noktası düğüm noktası (node point), eyer noktası (saddle point), spiral nokta (spiral point), veya merkez nokta (center point) larından birine karşılık gelir.

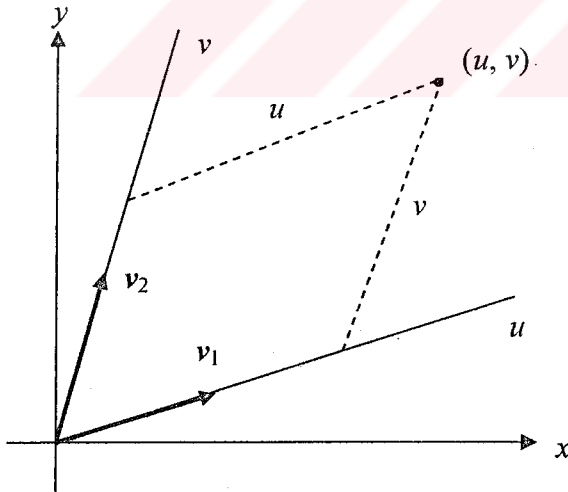
(a) Aynı İşaretli, Birbirinden Farklı, Reel Özdeğerler

Bu durumda, A matrisi lineer bağımsız v_1 ve v_2 özvektörlerine sahiptir ve (2.1.1) in

$x(t) = [x(t) \ y(t)]^T$ genel çözümü;

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.1.3)$$

formunu alır. Bu çözüm v_1 ve v_2 özvektörleriyle belirlenen, u ve v eksenlerinin oluşturduğu eğik uv -koordinat sisteminde basit bir şekilde belirlenir.



Şekil 2.1.1 v_1 ve v_2 özvektörleriyle belirlenen eğik uv -koordinat sistemi

Hareket eden $x(t)$ noktasının uv -koordinat fonksiyonları $u(t)$ ve $v(t)$, v_1 ve v_2 vektörlerine paralel yönde orijinden itibaren ölçülmüş mesafedir. Böylece (2.1.3) denkleminde, sistemin herhangi bir yörüngesinin $u_0 = u(0)$ ve $v_0 = v(0)$ olacak şekilde

$$u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t} \quad (2.1.4)$$

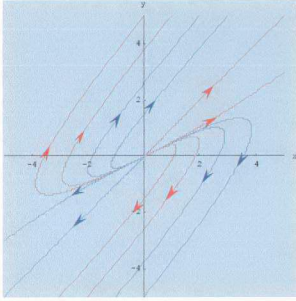
ile belirlenebileceği görülür. Eğer $v_0 = 0$ ise yörünge u ekseninde, $u_0 = 0$ ise v ekseninde kalır. u_0 ve v_0 ın her ikisi de sıfırdan farklı ise (2.1.4) deki parametrik eğri $v = Cu^k$, $k = \lambda_2/\lambda_1 > 0$ açık halini alır. Bu çözüm eğrileri $(0,0)$ da, $k > 1$ ise u eksenine, $0 < k < 1$ ise v eksenine teğettir. Böylece, bu durumda $(0,0)$ denge noktası düzensiz düğüm (improper node) adını alır. Eğer λ_1 ve λ_2 nin her ikisi de pozitif ise (2.1.3) ve (2.1.4) den görüldüğü gibi çözüm eğrileri t arttığında orijinden ayrılır. Böylece $(0,0)$ a noktasal kaynak (nodal source) denir. λ_1 ve λ_2 nin her ikisi de negatif ise çözüm eğrileri t arttığında orijine yaklaşır. Böylece $(0,0)$ noktasına toplayıcı (nodal sink) denir.

Örnek 2.1.2

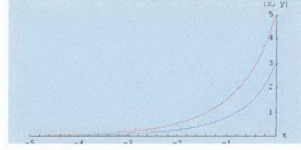
(a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = 1$ dir. $\lambda_1 = 3$ e karşılık gelen özvektör $v_1 = [1 \ 1]^T$ ve $\lambda_2 = 1$ e karşılık gelen özvektör $v_2 = [2 \ 1]^T$ dir. Şekil 2.1.2, $x' = Ax$ lineer sisteminin yörüngelerini belirler. Dikkat edersek özvektörler lineer yörüngelerin yönlerini gösterir. Diğer bütün yörüngeler orijin boyunca eğik eksenlerden birine teğettir. Bu örnekte birbirinden farklı reel özdeğerlerin her ikisi de pozitiftir. Böylece $(0,0)$ düzensiz noktasal kaynaktır.



Şekil 2.1.2 Örnek 2.1.2 (a) nin düğüm noktası

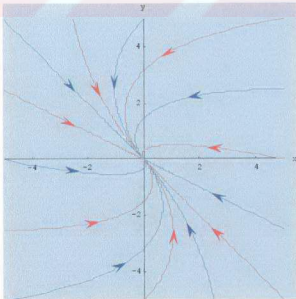


Şekil 2.1.3 $x=5, y=3$ den başlayan yörüngenin zaman grafiği

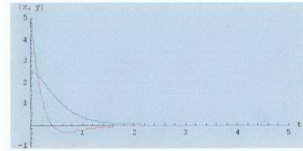
(b)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen özvektörleri sırasıyla $\lambda_1 = -4$ ve $\lambda_2 = -3$, $v_1 = [-2 \ 1]^T$ ve $v_2 = [-1 \ 1]^T$ dir. $x' = Bx$ lineer sistemi Şekil 2.1.4 deki yörüngelere sahiptir. Böylece $(0,0)$ düzensiz toplayıcıdır.



Şekil 2.1.4 Örnek 2.1.2 (b) nin düğüm noktası



Şekil 2.1.5 $x=5, y=2.5$ dan başlayan yörüngenin zaman grafiği

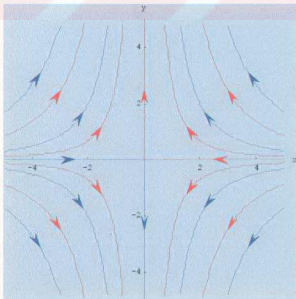
(b) Zıt İşaretli, Birbirinden Farklı, Reel Özdeğerler

Buradaki durum (2.1.4) deki $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ hariç, bir önceki durumla aynıdır. $u_0 = 0$ veya $v_0 = 0$ lı yörüngeler $(0,0)$ denge noktası boyunca u ve v eksenleri üzerinde kalır. u_0 ve v_0 in her ikisinin de sıfır olmadığı yörüngeler, $v = Cu^k$, $k = \lambda_2/\lambda_1 < 0$ açık halinin eğrileridir. $k < 0$ iken yörüngeler hiperbollere benzer ve $(0,0)$ denge noktasına kararsız eyer noktası (unstable saddle point) denir.

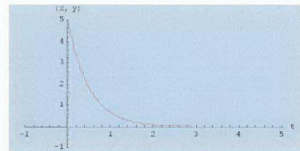
Örnek 2.1.3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen özvektörleri sırasıyla $\lambda_1 = 4$ ve $\lambda_2 = -2$, $v_1 = [0 \ 1]^T$ ve $v_2 = [1 \ 0]^T$ dir. Şekil 2.1.6, $x' = Ax$ lineer sisteminin yörüngelerini gösterir. Yine dikkat edersek iki özvektör, lineer yörüngelerin yönlerini belirler. Burada $k = -1$ ve lineer olmayan yörüngeler eğik uv -koordinat sistemdeki hiperbollerdir. Böylece şekilde gösterildiği gibi $(0,0)$ noktası eyer noktası olur. İki özvektör, bu hiperbollerin asimptotlarının yönünü gösterir.



Şekil 2.1.6 Örnek 2.1.3 ün eyer noktası



Şekil 2.1.7 $x=5, y=0$ dan başlayan yörüngenin zaman grafiği

(c) Eşit Reel Kökler

Bu durumda yani $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ halinde, $(0,0)$ denge noktasının karakteri, \mathcal{A} katsayı matrisinin iki tane lineer bağımsız v_1 ve v_2 özvektörlerine sahip olup olmamasına bağlıdır. Öyleyse, Şekil 2.1.1 de olduğu gibi eğik uv -koordinatlarına sahip olunur ve (2.1.4) deki gibi yörüngeler

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t} \quad (2.1.5)$$

ile belirlenir. Ama $k = \bar{\lambda}_2 / \lambda_1 = 1$ olduğundan $u_0 \neq 0$ olan yörüngeler $v = Cu$ formundadır ve böylece orijin boyunca düz doğrular üzerinde kalır. Dolayısıyla $(0,0)$ denge noktası, düzenli düğüm (proper node) veya yıldız (star) adını alır. $\lambda > 0$ ise kaynak (source), $\lambda < 0$ ise toplayıcı (sink) dir.

Eğer katlı $\lambda \neq 0$ özdeğeri sadece tek bir v_1 özvektörüne sahipse, $(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I}) v_2 = v_1$ olacak şekilde genelleştirilmiş bir özvektör mevcuttur ve $x' = \mathcal{A}x$ lineer sistemi iki lineer bağımsız

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda t} \quad \text{ve} \quad x_2(t) = (v_1 t + v_2) e^{\lambda t} \quad (2.1.6)$$

çözüme sahiptir.

Şekil 2.1.1 deki gibi, eğik uv -koordinatlarını tanıtmak için v_1 ve v_2 vektörlerini kullanmaya devam edebiliriz. Öyleyse (2.1.6) dan görüldüğü gibi yörünge üzerinde hareket eden $x(t)$ noktasının $u(t)$ ve $v(t)$ koordinat fonksiyonları, $u_0 = u(0)$ ve $v_0 = v(0)$ olmak üzere,

$$u(t) = (u_0 + v_0 t) e^{\lambda t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t} \quad (2.1.7)$$

ile verilir. Eğer $v = 0$ ise bu yörünge u ekseninde yer alır. Aksi takdirde,

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{\lambda v_0 e^{\lambda t}}{v_0 e^{\lambda t} + \lambda(u_0 + v_0 t) e^{\lambda t}} = \frac{\lambda v_0}{v_0 + \lambda(u_0 + v_0 t)}$$

ile lincere olmayan bir yörüngeye sahiptir.

$t \rightarrow \pm\infty$ olduğunda $dv/du \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla, her bir yörünge u eksenine teğettir.

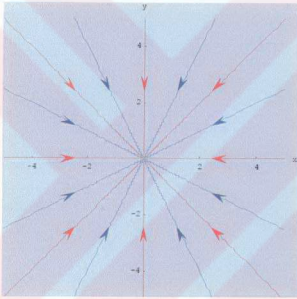
Bu nedenle $(0,0)$ a düzensiz düğüm (improper node) denir. $\lambda < 0$ ise (2.1.7) den

görüldüğü gibi bu düğüm (node) bir toplayıcı (sink) dir. $\lambda > 0$ ise bir kaynak (source) tir.

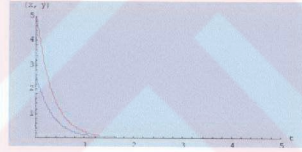
Örnek 2.1.4

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin katlı özdeğeri $\lambda = -3$ ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörler $v_1 = [0 \ 1]^T$ ve $v_2 = [1 \ 0]^T$ dir. Şekil 2.1.8, $x' = Ax$ linear sisteminin yörüngelerini gösterir.



Şekil 2.1.8 Örnek 2.1.4 ün düğüm noktası



Şekil 2.1.9 $x=5, y=2.5$ dan başlayan yörüngenin zaman grafiği

(d) Kompleks Eşlenik Özdeğerler

A matrisinin $\lambda = p + qi$ ve $\bar{\lambda} = p - qi$ (p ve q sıfırdan farklı) özdeğerlerine ve bunlara karşılık gelen $v = a + bi$ ve $\bar{v} = a - bi$ özvektörlerine sahip olduğunu farz edelim. Böylece $x' = Ax$ linear sistemi iki bağımsız reel değerli

$$x_1(t) = e^{pt}(a \cos qt - b \sin qt) \quad \text{ve} \quad x_2(t) = e^{pt}(b \cos qt + a \sin qt) \quad (2.1.8)$$

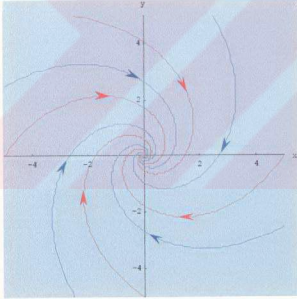
çözümlerine sahiptir.

Böylece $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ çözümünün $x(t)$ ve $y(t)$ bileşenleri, t arttığında pozitif ve negatif değerler arasında değişir. Böylece $(0,0)$ denge noktası spiral nokta (spiral point) adını alır. Eğer özdeğerlerin reel kısmı olan p negatif ise, (2.1.8) den de görüldüğü gibi $t \rightarrow +\infty$ olduğunda $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$ olur. Böylece orijin spiral toplayıcı (spiral sink) adını alır. p pozitif ise denge noktasına spiral kaynak (spiral source) denir.

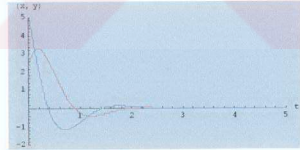
Örnek 2.1.5

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi negatif reel kısımlı $\lambda = -2 \pm 3i$ kompleks eşlenik özdeğerlerine sahiptir. Böylece $(0,0)$ spiral toplayıcıdır. Şekil 2.1.10, $t \rightarrow +\infty$ olduğunda orijine yaklaşan tipik spiral yörüngeyi gösterir.



Şekil 2.1.10 Örnek 2.1.5 in spiral noktası



Şekil 2.1.11 $x=-2.5, y=5$ den başlayan yörüngenin zaman grafiği

(e) Sıf (Pure) Sanal Özdeğerler

Eğer A matrisi $\lambda = qi$ ve $\bar{\lambda} = -qi$ özdeğerlerine ve bunlara karşılık gelen $\mathbf{v} = \mathbf{a} + bi$ ve $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - bi$ özvektörlerine sahipse $p = 0$ olan (2.1.8), $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ lineer sisteminin

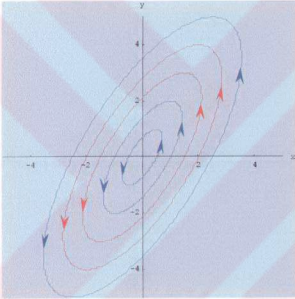
$$x_1(t) = \mathbf{a} \cos qt - \mathbf{b} \sin qt \quad \text{ve} \quad x_2(t) = \mathbf{b} \cos qt + \mathbf{a} \sin qt \quad (2.1.9)$$

çözümlerini verir. Böylece $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t)$ çözümleri xy -düzleminde merkezi orijin olan bir elips tanımlar. Bundan dolayı $(0,0)$ denge noktasına kararlı merkez (stable center) noktası denir.

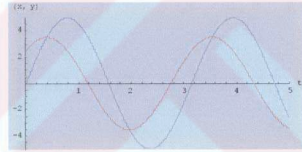
Örnek 2.1.6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda = \pm 2i$ dir. Bundan dolayı $(0,0)$ kararlı merkezdur. Şekil 2.1.12, denge noktasını çevreleyen tipik eliptik yörüngeleri gösterir.



Şekil 2.1.12 Örnek 2.1.6'nin denge noktasını çevreleyen tipik eliptik yörüngeleri gösterir.



Şekil 2.1.13 $x=2.5, y=0$ dan başlayan yörüngenin zaman grafiği

A'nın Özdeğerleri

- Reel, farklı, aynı işaretli
- Reel, farklı, zıt işaretli
- Reel ve eşit
- Kompleks eşlenik
- Sıfır (pure) sanal

Denge Noktasının Çeşidi

- Düzensiz düğüm noktası
- Eyer noktası
- Düzenli veya düzensiz düğüm noktası
- Spiral nokta
- Merkez nokta

Tablo 2.1.1: İki boyutlu $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sisteminin $(0,0)$ denge noktasının sınıflandırılması

A nın determinantının sıfır olmadığı iki boyutlu $x' = Ax$ lineer sistemi için, yukarıdaki tablo, bu bölümde tartışılan 5 durumla elde edilen sonuçlar doğrultusunda $(0,0)$ denge noktasının çeşidini A katsayı matrisinin λ_1 ve λ_2 özdeğerlerinin özelliğine göre listelemektedir. Çeşitli durumlarda gözlemlediğimiz gibi $(0,0)$ denge noktasının kararlılığı, Teorem 2.2.1 de özetlendiği gibi özdeğerlerin reel kısımlarının işaretiyle belirlenir.

2.2. Lineer Sistemlerin Kararlılığı

Bu bölümde, otonom diferansiyel denklemlerin çözümleri için kararlılık sorusunu göz önüne alacağız ve n -boyutlu uzay için çözümlemeye çalışacağız. Aşağıda verilen teoremin sonuçlarına göre 2.1 deki konuyu tekrar analiz edeceğiz. $x = \phi(t)$ $x' = f(x)$ in bir çözümü olsun. $\phi(t)$ çözümünün kararlı olup olmadığını belirlemek istiyoruz. Yani; $x' = f(x)$ in bütün $\psi(t)$ çözümleri $t=0$ da $\phi(t)$ ye yeterince yakınsa bütün $t \geq 0$ zaman aralığında $\phi(t)$ ye istenilen yakınlıkta kalmalıdır.

Şimdi bunun formal tanımını yapalım. Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa $x' = f(x)$ denkleminin $x = \phi(t)$ çözümü kararlıdır diyeceğiz. $t=0$ da $\phi(t)$ ye yeterince yakın başlayan her $\psi(t)$ çözümü $t > 0$ olduğunda $\phi(t)$ ye istenilen yakınlıkta kalırsa $\phi(t)$ çözümü kararlıdır deriz. En az bir $\psi(t)$ çözümü $t=0$ da $\phi(t)$ ye yakın başladığı halde $t > 0$ olduğunda yakın kalmazsa $\phi(t)$ ye kararsızdır deriz. Daha kesin bir matematik ifadeyle $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı bulabilmeliyiz ki $x' = f(x)$ in her $\psi(t)$ çözümü için, $|\psi_j(0) - \phi_j(0)| < \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \varepsilon$ $j=1, \dots, n$ sağlanmalıdır.

Kararlılık sorusu $x' = Ax$ lineer denklemler sistemleri için tam olarak çözülebilmektedir.

Teorem 2.1.1: Lineer Sistemlerin Kararlılığı

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ ve } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ olmak üzere, } x = \phi(t)$$

$$x' = Ax \quad (2.2.1)$$

in bir çözümünü olsun.

(a) Eğer A nın bütün özdeğerleri negatif reel kısma sahipse (2.2.1) in her $x = \phi(t)$ çözümü kararlıdır.

(b) Eğer A nın en az bir özdeğeri pozitif reel kısma sahipse (2.2.1) in her $x = \phi(t)$ çözümü kararsızdır.

(c) Kabul edelim ki A nın bütün özdeğerlerinin reel kısmı ≤ 0 ve $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_l = i\sigma_l$ nin reel kısmı sıfır olsun. $\lambda_j = i\sigma_j$, k_j katlı olsun. Bu, şu anlama gelir ki; A nın karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} q(\lambda)$$

formunda çarpanlarına ayrılabilir. Burada $q(\lambda)$ nın bütün kökleri negatif reel kısma sahiptir. O halde eğer A nın $\lambda_j = i\sigma_j$ özdeğeri için k_j tane lineer bağımsız özvektörü varsa (2.1) in her $x = \phi(t)$ çözümü kararlıdır deriz. Aksi takdirde $\phi(t)$ kararlı değildir.

Teoremin ispatını yapmadan önce; denge çözümünü $x(t)=0$ kararlı ise bütün $\phi(t)$ çözümlerinin kararlı ve tersine $x(t)=0$ kararsız ise her $\phi(t)$ çözümünün de kararsız olduğunu gösterelim. $\psi(t)$, (2.2.1) in keyfi bir çözümünü olsun. $z(t) = \phi(t) - \psi(t)$ farkı da (2.2.1) in çözümü olur. Böylece $z(0) = \phi(0) - \psi(0)$ yeterince küçük olduğunda, eğer $x(t)=0$ denge çözümünü kararlı ise $z(t) = \phi(t) - \psi(t)$ devamlı küçük olacaktır. Sonuçta, (2.2.1) in her $\phi(t)$ çözümü kararlı olur. Öte yandan, $x(t)=0$ denge çözümünü kararlı olmasın. O zaman başlangıçta çok küçük olan $x=h(t)$ çözümünü vardır. Fakat t sonsuza gittiğinde bu çok büyüyecektir. $\psi(t) = \phi(t) + h(t)$ nin (2.2.1) nin bir çözümü olduğu açıktır. Üstelik $\psi(t)$, $\phi(t)$ ye başlangıçta çok yakındır. Fakat t sonsuza gittiği zaman $\phi(t)$ den uzaklaşır. Böylece, (2.2.1) in her $x = \phi(t)$ çözümü kararsızdır.

Teorem 2.2.1 in ispatı için, bundan sonraki adımımız, $j=1,\dots,n$ olmak üzere, n tane $\psi_j(t)$ argümanın küçüklüğünü göstermek yerine daha basit bir problem olan yalnızca bir argümanın küçüklüğünü gösterme problemine indirgemektir. Bu, bir vektörün büyüklüğü veya uzunluğu kavramıyla yapılabilir.

Tanım 2.2.2

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

n bileşenli bir vektör olsun. x_1, \dots, x_n reel veya kompleks sayılardır. \mathbf{x} in boyu olarak $\|\mathbf{x}\|$ sembolünü kullanırız.

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

olarak tanımlanır.

Örneğin; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ise $\|\mathbf{x}\| = 3$ ve $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ise $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{5}$ dir.

Herhangi bir \mathbf{x} vektörü için, $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ dir ve sadece $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ise $\|\mathbf{x}\| = 0$ dir. İkinci olarak,

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|, \dots, |\lambda x_n|\} = |\lambda| \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$$

dir. Son olarak,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} \leq \max\{|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|\} \\ &\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \end{aligned}$$

olur.

Şimdi Teorem 2.2.1 in ispatını verelim. Basitlik için $n=2$ alalım.

(a) $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ in her $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$ çözümü $\boldsymbol{\psi}(t) = e^{At}\boldsymbol{\psi}(0)$ formundadır. $\phi_{ij}(t)$, e^{At} matrisinin ij . elemanı olsun ve $\psi_1^0, \dots, \psi_n^0$ $\boldsymbol{\psi}(0)$ in elemanları olsun. Öyleyse, $\boldsymbol{\psi}(t)$ nin i . elemanı

$$\psi_i(t) = \phi_{i1}(t)\psi_1^0 + \dots + \phi_{in}(t)\psi_n^0 = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(t)\psi_j^0$$

dır. Farz edelim ki A nın bütün özdeğerleri negatif reel kısma sahip olsun. A nın özdeğerlerinin reel kısmının en büyüğü $-\alpha_1$ olsun. $-\alpha_1 < -\alpha < 0$ lı her $-\alpha$ sayısı için, bir K sayısı bulabiliriz öyle ki $|\phi_{ij}(t)| \leq Ke^{-\alpha}$, $t \geq 0$. Sonuç olarak,

$$|\psi_i(t)| \leq \sum_{j=1}^n Ke^{-\alpha} |\psi_j^0| \leq Ke^{-\alpha} \sum_{j=1}^n |\psi_j^0|$$

dır. K ve α pozitif sabitlerdir. Şimdi $|\psi_j^0| \leq \|\boldsymbol{\psi}(0)\|$. Böylece,

$$\|\boldsymbol{\psi}(t)\| = \max\{|\psi_1(t)|, \dots, |\psi_n(t)|\} \leq nKe^{-\alpha} \|\boldsymbol{\psi}(0)\|$$

dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/nK$ seçelim. Öyleyse, $\|\boldsymbol{\psi}(0)\| < \delta(\varepsilon)$ ve $t \geq 0$ ise,

$$\|\boldsymbol{\psi}(t)\| \leq nKe^{-\alpha} \|\boldsymbol{\psi}(0)\| < nK\varepsilon/nK = \varepsilon$$

olduğundan

$$\|\boldsymbol{\psi}(t)\| < \varepsilon$$

olur.

Sonuç olarak $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ denge çözümü kararlıdır.

(b) λ , A nın pozitif reel kısma sahip özdeğeri ve \mathbf{v} , A nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Öyleyse, herhangi c sabitleri için $\boldsymbol{\psi}(t) = ce^{\lambda t}\mathbf{v}$, $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ in bir çözümü olur. Eğer λ reel ise \mathbf{v} de reeldir ve $\|\boldsymbol{\psi}(t)\| = |c|e^{\lambda t} \|\mathbf{v}\|$ dir. Açıkça, t sonsuza

gittiğinde $\|\psi(t)\|$ sonsuza gider. Böylece, $x(t)=0$ kararsızdır. Eğer $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleks ise $v=v_1+iv_2$ de komplekstir. Bu durumda

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} (v_1+iv_2) &= e^{\alpha} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (v_1+iv_2) \\ &= e^{\alpha} [(v_1 \cos \beta t - v_2 \sin \beta t) + i(v_1 \sin \beta t + v_2 \cos \beta t)] \end{aligned}$$

(2.2.1) in kompleks değerli bir çözümdür. Bundan dolayı,

$$\psi^1(t) = ce^{\alpha t} (v_1 \cos \beta t - v_2 \sin \beta t)$$

çözümü herhangi c sabitleri için (2.2.1) in reel değerli çözümdür. Açıkça, eğer c , v_1 ve v_2 nin üçü de sıfırdan farklıysa, t sonsuza gittiğinde $\|\psi^1(t)\|$ sınırsızdır. Böylece, $x(t)=0$ kararsızdır.

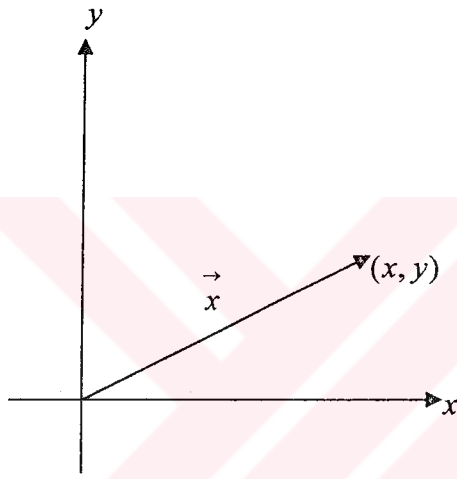
(c) A , k_j katlı $\lambda_j = i\sigma_j$ özdeğerli k_j tane lineer bağımsız özvektöre sahip olsun. $|(e^{At})_{ij}| \leq K$ olacak şekilde bir K sayısı bulabiliriz. Böylece $\|\psi(t)\| < nK\|\psi(0)\|$ olur. Bu eşitsizlik (2.2.1) in bütün $\psi(t)$ çözümleri için doğrudur. (a) şıkkındaki ispata göre $x(t)=0$ kararlıdır. Öte yandan eğer A , k_j katlı $\lambda_j = i\sigma_j$ özdeğerli k_j tane lineer bağımsız özvektörden daha az özvektöre sahipse $x' = Ax$ sistemi,

$$\psi(t) = ce^{i\sigma_j t} [v + t(A - i\sigma_j I)v]$$

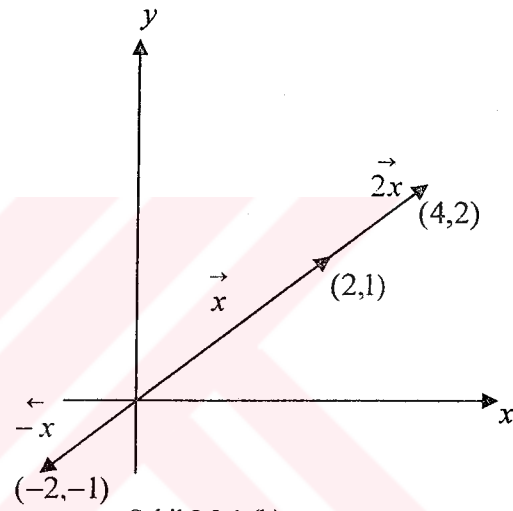
formundaki $\psi(t)$ çözümlerine sahiptir. ($(A - i\sigma_j I)v \neq 0$ dir.) Eğer, $\sigma_j = 0$ ise $\psi(t) = c(v + tAv)$, reel değerlidir. Bununla birlikte, $\|\psi(t)\|$ t sonsuza gittiğinde sınırsızdır. Benzer şekilde, $\psi(t)$ nin hem reel hem de sanal kısımları sınırsızdır. (keyfi küçük $\psi(0) \neq 0$ için, $\sigma_j \neq 0$ ise). Böylece $x(t)=0$ denge çözümü kararsızdır.

A nın özdeğerlerinin işaret değiştirmesi veya sanal olması halinde de çok farklı durumlar sergilenir.

(2.2.1) denklemini analiz ederken $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörünü \mathbb{R}^2 düzleminde bir yön veya yönlü doğru parçası olarak düşüneceğiz. $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ \mathbb{R}^2 de bir vektör ise $(0,0)$ noktasından başlayarak (x,y) noktasına giden yönlü bir doğru parçası olarak göstereceğiz. Bu yönlü doğru parçası, $(0,0)$ dan xy doğrultusuna sahip bir doğruya paraleldir. Eğer \vec{x} vektörünü \vec{x} yönlü doğru parçası olarak görüyorsak, c pozitif ise \vec{x} ve $c\vec{x}$ vektörleri paraleldir. c negatif ise aynı doğru üzerinde zıt yönlüdürler.



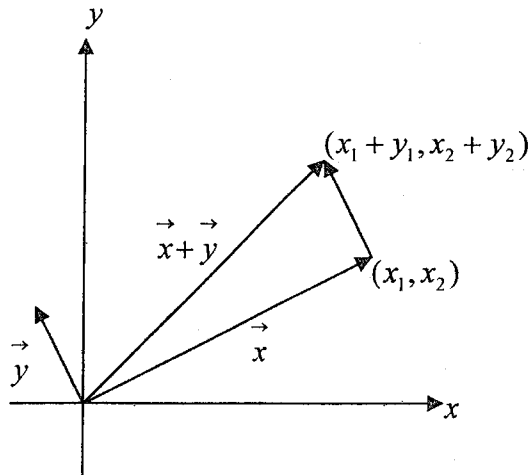
Şekil 2.2.1 (a)



Şekil 2.2.1 (b)

\vec{x} vektörünü çizelim. \vec{y} vektörünü de \vec{x} vektörünün ucuna paralel olarak taşıyalım.

$\vec{x} + \vec{y}$ vektörü bu iki vektörün bileşimidir. Paralelkenar metoduyla elde edilir.



Şekil 2.2.2

(2.2.1) denkleminin faz şeklini oluşturalım. λ_1 ve λ_2 , A nın iki özdeğeri olsun. Aşağıdaki halleri analiz edelim:

1. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. v_1 ve v_2 , sırasıyla λ_1 ve λ_2 ye karşılık gelen özvektörler olsunlar. Şekil 2.2.3 de gösterildiği gibi xy düzleminde dört tane yarı doğru çizebiliriz. l_1 ve l_2 ışınları v_1 ve v_2 ye paraleldirler. l_1' ve l_2' de $-v_1$ ve $-v_2$ ye paraleldirler.

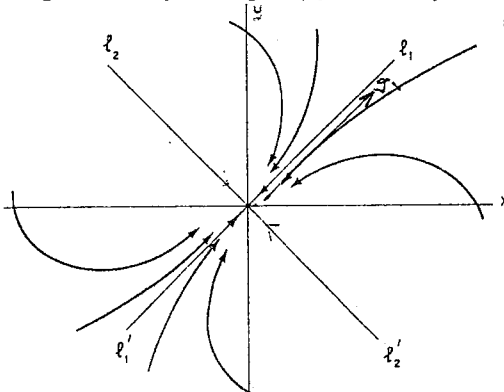
c keyfi bir sayı olmak üzere $x(t) = ce^{\lambda_1 t} v_1$, (2.2.1) in bir çözümü olsun. Bu çözüm devamlı v_1 vektörüyle orantılıdır. $ce^{\lambda_1 t}$ sabit orantı katsayısı $\pm \infty$ dan 0 kadar c nin pozitif veya negatif olmasına göre değişir. Böylece bu çözümün yörüngesi $c > 0$ için l_1 yarı doğrusu, $c < 0$ için l_1' yarı doğrusudur. Benzer olarak $x(t) = ce^{\lambda_2 t} v_2$ çözümünün yörüngesi de $c > 0$ için l_2 , $c < 0$ için l_2' yarı doğrusudur. Şekil 2.2.3 deki bu dört doğrunun üzerindeki oklar, $x(t)$ çözümlerinin yörüngeleri üzerinde hangi noktada hareket ettiğini gösterir.

Bundan sonra (2.2.1) in her $x(t)$ çözümü

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \quad (2.2.2)$$

formunda yazılabilir. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. (2.2.1) in her $x(t)$ çözümü t sonsuza gittiğinde $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a yaklaşır. t çok büyük olduğunda $e^{\lambda_2 t} v_2$, $e^{\lambda_1 t} v_1$ e göre daha küçüktür.

Eğer $c_1 \neq 0$ ise t sonsuza gittiğinde $c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$ e yaklaşır. Bu ise c_1 pozitif olduğunda $x(t)$ nin yörüngelerinin l_1 doğrusuna teğet olarak yaklaşacağı anlamına gelir. c_1 negatif ise l_1' ne teğet olurlar. Böylece (2.2.1) in faz şekli Şekil 2.2.3 deki gibi olur.



Şekil 2.2.3 Kararlı bir düğüm noktasının faz portresi

Buradaki her yörünge, tek bir doğru hariç orijine sabit bir doğrultuda yaklaşır. (v_1 ile $-v_1$ aynı doğrultu kabul edilir). Bu halde (2.2.1) in $x=0$ denge çözümü kararlı düğüm noktasıdır.

Hatırlatma (2.2.1) in her $x(t)$ çözümü, t sonsuza gittiğinde $x=y=0$ a yaklaşmaktadır. Fakat bu nokta hiçbir (adi) trivial olmayan çözüme ait değildir.

1'. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. (2.2.1) in faz şekli Şekil 2.2.3 deki gibidir. Fakat okların yönü değişmektedir. Böylece, eğer A nın her iki özdeğeri de pozitif ise (2.2.1) in $x(t)=0$ denge çözümü kararsız düğüm noktasıdır.

2. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. A , bir veya iki lineer bağımsız özvektöre sahip olabilir.

(a) Kabul edelim ki A , v_1 ve v_2 gibi iki tane lineer bağımsız özvektöre sahip olsun. Bu durumda (2.2.1) in her $x(t)$ çözümünü

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{\lambda t} (c_1 v_1 + c_2 v_2) \quad (2.2.3)$$

formunda yazabiliriz. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. $e^{\lambda t} (c_1 v_1 + c_2 v_2)$ vektörü bütün t ler için $c_1 v_1 + c_2 v_2$ ye paraleldir. Böylece (2.1) in her $x(t)$ çözümünün yörüngesi bir yarı doğrudur. Bununla birlikte, $c_1 v_1 + c_2 v_2$ nin toplamı c_1 ve c_2 nin bütün değerleri için xy -düzlemini örterler. Böylece (2.2.1) in faz şekli Şekil 2.2.4 (a) da gösterildiği gibidir.

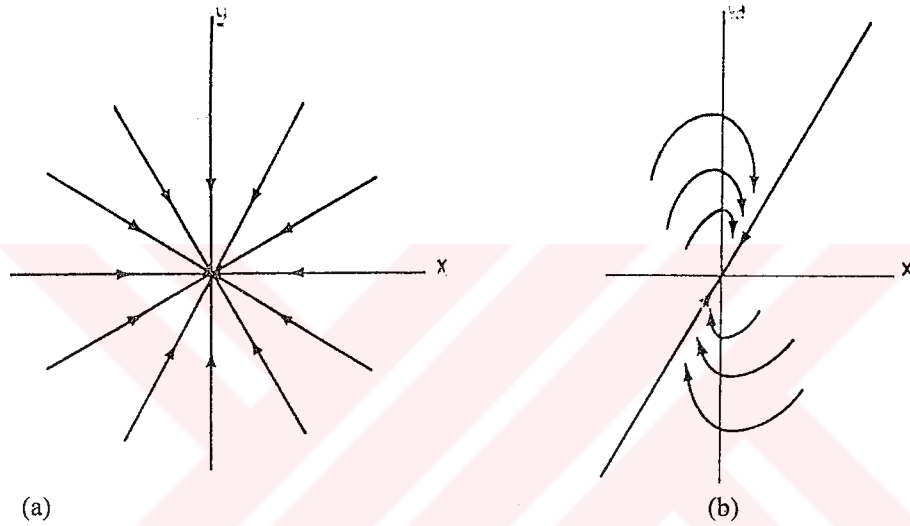
(b) Kabul edelim ki, A yalnızca bir v lineer bağımsız vektörüne sahip olsun. Bu durumda $x^1(t) = e^{\lambda t} v$, (2.2.1) in bir tek çözümüdür. (2.2.1) in x^1 den bağımsız ikinci çözümünü bulmak için her u vektörü için $(A - \lambda I)^2 u = 0$ olduğuna dikkat edelim. Böylece;

$$x(t) = e^{At} u = e^{\lambda t} e^{(A - \lambda I)t} u = e^{\lambda t} [u + t(A - \lambda I)u] \quad (2.2.4)$$

(2.2.1) in bir çözümüdür. (2.2.4) denklemi, $(A - \lambda I)u$ nun v nin k katı olması dolayısıyla daha da basitleştirilebilir. Bu $(A - \lambda I)[(A - \lambda I)u] = 0$ denkleminde görülebilir ve A bir tane lineer bağımsız v vektörüne sahiptir. u yu v den bağımsız olarak seçelim. O zaman (2.2.1) denkleminin bütün $x(t)$ çözümleri

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + c_2 e^{\lambda t} (\mathbf{u} + k t \mathbf{v}) = e^{\lambda t} (c_1 \mathbf{v} + c_2 \mathbf{u} + c_2 k t \mathbf{v}) \quad (2.2.5)$$

formunda yazılabilir. Açıkça (2.2.1) in $\mathbf{x}(t)$ çözümleri t sonsuza gittiğinde $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ değerine yaklaşır. c_2 sıfırdan farklı ve t çok büyükse $c_1 \mathbf{v} + c_2 \mathbf{u}$ terimi, $c_2 k t \mathbf{v}$ ile kıyaslandığında çok küçük kalır. Böylece $\mathbf{x}(t)$ yörüngelerinin teğetleri t sonsuza gittiğinde c_2 nin işaretine göre $\pm \mathbf{v}$ vektörüne yaklaşır ve (2.1) in faz şekli Şekil 2.2.4 (b) de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.2.4

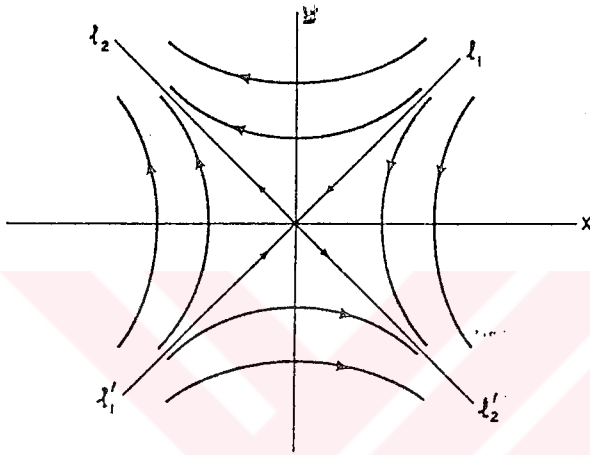
2'. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. (2a)' ve (2b)' durumlarında (2.2.1) in faz şekli tamamen Şekil 2.2.4 (a) ve (b) deki ile aynıdır. Beklendiği gibi okların yönü ters çevrilir.

3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 , A nın λ_1 ve λ_2 ye karşılık gelen özvektörleri olsun. xy -düzleminde l_1, l_1', l_2 ve l_2' yarı doğrularını çizelim. l_1 ve l_2 , \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 ye paralel, l_1' ve l_2' de $-\mathbf{v}_1$ ve $-\mathbf{v}_2$ ye paraleldir. $\mathbf{x}(t)$ çözümleri,

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \quad (2.2.6)$$

formundadır. $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ çözümünün yörüngesi, $c_1 > 0$ ise l_1 , $c_1 < 0$ ise l_1' dir. Fakat $\mathbf{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ çözümünün yörüngesi $c_2 > 0$ ise l_2 , $c_2 < 0$ ise l_2' dir. l_1, l_1', l_2 ve

l_2' üzerindeki okların yönüne dikkat edersek, t sonsuza gittiğinde $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a yaklaşır. Fakat t çok büyük olduğunda $x(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ sonsuza gider. $c_1 e^{\lambda_1 t} v_1, c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ ile kıyaslanırsa $c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$ in çok küçük olduğu görülür. Böylece $x(t)$ çözümleri t sonsuza gittiğinde sınırsız olurlar. Yörüngeler ise $c_1 \neq 0$ için $t \rightarrow -\infty$ iken ya l_1 e ya da l_1' ne yaklaşırlar. Sonuçta (2.2.1) in faz şekli Şekil 2.2.5 deki gibidir. $x=y=0$ bir eyer (saddle) formundadır. Bu nedenle $x(t)=0$ denge çözümü eyer noktasıdır.



Şekil 2.2.5 Bir eyer noktasının faz portresi

4. $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$. (2.2.1) in faz şeklini belirlemede ilk adım (2.2.1) in genel çözümünü bulmaktır. $z = u + iv$, A nın $\alpha + i\beta$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t} (u+iv) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (u+iv) \\ &= e^{\alpha t} [u \cos \beta t - v \sin \beta t] + i e^{\alpha t} [u \sin \beta t + v \cos \beta t] \end{aligned}$$

(2.2.1) in kompleks değerli bir çözümüdür. Böylece,

$$x^1(t) = e^{\alpha t} [u \cos \beta t - v \sin \beta t]$$

ve

$$x^2(t) = e^{\alpha t} [u \sin \beta t + v \cos \beta t]$$

(2.2.1) in reel değerli iki lineer bağımsız çözümü olsun ve (2.2.1) in her $x(t)$ çözümü $x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t)$ formundadır. Bu ifade

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R_1 \cos(\beta t - \delta_1) \\ R_2 \cos(\beta t - \delta_2) \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

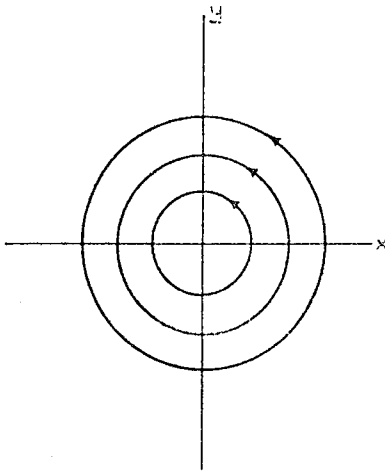
formunda yazılabilir. $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, \delta_1, \delta_2$ sabitlerdir. Aşağıdaki durumları ayrı ayrı inceleyelim:

(a) $\alpha = 0$:

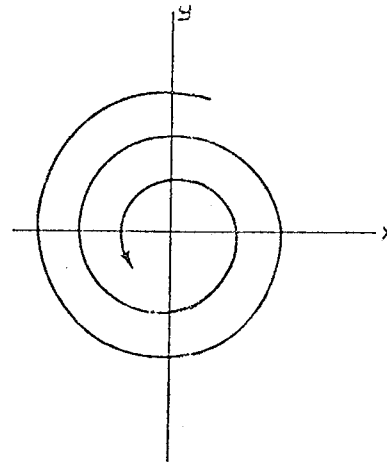
$$x_1(t) = R_1 \cos(\beta t - \delta_1) \text{ ve } x_2(t) = R_2 \cos(\beta t - \delta_2)$$

fonksiyonları periyodu $\frac{2\pi}{\beta}$ olan periyodik fonksiyonlardır. $x_1(t)$, $-R_1$ ve $+R_1$ arasında değişirken, $x_2(t)$, $-R_2$ ve $+R_2$ arasında değişir. Sonuç olarak, (2.2.1) in $\mathbf{x}(t)$ çözümlerinin yörüngesi orijin $x=y=0$ etrafında kapalı eğridir ve (2.2.1) in faz şekli Şekil 2.2.6 (a) daki formdadır. Bu sebepten, A nın özdeğerleri sıfır sanal olduğunda, (2.2.1) in $\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$ denge çözümü bir merkez (center) dir.

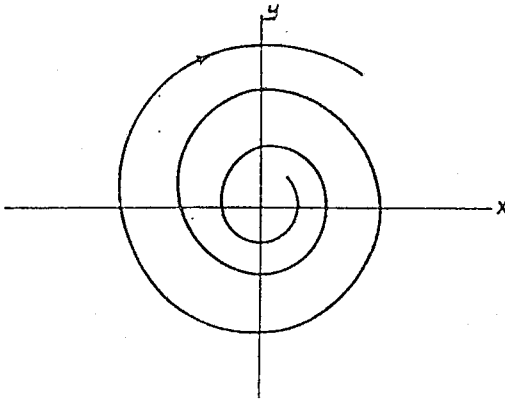
Şekil 2.2.6 (a) daki okların yönü (2.2.1) diferansiyel denkleminde belirlenir. Bunu yapmanın en basit yolu $y=0$ iken y' nün işaretini kontrol etmektir. Eğer $y=0$ ve $x>0$ için y' sıfırdan büyükse, (2.2.1) in bütün $\mathbf{x}(t)$ çözümleri saat yönü tersinde hareket ederler. Eğer $x_2=0$ ve $x_1>0$ için x_2' sıfırdan küçükse (2.2.1) in bütün $\mathbf{x}(t)$ çözümleri saat yönünde hareket ederler.



(a) $\alpha = 0$



(b) $\alpha < 0$



(c) $\alpha > 0$

Şekil 2.2.6

(b) $\alpha < 0$:

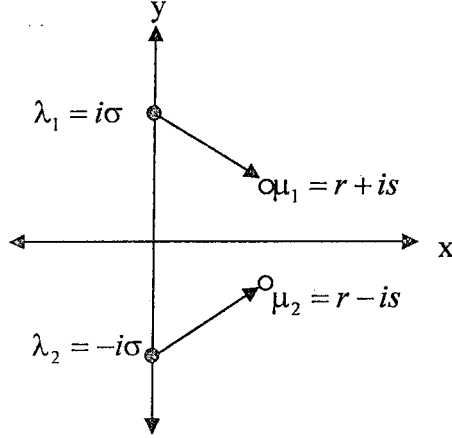
Bu durumda, (2.2.7) denkleminde $e^{\alpha t}$ çarpanının etkisiyle Şekil 2.2.6 (a) daki basit kapalı eğriler Şekil 2.2.6 (b) deki spirallere dönüşmektedir. Çünkü $x(2\pi/\beta) = e^{2\pi\alpha/\beta} x(0)$ noktası orijine $x(0)$ dan daha yakındır. Şekil 2.2.6 (b) deki okların yönü doğrudan (2.2.1) diferansiyel denkleminden belirlenmelidir. Bu durumda, (2.2.1) in $x(t)=0$ denge çözümü kararlı spiraldir.

(c) $\alpha > 0$:

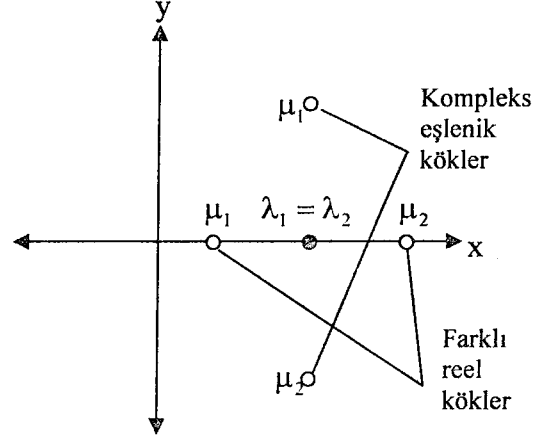
Bu durumda, (2.2.1) in bütün yörüngeleri t sonsuza giderken orijinden spiraller olarak uzaklaşır (Şekil 2.2.6 (c)) ve (2.2.1) in $x(t)=0$ denge çözümü kararsız spiraldir.

(2.2.1) in katsayı matrisi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere a, b, c, d katsayılarındaki küçük değişimlerin etkisi düşünmeye değerdir. Eğer değişimler yeterince küçükse özdeğerlerin pozitif reel kısımları pozitif, negatif reel kısımları negatif kalır. Bu nedenle asimptotik kararlı denge noktası asimptotik kararlı, kararsız denge noktası kararsız kalır. En hassas durum $\lambda_1 = i\sigma$ ve $\lambda_2 = -i\sigma$ iken, yani denge noktası bir merkez ve yörüngeler denge noktasını çevreleyen kapalı eğriler olduğunda meydana gelir. Eğer katsayılarda küçük bir değişiklik yapılırsa λ_1 ve λ_2 özdeğerleri, r çok küçük ve $\sigma \cong s$ olacak şekilde $\mu_1 = r + is$ ve $\mu_2 = r - is$ değerlerini alacaktır. (Şekil 2.2.7) Eğer $r \neq 0$ ise kapalı eğriler spirallere dönüşür. $r < 0$ ise sistem

asimptotik kararlı, $r > 0$ ise kararsızdır. Böylece, denge noktasının merkez nokta olduğu durumda katsayılardaki küçük değişimler, kararlı sistemi kararsız sisteme dönüştürebilir.



Şekil 2.2.7 Sıfır imajiner köklerdeki değişimlerin etkisi



Şekil 2.2.8 Eşit reel köklerdeki değişimlerin etkisi

Diğer istisnai durum özdeğerlerin eşit olduğu yani denge noktasının düğüm noktası olduğu durumda meydana gelir. Katsayılardaki küçük değişimler eşit iki kökün ayrılmasına (bifurcate) sebep olabilir. Ayrılan kökler reel ise değişiklik yapılan sistemin denge noktası, düğüm noktası olarak kalır. Kompleks eşlenikler ise denge noktası spiral nokta olur. (Şekil 2.2.8) Bu durumda sistemin kararlılığı veya kararsızlığı, katsayılardaki küçük değişimlerden etkilenmez ama yörüngeler önemli ölçüde değişebilir.

2.3. Lineerimsi Sistemler

İki boyutlu lineer olmayan

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.3.1)$$

otonom sistemini tekrar ele alalım. Asıl amacımız denge noktası civarında (2.3.1) sisteminin yörüngelerinin davranışını araştırmaktır. Bunu (2.3.1) lineer olmayan sistemine, yörüngelerini tanımlaması kolay olan uygun bir lineer sistemle yaklaşıyoruz. En önemli soru lineer sistemin yörüngelerinin lineer olmayan sistemin

yörüngelerine iyi yaklaşımlar olup olmadığıdır. Genelliği bozmadan denge noktasını orijin olarak seçmek uygundur.

2.3.1 sistemini

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.3.2)$$

şeklinde yazalım ve $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, (2.3.2) sisteminin ayrık denge noktası olsun. $\det A \neq 0$ ve $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ aynı zamanda $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ lineer sisteminin de ayrık denge noktası olsun. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ lineer sistemine yakın olması için (2.3.2) lineer olmayan sisteminde $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ in çok küçük olduğunu farz edelim. Daha açık olarak \mathbf{g} nin elemanları sürekli birinci kısmi türeve sahip ve

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{iken} \quad \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0 \quad (2.3.3)$$

limit şartını sağlasın. Yani, $\|\mathbf{g}\|$, orijin civarında $\|\mathbf{x}\|$ ile karşılaştırıldığında çok küçük olsun. Böyle bir sistem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denge noktası komşuluğunda lineerimsi sistem olarak adlandırılır.

(2.3.3) şartını ifade etmek için skaler formda yazmak faydalıdır. $\mathbf{x}^T = (x, y)$ alınırsa $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{1/2} = r$ olur. Benzer olarak $\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) = (f(x, y), g(x, y))$ ise $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = [f^2(x, y) + g^2(x, y)]^{1/2}$ dir. Öyleyse,

$$r \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad f(x, y)/r \rightarrow 0, \quad g(x, y)/r \rightarrow 0 \quad (2.3.4)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0.75xy - 0.25y^2 \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

sisteminin orijin komşuluğunda lineerimsi sistem olup olmadığını belirleyelim.

(2.3.5) sisteminin (2.3.2) formundaki gibi (0,0) denge noktasına sahip ve $\det A \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (2.3.5) denkleminin diğer denge noktalarının (0,2), (1,0) ve (0.5,0.5) olduğunu görmek zor değildir. Sonuç olarak orijin ayrık denge noktasıdır. (2.3.4) şartını kontrol ederken $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ olarak kutupsal koordinatlara geçmek uygundur. Öyleyse; $r \rightarrow 0$ iken

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y)}{r} &= \frac{-x^2 - xy}{r} = \frac{-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta}{r} \\ &= -r(\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \rightarrow 0\end{aligned}$$

olur. Benzer yolla $r \rightarrow 0$ iken $g(x,y)/r \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Böylece (2.3.5) sistemi orijinde lineerimsi sistemdir.

Örnek 2.3.2

Bir sarkacın hareketi

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - \gamma y \quad (2.3.6)$$

sistemiyle tanımlansın. Denge noktaları $(0,0)$, $(\pm\pi,0)$, $(\pm2\pi,0)$, ... dır ve böylece orijin bu sistemin ayrık denge noktasıdır. Şimdi sistemin orijinde lineerimsi olduğunu gösterelim.

(2.3.6) denklemiyle (2.3.2) denklemini karşılaştırmak için lineer ve lineer olmayan terimleri açıkça görebileceğimiz şekilde yazmalıyız. Eğer $\sin x = x + (\sin x - x)$ şeklinde yazıp bu ifadeyi (2.3.6) nın ikinci yanında yerine yazarsak (2.3.6) ya denk olan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x - x \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

sistemini elde ederiz.

(2.3.7) denklemiyle (2.3.2) denklemini karşılaştırsak $f(x,y) = 0$ ve $g(x,y) = -\omega^2(\sin x - x)$ olduğunu görürüz. $\sin x$ in Taylor açılımından biliyoruz ki x çok küçük olduğunda, $\sin x - x$, $-x^3/3! = -(r^3 \cos^3 \theta)/3!$ gibi davranır. Sonuç olarak $r \rightarrow 0$ iken $(\sin x - x)/r \rightarrow 0$ dır. Böylece (2.3.4) şartı sağlanır ve (2.3.7) sistemi orijin komşuluğunda lineerimsidir.

Şimdi lineer olmayan (2.3.1) sistemine geri dönelim ve sistemi,

$$x' = F(x,y), \quad y' = G(x,y) \quad (2.3.8)$$

olacak şekilde skaler formda yazalım. F ve G ikinci mertebeye kadar sürekli kısmi türevelere sahip fonksiyonlar olduğunda, (2.3.8) sistemi, (x_0, y_0) denge noktası komşuluğunda lineerimsidir. Bunu göstermek için,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y) \\ G(x, y) &= G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y) \end{aligned}$$

şeklinde $F(x, y)$ ve $G(x, y)$ fonksiyonlarının (x_0, y_0) noktası civarında Taylor açılımlarını kullanalım. Burada $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ iken $\eta_1(x, y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \rightarrow 0$ dır. Bu η_2 için de aynıdır. Dikkat edersek $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ ve $dx/dt = d(x - x_0)/dt$, $dy/dt = d(y - y_0)/dt$ dir. Öyleyse (2.3.8) sistemi

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

sistemine dönüşür. (2.3.9) sistemini vektör notasyonu ile gösterecek olursak $u = (x - x_0, y - y_0)^T$ ve $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ olmak üzere;

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dx}(x^0)u + \eta(x) \quad (2.3.10)$$

elde edilir. Bu sonuç iki kat önemlidir. Birincisi; eğer F ve G fonksiyonları iki kez diferansiyellenebilir ise (2.3.8) sistemi lineerimsidir ve Örnek 2.3.1 ve Örnek 2.3.2 de kullanılan limit yöntemine başvurmak gereksizdir. İkincisi, (x_0, y_0) civarında lineer olmayan (2.3.8) sistemine yaklaşan lineer sistem, (2.3.9) veya (2.3.10) denklemlerinin lineer kısmıyla verilir. Yani; $u_1 = x - x_0$ ve $u_2 = y - y_0$ olmak üzere;

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

dır. (2.3.11) denklemi, denge noktası civarında lineerimsi sisteme karşılık gelen lineer sistemi bulmak için basit ve genel bir metot sağlar.

Örnek 2.3.3

$(0,0)$ orijin ve $(\pi,0)$ denge noktaları civarında (2.3.11) denklemini kullanarak (2.3.6) daki sarkaç denkleminin karşılık gelen lineer sistemi bulalım.

$$F(x, y) = y, \quad G(x, y) = -\omega^2 \sin x - \gamma y \quad (2.3.12)$$

dır. Bu fonksiyonlar gerektiği kadar çok diferansiyellenebilir olduğundan (2.3.6) sistemi her bir denge noktası civarında lineerimsidir. F ve G nin türevleri

$$F_x = 0, \quad F_y = 1, \quad G_x = -\omega^2 \cos x, \quad G_y = -\gamma \quad (2.3.13)$$

dır.

Böylece, orijinde (2.3.7) denklemiyle uyuşan uygun lineer sistem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

dır. Benzer şekilde, (2.3.13) denklemindeki kısmi türevlerde $(\pi, 0)$ yerine yazarsak, $u = x - \pi$, $v = y$ olmak üzere;

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.3.15)$$

elde edilir. Bu, $(\pi, 0)$ civarında (2.3.6) denklemine karşılık gelen lineer sistemdir.

$ad - bc \neq 0$ olmak üzere, $(0, 0)$ ayrık denge noktasına sahip

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + g(x, y) \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

lineerimsi sisteme dönelim. Teorem 2.3.4, $(0, 0)$ denge noktasının tipi ve kararlılığı ile ilgili olarak, lineer olmayan $f(x, y)$ ve $g(x, y)$ terimlerinin etkisinin,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

lineer sisteminin katsayılarındaki küçük değişimlerin etkisine denk olduğunu ifade eder.

Teorem 2.3.4: Lineerimsi Sistemlerin Kararlılığı

λ_1 ve λ_2 , (2.3.16) lineerimsi sistemine karşılık gelen (2.3.17) lineer sisteminin katsayı matrisinin özdeğerleri olsun. Öyleyse;

1. Özdeğerler eşit yani $\lambda_1 = \lambda_2$ ise (2.3.16) nın (0,0) denge noktası düğüm yada spiral noktadır. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ise denge noktası asimptotik kararlı, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ise kararsızdır.
2. λ_1 ve λ_2 sırf sanal ise (0,0), merkez yada spiral noktadır ve kararlı, asimptotik kararlı yada kararsız olabilir.
3. Özdeğerler eşit yada sırf sanal olmadıkça (2.3.16) lineerimsi sisteminin (0,0) denge noktası, (2.3.17) lineer sisteminin (0,0) denge noktası ile aynı tipte ve kararlıdır.

Böylece, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ ise (2.3.16) lineerimsi sisteminin denge noktasının kararlılığı ve tipi (2.3.17) lineer sisteminin analiziyle belirlenebilir. Yalnızca özdeğerlerin sırf sanal olması durumunda (0,0)ın kararlılığı lineer sistemle belirlenemez. $\lambda_1 = \lambda_2$ ve $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ durumları hariç (0,0) civarındaki yörüngeler lineer sistemin yörüngelerine kalitatif olarak benzeyecektir. Yani, denge noktasına aynı yoldan girerler veya ayrılırlar. Ama lineer olmayan tarzda deforme olabilirler. Aşağıdaki tablo bu durumu özetler.

<u>λ_1, λ_2</u>	<u>Lineer Sistem</u>		<u>Lineerimsi Sistem</u>	
	<u>Türü</u>	<u>Kararlılık</u>	<u>Türü</u>	<u>Kararlılık</u>
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	D	Kararsız	D	Kararsız
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	D	Asimptotik kararlı	D	Asimptotik kararlı
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	EN	Kararsız	EN	Kararsız
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	DD veya DzD	Kararsız	D veya SpN	Kararsız
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	DD veya DzD	Asimptotik kararlı	D veya SpN	Asimptotik kararlı
$\lambda_1, \lambda_2 = \beta \mp i\sigma$				
$\lambda > 0$	SpN	Kararsız	SpN	Kararsız
$\lambda < 0$	SpN	Asimptotik kararlı	SpN	Asimptotik kararlı
$\lambda_1 = i\sigma, \lambda_2 = -i\sigma$	M	Kararlı	M yada SpN	Belirsiz

Not: D-Düğüm, DzD-Düzensiz Düğüm, DD-Düzenli Düğüm, EN-Eyer Noktası, SpN-Spiral Nokta, M-Merkez

Tablo 2.3.1 : Lineer ve Lineerimsi Sistemlerin Kararlılık ve Kararsızlık Özellikleri

Teorem 2.3.4 deki sınıflandırmanın en önemli sonucu şudur: Eğer denge noktası lineerleşmiş sistemin asimptotik kararlı denge noktası ise lineerimsi sistemin denge noktası asimptotik kararlıdır. Bununla birlikte, lineerimsi sistemin denge noktası lineerleşmiş sistemin kararsız denge noktası ise lineerimsi sistemin denge noktası kararsızdır. Eğer lineerimsi sistem fiziksel bir durumu modellemek için kullanılırsa önceden sözü edilen hassas durumlar hariç denge noktası civarında sistemin kalitatif davranışı lineerleşmiş sistemin incelenmesiyle belirlenebilir.

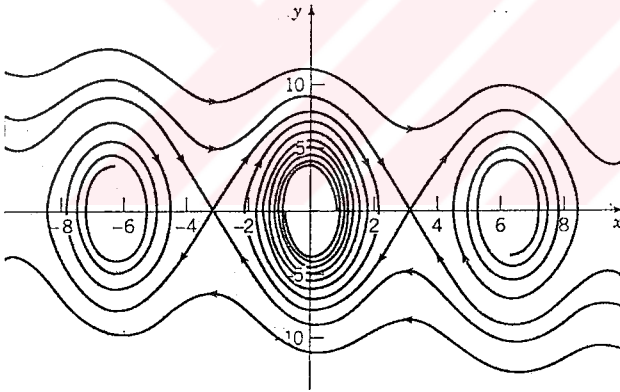
Örnek 2.3.5

$x = \theta$, $y = d\theta/dt$ olmak üzere, bir sarkacın hareket denklemleri,

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -9 \sin x - \frac{1}{5}y \quad (2.3.18)$$

ile verilsin. Bu sistemin faz portresini çizelim ve bu faz portresinin sarkacın hareketlerini nasıl gösterdiğini açıklayalım.

Faz düzleminde çeşitli başlangıç noktalarından başlayan yörüngeleri çizerek Şekil 2.3.1 de görülen faz düzlemini elde ederiz. Görüldüğü gibi denge noktaları $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için $(n\pi, 0)$ noktalarıdır. n nin çift değerleri sarkacın aşağı doğru olduğu pozisyona karşılık gelirken (asimptotik kararlı denge noktaları), tek değerleri de yukarı doğru olduğu pozisyona (kararsız denge noktaları) karşılık gelir. Her bir asimptotik kararlı denge noktası civarındaki yörüngeler, aşağıya doğru olan denge pozisyonu yakınlarında salınımın azaldığını ifade eden, saat yönünde spirallerdir. $|y|$ nin büyük değerlerinde meydana gelen, yörüngelerin dalgalı yatay kısımları sarkacın hızla dönen hareketlerini ifade eder. Dikkat edersek, hızlı hareket belirsiz bir şekilde devam edemez. $|y|$ ne kadar büyük olursa olsun, sonunda açısal hız, sarkacın bir süre sonra zirveye çıkmasını engelleyen söndürücü terimin etkisiyle çok fazla azalır ve sarkaç aşağı doğru pozisyonda salınmaya başlar.



Şekil 2.3.1 (2.3.18) in faz portresi

Eyer noktalarına giren yörüngeler faz düzlemini bölgelere ayırır. Böyle yörüngeler ayırıcı (separatrix) olarak adlandırılır. Her bir bölge mutlaka asimptotik kararlı denge noktalarını içerir. θ ve $d\theta/dt$ üzerinde başlangıç koşulları faz düzleminde (x, y) başlangıç noktasının pozisyonunu belirler. Sarkacın başlangıç noktasından sonraki hareketi, o bölgede asimptotik kararlı denge noktasına doğru spiral olarak dolanan, başlangıç noktası boyunca geçen yörüngeyle temsil edilir. Asimptotik kararlı denge noktasına yaklaşan yörüngelerin bütün başlangıç noktalarının kümesine çekim

bölgesi veya o denge noktası için asimptotik kararlı bölge denir. Asimptotik kararlı denge noktasının her biri kararsız eyer noktaları komşuluğu boyunca ayırıcılarla sınırlandırılmış çekim bölgesine sahiptir. Dikkat edersek, başlangıç noktalarını ayırıcılar üzerinde almak, hareket sonlanırken sarkacın dengeye gelmesine neden olur.

Lineer ve lineer olmayan otonom sistemler arasındaki en önemli fark sarkaç denklemleriyle gösterilmiştir. Hatırlarsak $x' = Ax$ lineer sistemi, eğer $\det A \neq 0$ ise yalnızca $x = 0$ denge noktasına sahiptir. Böylece, orijin asimptotik kararlı denge noktası ise yalnızca orijine yakın başlayan yörüngeler değil, her bir yörünge orijine yaklaşır. Bu durumda $x = 0$ denge noktasına mutlak (globally) asimptotik kararlı denir. Bu özellik lineer olmayan sistemler için geçerli değildir. Lineer olmayan sistemler için önemli bir soru, her bir asimptotik kararlı denge noktası için çekim bölgesini belirlemek veya tahmin etmektir.

2.4. Av-Avcı Denklemleri

Aynı çevre koşullarında yaşayan farklı türdeki hayvan grupları arasında hayatta kalabilmek için yoğun bir mücadele olduğu bilinmektedir. Genellikle bir tür hayatını sürdürebilmek için başka bir tür bitki ya da hayvan grubunu avlamak zorundadır. Böylece türler arasında birbirlerinin sayıca büyüklüğüne bağlı olarak azalmalar ve çoğalmalar olur.

t anında av-avcı nüfusunu sırasıyla x ve y ile tanımlayalım. Birbirini etkileyen iki türün modelini kurarken aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır:

1. Avcının yokluğunda av, mevcut nüfusla orantılı olarak çoğalır. Böylece, $y = 0$ olduğunda $dx/dt = ax$, $a > 0$ dır.
2. Avın yokluğunda avcı nüfusu azalır. Böylece, $x = 0$ olduğunda $dy/dt = -cy$, $c > 0$ dır.
3. Av ve avcı arasındaki mücadelenin sayısı, nüfuslarının çarpımıyla orantılıdır. Mücadelelerin her biri, avcıyı çoğaltmaya, avı azaltmaya meyillidir. Böylece, γ ve

α pozitif sabit olduğunda, avın büyüme oranı $-\alpha xy$, avcının büyüme oranı γxy terimiyle artar.

Bu kabuller bizi aşağıdaki denklemlere götürür.

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y) \\ dy/dt &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

a, c, α ve γ sabitlerinin hepsi pozitiftir. Sırasıyla a ve c avın büyüme oranı ve avcının ölüm oranıdır. α ve γ iki tür arasındaki etkileşim ölçütleridir. (2.4.1) denklemleri Lotka-Volterra denklemleri olarak bilinir. Buradaki hedefimiz, x ve y nin pozitif başlangıç değerleri için (2.4.1) sisteminin çözümlerinin (yörüngelerinin) kalitatif davranışlarını belirlemektir. Aşağıdaki, (2.4.1) sistemine bir örnektir.

Örnek 2.4.1

x ve y nin pozitif değerleri için;

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - 0.5y) = x - 0.5xy \\ dy/dt &= y(-0.75 + 0.25x) = -0.75y + 0.25xy \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

sisteminin çözümlerini tartışalım. Sistemin denge noktaları;

$$x(1 - 0.5y) = 0 \quad y(-0.75 + 0.25x) = 0 \quad (2.4.3)$$

denklemlerinin çözümleridir. Yani; $(0,0)$ ve $(3,2)$ noktalarıdır. (2.4.2) denkleminde lineer olmayan terimleri ihmal ederek;

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

sistemi elde edilir.

(2.4.4) ün özdeğer ve özvektörleri;

$$r_1 = 1 \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_2 = -0.75 \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

dır. Böylece genel çözüm;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t} \quad (2.4.6)$$

dır. Böylece orijin, (2.4.2) lineer olmayan sistemi ve (2.4.4) lineer sisteminin eyer noktasıdır ve kararsızdır. Orijiine y eksenini boyunca bir çift yörünge girer, diğer bütün yörüngeler orijinin komşuluğundan ayrılır.

(3,2) denge noktasının tipini belirlemek için;

$$x = 3 + u \quad y = 2 + v \quad (2.4.7)$$

ifadeleri (2.4.2) denkleminde x ve y yerine yazılır ve u ve v li lineer olmayan terimler ihmal edilirse;

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.4.8)$$

sistemi elde edilir. Sistemin özdeğer ve özvektörleri;

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad r_2 = -\frac{\sqrt{3}i}{2} \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

dır.

Özdeğerler sırf sanal olduğu için, (3,2) denge noktası (2.4.8) lineer sisteminin merkez noktasıdır ve kararlıdır. (3,2) denge noktası merkez nokta olduğu için, (2.4.2) lineer olmayan sistemi için denge noktasının tipi bu bilgiden belirlenemez. (2.4.8) lineer sisteminin yörüngelerini bulmada en basit yol (2.4.8) deki denklemleri birbirine bölmektir. Böylece;

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{0.5u}{-1.5v} = -\frac{u}{3v}$$

veya

$$u \, du + 3v \, dv = 0 \quad (2.4.10)$$

dir.

Sonuç olarak;

$$u^2 + 3v^2 = k \quad (2.4.11)$$

elde edilir. Burada k , keyfi pozitif integrasyon sabitidir. Böylece; (2.4.8) lineer sisteminin yörüngeleri denge noktasını çevreleyen elipslerdir.

Şimdi (2.4.2) lineer olmayan sistemine geri dönelim. (2.4.2) deki denklemleri birbirine bölersek;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-0.75 + 0.25x)}{x(1 - 0.5y)} \quad (2.4.12)$$

yi elde ederiz.

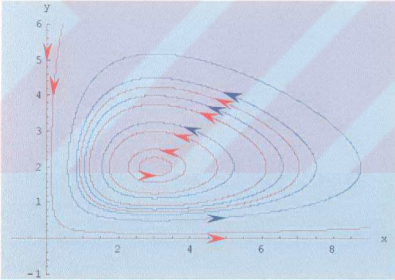
(2.4.12) denklemi değişkenlerine ayrılabilir bir denklemdir ve

$$\frac{1 - 0.5y}{y} dy = \frac{-0.75 + 0.25x}{x} dx$$

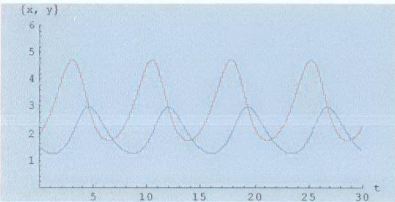
şeklinde ifade edilebilir. c integrasyon sabiti olmak üzere;

$$0.75 \ln x + \ln y - 0.5y - 0.25x = c \quad (2.4.13)$$

ifadesi (2.4.12) nin çözümüdür. c nin sabit bir değeri için denklemin grafiğini (3,2) denge noktasını çevreleyen kapalı bir eğri olarak göstermek mümkündür. Böylece denge noktası, (2.4.2) lineer olmayan sisteminin merkez noktasıdır ve av-avcı miktarlarında periyodik bir değişim olduğu ortaya çıkar.



Şekil 2.4.1: (2.4.2) sisteminin faz portresi



Şekil 2.4.2: (2.4.2) sisteminin av-avcı nüfusunun zamana bağlı değişimi ($x=2, y=1.5$)

Şekil 2.4.1, (2.4.2) sisteminin faz portresini gösterir. Bazı başlangıç koşulları için yörüngeler, denge noktası civarında x ve y deki küçük değişiklikleri temsil ederler ve hemen hemen eliptik biçimdedirler. Yönleri saat yönünün tersidir. x ve y 'nin t ye bağımlılığı, Şekil 2.4.2 de gösterilmiştir. Dikkat edersek x ve y , t nin periyodik fonksiyonlardır. Avcı sayısındaki salınımlar, avınıki biraz geriden takip eder. Av ve avcı nüfusunun her ikisi de küçükse, ilk olarak av sayısında artma görülür; çünkü avlanma sayısı azdır. Bol yiyeceklerle birlikte avcı sayısı da artar. Bu da avın azalmasına neden olur. Sonunda avın azalmasıyla avcı sayısı da azalır ve sistem orijinal durumuna geri döner.

(2.4.1) genel sistemi, örnekteki yol izlenerek analiz edilebilir. (2.4.1) sisteminin denge noktaları;

$$x(a - \alpha y) = 0 \quad y(-c + \gamma x) = 0$$

in çözümleridir. Yani; $(0, 0)$ ve $(c/\gamma, a/\alpha)$ noktalarıdır. İlk olarak her bir denge noktası civarında (2.4.1) sistemine karşılık gelen lineer sistemin çözümlerini inceleyelim.

Orijinin komşuluğunda (2.4.1) sistemine karşılık gelen lineer sistem;

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.4.14)$$

dir.

Özdeğer ve özvektörler;

$$r_1 = a \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_2 = -c \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

dir. Genel çözüm;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct} \quad (2.4.16)$$

dir. Böylece; orijin kararsız eyer noktası olur. Eyer noktasına giriş y eksenli boyunca, diğer bütün yörüngeler denge noktası komşuluğundan ayrılır.

$(c/\gamma, a/\alpha)$ denge noktasını ele alalım. Eğer $x = (c/\gamma) + u$ ve $y = (a/\alpha) + v$ ise, (2.4.14) lineer sistemi;

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.4.17)$$

şeklini alır. (2.4.17) sisteminin özdeğerleri $r = \pm i\sqrt{ac}$ dir; böylece denge noktası lineer sistemin kararlı merkezidir. (2.4.17) sisteminin yörüngelerini bulmak için (2.4.17) deki denklemleri birbirine bölerek;

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v} \quad (2.4.18)$$

veya

$$\gamma^2 a u d u + \alpha^2 c v d v = 0 \quad (2.4.19)$$

elde edilir.

Sonuç olarak k pozitif integrasyon sabiti olmak üzere;

$$\gamma^2 a u^2 + \alpha^2 c v^2 = k \quad (2.4.20)$$

elde edilir. Böylece, (2.4.17) lineer sisteminin yörüngeleri bir önceki örnekte olduğu gibi elipslerdir.

(2.4.1) lineer olmayan sistemine kısaca dönersek, (2.4.1) sistemi.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)} \quad (2.4.21)$$

şeklinde tek denkleme indirgenebilir.

(2.4.21) denklemi değişkenlerine ayrılabilir ve C integrasyon sabiti olmak üzere;

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C \quad (2.4.22)$$

çözümüne sahiptir. $(c/\gamma, a/\alpha)$ denge noktası civarında (2.4.22) denkleminin grafiğini C sabiti için kapalı bir eğri olarak göstermek mümkündür. Böylece bu denge noktası (2.4.1) genel lineer olmayan sistemi için de merkezdir.

Av ve avcı nüfuslarının periyodik değişimi, $(c/\gamma, a/\alpha)$ noktasından sapmalar küçük olduğunda daha detaylı analiz edilebilir ve (2.4.17) lineer sistemi kullanılabilir. (2.4.17) sisteminin çözümü,

$$u = \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{ac}t + \phi) \quad v = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K \sin(\sqrt{ac}t + \phi) \quad (2.4.23)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki K ve ϕ sabitleri başlangıç koşullarıyla belirlenir. Böylece;

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{ac}t + \phi) \\ y &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K \sin(\sqrt{ac}t + \phi) \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

dır.

Bu denklemler, $(c/\gamma, a/\alpha)$ denge noktasına yakın eliptik yörüngeler için iyi yaklaşımlardır. Yörüngeler üzerinde, av ve avcı sayılarının periyodik değişimleri hakkındaki aşağıdaki sonuçları elde etmek için kullanılabilirler:

1. Av ve avcı nüfusunun büyüklüğü $2\pi/\sqrt{ac}$ periyoduyla sinüzoidal olarak değişir. Bu periyot başlangıç koşullarından bağımsızdır.
2. Av ve avcı nüfusları, çevriyi dörtte bir faz farkı ile oluştururlar. Örnekte açıkladığı gibi, av önden, avcı arkadan gelir.
3. Salınımın genliği av için Kc/γ , avcı için $a\sqrt{c}K/\alpha\sqrt{a}$ dir; sistemin parametrelerine bağlı olduğu kadar başlangıç koşullarına da bağlıdır.
4. Bir tam çevri üzerinde av ve avcı nüfusunun ortalaması sırasıyla c/γ ve a/α dir. Bu değerler denge durumundaki nüfuslarla aynıdır.

Aşağıda av-avcı denkleminde ait özel bir model daha veriyoruz.

Örnek 2.4.2

Bu modelde, ekolojik sistem üç etkenle modellenecektir: Bitkiler, bitkileri yiyen otobur bir hayvan türü (av), bu hayvanla beslenen etobur bir hayvan türü (avcı). Bu model, bitki miktarını kontrol ederek ekosistemi kontrol edebileceğimizi

gösterecektir. Modelimizde, her iki türün de (av-avcı) nüfusunun belirli bir sayının altına düşmesini (neslinin tükenmesi) istemiyoruz. Bu koşullar altında, av miktarını x ile, avcı miktarını da y ile gösterelim. Bu sistemi modelleyen denkleminiz;

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{A}\right) - \frac{\beta xy}{x+H} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{bxy}{x+H} - cV \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

dir. Buradaki A parametresi, avcının yokluğunda maksimum beslenebilecek av miktarıdır ve lojistik kurala bağlıdır. A parametresi, kontrol edilen tek parametredir. Çünkü, bitki miktarına bağlıdır. x , A dan çok küçükse, A nın katkısı azalır, avın doğum hızı r olur ve e^n tarzında exponansiyel gelişir. (2.4.25) sisteminde birinci denklemdaki ikinci terim ise, avcının, avın çoğalma hızı üzerindeki etkisini modellemektedir. Avın çoğalma hızı, av ve avcının nüfus çarpımlarıyla orantılıdır. Paydaki terim ise, doyumu etkisini belirlemektedir. Eğer av çok olursa, avcılar fazla aç kalmayacaklar ve daha az sayıda av avlanacaktır. İkinci denklem, avcılarının nüfus değişimini belirlemektedir. İkinci denklemdaki ilk terim avcının doğum hızını belirlemektedir. Yiyecek çoksa bu terim hızla büyümektedir. x , H dan çok büyükse bx ile doyuma erer. Böylece, b parametresi, doğal doğum hızını temsil eder. İkinci denklemda, eğer x miktarı olmazsa avcı c terimiyle exponansiyel olarak azalacaktır. Modelde doyumu parametresi H yı sabit tutacağız. x , y , H ve A türlerin milyon cinsinden nüfuslarını belirlesin. r , β , b ve c yıllık değişme birimi olarak alınacaktır. Burada $r=10$, $\beta=21$, $b=23$, $c=4/3$ ve $H=3$ olarak alınmıştır.

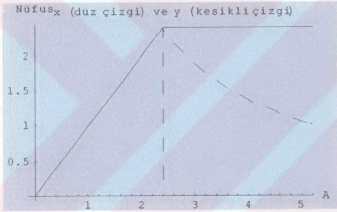
(2.4.25) denkleminin denge noktaları, $(0,0)$, $(A,0)$ ve $\left(\frac{12}{5}, \frac{18(-12+5A)}{35A}\right)$ dir. Denge

noktalarının A ya bağımlılığına dikkat edelim. $(0,0)$ denge noktası, her iki türün de var olmadığı anlamına gelir. İkinci denge noktasında avcı yoktur. Üçüncüde, her iki tür de mevcuttur. $(0,0)$ denge noktasının özdeğerleri, 10 ve $-\frac{4}{3}$ olup kararsız eyer

noktasıdır. $(A,0)$ noktasının özdeğerleri, -10 ve $-\frac{-12+5A}{3(3+A)}$ olup $A < \frac{12}{5}$ için

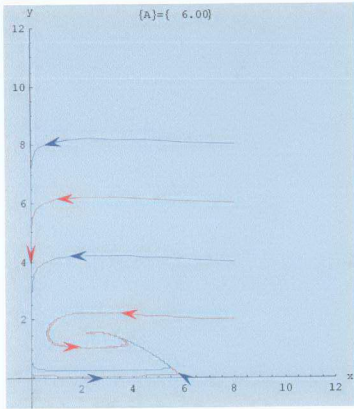
asimptotik kararlı düğüm, $A > \frac{12}{5}$ için de kararsız eyer noktasıdır.

$(\frac{12}{5}, \frac{18(-12+5A)}{35A})$ noktasının özdeğerleri, A ya bağlı oldukça karmaşık bir yapı sergilemektedir. Özdeğerlerin kareköklü terimlerinin içi $A=4.29969$ değerinde sıfır olmaktadır. Bu değer, reel ve kompleks kökler arasındaki geçişi sağlayan kritik bir değerdir. Buna göre, üçüncü nokta $\frac{12}{5} < A < 4.29969$ için kararlı bir düğüm noktası, $4.29969 < A < \frac{39}{5}$ için kararlı bir spiraldir. ($A = \frac{39}{5}$ değeri, özdeğerlerin reel kısmını sıfırlayan değerdir.) Eğer, $A > \frac{39}{5}$ ise kararlı nokta yoktur ve bir limit çevri oluşacaktır. (Limit çevri konusu bölüm 4.1 de detaylı olarak incelenecektir.) Denge noktalarının, A , 0 dan $\frac{39}{5}$ e kadar değişirken A ya bağlı nüfus artışlarının grafiği Şekil 2.4.3 de gösterilmiştir.

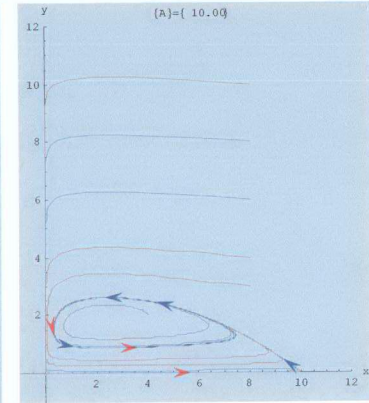


Şekil 2.4.3

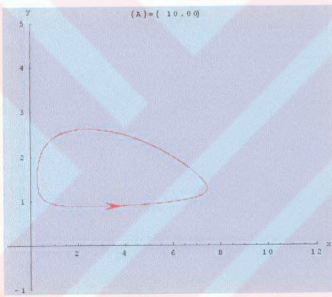
Şekil 2.4.4 ve 2.4.5 sırasıyla $A=6$ ve $A=10$ için sistemin faz portreleridir. Şekil 2.4.5 de oluşan limit çevri, Şekil 2.4.6 ve 2.4.7 de $A=10$ ve $A=12$ için ayrıca gösterilmiştir. Bu limit çevriler, A ile birlikte büyümektedir.



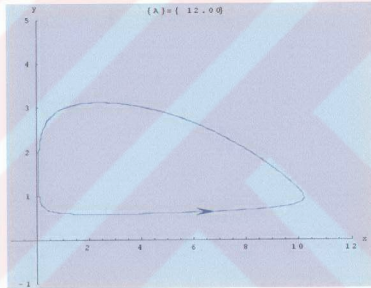
Şekil 2.4.4



Şekil 2.4.5



Şekil 2.4.6



Şekil 2.4.7

BÖLÜM 3. LIAPUNOV'UN İKİNCİ METODU

Linerimsi sistemler bölümünde, lineerimsi bir sistemin denge noktasının kararlılığının uygun bir lineer sistem oluşturularak nasıl belirleneceği gösterildi. Denge noktası lineerleşmiş sistemin merkez noktası (center) olduğunda kesin sonuç elde edilemedi. Bu durumun örneği av-avcı probleminde tartışıldı.

Asimptotik kararlı denge noktası için çekim bölgesinin araştırılması sorusu da önemlidir. Çekim bölgesi öyle bir bölgedir ki; o bölgeden başlayan bütün çözümler denge noktasına yaklaşır. Lincerimsi sistem teorisi yerel bir teori olduğundan çekim bölgesi hakkında hiçbir bilgi sağlamaz.

Bu bölümde diğer bir yaklaşım olan Liapunov'un ikinci metodu veya direkt metodunu tartışıyoruz. Bu metod, direkt metod olarak da ifade edilir; çünkü, diferansiyel denklem sisteminin çözümü için hiçbir bilgi gerektirmez. Denge noktasının kararlılığı veya kararsızlığı hakkındaki sonuçlar, uygun bir yardımcı fonksiyon oluşturularak elde edilir. Bu teknik daha geniş bir bilgi sağlar.

Liapunov'un ikinci metodu, konservatif sistemler için iki fizik prensibinin genelleştirilmiştir. (i) potansiyel enerji yerel minimum ise durgun pozisyon kararlıdır, aksi takdirde kararsızdır. (ii) toplam enerji hareket boyunca sabittir. Bu kavramları örneklendirmek için,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (3.1)$$

ile belirtilen sönümsüz sarkaç denklemini ele alalım.

(3.1) deki denkleme karşılık gelen birinci dereceden sistem, $x = \theta$ ve $y = d\theta/dt$ olmak üzere:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L} \sin x \quad (3.2)$$

dir. Eğer keyfi sabiti ihmal ederssek potansiyel enerji U , sarkacın en alt noktasından istenilen noktaya taşımada yapılan iştir. Yani;

$$U(x, y) = mgL(1 - \cos x) \quad (3.3)$$

dir. (3.2) sisteminin denge noktaları, $\theta = \pm n\pi$ ve $d\theta/dt = 0$ a karşılık gelen $x = \pm n\pi$, $y = 0$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) noktalarıdır. Fiziksel olarak; $\theta = 0, \pm 2\pi, \dots$, e karşılık gelen $x = 0, y = 0$; $x = \pm 2\pi, y = 0$; . . . , noktalarının kararlı, $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, ye karşılık gelen $x = \pm\pi, y = 0$; $x = \pm 3\pi, y = 0$; . . . , noktalarının kararsız olmasını bekliyoruz. Kararlı noktalarda U nun minimum değeri sıfırdır, kararsız noktalarda maksimum $2mgL$ ye eşittir. Bu durum (i) ifadesiyle uyuşur.

Potansiyel enerji U ve kinetik enerji $\frac{1}{2}mL^2(d\theta/dt)^2$ nin toplamı olan toplam enerji V yi ele alalım. V yi x ve y cinsinden ifade edecek olursak;

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \frac{1}{2}mL^2 y^2 \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.2) denkleminin $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ çözümüne karşılık gelen yörünge üzerinde V , t nin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. $V[\phi(t), \psi(t)]$ nin t ye göre türevi, yörünge boyunca V nin değişim oranıdır. $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ olmak üzere; zincir kuralıyla,

$$\begin{aligned} \frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= (mgL \sin x) \frac{dx}{dt} + mL^2 y \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (3.5) denkleminde dx/dt ve dy/dt yerine yazılırsa $dV/dt = 0$ elde edilir. Böylece (ii) ifadesinde belirtildiği gibi V , (3.2) sisteminin herhangi bir yörüngesi boyunca sabittir.

Herhangi bir (x, y) noktasından geçen yörünge boyunca V deki değişim oranının, gerçekten (3.2) sistemini çözmeden hesaplanması önemlidir.

$x = \pm 2n\pi$, $y = 0$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) denge noktalarında toplam enerji V sıfırdır. Eğer sarkaç başlangıç konumu (x_1, y_1) de kararlı denge noktasına yeterince yakınsa $V(x_1, y_1)$ küçüktür ve bu enerjiyle hareket eden yörünge denge noktasına yakın kalır. $V(x_1, y_1)$ yeterince küçükse yörünge kapalıdır ve denge noktasını kapsar. Örneğin; (x_1, y_1) , $(0,0)$ a yakın ve $V(x_1, y_1)$ çok küçük olsun. $V(x_1, y_1)$ li yörünge denklemi,

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \frac{1}{2} mL^2 y^2 = V(x_1, y_1)$$

dir.

x in küçük değerleri için $1 - \cos x = 1 - (1 - x^2/2! + \dots) \cong x^2/2$ dir. Böylece yörünge denklemi yaklaşık olarak;

$$\frac{1}{2} mgLx^2 + \frac{1}{2} mL^2 y^2 = V(x_1, y_1)$$

veya

$$\frac{x^2}{2V(x_1, y_1)/mgL} + \frac{y^2}{2V(x_1, y_1)/mgL^2} = 1$$

olur.

Bu $(0,0)$ denge noktasını içeren elips denklemdir. $V(x_1, y_1)$ ne kadar küçük olursa elipsin büyük ve küçük eksenleri de o kadar küçük olur. Fiziksel olarak, kapalı yörünge periyodik bir çözüme yani, hareketin denge noktası civarında küçük salınımına karşılık gelir.

Eğer sönüm mevcutsa, hareketin genliği zamanla azalır ve kararlı denge noktası merkez, asimptotik kararlı spiral noktaya döner. Bu durum, dV/dt göz önüne alınarak kanıtlanabilir. Sönümlü sarkaç için toplam enerji yine (3.4) denklemiyle verilir. Sarkacın hareketi $dx/dt = y$ ve $dy/dt = -(g/L) \sin x - (c/Lm)y$ ile verilsin. dx/dt ve dy/dt (3.5) denkleminde yerine yazılırsa $dV/dt = -cLy^2 \leq 0$ olur.

Böylece, $y = 0$ doğrusu hariç enerji yörünge boyunca azalır. O halde her bir yörünge, enerjinin minimum olduğu denge noktasına yaklaşmalıdır.

Bu konuyu genelleştirmek için,

$$dx/dt = F(x, y) \quad dy/dt = G(x, y) \quad (3.6)$$

otonom sistemini ele alalım ve $x = 0, y = 0$ noktası asimptotik kararlı denge noktası olsun. Öyleyse, $(0,0)$ ı kapsayan D bölgesinden başlayan her yörünge $t \rightarrow \infty$ iken orijine yaklaşmaktadır. V nin yalnızca orijinde sıfır olduğu D bölgesindeki (x, y) ler için $V \geq 0$ olacak şekilde V enerji fonksiyonunun mevcut olduğunu farz edelim. D deki her bir yörünge $t \rightarrow \infty$ iken orijine yaklaştığından V sıfıra doğru azalır. Bu sonucun tersini de ispatlamamız gerekir: Eğer her yörünge üzerinde t arttığında V sıfıra doğru azalıyorsa, yörüngeler $t \rightarrow \infty$ iken orijine yaklaşmak zorundadır ve böylece orijin asimptotik kararlıdır. Şimdi bazı tanımlar verelim.

V orijini kapsayan D bölgesinde tanımlı olsun. $V(0,0) = 0$ ve D deki diğer bütün noktalar için $V(x, y) > 0$ ise V, D de pozitif tanımlıdır. Benzer olarak, $V(0,0) = 0$ ve $V(x, y) < 0$ ise V negatif tanımlıdır. Eğer $>$ ve $<$ eşitsizlikleri yerine \geq ve \leq alınırsa V , sırasıyla pozitif yarı tanımlı ve negatif yarı tanımlıdır denir.

Örnek 3.1

$$V(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

fonksiyonu $0 < x^2 + y^2 < \pi/2$ için $V(0,0) = 0$ ve $V(x, y) > 0$ olduğundan $x^2 + y^2 < \pi/2$ de pozitif tanımlıdır. Bununla birlikte,

$$V(x, y) = (x + y)^2$$

fonksiyonu, $y = -x$ doğrusu üzerinde $V(x, y) = 0$ olduğundan pozitif yarı tanımlıdır.

Ayrıca, F ve G , (3.6) denklemindeki fonksiyonlar olmak üzere;

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y) \quad (3.7)$$

fonksiyonunu ele alalım. $\dot{V}(x, y)$ notasyonunu kullanıyoruz. Çünkü, $\dot{V}(x, y)$, (3.6) sisteminin, (x, y) noktasından geçen yörüngesi boyunca V deki değişim oranıdır.

Yani, $x = \phi(t), y = \psi(t)$, (3.6) sisteminin bir çözümü ise,

$$\begin{aligned} \frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y) \\ &= \dot{V}(x, y) \end{aligned}$$

dir.

\dot{V} fonksiyonuna, bazen (3.6) sistemine göre V nin türevi deriz.

Teorem 3.2

(3.6) otonom sistemi, orijinde ayrık denge noktasına sahip olsun. Eğer kendisi ve birinci kısmı türevi sürekli V fonksiyonu, pozitif tanımlı ve (3.7) denklemiyle verilen \dot{V} fonksiyonu, $(0,0)$ ı kapsayan xy -düzlemindeki bir D bölgesinde negatif tanımlı ise orijin asimptotik kararlı denge noktasıdır. \dot{V} , negatif yarı tanımlı ise orijin kararlı denge noktasıdır.

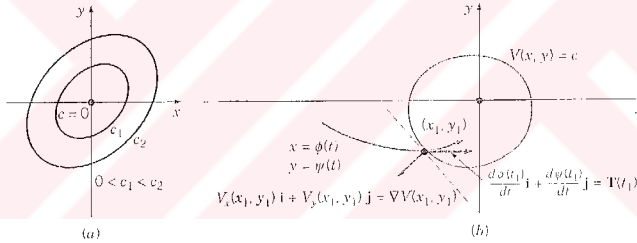
Teorem 3.3

Orijin, (3.6) otonom sisteminin ayrık denge noktası olsun. V nin kendisi ve birinci kısmı türevi sürekli bir fonksiyon olsun. $V(0,0) = 0$ ve orijinin her komşuluğunda V nin pozitif (negatif) olduğu en az bir nokta var olsun. Eğer, orijini kapsayan bir D bölgesinde (3.7) denklemiyle verilen \dot{V} fonksiyonu pozitif (negatif) tanımlı ise orijin kararsız denge noktasıdır.

V fonksiyonuna Liapunov fonksiyonu denir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 ü geometrik argümanlarla ifade etmeden önce bu teoremleri kullanmadaki zorluğa dikkat edelim. Bu teoremler var olduğu varsayılan Liapunov fonksiyonunun nasıl kurulacağı

hakkında hiçbir şey söylemez. (3.6) otonom sisteminin fiziksel bir problemi temsil ettiği durumlarda ilk olarak Liapunov fonksiyon olarak sistemin gerçek toplam enerji fonksiyonunu ele almak doğaldır. Bununla birlikte, Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 fiziksel enerji kavramının uygun olmadığı durumlarda uygulanabilir. Böyle durumlarda deneme-yanılma yaklaşımı gerekli olabilir.

Şimdi Teorem 3.2 nin ikinci kısmını yani, $\dot{V} \leq 0$ durumunu ele alalım. $c \geq 0$ bir sabit olsun ve xy -düzleminde $V(x, y) = c$ ile verilen eğriyi düşünelim. $c = 0$ için eğri, $x = 0, y = 0$ tekil noktasına düşer. Eğer $0 < c_1 < c_2$ ise, $V(x, y) = c_1$ eğrisi orijini kapsar ve $V(x, y) = c_2$ eğrisinin içinde kalır. $V(x, y) = c$ kapalı eğrisi içinden başlayan herhangi bir yörüngenin dışarı çıkamayacağını gösterelim. Orijin civarında ε yarıçaplı bir çember verilsin. c yi yeterince küçük alarak $V(x, y) = c$ kapalı eğrisinin içinden başlayan her yörüngenin ε yarıçaplı çemberin içinde kalmasını sağlayabiliriz. Böylece orijin kararlı denge noktasıdır.



Şekil 3.1 Liapunov metodunun geometrik yorumu

Bunu göstermek için, V nin gradiyenti olarak bilinen

$$\nabla V(x, y) = V_x(x, y) \mathbf{i} + V_y(x, y) \mathbf{j} \quad (3.9)$$

vektörünü hatırlayalım. Bu vektör $V(x, y) = c$ eğrisinin normalidir ve V nin artan yönünü gösterir. Bu durumda V orijinden dışarıya doğru artar, böylece ∇V orijine zıt yöndedir. (Şekil 3.1) (3.6) sisteminin bir $x = \phi(t), y = \psi(t)$ yörüngesini ele alalım ve $\mathbf{T}(t) = \phi'(t) \mathbf{i} + \psi'(t) \mathbf{j}$ vektörünün her bir noktada yörüngeye teğet olduğunu hatırlayalım. $x_1 = \phi(t_1), y_1 = \psi(t_1)$ noktası, yörünge ve $V(x, y) = c$ kapalı eğrisinin

kesişim noktası olsun. Bu noktada, $\phi'(t_1) = F(x_1, y_1)$, $\psi'(t_1) = G(x_1, y_1)$ dir. Böylece (3.7) denkleminde,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, y_1) &= V_x(x_1, y_1)\phi'(t_1) + V_y(x_1, y_1)\psi'(t_1) \\ &= [V_x(x_1, y_1)\mathbf{i} + V_y(x_1, y_1)\mathbf{j}] \cdot [\phi'(t_1)\mathbf{i} + \psi'(t_1)\mathbf{j}] \\ &= \nabla V(x_1, y_1) \cdot \mathbf{T}(t_1)\end{aligned}\quad (3.10)$$

elde edilir.

Böylece; $\dot{V}(x_1, y_1)$, $\nabla V(x_1, y_1)$ ve $\mathbf{T}(t_1)$ vektörlerinin skaler çarpımıdır. $\dot{V}(x_1, y_1) \leq 0$ olduğundan, $\nabla V(x_1, y_1)$ ve $\mathbf{T}(t_1)$ arasındaki açının kosinüsü sıfıra eşit veya sıfırdan küçüktür. Bu nedenle açı $[\pi/2, 3\pi/2]$ aralığındadır. Böylece, yörünge üzerinde hareketin yönü, $V(x_1, y_1) = c$ ye göre içeri doğrudur veya eğriye teğettir. $V(x_1, y_1) = c$ kapalı eğrisinin içinden başlayan yörüngeler c ne kadar küçük olursa olsun eğri dışına çıkamazlar ve orijinin kararlı nokta olur. $\dot{V}(x_1, y_1) < 0$ ise eğri üzerindeki noktalardan geçen yörüngeler içeriye işaret ederler. Sonuç olarak, orijine yeterince yakın başlayan yörüngelerin orijine yaklaşması gerektiği gösterilebilir. Böylece, orijin asimptotik karardır.

Benzer olarak, Teorem 3.3 de, Teorem 3.2 de olduğu gibi geometrik argümanlarla ifade edilebilir. Kısaca, \dot{V} pozitif tanımlı olsun ve orijin civarında $V(x_1, y_1) > 0$ olacak şekilde (x_1, y_1) noktasını içeren bir çember verilsin. (x_1, y_1) den geçen bir yörüngeyi ele alalım. (3.8) denkleminde anlaşıldığı gibi, $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$ olduğundan bu yörünge boyunca V artmak zorundadır. Ayrıca, $V(x_1, y_1) > 0$ olduğundan yörünge orijine yaklaşamaz. Çünkü, $V(0,0) = 0$ dir. Bu orijinin asimptotik kararlı olamayacağını gösterir. $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$ olduğunda orijinin kararsız olduğunu göstermek mümkündür.

Örnek 3.4

$(0,0)$ noktasının sönümsüz sarkaç denklemi (3.2) için kararlı bir denge noktası olduğunu Teorem 3.2 yi kullanarak gösterelim. Ayrıca, $(\pi,0)$ noktasının kararsız denge noktası olduğunu Teorem 3.3 ü kullanarak gösterelim.

V ,

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \frac{1}{2} mL^2 y^2 \quad (3.4)$$

ile verilen toplam enerji olsun.

Eğer D , $-\pi/2 < x < \pi/2, -\infty < y < \infty$ aralıkları olarak alınırsa, V , sıfır olduğu orijin hariç pozitiftir. Böylece V , D de pozitif tanımlıdır. Ayrıca daha önce gördüğümüz gibi, bütün x ve y ler için,

$$\dot{V} = (mgL \sin x)(y) + (mL^2 y)(-g \sin x) / L = 0$$

dır. Böylece \dot{V} , D de negatif yarı tanımlıdır. Sonuç olarak, Teorem 3.2 deki son ifadeyle birlikte orijin sönümsüz sarkaç için kararlı denge noktasıdır. Bu sonuç Teorem 3.3 den elde edilemeyebilir; çünkü, $(0,0)$ noktası uygun lineer sistem için merkezdir.

Şimdi $(\pi,0)$ noktasını ele alalım. Artık, (3.4) denklemiyle verilen Liapunov fonksiyonu uygun değildir. \dot{V} nün ya pozitif ya da negatif tanımlı olduğu V fonksiyonu için Teorem 3.3 gerekir. $(\pi,0)$ noktasını analiz etmek için, bu noktayı $x = \pi + u, y = v$ dönüşümüyle orijine taşımak uygundur. Öyleyse (3.2) diferansiyel denklemi,

$$du/dt = v \quad dv/dt = \frac{g}{L} \sin u \quad (3.11)$$

olur ve denge noktası uv - düzleminde $(0,0)$ dir.

$$V(u, v) = v \sin u \quad (3.12)$$

fonksiyonunu ele alalım. D bölgesi, $-\pi/4 < u < \pi/4, -\infty < v < \infty$ aralığında tanımlansın. Öyleyse:

$$\dot{V} = (v \cos u)(\dot{v}) + (\sin u)[(g/L) \sin u] = v^2 \cos u + (g/L) \sin^2 u \quad (3.13)$$

D de pozitif tanımlıdır. Tek kalan soru, orijinin her komşuluğunda V nin pozitif olduğu noktalar olup olmadığıdır. (3.12) denkleminde, birinci bölgede ($\sin u$ ve v nin her ikisi de pozitif) ve üçüncü bölgede (her ikisi de negatif) $V(u, v) > 0$ olduğunu görüyoruz. Böylece, Teorem 3.3 ün koşulları yeterlidir ve uv -düzlemindeki $(0,0)$ veya xy -düzlemindeki $(\pi,0)$ noktası kararsızdır.

Şimdi, çekim bölgesiyle ilgili aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 3.5

Orijin (3.6) otonom sisteminin ayrık denge noktası, V kendisi ve birinci kısmi türevi sürekli fonksiyon olsun. Eğer orijini kapsayan öyle bir sınırlı D_K bölgesi varsa ki orada $V(x, y) < K$, V pozitif tanımlı ve \dot{V} negatif tanımlı ise (3.6) denkleminin D_K da herhangi bir noktadan başlayan her çözümü t sonsuza gittiğinde orijine yaklaşır.

Diğer bir deyişle, D_K da kalan başlangıç dataları $x = \phi(t), y = \psi(t)$ ile, (3.6) denkleminin çözümü ise, $t \rightarrow \infty$ iken $(0,0)$ denge noktasına yaklaşır. Böylece D_K , asimptotik kararlılık bölgesini verir. Şüphesiz bu, çekim bölgesinin tamamı olmayabilir. Bu teorem, (i) D_K da (3.6) sisteminin periyodik çözümü yoktur, (ii) D_K da başka denge noktası yoktur, koşulları doğrulanarak ispatlanır. Böylece, D_K dan başlayan yörüngeler, t sonsuza gittiğinde orijine yönelmelidir.

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 sırasıyla kararlılık ve kararsızlık için yeterli şartları verirler. Buna rağmen, uygun bir Liapunov fonksiyonu belirlemek için gerekli değildirler. Ne yazık ki, Liapunov fonksiyonunun kurulması için genel bir metot yoktur. Bununla birlikte, özel denklem sınıfları için, Liapunov fonksiyonunun kurulması üzerine geniş çalışmalar vardır. Pozitif veya negatif tanımlı fonksiyonları oluşturmada sık sık faydalanan elemanter bazı cebirsel sonuçlar, aşağıdaki teoremden ispatsız ifade edilmiştir.

Teorem 3.6

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (3.14)$$

fonksiyonu pozitif tanımlıdır \Leftrightarrow

$$a > 0 \text{ ve } 4ac - b^2 > 0 \quad (3.15)$$

dır ve negatif tanımlıdır \Leftrightarrow

$$a < 0 \text{ ve } 4ac - b^2 > 0 \quad (3.16)$$

dır.

Teorem 3.6'nın bir uygulaması aşağıdaki örnekle verilmiştir.

Örnek 3.7

$$dx/dt = -x - xy^2 \quad dy/dt = -y - x^2y \quad (3.17)$$

otonom sisteminin $(0,0)$ denge noktasının asimptotik kararlı olduğunu gösteriniz.

(3.14) formunda bir Liapunov fonksiyonu kurmayı deneyelim.

$V_x(x, y) = 2ax + by$, $V_y(x, y) = bx + 2cy$ ve böylece;

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y) \\ &= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + x^3y) + 2c(y^2 + x^2y^2)] \end{aligned}$$

olur.

Eğer a ve c pozitif ve $b = 0$ seçilirse, \dot{V} negatif tanımlı ve Teorem 3.6'dan V pozitif tanımlıdır. Böylece Teorem 3.2'den orijin, asimptotik kararlı denge noktası olduğu anlaşılır.

Örnek 3.8

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1-x-y) \\ dy/dt &= y(0.75-y-0.5x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

sistemini ele alalım. Bu sistem, birbiriyle yarışan iki türün özel bir modelidir ve (0.5,0.5) denge noktası asimptotik kararlı denge noktasıdır. Bunu, uygun bir Liapunov fonksiyonu bularak doğrulayalım.

(0.5,0.5) noktasını orijine taşımak için

$$x = 0.5 + u \quad y = 0.5 + v \quad (3.19)$$

değerlerini (3.18) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} du/dt &= -0.5u - 0.5v - u^2 - uv \\ dv/dt &= -0.25u - 0.5v - 0.5uv - v^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

sistemini elde ederiz.

Hesaplamaları kolaylaştırmak için, Liapunov fonksiyonu olarak $V(u, v) = u^2 + v^2$ fonksiyonunu alalım. Fonksiyonun pozitif tanımlı olduğu açıktır. \dot{V} 'nin negatif tanımlı olduğu uv -düzleminde, orijini içeren bir bölge olup olmadığını belirlememiz gerekir. $\dot{V}(u, v)$ yi hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= V_u \frac{du}{dt} + V_v \frac{dv}{dt} \\ &= 2u(-0.5u - 0.5v - u^2 - uv) + 2v(-0.25u - 0.5v - 0.5uv - v^2) \end{aligned}$$

veya

$$\dot{V}(u, v) = -(u^2 + 1.5uv + v^2) + (2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3) \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21) denkleminde parantez içindeki ifadelerin, yeterince küçük u ve v ler için pozitif tanımlı olduğunu göstermek istiyoruz. Kareli terimler,

$$u^2 + 1.5uv + v^2 = 0.25(u^2 + v^2) + 0.75(u+v)^2 \quad (3.22)$$

olarak yazılabilir. Bu terimler pozitif tanımlıdır. Diğer yandan, (3.21) deki kübik terimler, pozitif de negatif de olabilirler. Bu nedenle, $u = 0, v = 0$ ın bir komşuluğunda kübik terimler kareli terimlerden daha küçüktür. Yani:

$$\left| 2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3 \right| < 0.25(u^2 + v^2) + 0.75(u+v)^2 \quad (3.23)$$

dır. (3.23) denkleminin sol tarafını tahmin etmek için, $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ kutupsal koordinatlarını tanımlayalım. Öyleyse; $|\sin \theta|, |\cos \theta| \leq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3| &= r^3 |2 \cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta + 2 \sin^3 \theta| \\ &\leq r^3 [2|\cos^3 \theta| + 2 \cos^2 \theta |\sin \theta| + |\cos \theta| \sin^2 \theta + 2|\sin^3 \theta|] \\ &\leq 7r^3 \end{aligned}$$

olur. (3.23) ün geçerliliğini göstermek için, daha kuvvetli bir gerekçe olan

$$7r^3 < 0.25(u^2 + v^2) = 0.25r^2$$

ifadesinin doğruluğunu kabul etmek yeterlidir. Buradan. $r < 1/28$ olduğu görülür. Böylece Teorem 3.2, en azından bu diskin içerisinde doğrulanmıştır. Orijin, (3.20) sisteminin. $(0.5, 0.5)$ noktası da (3.18) sisteminin asimptotik kararlı denge noktasıdır.

Teorem 3.5, $(0.5, 0.5)$ merkezli $1/28$ yarıçaplı diskin, (3.18) sistemi için, asimptotik kararlılık bölgesi olduğunu gösterir. Dikkat edersek. çekim bölgesinin bütünü için bilgi edinemedik. Teorem 3.5 den çekim bölgesinin tamamını tahmin etmek için, (3.23) denklemindeki terimlerin daha kesin bir tahmini yapılmalı ve daha iyi bir Liapunov fonksiyonu kullanılmalıdır.

BÖLÜM 4. LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERDE ÇEVİRİLER, DALLANMALAR ve KAOS

Otonom dinamik sistemlerde, en basit denge hali sistemin durgun (rest) halidir. Bu bölümde başka tip denge halleri verilecektir. Bunlar durum uzayındaki (state space) çevrilerdir. Çevriler, dinamik denklemlerin periyodik çözümlerine karşılık gelir. Özellikle, zamanla kendine yakın çözümleri üzerine çeken çevriler önemlidir. Bu kavramdan sonra duyarlılık sorusunu, yani; denklem sisteminde parametrelerdeki küçük değişikliklerin nasıl bir sonuç doğuracağına belirlenmesi problemini inceleyeceğiz. Eğer değişim çok küçükse, yeni yörüngenin eskisine yakın olmasını bekleriz. Fakat birçok sistemlerde, parametreler bazı kritik değerlere ulaştığında sistemin davranışı aniden değişmektedir. Örneğin asimptotik kararlı denge noktası, kararlılığını bozmakta ve çekici bir çevri oluşturmaktadır veya çevrinin periyodu aniden ikiye katlanmaktadır. Yada çevri periyodik karakterini kaybederek kaosa dönüşmektedir. Başlangıç datalarındaki veya parametrelerdeki küçük değişimlerin oluşturduğu yeni durumların örneklerini vereceğiz. Ele alınacak olan otonom sistemlerin hemen hemen hepsi lineer olmayacaktır.

4.1. Limit Çevriler: van der Pol Sistemler

Rüzgarlı bir havada bayrağın dalgalanması, salgın hastalıkların ve ekonomik krizlerin periyodik olarak ortaya çıkması, birlikte yaşayan hayvan çiftlerinin periyodik yoğunluğu ve birinin diğeriyle beslendiği türler, çiçeklerin uyuması, kalp atışları... gibi birçok değişik konu van der Pol tarafından tek bir denklem sistemiyle modellenmiştir. Bu sistemler, periyodik salınımlar veya çevri oluşturmaktadır. Lincer olmayan adi diferansiyel denklem sistemini

$$x' = f(x, y) \quad y' = g(x, y) \quad (4.1.1)$$

formunda gösterelim. Buradaki x ve y yukarıda örnek olarak gösterilen büyüklükleri temsil etmektedir. Örneğin; av-avcı nüfus yoğunluklarını temsil etmesi gibi... Bu sistemde, yörüngelerin herhangi bir çevri oluşturup oluşturmadığına bakacağız. Çevri demekle, (4.1.1) sisteminin sabit olmayan periyodik çözümlerini kastedeceğiz. f ve g hız fonksiyonlarının bir S bölgesinde sürekli türevlenebilir olduğunu kabul edelim. Böylece, Varlık / Teklik / Genişleme / Süreklilik şartlarının sağlandığını garanti ediyoruz. Bunun manası, S bölgesi (4.1.1) sisteminin yörüngeleriyle tamamen kapatılıyor ve yörüngeler birbirini kesmiyor demektir.

(a) Düzlemsel Lincer Sistemler İçin Çevriler

Otonom düzlemsel lincer sistemlerde çevriler, A matrisinin $\pm i\beta$ formunda sırf sanal özdeğerlerinin varlığıyla ortaya çıkmaktadır. Sistemin reel değerli genel çözümü

$$c_1 \operatorname{Re} [ve^{4\beta t}] + c_2 \operatorname{Im} [ve^{4\beta t}]$$

dir. Burada v özvektördür.

Örnek 4.1.1

$$x' = y \quad y' = -k^2 x$$

sistemi k sıfırdan farklı reel bir katsayı olmak üzere,

$$x = A \cos(kt + \varphi) \quad y = -kA \sin(kt + \varphi)$$

şeklinde reel çözüme sahiptir. Burada, A ve φ keyfi reel sabittir. Bu çözümler $2\pi/k$ periyotlu, denge noktasını içine alan

$$x^2 + y^2 / k^2 = A^2$$

formunda eliptik çevri ailesini oluşturur. Sistem matrisinin özdeğerleri $\pm ik$ dir.

(b) Çevriler: Limit Çevriler

(4.1.1) düzlemsel sistemini ve çevrilerini göz önüne alalım. Γ çevrisi bir çevri ailesinin üyesi olabilir. Yani; Γ 'nın herhangi bir komşuluğu sistemin çevrileri ile doldurulur. Yada Γ , herhangi bir komşuluğunda Γ dan başka çevri içermediği için ayrı (izole) formda olur.

Her bir çevri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- 1) Γ , xy -düzlemini sınırsız dış bölge ve sınırlı iç bölge şeklinde iki parçaya böler.
- 2) Γ 'nin iç bölgesinde en az bir denge noktası vardır.

İspatsız olarak vereceğimiz bu iki özelliğin önemli sonuçları vardır. Sonuçlardan ilki, çevrinin iç bölgesinde başlayan (4.1.1) sisteminin bir yörüngesi bu bölgede kalmak zorundadır. Benzer şekilde, çevrinin dış bölgesinde bir yörünge devamlı dışarıda kalır. Eğer bu yörüngeler çevriyle kesişirse teklik şartı oluşmaz. İkinci özelliğin bir sonucu da, denge noktası bulundurmayan basit bağlantılı bir bölgede çevri aramanın anlamı olmamasıdır.

Çevri aileleri harmonik salınıcı, basit sarkaç, Lotka-Volterra av-avcı modelleri gibi birçok problemde ortaya çıkmaktadır. Fakat biz burada ayrıntılı çekici çevrilerle ilgileneceğiz. Başlangıç datalarının değişiminde bile periyodik hareket gösteren çevrilerle uğraşacağız.

Tanım 4.1.2: Limit Çevri

Γ , (4.1.1) sisteminin bir çevrisi olsun. Eğer Γ 'nin üzerinde olmayan bir Q noktasından geçen bir yörünge boyunca $t \rightarrow \pm\infty$ için limit alındığında Q dan geçen çözüm Γ ya yaklaşırsa Γ ya limit çevri denir.

Tanım 4.1.3: Çekici

Γ , (4.1.1) sisteminin bir limit çevrisi olsun. Eğer Γ 'nin öyle bir komşuluğu bulunabilse ki; bu komşuluğa giren her yörünge $t \rightarrow +\infty$ olduğunda Γ ya yaklaşırsa, Γ ya çekici (attractor) denir. Γ 'nin çekim bölgesi diye öyle Q noktaları kümesine deriz ki; Q dan geçen yörüngeler $t \rightarrow +\infty$ olduğunda Γ ya yaklaşır. Çekim bölgesi içerisindeki yörüngelerin, limit çevrisine t arttıkça spiral tarzında yaklaştıkları gösterilebilir. Bir yörünge limit çevriye spiral şeklinde yaklaşırsa, onun civarındakiler de benzer tarzda yaklaşırlar. İtici limit çevri benzer tanıma sahiptir.

Ama Γ ya yakın yörüngeler $t \rightarrow -\infty$ olduğunda Γ ya yaklaşırlar. Aşağıdaki örneklerle bunları görelim.

Örnek 4.1.4

$$x' = x - y - x(x^2 + y^2) \quad y' = x + y - y(x^2 + y^2)$$

sisteminin sadece orijinde denge noktası ve $x^2 + y^2 = 1$ ile tanımlı, 2π periyotlu tek bir çekici limit çevrisi vardır. Bunu kutupsal koordinatlara geçerek görebiliriz. $r^2 = x^2 + y^2$ ve $\tan \theta = y/x$ olmak üzere;

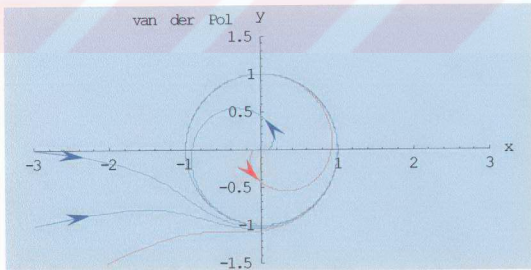
$$r' = r(1 - r^2) \quad \theta' = 1$$

sisteminin genel çözümü

$$r(t) = r_0 [r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}]^{-1/2} \quad \theta(t) = t + \theta_0$$

dır.

$r(t)$ fonksiyonu $r' - r = -r^3$ Bernoulli denkleminin çözülmesiyle bulunur. $r_0 = 1$ için $r = 1$ ve $\theta = t$ dir. Eğer $r_0 > 0$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1$ olur. Γ birim çemberi çekici bir limit çevridir. Çekim bölgesi $(0,0)$ hariç tüm düzlemdir.



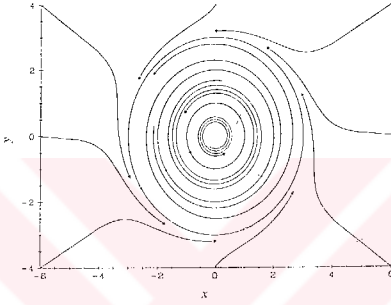
Şekil 4.1.1 Çekici limit çevri

Lineer olmayan sistemin çözümünden limit çevrinin varlığını tespit etmek her zaman mümkün olmayabilir. Şimdiki örnekte işaret analiziyle limit çevri arayalım.

Örnek 4.1.5

$$\theta' = 1 \quad r' = r(1-r^2)(4-r^2)(9-r^2)/1000$$

sistemi $r = 1$ ve $r = 3$ de çekici limit çevriye ve $r = 2$ de itici limit çevriye sahiptir. Bu sonuçlar, r değerleri 1,2,3 civarında artırıldığında r' nün işaretinin değişimiyle bulunurlar.

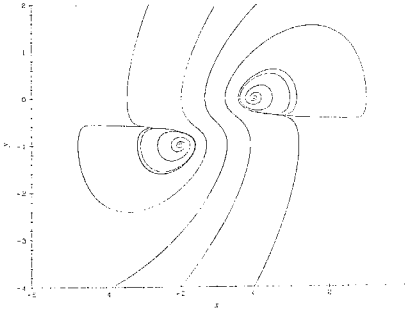


Şekil 4.1.2

Örnek 4.1.6

$$x' = -y - y^2 \quad y' = 0.5x - 0.2y + xy - 1.2y^2$$

sistemi orijinde bir itici limit çevriye, $(-2, -1)$ denge noktasının civarında da çekici limit çevriye sahiptir.



Şekil 4.1.3

Teorem 4.1.7

Otonom, birinci mertebeden lineer sistemler ayrıık çevrilere sahip olamazlar.

İspat

$x' = Ax$ otonom lineer sisteminin sabit olmayan $x(t)$ periyodik çözüümüne sahip olduğunu farz edelim. Sıfırdan farklı her c sabiti değeri için, $cx(t)$ sabit olmayan periyodik bir çözüümdür. Çünkü;

$$(cx(t))' = cx'(t) = cAx(t) = A(cx(t))$$

dir. Böylece, $x = x(t)$ ile tanımlanan çevri, diğeri çevrilerden ayrıık değildir. Dikkat edersek, $x(t)$ ve $cx(t)$ aynı periyotludur.

Teorem 4.1.8 (van der Pol Çevrisi)

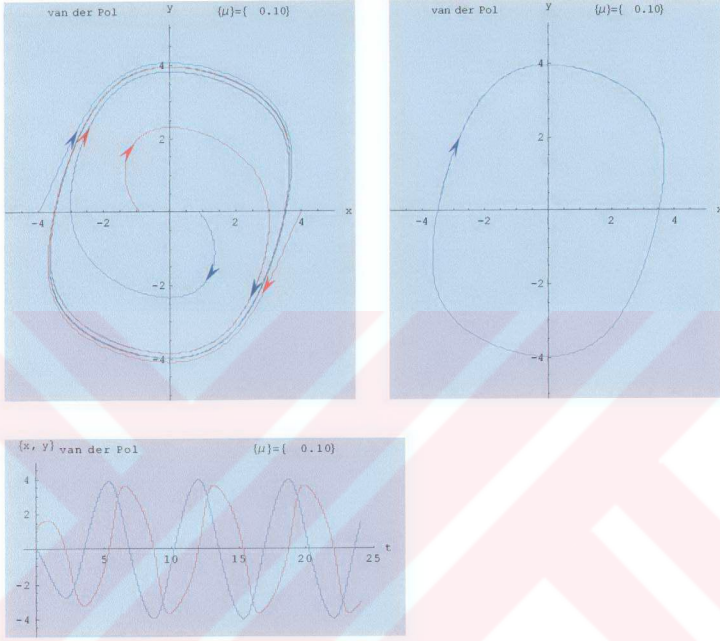
Sürekli ve parçalı düzgün $f(x)$ fonksiyonu bütün x ler için tanımlı olsun. (a) $f(-x) = -f(x)$ (b) Bir a pozitif sabiti için. $0 < x < a$ ise $f(x) < 0$ ve $x > a$ ise $f(x) > 0$ (c) $x \rightarrow +\infty$ iken $f(x) \rightarrow +\infty$ olsun. bu koşullar altında, her μ pozitif değeri için, $x' = y - \mu f(x)$, $y' = -x$ van der Pol sistemi tek bir limit çevriye sahiptir. Bu limit çevri, orijindeki itici denge noktası hariç, diğeri bütün yörüngeleri çeker.

Örnek 4.1.9

$$\frac{dx}{dt} = y - \mu(x^3 - 10x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x$$

sistemini ele alalım. Şekil 4.1.4, sistemin faz portresini, limit çevresini ve bir yörüngenin zaman grafiğini göstermektedir.



Şekil 4.1.4

Çekici limit çevriler, asimptotik kararlı denge noktasıyla aynı karakteristik yapıya sahiptirler. İkisinin de yakınındaki yörüngeleri, sistemin uzun zaman davranışını karakterize eder. Pratik açıdan, çekici bir limit çevriye sahip lineer olmayan bir sistem geniş bir çekim bölgesine sahip olabilir. Başlangıç koşulları kesinlikle bilinemezse, şok ve distürens kaçınılmazdır. Lineer olmayan sistemler, periyodik duruma beklenmedik bir anda geçebilir. Limit çevrilerin çözüm formülleri çoğu zaman elde edilemeyebilir. Limit çevrilerin varlığı bilgisayar simülasyonu ile aranır veya yukarıdaki teoremlerdeki sonuçlar kullanılabilir. Şimdi, limit çevrinin varlığını garanti eden Poincare-Bendixson alternatiflerini verelim.

4.2. Poincare-Bendixson Alternatifleri

Tanım 4.2.1: Sınırlı Yörüngeler

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}\quad (4.2.1)$$

başlangıç değer problemi, tek ve maximal genişletilmiş bir çözüme sahip olsun. Eğer, $(x(t_0), y(t_0)) \in \Gamma$ üzerinde bir nokta olmak üzere, $\Gamma_t^+ = \{(x(t), y(t)) : t \geq t_0\}$ yörüngesi sonlu bir dörtgen içinde kalırsa, (4.2.1) sisteminin $x(t), y(t)$ çözümü ve Γ yörüngesi pozitif olarak sınırlıdır denir. $\Gamma_t^- = \{(x(t), y(t)) : t \leq t_0\}$ sonlu bir dörtgen içinde kalırsa, çözüm ve yörünge negatif olarak sınırlıdır denir. Çözüm ve yörünge pozitif ve negatif sınırlı ise sınırlıdır denir.

Bu tanıma göre bir yörüngenin sınırlılığı yörünge üzerinde seçilen noktadan bağımsızdır.

Örnek 4.2.2

$$\begin{aligned}x' &= x - 10y - x(x^2 + y^2) \\ y' &= 10x + y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}\quad (4.2.2)$$

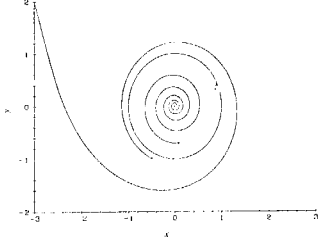
sisteminin bazı yörüngeleri sınırlı, bazıları ise yalnızca pozitif sınırlıdır. Bunu göstermenin tek yolu, (4.2.2) sistemini

$$\begin{aligned}r' &= r(1 - r^2) \\ \theta' &= 10\end{aligned}\quad (4.2.3)$$

şeklinde kutupsal koordinatlarda yazarak, (4.2.3) sistemine işaret analizini uygulamaktır.

$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = 1$ birim çemberi sınırlı bir yörünge ve $2\pi/10$ periyotlu periyodik çözümlerle belirlenir. (Şekil 4.2.1) Çemberin içinden başlayan her bir yörünge sınırlıdır. Çünkü, bütün zamanlar için içerde kalmak zorundadır. Diğer yandan, birim çemberin dışındaki bir yörünge pozitif sınırlıdır. Çünkü, yörüngenin

her noktasında r' negatiftir ve zaman arttıkça yörünge içeriye doğru hareket eder. Bununla birlikte; yörünge boyunca zaman azaldıkça, $r(t)$ sonsuza yönelir ve böylece yörünge negatif sınırlı olamaz.



Şekil 4.2.1

Yukarıdaki örnekte, zaman sonsuza gittiğinde iki tane sabit olmayan yörüngenin dairesel bir yörüngeye limitsel davranışla yaklaştığını görüyoruz. Şimdi bu fikri daha açık bir şekilde tanımlayalım.

Tanım 4.2.3: Bir Yörüngenin Limit Kümeleri

Γ pozitif sınırlı yörüngesi, (4.2.1) sisteminin $x = x(t)$, $y = y(t)$ çözümü ile verilsin. Γ 'nin omega limit kümesi $\omega(\Gamma)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n)) = Q$$

şartını sağlayan tüm Q noktalarının geometrik yeridir. Buradaki t_n zaman dizisi, $n \rightarrow \infty$ iken $t_n \rightarrow +\infty$ olur. ($t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$) Alfa limit kümesi $\alpha(\Gamma)$, negatif sınırlı Γ yörüngesi için benzer tarzda tanımlanır. Bu halde t_n azalan bir dizidir. $n \rightarrow \infty$ iken $t_n \rightarrow +\infty$ dur. ($t_0 > t_1 > \dots > t_n > \dots$)

Bir yörüngenin omega limit kümesi yörüngenin en son halini, alfa limit kümesi ise yörüngenin başlangıç halini belirler.

Örnek 4.2.4

(4.2.2) sisteminin dairesel yörüngesini Γ_2 , bu çevrinin içerisindeki yörüngeyi Γ_1 ve çevrinin dışındakini de Γ_3 ile gösterelim.

- $\alpha(\Gamma_1)$ limit kümesi sadece orijindir. $\omega(\Gamma_1)$, Γ_2 dir.
- $\alpha(\Gamma_2) = \omega(\Gamma_2) = \Gamma_2$
- $\omega(\Gamma_3) = \Gamma_2$ dir. ($\alpha(\Gamma_3)$ yoktur. Çünkü Γ_3 negatif sınırlı değildir.

Bunlar, $r_0 = r(0)$ ve $\theta_0 = \theta(0)$ olmak üzere; (4.2.3) sisteminde yazılarak r ve θ çözümlürse,

$$r(t) = r_0 [r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}]^{-1/2} \quad \theta(t) = 10t + \theta_0 \quad (4.2.4)$$

elde edilir.

$\omega(\Gamma_1) = \omega(\Gamma_2) = \omega(\Gamma_3) = \Gamma_2$ olduğunu gösterelim.

$r = 1$ ve $\theta = \theta_1$ kutupsal koordinatlarına sahip birim çember üzerinde bir Q noktası alalım.

$$t_n = (\theta_1 - \theta_0 + 2n\pi)/10$$

ve $\{t_n\}$ artan bir dizi olup $n \rightarrow \infty$ için ∞ olur. $r(t_n)$ ise 1 dir. Çünkü, $r_0 > 0$ koşuluyla (4.2.4) denkleminin ilk kısmında $t \rightarrow \infty$ için $r(t) \rightarrow 1$ dir. $\theta(t_n) = \theta_1 + 2n\pi$, θ_1 e denktir. Böylece Q noktası, Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 ün limit kümesindedir. Benzer şekilde $\alpha(\Gamma_1)$ in sadece orijin noktası olduğu görülür.

$r_0 > 1$ ise t , 0 dan $t_1 = -0.5 \ln(r_0^2 / (r_0^2 - 1))$ zamanına kadar azaldığında $r(t) \rightarrow \infty$ a gitmektedir. Böylece, Γ_3 ün negatif sınırlı olmadığı, dolayısıyla da $\alpha(\Gamma_3)$ ün mevcut olmadığı anlaşılır.

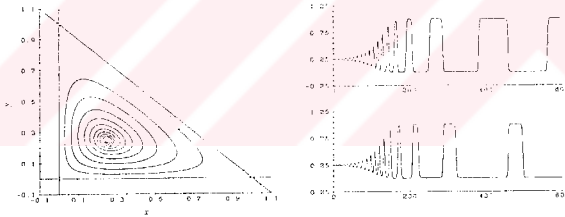
(4.2.2) sisteminin limit kümeleri yörüngelerin tamamı olmaktadır. Bir yörüngenin limit kümesi bir veya daha fazla yörünge olabilir. Buna limit kümenin değişmezlik

özelliği denir. Eğer bir yörünge bir limit küme ile ortak noktaya sahipse bu yörünge tamamen limit kümesi olur. Bu teklük teoreminden elde edilir. Yukarıdaki örnekte Γ_1 ve Γ_3 yörüngeleri ortak ω limitine asla ulaşamazlar. Son olarak, orijin ve birim çember kendi kendilerinin α ve ω limit kümeleridir. Aşağıda limit kümesinin ne denge noktası, ne çevri ne de boş küme olmadığı ilginç bir örnek vereceğiz.

Örnek 4.2.5

$$\begin{aligned}x' &= x(1-x-15y/4+2xy+y^2) \\y' &= y(-1+y+15x/4-2x^2-xy)\end{aligned}\quad (4.2.5)$$

düzlemsel otonom sistemini ele alalım. $x=0$ ise $x'=0$, $y=0$ ise $y'=0$, $x+y=1$ iken de $x'+y'=0$ olduğundan x ve y eksenleri ve $x+y=1$ doğrusu yörüngeler bileşimidir. Bu eksenler $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(0,1)$ de kesişirler ve bu noktalar (4.2.5) in denge noktalarıdır. Her bir kenar yörünge $t \rightarrow \pm\infty$ için bu denge noktalarına yakınsar. Üçgen, sonlu bir zaman diliminde elde edilememektedir. Dolayısıyla (4.2.5) sisteminin periyodik bir çevrisi olamaz.



Şekil 4.2.2

Üçgenin içerisinde $(1/4, 1/4)$ denge noktası vardır. Üçgen içerisinde sabit olmayan her yörünge α limiti olarak denge noktasını, ω limiti olarak da üçgeni verir. Bu örnekteki üçgensel yörünge çevri grafiğine bir örnektir. Aşağıda çevri grafiğin formal tanımını ve Poincare-Bendixson Alternatifini veriyoruz.

Tanım 4.2.6: Çevri Grafiği

Düzlemsel bir otonom sistemde bir çevri grafiği, her biri denge noktası olan N köşeye ve en az N kenara sahip bir faz-düzlem eğrisidir. α ve ω limit kümeleri bu köşeler olmaktadır. Grafik zaman artışıyla uyumlu bir şekilde yönlendirilmiştir. Örnek 4.2.5 in çevri grafiği üç köşeli, üç kenarlı ve saat yönünün tersine yönelmiştir. Çevri grafiği, köşelerinden daha fazla kenara sahip olabilir. Bir çevri grafiğinin, herhangi bir yörüngenin limit kümesi olması gerekmez.

Teorem 4.2.7 Poincaré-Bendixson Alternatifleri

$f(x, y)$ ve $g(x, y)$ xy -düzleminin herhangi bir R bölgesinde sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Γ , R de $x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ sisteminin pozitif sınırlı bir yörüngesi olsun. Γ nın Γ_T^+ parçası, yalnızca sonlu sayıda denge noktasını içeren bir dörtgenin içinde kalsın. Öyleyse, Γ nın omega limit kümesi aşağıdakilerden biridir.

- Denge noktası
- Çevri
- Çevri grafiği

Başka hiçbir alternatif yoktur. Benzer sonuç, negatif sınırlı bir yörüngenin alfa limit kümesi için de doğrudur.

Bu teoremin pratik açıdan önemli sonuçları vardır.

Teorem 4.2.8: Sınırsız Yörüngeler

$x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ sisteminin denge noktası yoksa bütün yörüngeler t arttığında ve azaldığında sınırsız olurlar.

İspat

Γ pozitif sınırlı bir yörünge olsun. Öyleyse; Poincare-Bendixson teoremine göre $\omega(\Gamma)$ bir çevri olmak zorundadır. Bölüm 4.1 den biliyoruz ki; bir çevrinin iç bölgesi en az bir denge noktası içermek zorundadır. Ama, sistemin denge noktası olmadığını kabul etmiştik. Bu çelişki, Γ nın pozitif sınırlı olamayacağı sonucuna götürür. Benzer olarak, Γ negatif sınırlı olamaz.

Teorem 4.2.9: Sınırlı Yörüngeler

$x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ sisteminin her sınırlı yörüngesinin α ve ω limit kümeleri bir denge noktası veya çevriye sahiptir.

Sınırlı bir yörünge için $+\infty$ ve $-\infty$ daki davranışlarını incelerken ilk olarak denge noktalarını kolayca belirleyebiliriz. Fakat çevrilerin ve çevri grafiklerinin bulunması genel olarak kolay değildir. Bunların bulunması için bazı teknikler belirleyelim.

Teorem 4.2.10: Poincare-Bendixson Çevri Testi

$\Gamma, x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ sisteminin pozitif sınırlı bir yörüngesi olsun. ω limit kümesi denge noktasını içermesin. O halde ω limit kümesi çevridir.

Örnek 4.2.11: Bir Çevrinin Yerini Belirlemek

$$\begin{aligned} x' &= y + x(1 - 2x^2 - y^2 / 2) \\ y' &= -x + y(1 - 2x^2 - y^2 / 2) \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

sistemi orijinde tek bir denge noktasına sahiptir. Eğer sistem bir çevriye sahipse bu çevri orijini içermek zorundadır. Orijin etrafında bir halka oluşturacağız ki, zamanla yörüngeler halkanın dış kısmını geçerek içeri girsinler. Halka içerisinde bir denge noktası olmadığı için Poincare-Bendixson çevri testi bize halka içerisine giren her Γ yörüngesinin omega limit kümesinin bir çevri oluşturduğunu söyler. Halkanın

istenilen özelliklerdeki çaplarını nasıl belirleyeceğiz? $V = x^2 + y^2$ olsun. V nin (4.2.6) sistemine göre türevi;

$$V' = 2xx' + 2yy' = 2(x^2 + y^2)(1 - 2x^2 - y^2/2)$$

olur.

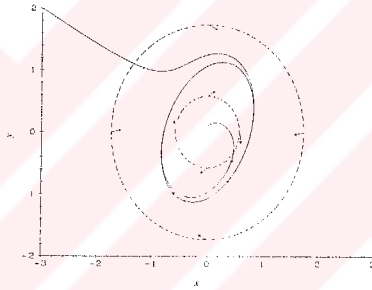
$x^2 + y^2 \leq 1/3$ ise $V' > 0$, $x^2 + y^2 \geq 3$ ise $V' < 0$ dir. Çünkü;

$$x^2 + y^2 \leq 1/3 \text{ ise } 1 - 2x^2 - y^2/2 > 1 - 3(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 3 \text{ ise } 1 - 2x^2 - y^2/2 < 1 - (x^2 + y^2)/3 \leq 0$$

dir.

Bu kaba bir tahmindir.



Şekil 4.2.3

Örnek 4.2.12: Türlerin Yarışı

$$x' = x(1 - x/10 - y/10) \quad y' = y(2 - x/20 - y/40) \quad (4.2.7)$$

sistemi, yarışan iki türün nüfus yoğunluğunu modeller. $(0,0)$, $(0,80)$, $(10,0)$ ve $(70,-60)$ denge noktaları, $x \geq 0, y \geq 0$ olan nüfus yoğunluğu bölgesinin sınırında veya dışında kalırlar. Nüfus yoğunluğu bölgesinin içinde çevri olamaz; hiçbir çevri o bölgeyi kesmez. İlk iddia, bölgenin içindeki bir çevrinin bir denge noktasını içermek zorunda olmasıdır. İkincisi, x ve y eksenlerinin yörüngelerin bileşimi olmasıdır. Hiçbir yörünge, diğer bölgelerden birinci bölgeye giremez.

Bendixson'ın çevri ve çevri grafiğinin olmadığını belirleyen aşağıdaki kriteri sıkça kullanılır.

Teorem 4.2.13: Bendixson'ın Negatif Kriteri

$x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ sisteminin vektör alanı $f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ nin diverjansı $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y$, xy -düzleminin R basit bağlantılı bölgesinde işaret değıştirmezse R de çevri ve çevri grafiğı yoktur.

İspat

Bir R basit bağlantılı bölgede $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y$ diverjansının pozitif olduğunu kabul edelim. Γ , bir çevri veya çevri grafiğı olsun ve Γ nin iç noktaları R de bulunsun. Bunun bizi çelişkiye götürdüğünü göreceğiz. $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y$ diverjansına, Γ yi ve içini içine alan bir S bölgesinde Green Teoremini uygulayalım.

$$0 < \iint_S (\partial f/\partial x + \partial g/\partial y) dx dy \quad (\text{Çünkü } S \text{ de } \partial f/\partial x + \partial g/\partial y > 0)$$

$$\oint (g dx - f dy) \quad (\text{Green Teoremi})$$

dir. Γ üzerinde $dx = f dt$ ve $dy = g dt$ dir. Çünkü, Γ bir yörünge veya yörüngeler bileşimidir. Buna göre, Γ nin tamamında

$$g dx - f dy = g f dt - f g dt = 0$$

dir.

$$0 < \oint (g dx - f dy) = 0$$

ifadesi bizi çelişkiye götürür.

Böylece, ne çevri ne de çevri grafiğı yoktur. Benzer ispat, diverjansın negatif olduğu durum için de aynıdır.

Bendixson'ın Negatif Kriterinin pratik bir uygulaması aşağıdadır.

Örnek 4.2.14: Sürtünme varsa çevri veya çevri grafiği yoktur.

$x'' = g(x, x')$ denklemleri genel sarkaç denklemleridir. Denklem aittir sistem;

$$x' = y \quad y' = g(x, y)$$

dir. Diverjansı ise $\partial(y)/\partial x + \partial(g(x, y))/\partial y = \partial g/\partial y$ dir. Böylece, eğer düzlemde $\partial g/\partial y$ sabit bir işarete sahipse çevri veya çevri grafiği olamaz. Örneğin; a ve b pozitif sabitler olmak üzere;

$$x' = y \quad y' = -a \sin x - by$$

sistemi sönümlü basit sarkaç modeller.

$-by$ terimi sarkacın hareketindeki sürtünmeyi temsil eder ve vektör alanının diverjansı negatif sabit olan $-b$ dir. Enerji dağılır ve çevri veya çevri grafiği meydana gelmez.

4.3. Dallar (Bifurcations)

Çevri ve denge noktaları düzlemsel otonom sistemlerin yörünge portrelerinin belirleyici karakteristik özelliğidir. Eğer sistemin vektör alanında küçük değişiklikler yapılırsa, yeni portrenin eskisine benzemesi beklenir. Çevri belki biraz büzülür, denge noktası biraz yer değiştirir, spiral gerginleşir veya büzülür. Fakat portrenin baskın hali kendini korur. Bu beklenti mantıklıdır, fakat doğru olması gerekmez. Gerçekten, hız ifadelerinde katsayılardaki küçük değişiklikler bir özelliğin kaybolması, aniden başka bir özelliğin ortaya çıkmasına neden olabilir. Örneğin; bir parametre değiştiğinde, denge noktası aniden ortaya çıkabilir ve ikinci bir denge noktası oluşabilir. Veya kararlı denge noktası kararsız olabilir ve çekici limit çevri itici olur. Bunlar önemli dallanma (bifurcation) örnekleridir. Bifurcation'ın kelime anlamı iki bransa ayırmaktır. Ama adi diferansiyel denklem kavramı olarak bifurcation kelimesi, bazı kritik parametre değerlerinde lincer olmayan sistemlerin yörüngelerinin yapısındaki dikkat çekici değişikliklerdir.

(a) Eyer-Düğüm, Transcritical, Diyapazon Dallanmaları

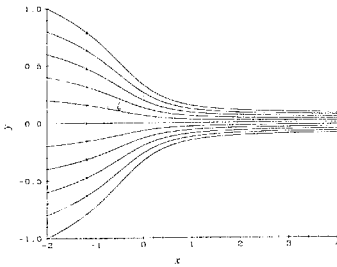
En basit dallanmalar, ε parametresinin değişmesiyle bir denge noktasının ortaya çıkması, kaybolması veya ayrılmasıdır.

Örnek 4.3.1: Eyer-Düğüm Dallanması

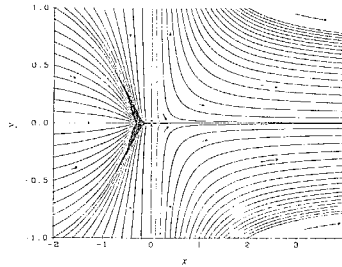
$$x' = \varepsilon + x^2 \quad y' = -y \quad (4.3.1)$$

sistemi, ε pozitif iken denge noktasına sahip olamaz. Eğer $\varepsilon = 0$ ise, orijinde aniden kararlı bir düğüm ve ilginç bir eyer noktası ortaya çıkar. Orijin, soldan bir düğüm noktası, sağdan ise eyer noktası formundadır. Bu durum eyer-düğüm noktasına örnektir. Bu bilinen bir denge noktası değildir. Çünkü 0, orijinde hız fonksiyonlarının Jakobiyen matrisinin özdeğeridir. Eğer ε negatif olarak azalır, orijin $(\pm\sqrt{-\varepsilon}, 0)$ noktasında iki tane denge noktasına ayrılır. Bunlardan biri kararsız eyer, diğeri kararlı düğümdür. Bu noktalar orijinin zıt taraflarında hareket ederler.

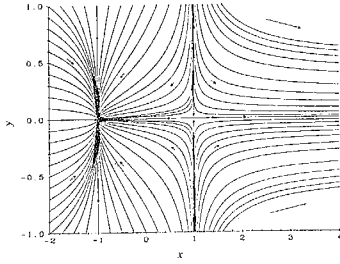
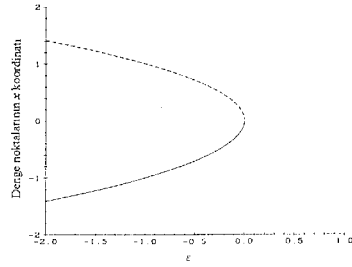
(4.3.1) sisteminin değişiminin karakteri, Şekil 4.3.4 de gösterilmiştir. Bu şekilde, ε parametresinin fonksiyonu olarak denge noktasının x koordinatları çizilmiştir. Parametre, dallanma (bifurcation) değerinin civarında değişirken sistemin yörüngelerinin gelişiminin tanımlı dallanma diyagramının (değişimin sergilenişi) bir örneğidir.



Şekil 4.3.1 $\varepsilon = 1$



Şekil 4.3.2 $\varepsilon = 0$

Şekil 4.3.3 $\varepsilon = -1$ 

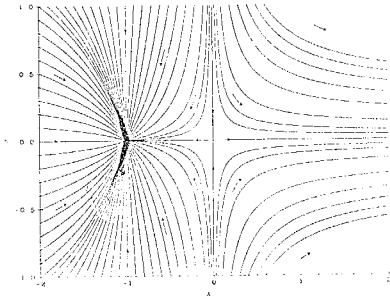
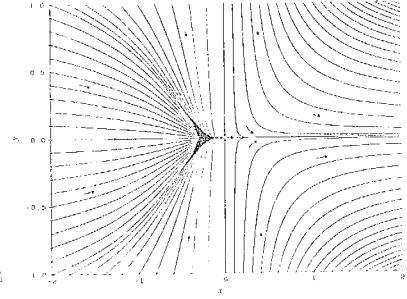
Şekil 4.3.4 Eyer-Düğüm Dallanma Diyagramı

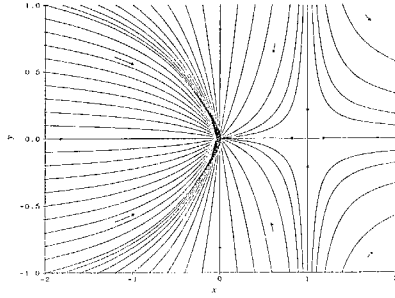
Örnek 4.3.2: Transcritical Dallanması

ε pozitif ise,

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon x + x^2 & y' &= -y \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

sistemi $(-\varepsilon, 0)$ da kararlı düğüm ve orijinde eyer noktasına sahiptir. $\varepsilon > 0$ a doğru azalır ise iki denge noktası orijinde bir eyer-düğüm e dönüşür. $\varepsilon < 0$ dan ayrılır ve negatif olursa $(-\varepsilon, 0)$ denge noktası ve orijinin yörtügesel karakterlerini değiştirir. $(-\varepsilon, 0)$ eyer noktası olur, orijinde kararlı olur. Bu transcritical dallanmasının örneğidir.

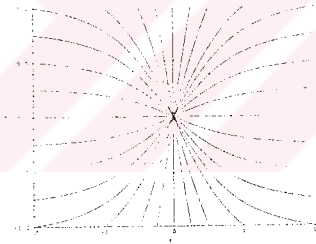
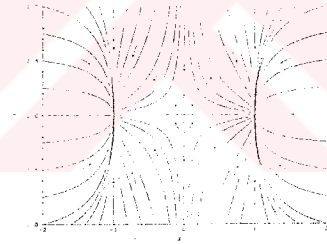
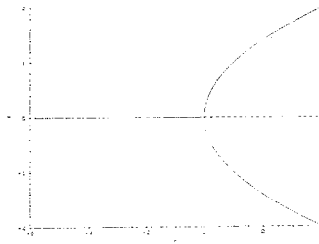
Şekil 4.3.5 $\varepsilon = 1$ Şekil 4.3.6 $\varepsilon = 0$

Şekil 4.3.7 $\varepsilon = -1$

Örnek 4.3.3: Diyapazon Dallanması

$$x' = \varepsilon x - x^3 \quad y' = -y \quad (4.3.3)$$

sistemi, $\varepsilon \leq 0$ ise orijinde asimptotik kararlı bir denge noktasına sahiptir. $(0,0)$ denge noktası, ε pozitif olduğunda $(\pm\sqrt{\varepsilon}, 0)$ ve $(0,0)$ şeklinde üç denge noktasına ayrılmaktadır. $(\pm\sqrt{\varepsilon}, 0)$ noktaları kararlı düğüm, orijin ise eyer noktasıdır.

Şekil 4.3.8 $\varepsilon = -1$ Şekil 4.3.9 $\varepsilon = 1$ 

Şekil 4.3.10 Diyapazon Dallanma Diyagramı

(b) Hopf Dallanması

Yukarıdaki örneklerde parametreye bağlı olarak denge noktalarında meydana gelen önemli değişiklikleri inceledik. Aşağıdaki örnekte parametre değiştiğinde çevrilerle oluşacak değişiklikleri inceleyelim.

Örnek 4.3.4

$$\begin{aligned}x' &= \varepsilon x + 5y - x(x^2 + y^2) \\y' &= -5x + \varepsilon y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}\quad (4.3.4)$$

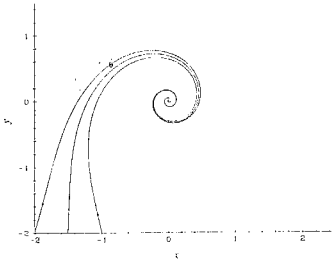
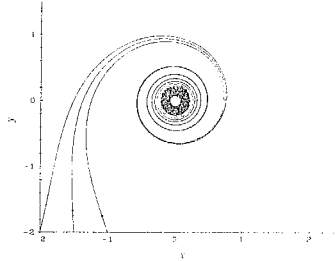
sisteminde, ε un bütün değerlerinde orijin sistemin denge noktasıdır. Orijindeki lineer yaklaşım ise,

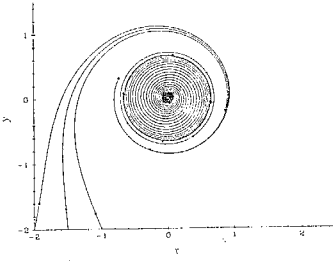
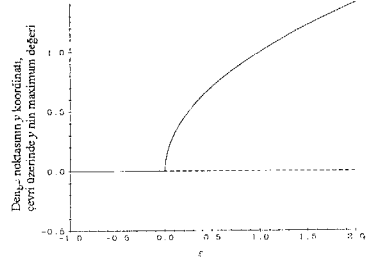
$$\begin{aligned}x' &= \varepsilon x + 5y \\y' &= -5x + \varepsilon y\end{aligned}\quad (4.3.5)$$

sistemidir. (4.3.5) sisteminin özdeğerleri $\varepsilon \pm 5i$ dir. $\varepsilon, 0$ boyunca artarsa orijin asimptotik kararlı odak noktasından nötral kararlı merkeze ve daha sonra da kararsız odağa geçer. ε negatif ise orijinin asimptotik kararlı odak olduğunu biliyoruz. ε pozitif ise kararsız olmaktadır. Görüldüğü gibi $\varepsilon, 0$ civarında değişim gösterdiğinde oldukça çarpıcı değişiklikler olmaktadır. $\varepsilon = 0$ da asimptotik kararlı odak olarak kalmaktadır. Fakat, spiraller içeriye doğru çok yavaş hareket etmektedir. ε pozitif olduğunda orijin kararlılığını kaybetmekte $\sqrt{\varepsilon}$ yarıçaplı bir çember olan çekici limit çevri oluşmaktadır. Bu sonuçlar polar hız denklemlerinde daha iyi gözükmektedir.

$$r' = r(\varepsilon - r^2) \quad \theta' = -5$$

Bu hadisenin dallanma diyagramı Şekil 4.3.14 de gösterilmektedir.

Şekil 4.3.11 $\varepsilon = -1$ Şekil 4.3.12 $\varepsilon = 0$

Şekil 4.3.13 $\varepsilon = 0.5$ 

Şekil 4.3.14 Hopf Dallanma Diyagramı:

Kararlı denge noktası veya çevri (düz çizgi), kararsız denge noktası (kesikli çizgi)

Bu ömlele verilen limit çevri oluşumunu daha genel olarak aşağıdaki sistemde verebiliriz.

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(\varepsilon)x + \beta(\varepsilon)y + P(x, y, \varepsilon) \\ y' &= -\beta(\varepsilon)x + \alpha(\varepsilon)y + Q(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Burada P ve Q , x ve y cinsinden, en az ikinci dereceden ve $(0,0,0)$ noktasını içeren R^3 deki bir bölgede x, y, ε cinsinden de iki kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(\varepsilon)$ ve $\beta(\varepsilon)$, $\varepsilon = 0$ içeren bir aralıkta sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

Bu şartlar altında orijin (4.3.6) sisteminin ayrık denge noktasıdır. (4.3.6) ya ait lineer sistemin orijindeki özdeğeri $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ dur. ε , 0 civarında arttığında, aniden (4.3.6) sisteminden bir çevri ortaya çıkar. Aşağıdaki sonuç Eberhard Hopf'a aittir.

Teorem 4.3.5: Hopf Dallanması

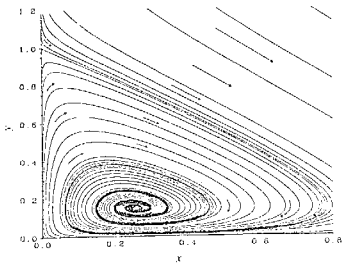
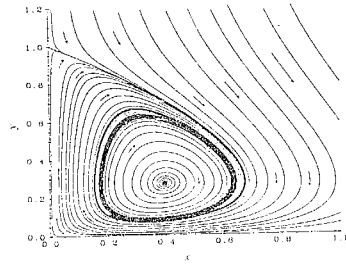
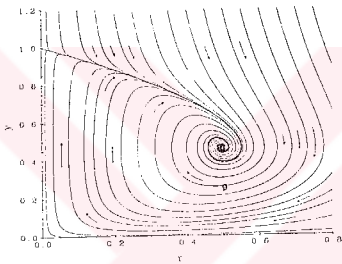
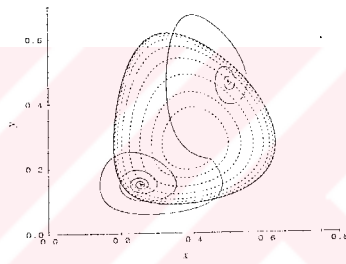
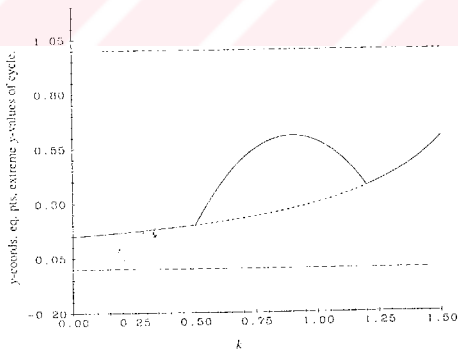
$\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta(0) \neq 0$ ve (4.3.6) sistemi $\varepsilon \leq 0$ için orijinde asimptotik kararlı olsun. ε , 0 civarında arttığında orijin kararlılığını kaybeder ve $A(0) = 0$ ve $A(\varepsilon)$ ε nun küçük değerleri ve $\varepsilon \geq 0$ için, ε nun sürekli ve artan fonksiyonu olmak üzere; $A(\varepsilon)$ genliğinde bir limit çevri oluşur.

Örnek 4.3.6: Hopf Dallanması ve Avcının Doyumu

Av bol olduğunda avcının iştahı doyuma ulaşmıştır ve av sayısındaki artışın, hız ifadelerindeki etkileşim (interaction) terimleri üzerindeki etkisi azalır.

$$\begin{aligned}x' &= (-a + by)/(c + ky)x \\y' &= (d - ey - fx)/(c + ky)y\end{aligned}\quad (4.3.7)$$

sistemi doymuş avcı ve kalabalık av türlerinin bir modelidir. x ve y sırasıyla avcı ve av miktarları, a, b, c, d, e, f ve k pozitif sabitlerdir. Katsayıların bazı değerlerinde Hopf Dallanması meydana gelir. Şekil 4.3.15-4.3.19 da, $a = 0.5, b = d = e = f = 1, c = 0.3$ ve k da dallanma parametresi olarak alınmıştır. k nın değeri ne kadar büyük olursa, y arttıkça avcının iştahı o kadar doyar. (satiates) k nın üç farklı değeri için x ve y yörüngelerinin zamanla nasıl davranacağı Şekil 4.3.15-4.3.18 de gösterilmiştir: $k = 0$ (doyurma etkisi yok), $k = 0.9$ ve $k = 1.35$. Birinci ve üçüncü durumda bütün yörüngeler asimptotik kararlı denge noktasına spiral olarak yaklaşırlar. İkinci durumda, yörüngeler çekici limit çevriye doğru yönelirler. k yaklaşık olarak 0.5 e doğru arttığında Hopf Dallanması ortaya çıkar. Denge noktasının kararlılığı bozulur ve çekici bir limit çevri meydana gelir. k arttığında ilk olarak çevrinin genişliği artar. $k = 0.85$ civarında küçülmeye başlar. Yaklaşık olarak $k = 1.2$ olduğunda denge noktası tekrar kararlı olur ve çevriyi içine çeker. k , 1.2 den itibaren arttığında yalnızca asimptotik kararlı denge noktası kalır. Şekil 4.3.20, bu özel sistem için dallanma diyagramını gösterir. Dikey eksen, üç denge noktasının her birinin y -koordinatını ve çevrinin y -genliğini temsil eder. (0,0) ve (0,1) denge noktaları (lineer olmayan ceyer noktaları) sürekli kararsızdırlar ve şekildedeki kesikli doğrularla gösterilmiştirler. Diğer denge noktası, $y = 0.15/(1 - 0.5k)$ ile verilen y -koordinatına sahiptir. k , 0 dan itibaren arttığında y -koordinatı artar. Denge noktası; $0 \leq k \leq 0.5$ ve $1.2 \leq k \leq 2$ için asimptotik kararlı, (şekil 4.3.20 deki kesiksiz eğri), $0.5 \leq k \leq 1.2$ için kararsız (şekil 4.3.20 deki kesikli eğri) olur. Çekici limit çevrinin varlığı da kesiksiz tümsekle gösterilmiştir.

Şekil 4.3.15 $k=0$ Şekil 4.3.16 $k=0.9$ Şekil 4.3.17 $k=1.35$ Şekil 4.3.18 $k=0.9, 1.35$ 

Şekil 4.3.19 Örnek 4.3.6'nin Dallanma Diyagramı

Duffing Denklemi

Bu kısımda,

$$mx'' + cx' - ax + bx^3 = A \cos \omega t \quad (4.3.8)$$

şeklinde ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin kalitatif analizini yapmak istiyoruz. Bu denklem, lineer olmayan bir yay üzerindeki kütlelerin titreşimlerini modeller. Burada $x(t)$ denge noktasından itibaren yer değiştirme miktarı, a pozitif veya negatif olan Hooke sabiti, ax kütleye etki eden kuvvet ve bx^3 de yayın lineer olmayan terimidir. $F(t) = A \cos \omega t$, kütleye etki eden dış kuvvettir. m kütle olmak üzere c , söndürücü katsayıdır. Böylece model sönümlü, lineer olmayan, periyodik olarak zorlanmış bir salınımı temsil etmektedir.

Bu denklem katsayılar uygun verilmediği zaman analitik olarak çözülmeyebilir. Fakat kalitatif analiz yaparak çözümlerin analizi yapılabilmektedir. $m = 1$ alınırsa, (4.3.8) denklemi, birinci mertebeden denklem sistemi olarak

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= ax - bx^3 - cy + A \cos \omega t \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

şeklinde yazılır. Sistemin faz yörüngelerinin parametrelere bağlı olarak salınımlı, periyodik, kaotik davranışlar sergilediklerini göstereceğiz.

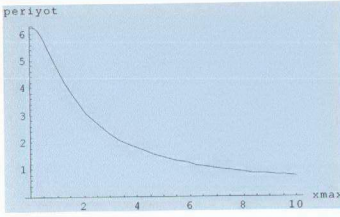
Katı yay modeli için sönümsüz Duffing denklemi,

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - x^3 \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

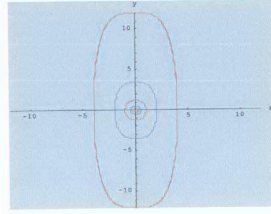
dır. (4.3.9) sistemi korunumlu bir sistem olup bütün yörüngeler, enerji integrali

$$E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

ile belirlenir. Kübik terimle temsil edilen geri çağırıcı kuvvetten dolayı periyodik çizimlerin, maksimum yer değiştirme genliği ile ters orantılı olduğu görülür. Aşağıdaki Şekil 4.3.20 (a) periyot-genlik ilişkisini vermektedir.



(a)



(b)

Şekil 4.3.20

(4.3.10) sisteminin çeşitli genliklerdeki periyodik çözümleri yukarıdaki Şekil 4.3.20 (b) de gösterilmiştir.

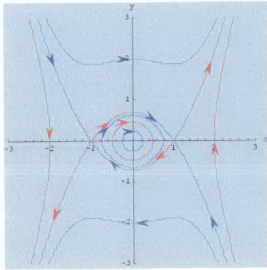
Yumuşak yay modeli için sönümsüz Duffing denklemi,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x - x^3 = 0 \quad (4.3.11)$$

dır. $x > 1$ olunca, yay kuvveti işaret değiştirir ve geri çağırıcı kuvvet olmaktan çıkar. En azından bazı çözümlerin periyodik çözüm veremeyeceğini bekliyoruz. Bu denklemin enerji integrali,

$$E = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4$$

dır. Küçük x ler için, denklem lineermiş gibi davranır ve periyodik çözümler oluşturur. x ler büyüyünce enerji pozitif tanımlılığını kaybeder. Sınırsız bir hareketi önleyemez. Şekil 4.3.21 de kararlı noktalar, periyodik çözüm bölgesi ve bunların dışındaki çözümler sergilenmiştir.

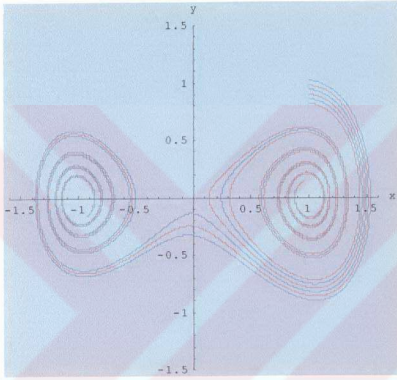


Şekil 4.3.21

(4.3.9) sisteminde $a = b = 1$, dış kuvvet $A = 0$ ve sönüm katsayısı $c = 0.15$ alınırsa,

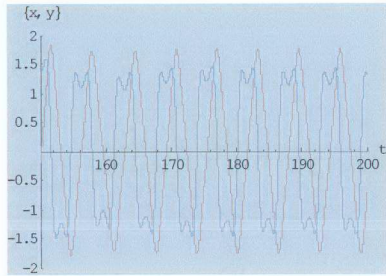
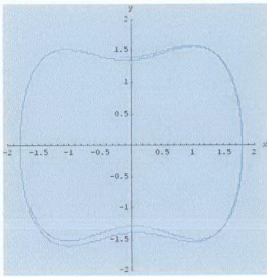
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x - x^3 - 0.15y \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

sistemi elde edilir. (4.3.12) denklemi, $x = \pm 1, y = 0$ asimptotik kararlı denge noktalarına ve orijinde kararsız eyer noktasına sahiptir. $x_0 = 1, y_0 = 0.82, 0.86, \dots, 1.02$ noktalarından başlayan yörüngelerin davranışları Şekil 4.3.22 de gösterilmiştir.



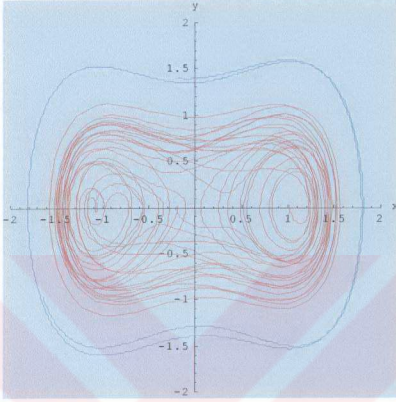
Şekil 4.3.22

$0.3 \cos t$ dış kuvvetini ilave edince ortaya çıkan ve $x = -0.2, y = 1.4$ den başlayan yörüngenin faz düzlemindeki periyodik yörüngesi ve zamana göre grafiği aşağıda Şekil 4.3.23 de gösterilmiştir.



Şekil 4.3.23

$c=0.15$ ve $0.3 \cos t$ nin etkisiyle $x_0 = 1, y_0 = 1$ başlangıç değerli yörüngenin kaotik davranışı ve $x = -0.2, y = 1.4$ noktasından başlayan periyodik salımlı yörünge aşağıda Şekil 4.3.24 de gösterilmiştir.

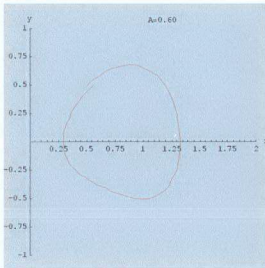


Şekil 4.3.24

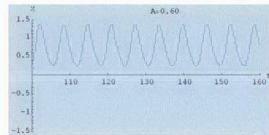
(4.3.9) denkleminde $a = b = c = \omega = 1$ alınırsa;

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x - x^3 - y + A \cos t \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

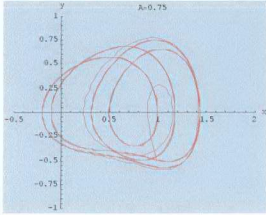
sistemi elde edilir. $A=0.60, 0.75$ ve 0.80 olması halinde (4.3.13) ün faz yörüngeleri ve zaman grafikleri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



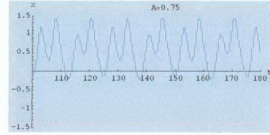
Şekil 4.3.25 $A=0.60$ iken $x=0.5, y=0.5$ noktasından başlayan yörünge



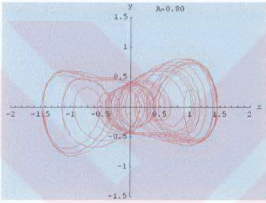
Şekil 4.3.26 $x=0.5$ den başlayan yörüngenin zaman grafiği



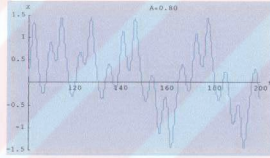
Şekil 4.3.27 $A=75$ iken $x=1, y=-0.5$ noktasından başlayan yörünge



Şekil 4.3.28 $x=1$ den başlayan yörünge zaman grafiği



Şekil 4.3.29 $A=80$ iken $x=1, y=-0.5$ noktasından başlayan yörünge



Şekil 4.3.30 $x=1$ den başlayan yörünge zaman grafiği

BÖLÜM 5. SONUÇLAR ve TARTIŞMALAR

Diferansiyel denklemleri çözmeden, çözümlerin özelliklerinin incelenmesi-kalitatif analiz günümüzde hızla gelişen alanlardan biridir. Temeli Henri Poincare (1854-1912) tarafından atılan bu süreç, Diferansiyel Topoloji, Lee Cebiri, Felaketler (Kadastrof) Teorisi ile yakından ilgilidir. Bu çalışmada bu teorinin clemanter kavramları, daha çok geometrik yöntemlerle, zaman zaman da teorik ifadelerle desteklenerek anlatılmıştır. Dinamik sistemlerin kararlılık analizinin temel konuları, daha yüksek bir seviyeye hazırlamak amacıyla verilmiştir.

Bu çalışmada, ilk olarak, iki boyutlu $x' = Ax$ şeklindeki lineer sistemin denge çözümlerinin kararlılık özellikleri formal olarak özetlenmiştir. Asimptotik kararlılık, kararlılık ve kararsızlık tanımları örnekleriyle gösterilmiştir. Daha sonra lineerimsi sistemlerin denge noktalarının kararlılığı, lineer sistemlere indirgenerek analiz edilmiştir ve buna ilaveten Liapunov'un ikinci metodu tartışılmıştır. Bu metotla denge noktalarının kararlılık veya kararsızlığı diferansiyel denklem sisteminin çözümüne gerek duyulmadan yardımcı bir fonksiyonun kurulmasıyla yapılmaktadır. Bu metot, tüm lineer olmayan sistemler için de geçerlidir ve konservatif sistemler için bazı fiziksel prensiplerin genelleştirilmesi esasına dayanır.

Otonom dinamik sistemlerin denge hallerinden en basiti, sistemin hareketsiz haline karşılık gelen durumdur. Bunun dışında da değişik denge halleri mevcuttur. Dinamik denklemlerin periyodik çözümlerine karşılık gelen durum uzayı içerisindeki çevriler başka tip denge halidir. Bunlardan da önemlisi çekici çevrilerdir.

Bir diğer önemli kavram da duyarlılık analizidir. Sistemin parametrelerinin değişiminin durum uzayında oluşturduğu değişiklikler bifurcation bölümünde incelenmektedir. Bifurcation ın kelime anlamı, yoldaki çatallanmadır. Yol ile kastedilen parametrelere bağlı çözümlerin yörüngeleridir. Bifurcation Teorisinin

anlamı, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin parametrelere bağımlılığının çalışılmasıdır. Parametreler kritik değerler civarındayken sistem uzayında önemli değişimler olmaktadır. Asimptotik kararlı denge noktasının kararlılığı bozulabilmekte ve bir çekici çevriye nedon olmaktadır, bir çevrinin periyodu aniden katlanmaktadır veya çevri periyodik karakterini kaybederek kaotik davranmaktadır. Tabiki bunların analizi pratik ve teorik açıdan büyük önem taşımaktadır. Denge noktaları, limit çevriler, bifurcation-faz düzlemi değişimi ve kaotik davranışlar her türlü dinamik sistemde incelenmesi gereken önemli konulardır. Lorenz sistemi kaotik kavramını açıklayan en güzel örnektir. Fakat mühendisler, ekonomistler, matematikçiler, sosyal bilimciler... kendi sahalarında bu kavramla ilgilenmektedirler, yeni yeni teoriler ortaya atılmaktadır ve çeşitli araştırmalar yapılmaktadır. Henüz uyumlu bir disiplin oluşmamıştır.

Çok küçük sayıda diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri yapılabildiği için kalitatif teori önemini arttırmakta, teorik ve pratik yönden son derece önemli analizler yapma fırsatı vermektedir. Bu çalışmada bazı problemler kendi başına bu teori çerçevesinde analiz edilerek başka problemlere aktarılabilecek tarzda örneklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] ROSS, S.L., "Differential Equations", 3th. Ed., 1984.
- [2] BOYCE, W.E., DI PRIMA, R.C., "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", 7th. Ed., 2001.
- [3] BORELLI, R.L., COLEMAN, C.S., "Differential Equations, A Modeling Perspective", Pre. Ed., 1996.
- [4] EDWARDS, C.H., PENNEY, D.E., "Differential Equations and Boundary Value Problems, Computing and Modeling", 2nd. Ed., 2000.
- [5] HASANOV, E., UZGOREN, G., BUYUKAKSOY, A., "Diferansiyel Denklemler Teorisi", 1. Basım, 2002.
- [6] GLENDINNING, P., "Stability, Instability, and Chaos", Oxford, Blackwell Scientific Publications, 1990.
- [7] LASALLE, J., and LEFSCHETZ, S., "Stability by Liapunov's Direct Method with Applications", New York, Academic Press. 1961.
- [8] BRAUER, F., and NOHEL, J., "Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations", New York, Benjamin, 1969, New York. Dover, 1989.
- [9] GUCKENHEIMER, J. C., and HOLMES, P., "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", New York/Berlin, Springer -Verlag, 1983.
- [10] DRAZIN, P. G., "Nonlinear Systems", Cambridge University Press, 1992.
- [11] MAY, R. M., "Stability and Complexity in Model Ecosystems", Princeton University Press, 1973.
- [12] SPARROW, C., "The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors", New York/Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [13] CLARK, A., "A Dynamical Systems Package for Mathematica", Version 10.71 Revision, June 21, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Selma ÇAYLAN, 1977 yılında Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adapazarı'nda tamamladı. 1997 yılında Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başlayıp 2001 yılında mezun oldu. Aralık 2001 de Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Programına başladı. Halen görevlendirme ile Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.