T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^n 'DE SİMETRİK HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLERİN BLASCHKE İNVARYANTLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Soley ERSOY

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı :Yrd. Doç. Dr. Murat TOSUN

MAYIS 2004

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^n'DE SİMETRİK HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLERİN BLASCHKE İNVARYANTLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Soley ERSOY

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı :Yrd. Doç. Dr. Murat TOSUN

Bu tez 27 / 05 / 2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Murat TOSUN	Prof. Dr. Metin BAŞARIR	Doç. Dr. İbrahim OKUR
Jüri Başkanı	Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaya beni yönlendirip, bilgi ve tecrübesi ile destek veren, çalışmanın her safhasında yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer Hocam Yrd. Doç. Dr. Murat TOSUN'a saygı ve teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Tez çalışmam sırasında sorularıma sabırla cevap vererek bana yardımcı olan Araştırma Görevlisi Mehmet Ali GÜNGÖR'e teşekkür ederim. Ayrıca Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarımıza ve yakın desteklerini gördüğüm mesai arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında küçük kızımıza bakarak bana zaman yaratan ve hep destek veren değerli eşim Yunus Emre ERSOY'a teşekkür ederim.

Soley ERSOY

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

E^n	: $n-$boyutlu Öklid uzayı
$SO(n)$	: Determinantı +1 olan ortogonal matrislerin cümlesi
R_1^n	: $(1xn)-$boyutlu sütun matrislerinin cümlesi
A^{-1}	: A matrisinin inversi
A^t	: A matrisinin transpozu
ϕ	: Regle yüzey
α	: Diferensiyellenebilir eğri
$E_k(t)$	: $k-$boyutlu doğrultman uzayı
$T_p(\phi)$	: Tanjant uzayı
$A(t)$	: Asimptotik demet
$T(t)$	: Teğetsel demet
$K_{(k-m)}(t)$	: $(k-m)-$boyutlu sırt uzayı
$Z_{(k-m)}(t)$	: $(k-m)-$boyutlu merkez uzayı
Ω	: $(k-m+1)-$boyutlu merkez regle yüzeyi
ρ_i	: $i-$inci asli dağılma parametresi
D	: Toplam dağılma parametresi
ρ	: Dağılma parametresi
b	: 2-regle yüzeyin Blaschke invaryantı
b_i	: $(k+1)-$boyutlu regle yüzeyin $i-$inci asli Blaschke invaryantı
B	: $(k+1)-$boyutlu regle yüzeyin Blaschke invaryantı

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Regle Yüzey, Simetrik Homotetik Hareket, Blaschke İnvaryantı.

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde E^n, $n-$boyutlu Öklid Uzayında $1-$parametreli hareketler ve $1-$parametreli homotetik hareketleri tanıtılmış, bunlarla ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde ilk olarak E^3, $3-$boyutlu Öklid Uzayında regle yüzeyler tanıtılmıştır. Akabinde E^n, $n-$boyutlu Öklid Uzayında $(k+1)-$boyutlu regle yüzeyler tanıtılıp, bu regle yüzeylerin asimptotik ve teğetsel demetleri ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Bununla birlikte E^n'de $(k+1)-$boyutlu regle yüzeyin $i-$inci asli dağılma parametresi, toplam dağılma parametresi ve Blaschke invaryantları ile ilgili tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde E^n'de homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzey çiftleri ile ilgili kavramlar tanıtılmıştır.

Dördüncü bölüm çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında simetrik homotetik hareketler altında $(k+1)-$boyutlu regle yüzey çiftlerinin Blaschke invaryantları ile ilgili teorem ve sonuçlar verilmiştir.

ON THE BLASCHKE INVARIANTS OF THE PAIR OF THE GENERALIZED RULED SURFACES UNDER THE SYMMETRIC HOMOTHETIC MOTION IN E^n

SUMMARY

Keywords: Euclidean Space, Ruled Surface, Symmetric Homothetic Motion, Blaschke Invariant.

This work is prepared as four chapters. In the first chapter one-parameter motion and one-parameter homothetic motion are defined in E^n and their definitions and theorems are given.

In the second chapter of this work we have given the ruled surfaces in three dimensional Euclidean space, E^3. After that (k+1)-dimensional ruled surfaces in $n-$dimensional Euclidean space are explained and the definitions and the theorems related to the asymptotic and tangential bundles of these ruled surfaces are given. Furthermore, definitions related to the $i.$th principal distribution parameter of $(k+1)-$dimensional ruled surface, total distribution parameter and Blaschke invariants are also given.

In the third chapter of the thesis the pair of (k+1)- dimensional ruled surfaces under homothetic motion in E^n are investigated and related phenomena are expressed.

Fourth chapter of this work is the original contribution to the science of mathematics. In this chapter we have given the theorems and the results of the Blaschke invariants of (k+1)-dimensional ruled surface pairs under symmetric homothetic motion in $n-$dimensional Euclidean space, E^n.

BÖLÜM 1. E^n $n-$BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİR PARAMETRELİ HAREKETLER

1.1. E^n'de 1-Parametreli Hareketler

Tanım 1.1.1.

$I \subset IR$ sıfırı ihtiva eden bir aralık olsun. $t \in I$ için $A(t)$ pozitif ortogonal matris ve $C(t)$'de bir sütun matrisi olmak üzere, elemanları

$$f_t = \begin{bmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

ile verilen f_t cümlesine E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında 1-parametreli hareketi adı verilir. Burada $A(t)$ ve $C(t)$'nin elemanları t'nin diferensiyellenebilir fonksiyonlardır [5]. E^n'nin 1-parametreli hareketlerinde $\overline{E}$ hareketli, E'de sabit uzay olarak kabul edilecektir.

Bir $\overline{x} \in E^n$ noktası için

$$f_t(\overline{x}) = x = A(t)\overline{x} + C(t) \tag{1.1.2}$$

dir. Çalışmamız boyunca $A(t)$ ve $C(t)$ yerine genellikle A ve C kısaltmaları kullanılacaktır.

$\overline{x} \in \overline{E}$ sabit noktasının f_t altındaki yörüngesi E sabit uzayında bir eğridir. Bu x_t eğrisinin teğet vektör alanı $\dot{x} = \dfrac{dx_t}{dt} = \dfrac{df_t(\overline{x})}{dt}$ dir.

$\bar{x} = f_t^{-1}(x_t)$ olduğundan dolayı f_t'nin inversi

$$f^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Bu son denklemden df/dt türevi hesaplanarak,

$$\frac{df}{dt} f^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{A} A^{-1} & -\dot{A} A^{-1} C + \dot{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ifadesi bulunur. Eğer $\dot{A} A^{-1} = B_t$ ve $-B_t C + \dot{C} = V_t$ alınırsa

$$\frac{df}{dt} f^{-1} = \begin{bmatrix} B_t & V_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

elde edilir ve buradan da

$$\dot{x} = B_t x + V_t \tag{1.1.4}$$

eşitliği bulunur.

Tanım 1.1.2.

(1.1.3) eşitliği ile verilen harekete t anındaki ani hareket denir. Ani harekette $B_t = V_t = 0$ ise bu harekete ani duraklama, $B_t = 0$ ve $V_t \neq 0$ ise bu harekete ani öteleme adı verilir [11].

Tanım 1.1.3.

$\dot{x}\big|_{x_0} = 0$ olacak şekilde bir x_0 noktası varsa ani harekete ani dönme ve x_0 noktasına da ani dönme merkezi denir.

$A(t) \in SO(n)$ olduğundan dolayı $B = \dot{A} A^{-1}$ matrisinin bir anti-simetrik matris olduğu kolayca görülebilir.

(1.1.1) ile verilen denklemin t'ye göre türevini alınırsa

$$\dot{x} = \dot{A}\bar{x} + A\dot{\bar{x}} + \dot{C} \quad , \quad \bar{x} \in \bar{E} \quad , \quad x \in E \tag{1.1.5}$$

bulunur.

Eğer $x \in E$ ve $\bar{x} \in \bar{E}$ sabit noktalar ise bu noktalara pol noktaları adı verilir. Pol noktaları için $\dot{x} = 0$ ve $\dot{\bar{x}} = 0$ olacağından dolayı

$$\dot{A}\bar{x} + \dot{C} = 0 \tag{1.1.6}$$

dır. Eğer A regüler bir matris ise (1.1.2) ve (1.1.6) bağıntılarından

$$\bar{x} = -\left(\dot{A}\right)^{-1} \dot{C} \tag{1.1.7}$$

$$x = -\left(\dot{A} A^{-1}\right)\dot{C} + C \tag{1.1.8}$$

elde edilir.

Tanım 1.1.4.
(1.1.7) ve (1.1.8) denklemini sağlayan noktaların geometrik yerlerine, sırasıyla, hareketli ve sabit pol eğrileri denir.

(1.1.5) ve (1.1.6) bağıntıları göz önüne alınırsa pol eğrilerinin hız vektörleri için

$$\dot{x} = A\dot{\bar{x}} \tag{1.1.9}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece pol eğrilerinin yay uzunlukları hesaplanırsa

$$\int \left\| \dot{x} \right\| dt = \int \left\| A \dot{\bar{x}} \right\| dt$$

veya

$$\int \left\| \dot{x} \right\| dt = \int \left\| \dot{\bar{x}} \right\| dt \quad , \quad A(t) \in SO(n)$$

$$s = \bar{s}$$

bulunur. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.1.5.

E^n 'de (1.1.1) denklemi verilen 1-parametreli hareket boyunca pol eğrileri birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

1.2. E^n 'de 1-Parametreli Homotetik Hareketler

Tanım 1.2.1.

$I \subset IR$ sıfırı ihtiva eden bir aralık olsun. $t \in I$ için $A(t) \in SO(n)$, $h(t) = h(t) I_n$ ve $C(t) \in IR_1^n$ olmak üzere,

$$F_t = \begin{bmatrix} h(t)A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h(t) \neq 0 \tag{1.2.1}$$

şeklinde tanımlı F_t cümlesine E^n'nin 1-parametreli homotetik hareketi denir; burada $A(t)$, $h(t)$ ve $C(t)$'nin elemanları t'nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır [8].

$h = hI_n$ olduğundan $h^{-1} = (1/h) I_n$ ve $h^t = h$'dır. Eğer $hA = S$ alınırsa

$$S^{-1} = h^{-1} A^{-1} = (1/h) A^t$$

olur. Böylece $\bar{x} \in E^n$ için (1.2.1) denklemi göz önüne alınırsa

$$F_t(\bar{x}) = x = S\bar{x} + C \tag{1.2.2}$$

dır. Bu son denklemden ise

$$\dot{x} = \dot{S}\bar{x} + S\dot{\bar{x}} + \dot{C} \tag{1.2.3}$$

elde edilir.

Tanım 1.2.2.

(1.2.3) eşitliğindeki $\dot{x}$'ya mutlak hız, $\dot{S}\bar{x} + \dot{C}$'ya sürüklenme hızı $S\dot{\bar{x}}$'ya ise relatif hız denir [8].

$x \in E$ ve $\bar{x} \in \bar{E}$ sabit noktaları için $\dot{x} = 0$ ve $\dot{\bar{x}} = 0$ olacağından dolayı (1.2.3) denkleminden

$$\dot{S}\bar{x} + \dot{C} = 0 \tag{1.2.4}$$

olur. Bu denklemin çözümü $\dot{S}$ matrisinin regüler olup olmamasına bağlıdır.

Teorem 1.2.3.

E^n'de $x = S\bar{x} + C$ denklemi ile verilen 1-parametreli homotetik harekette $\dot{S}$ matrisinin determinantı $\forall t \in I$ için sıfırdan farklıdır [8].

O halde $\dot{S}$ regüler olduğundan dolayı (1.2.4) denkleminin tek bir çözümü vardır.

Tanım 1.2.4.

E^n'de bir harekette hareketin Jakobien matrisinin türevinin determinantı sıfırdan farklı ise bu harekete regülerdir denir.

Böylece Teorem 1.2.3. ve Tanım1.2.4.'den dolayı aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 1.2.5.

E^n'nin homotetik hareketleri $\forall n$ için regüler hareketlerdir.

Sonuç 1.2.6.

E^n'nin bir homotetik hareketinin $\forall n$-anında, hareketli ve sabit uzayında bir tek ortak pol nokta çifti vardır.

(1.2.4) denklemi göz önüne alınırsa $\dot{S}$ regüler olduğundan dolayı

$$\bar{x} = -\left(\dot{S}\right)^{-1} \dot{C} \; , \; \left(\det \dot{S} \neq 0\right) \tag{1.2.5}$$

$$x = -\left(\dot{S}\, S^{-1}\right)\dot{C} + C \tag{1.2.6}$$

sonucu elde edilir. (1.2.5) denklemini sağlayan noktaların geometrik yeri homotetik harekete iştirak eden hareketli pol eğrisi ve (1.2.6) denklemini sağlayan noktaların geometrik yeri de homotetik harekete iştirak eden sabit pol eğrisidir.

(1.2.4) denklemini (1.2.2) de yerine koyarsak, hareketli ve sabit pol eğrilerinin hızları arasında

$$\dot{x} = S\,\dot{\bar{x}} \tag{1.2.7}$$

bağıntısı elde edilir.

Buna göre her iki eğrinin yay elementleri hesaplanırsa

$$\left\|\dot{x}\right\| dt = \left\|S\,\dot{\bar{x}}\right\| dt$$

$$\left\|\dot{x}\right\|dt = |h|\left\|A\dot{\bar{x}}\right\|dt \quad , \quad S = hA$$

$$\left\|\dot{x}\right\|dt = |h|\left\|\dot{\bar{x}}\right\|dt$$

$$ds = |h|d\bar{s}$$

olduğu görülür.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.2.7.

E^n'nin 1-parametreli homotetik hareketi boyunca pol eğrileri (hareketli ve sabit) birbirleri üzerine kayarak yuvarlanır.

F_t'nin inversi ve $\frac{dF}{dt}$ türevi, sırasıyla,

$$F_t^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{dF}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{S} & \dot{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\frac{dF}{dt}F_t^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{S}S^{-1} & -\dot{S}S^{-1}C + \dot{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ifadesi bulunur. $\dot{S}S^{-1} = H_t$ ve $-H_tC + \dot{C} = U_t$ alınırsa

$$\frac{dF}{dt}F_t^{-1} = \begin{bmatrix} H_t & U_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. $\bar{x} = F_t^{-1}(x) = S^{-1}(x - C)$'yi (1.2.2) denkleminde yerine yazar ve $\dot{\bar{x}} = 0$ alırsak

$$\dot{x} = H_t(x - C) + \dot{C} \tag{1.2.8}$$

bulunur.

Teorem 1.2.8.
(1.2.8) ifadesindeki H_t matrisinin determinantı $\forall t \in I$ ve $\forall n$ için sıfırdan farklıdır [2].

BÖLÜM 2. REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

2.1. E^3'te Regle Yüzeyler

Tanım 2.1.1.

Bir $\phi \subset E^3$ yüzeyi verildiğinde $\forall p \in \phi$ noktasında E^3'ün tamamen ϕ'de kalan bir doğrusu varsa, ϕ'ye bir regle yüzey ve $p \in \phi$ noktasından geçen, ϕ'de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir [9].

Regle yüzeyin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} r : I &\to E^3 \\ t &\to r(t) \end{aligned}$$

eğrisi seçilir ve bu eğri regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak adlandırılır, (Şekil2.1). ϕ regle yüzeyinin r dayanak eğrisinin $r(t)$ noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişken bir nokta

$$\begin{aligned} \beta : IR &\to \phi \\ v &\to \beta(v) = r(t) + va(t) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

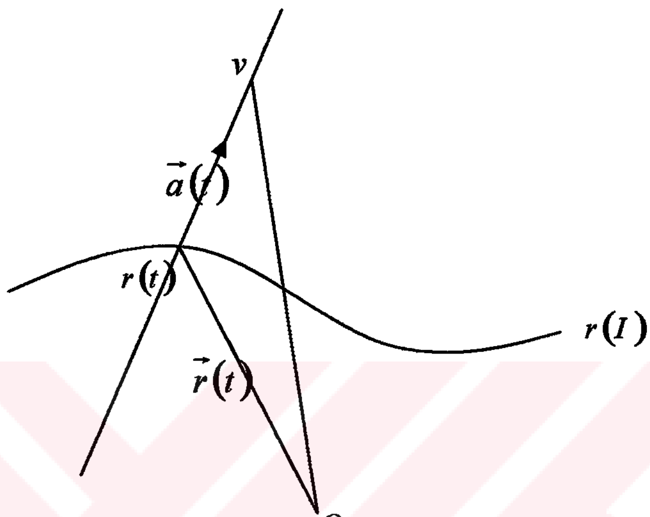
$$a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$$

birim doğrultman vektörünü gösterir.

E^3 uzayında regle yüzey

$$\varphi : IxIR \to E^3$$
$$(t,v) \to \varphi(t,v)$$

dönüşümü ile belirtilir.



Şekil2.1

Tanım 2.1.2.
Bir

$$\varphi : IxIR \to E^3$$
$$(t,v) \to \varphi(t,v) = r(t) + va(t)$$

regle yüzeyi, $\forall t \in I$ için

$$\varphi(t+2\pi, v) = \varphi(t,v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzey kapalıdır denir [9].

Tanım 2.1.3.
Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir [9].

Tanım 2.1.4.

Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanının ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir [9].

Tanım 2.1.5.

Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir [9].

$\varphi(s,u)$ regle yüzeyinin merkez noktasının η yer vektörü; dayanak eğrisinin $r(s)$ yer vektörü, $a(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan u uzaklığı cinsinden

$$\eta(s,u)=r(s)+ua(s)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.2. E^n'de $(k+1)-$boyutlu Regle Yüzeyler

E^n'de diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned}\alpha : I &\to E^n\\ t &\to \alpha(t)\end{aligned}$$

eğrisi verilsin. Her $\alpha(t)$ noktasında tanımlanmış ortonormal vektör alan sistemi $\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}$ olsun. Bu sistem $T_{\alpha(t)}(E^n)$ uzayının k-boyutlu bir alt uzayını gerer, bu uzayı $E_k(t)$ ile gösterirsek

$$E_k(t)=Sp\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}\subset T_{\alpha(t)}(E^n) \qquad (2.2.1)$$

dir.

Tanım 2.2.1.

$E_k(t)$ altuzayı α eğrisi boyunca hareket ederken E^n'de bir $(k+1)$-boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye E^n'de $(k+1)$-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey denir ve ϕ ile gösterilir [4].

Tanım 2.2.2.

$E_k(t)$ altuzayına, ϕ'nin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı ve α eğrisine ise ϕ'nin dayanak eğrisi denir. ϕ için parametrizasyon

$$\phi(t,u_1,...,u_k)=\alpha(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i e_i(t) \tag{2.2.2}$$

dir. ϕ'nin t'ye ve u_i'ye göre türevleri alınırsa

$$\phi_t=\dot{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i\dot{e}_i(t)$$

$$\phi_{u_i}=e_i \quad , \quad 1\leq i\leq k$$

olur.

Bütün tez boyunca

$$\left\{\dot{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i\dot{e}_i(t), e_1,...,e_k\right\}$$

sistemi lineer bağımsız olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.2.3.

$$Sp\left\{e_1(t),...,e_k(t),\dot{e}_1(t),...,\dot{e}_k(t)\right\} \tag{2.2.3}$$

alt vektör uzayına, ϕ'nin $E_k(t)$'ye göre asimptotik demeti denir ve $A(t)$ ile gösterilir [4]. $boyA(t)=k+m$, $0\leq m\leq k$ kabul edilirse $E_k(t)$'yi kapsayan $A(t)$ asimptotik demetinin

$$\{e_1(t),...,e_k(t),a_{k+1}(t),...,a_{k+m}(t)\} \tag{2.2.4}$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir.

Teorem 2.2.4.
E^n'de $(k+1)$-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey ϕ olsun. $\forall t\in I$ için $E_k(t)$ doğrultman uzayının öyle bir $\{e_1,e_2,...,e_k\}$ bazı bulunabilir ki, bu baz için

$$\dot{e}_i=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}e_j+\kappa_i a_{k+i}\ ,\quad 1\leq i\leq m\ ,\quad \kappa_i>0 \tag{2.2.5}$$

$$\dot{e}_i=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}ej\qquad ,\quad m\leq i\leq k \tag{2.2.6}$$

dir [4].

O halde $\{e_1,e_2,...,e_k\}$ bazı, ϕ'nin $A(t)$ asimptotik demetinin (2.2.4) ile verilen bazını tek türlü olarak belirler.

Tanım 2.2.5. (Teorem2.2.4.deki) $\{e_1(t),e_2(t),...,e_k(t)\}$ bazına $E_k(t)$'nin doğal taşıyıcı bazı veya ϕ'nin asli çatısı denir [5].

$\kappa_1>\kappa_2>...>\kappa_m>0$ olmak üzere $\{e_1(t),e_2(t),...,e_k(t)\}$ doğal taşıyıcı bazı, işaretine kadar bellidir.

ϕ regle yüzeyinin sabit bir p noktasını göz önüne alalım.

$$p=\phi(t_1,u_1,...,u_k)$$

ise p noktasındaki teğet uzayının bir bazı

$$\left\{\dot{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i\,\dot{e}_i(t), e_1,\dots,e_k\right\} \tag{2.2.7}$$

olur. Çünkü (2.2.7) sisteminin gerdiği uzay $T_p(\phi)$ uzayıdır. Burada t sabit tutulup u_i, $1 \le i \le k$, parametreleri değiştirilirse p noktası $E_k(t)$ uzayının noktalarını tarar.

Tanım 2.2.6.

$$Sp\left\{e_1(t),\dots,e_k(t),\dot{e}_1(t),\dots,\dot{e}_k(t),\dot{\alpha}\right\} \subset \bigcup_{p\in\phi} T_p(\phi) \tag{2.2.8}$$

uzayına ϕ'nin $E_k(t)$'ye göre teğetsel demeti denir ve $T(t)$ ile gösterilir [4].

Burada $boyA(t) = k+m$, $0 \le m \le k$ olduğundan

$$k+m \le boyT(t) \le k+m+1 \tag{2.2.9}$$

dır. $T(t)$'nin boyutu için bu iki ihtimali ayrı ayrı inceleyelim.

Kabul edelim ki $\forall t \in I$ için $boyT(t) = k+m$ olsun. Bu durumda ϕ'nin α dayanak eğrisinin hız vektörü $A(t)$ uzayının içindedir, yani

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i + \sum_{j=1}^{k}\eta_j a_{k+j} \tag{2.2.10}$$

dır. ϕ'nin herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisi, $\alpha(t)$ eğrisine bağlı olarak

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k}u_i(t)e_i(t) \tag{2.2.11}$$

biçiminde yazılabilir.

Buradan

$$\dot{P}(t) = \dot{\alpha} + \sum_{i=1}^{k} \left(\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i \right)$$

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i + \sum_{j=1}^{k} \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^{k} \left(\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i \right)$$

elde edilir.

Son eşitlik (Teorem2.2.4)'ten

$$\dot{P}(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \left(\xi_i + \dot{u}_i \right) e_i + \sum_{j=1}^{k} \eta_j a_{k+j}}_{*} + \sum_{i=1}^{m} u_i \dot{e}_i + \sum_{i=m+1}^{k} u_i \dot{e}_i$$

bulunur ve (2.2.5) ve (2.2.6) denklemleri göz önüne alındığında

$$\dot{P}(t) = * + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \right) + \sum_{i=m+1}^{k} u_i \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} ej \right)$$

$$\dot{P}(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\xi_j + u_j + \sum_{i=1}^{m} u_i \alpha_{ij} + \sum_{i=m+1}^{k} u_i \alpha_{ij} \right) e_i + \sum_{s=1}^{m} \eta_s a_{k+s} + \sum_{s=1}^{m} u_s \kappa_s a_{k+s}$$

elde edilir.

$$\kappa_s u_s + \eta_s = 0 \quad , \quad 1 \le s \le m \qquad (2.2.12)$$

olacak biçimde $P(t)$ noktaları için $\dot{P}(t)$ hız vektörleri $E_k(t)$ içindedir. κ_s, $1 \le s \le m$ değerleri sıfırdan farklı olduklarından (2.2.12) sisteminin çözümü tektir, yani u_s, $1 \le s \le m$ skalarları tek olarak hesaplanabilir.

Tanım 2.2.7.

(2.2.11) ifadesinde görüldüğü gibi $P(t)$ noktasını u_s, $1 \leq s \leq m$ vektörleri temsil etmektedir. Burada bu bileşenlerden $(k-m)$ tanesi keyfi olarak seçilebilir. Belli bir t için (2.2.11) ve (2.2.12) eşitliklerini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $E_k(t)$ içinde $(k-m)-$boyutlu bir altuzayı doldururlar. Bu uzaya ϕ'nin $E_k(t)$ içindeki sırt uzayı denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.2.8.

K_{k-m} sırt uzayı, doğrultman uzayı olarak α eğrisi boyunca ϕ tarafından ihtiva edilen bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye ϕ'nin $(k-m+1)-$boyutlu sırt regle yüzeyi denir [5].

Şimdi $\forall t \in I$ için $boyT(t) = k+m+1$ olsun. Bu durumda

$$\dot{\alpha} \notin Sp\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m}\}$$

dir.

Bu halde $T(t)$'nin

$$\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m},a_{k+m+1}\} \tag{2.2.13}$$

şeklinde ortonormal bazı bulunabilir. $\eta_{m+1} \neq 0$ olmak üzere,

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i + \sum_{j=1}^{k} \eta_j a_{k+j} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \tag{2.2.14}$$

dir. Herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisinin (2.2.11)deki ifadesinde t'ye göre türev alınıp, türev denkleminde (2.2.14) ifadesi yerine konulduktan sonra (Teorem 2.2.4) uygulanarak $\dot{P}(t)$ türev vektörü için

$$\dot{P}(t)=\sum_{j=1}^{k}\left(\xi_j+u_j+\sum_{i=1}^{m}u_i\alpha_{ij}+\sum_{i=m+1}^{k}u_i\alpha_{ij}\right)e_i+\sum_{s=1}^{m}(\kappa_s u_s+\eta_s)a_{k+s}+\eta_{m+1}a_{k+m+1}$$

bulunur. Böylece

$$\kappa_s u_s+\eta_s=0 \quad , \quad 1\leq s\leq m \tag{2.2.15}$$

olacak biçimde $P(t)$ noktaları için $\dot{P}(t)$ hız vektörleri $Sp\left\{e_1,...,e_k,\dot{\alpha}\right\}$'da yatarlar. Yukarıdaki denklem sistemi (2.2.12) ile aynıdır.

Tanım 2.2.9.

$1\leq s\leq m$ için elde edilen $m-$tane $\kappa_s u_s+\eta_s=0$ lineer denklemleri ile tanımlanan $P(t)$ noktalarının meydana getirdiği $(k-m)-$boyutlu uzaya ϕ'nin $E_k(t)$ içindeki merkez uzayı denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.2.10.

$Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı, doğrultman uzayı olarak α eğrisi boyunca ϕ tarafından ihtiva edilen bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye ϕ'nin $(k-m+1)-$boyutlu merkez regle yüzeyi denir ve Ω ile gösterilir [5].

Tanım 2.2.11.

ϕ, $(k+1)$-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyine ait ϕ'nin $(k-m+1)-$boyutlu Ω merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi r olmak üzere, Ω'nın doğrultman uzayına toplam olarak dik olan bir doğrultman uzayı, r'yi dayanak eğrisi kabul ederek bir regle yüzey meydana getirir. Doğrultman uzayı $F_m(t)$ ile gösterilen bu yüzeye ϕ'nin $(m+1)-$boyutlu asli regle yüzeyi denir ve Λ ile gösterilir [6]. Burada

$$boyF_m(t)+boyZ_{k-m}(t)=boyE_k(t) \tag{2.2.16}$$

dir.

Ayrıca

$$F_m(t) = Sp\{e_1, \ldots, e_m\} \ ,$$
$$Z_{k-m}(t) = Sp\{e_{m+1}, \ldots, e_k\}, \tag{2.2.17}$$
$$E_k(t) = Sp\{e_1, \ldots, e_k\}$$

olduğu açıktır.

$(k+1)-$boyutlu ϕ genelleştirilmiş regle yüzeyine ait α dayanak eğrisi için

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \tag{2.2.18}$$

olduğundan aşağıdaki iki önerme doğrudur.

★ ϕ'nin bir $Z_{k-m}(t_0)$ merkez uzayının olması için gerek ve yeter şart $\eta_{m+1} \neq 0$ olmasıdır.

★ ϕ'nin bir $K_{k-m}(t_0)$ sırt uzayının olması için gerek ve yeter şart $\eta_{m+1} = 0$ olmasıdır.

O halde, sırt veya merkez uzaydan hangisi varsa ona ait regle yüzey için bir parametrizasyon

$$\Omega(t, u_{m+1}, \ldots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k-m} u_{m+i} e_{m+i}(t) \tag{2.2.19}$$

olacaktır.

$m = k$ ise

$$boyK_{k-m}(t) = boyZ_{k-m}(t) = 0$$

dır ve bu durumda sırt regle yüzeyi ϕ'nin sırt eğrisine dejenere olur; merkez regle yüzeyi ise ϕ'nin striksiyon çizgisine dejenere olur. Buradan şunu ifade edebiliriz.

Sırt regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler E^3'ün tanjant yüzeylerine (striksiyon çizgisiz yüzey) genelleşir, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler ise E^3'ün striksiyon çizgili regle yüzeylerine genelleşir.

Tanım 2.2.12.

Sırt regle yüzeyli ϕ genelleştirilmiş regle yüzeyine ait bir $\{e_1,\dots,e_k,a_{k+1},\dots,a_{k+m}\}$ ortonormal bazını IR^n'nin bir $\{e_1,\dots,e_k,a_{k+1},\dots,a_{k+m},a_{k+m+1},\dots,a_n\}$ ortonormal bazına tamamlayalım. Burada $\{a_{k+m+1},\dots,a_n\}$ bazına tamamlayıcı baz adı verilir. Eğer ϕ merkez regle yüzeyli ise tamamlayıcı ortonormal baz $\{a_{k+m+2},\dots,a_n\}$'dir [5].

Burada

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{k+i} &= -\kappa_i e_i + \sum_{j=1}^{m} \tau_{ij} a_{k+j} + \omega_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \le i \le m, \\
\dot{a}_{k+m+1} &= -\sum_{j=1}^{m} \omega_j a_{k+j} - + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda}, \\
\dot{a}_{k+m+s} &= \sum_{j=1}^{m} \omega_{sj} a_{k+j} + \beta_s a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{s\lambda} a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \le s \le n-k-m,
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

dir [4].

Tanım 2.2.13.

ϕ, E^n'de merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzey olsun. Parametrik gösterimi,

$$\phi_i(t,u) = \alpha(t) + u e_i(t) \quad , \quad (t,u) \in IxIR \tag{2.2.21}$$

olan ϕ_i regle yüzeylerine ϕ'nin 2-boyutlu asli regle yüzeyleri denir [7].

ϕ_i regle yüzeylerinin doğrultman uzayları bir boyutludur. h_i ile gösterilen bu uzay $h_i = Sp\{e_i\}$'dir ve $E_k(t)$ içindedir. Burada $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ olduğundan $i \neq j$ için $\langle h_i, h_j \rangle = 0$'dır. Bu şekilde tanımlı h_i doğrultmanlarına asli ışın adı verilir.

Tanım 2.2.14.

E^n'de $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey ϕ için parametrizasyon

$$\phi(t, u_1, ..., u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i e_i(t)$$

olsun. Eğer bir p pozitif tamsayısı için

$$\phi(t+p, u_1, ..., u_k) = \phi(t, u_1, ..., u_k)$$

ise ϕ'ye kapalıdır denir; burada, p en küçük peryodu gösterir. Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri de kapalıdır [7].

Tanım 2.2.15.

E^n'de $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey ϕ olsun. Eğer

1. $\forall t \in IR$ için ϕ'nin $A(t)$ asimptotik demetlerinin boyutu $k+m$ sabittir.

2. Bir $I' = \{t | 0 \leq t \leq p\} \subset I$ kapalı aralığı üzerinde ϕ'nin p peryotlu bir asli çatısı mevcut ise ϕ'nin regle yüzeyine basit kapalıdır denir [7].

Basit kapalı bir ϕ regle yüzeyin h_i doğrultmanları α kapalı dayanak eğrisi boyunca oluşan 2-boyutlu ϕ_i, $1 \leq i \leq m$ asli regle yüzeyleri de kapalı olurlar.

Tanım 2.2.16.

ϕ, $(k+1)-$boyutlu regle yüzeyinin α dayanak eğrisi için

$$\dot{\alpha}=\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i+\eta_{m+1}a_{k+m+1}$$

olmak üzere, $\eta_{m+1}\neq 0$ ise

$$\rho_i=\frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i} \quad , \quad 1\leq i\leq m \tag{2.2.22}$$

ifadesine ϕ'nin $i-$inci asli dağılma parametresi denir [5].

Tanım 2.2.17.

E^n'de $(k+1)-$boyutlu ϕ regle yüzeyin $i-$inci asli dağıma parametresi ρ_i olmak üzere

$$D=\prod_{i=1}^{m}\rho_i \tag{2.2.23}$$

ifadesi toplam dağılma parametresi olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.2.18.

E^n'de $(k+1)-$boyutlu ϕ regle yüzeyin dağılma parametreleri $\rho_1,\rho_2,...,\rho_m$ olmak üzere

$$\rho=\sqrt[m]{\rho_1.\rho_2...\rho_m} \tag{2.2.24}$$

ifadesi ϕ dağılma parametresi olarak isimlendirilir [3].

Tanım2.2.19.

E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında silindirik olmayan $(m>0)$, dayanak eğrisi $\alpha(t)$ ve doğrultman uzayı $E(t)=Sp\{e(t)\}$ olan 2-regle yüzey için

$$b=\frac{\xi}{\kappa} \tag{2.2.25}$$

değerine ϕ regle yüzeyinin Blaschke invaryantı adı verilir [10].

Tanım 2.2.20.
$\phi \subset E^n$, $(k+1)$-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey verilsin. ϕ'nin asimptotik demetinin boyutu $(k+m)$ olmak üzere;

$$b_i = \frac{\xi_i}{\kappa_i}, \qquad 1 \leq i \leq \mathrm{m} \tag{2.2.26}$$

değeri ϕ'nin $i-$inci asli Blaschke invaryantı olarak isimlendirilir [10].

Böylece asli Blaschke invaryantlarından yararlanarak $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyin Blaschke invaryantı aşağıdaki şekilde tanımlanır;

Tanım 2.2.21.
$\phi \subset E^n$, $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyin asli Blaschke invaryantları $b_1, b_2, \ldots, b_m$ olmak üzere

$$B = \sqrt[m]{|b_1 \ldots b_m|} \tag{2.2.27}$$

değerine ϕ regle yüzeyinin Blaschke invaryantı adı verilir [10].

Tanım 2.2.22.
$m = k$ olmak üzere

$$boyZ_{k-m}(t) = 0$$

dır ve bu durumda merkez regle yüzeyi ϕ'nin striksiyon çizgisine dejenere olur. $1-$boyutlu altuzay $E(t) = Sp\{e(t)\} \subset E_k(t)$ tarafından oluşturulan 2-regle yüzeyin Blaschke invaryantı, $e(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu e_\nu(t)$, $\theta_\nu =$ sabit, $\|e\| = 1$ iken,

$$b = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{k} \xi_\nu \cos\theta_\nu}{\sqrt{\sum\limits_{\mu=1}^{k}\left[\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu \alpha_{\nu\mu}\right)^2 + \left(\cos\theta_\mu \kappa_\mu\right)^2\right]}} \tag{2.2.28}$$

olarak tanımlanır [10].

BÖLÜM 3. E^n'DE HOMOTETİK HAREKETLERE İŞTİRAK EDEN REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ

E^n'de bir homotetik hareket

$$F_t(\overline{x}) = x = hA\overline{x} + C, \quad A(t) \in SO(n),\ h(t) = h(t)I_n,\ C(t) \in IR_1^n$$

olmak üzere ve $hA = S$ için

$$x = S\overline{x} + C$$

$$\dot{x} = \dot{S}\overline{x} + S\dot{\overline{x}} + \dot{C}$$

$$\dot{x} = \dot{S}S^{-1}(x - C) + \dot{C},\ \dot{\overline{x}} = 0,\ \overline{x} = S^{-1}(x - C)$$

ifadesi bulunur. Eğer $\dot{S}S^{-1} = H_t$ ise

$$\dot{x} = H_t(x - C) + \dot{C},\ H = H(t) = H_t$$

dir. $\forall t \in I$ için $H_t = H(t)$ matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan daima bir tek pol noktası vardır. Bu noktayı, $\overline{E}$ hareketli uzayında $\overline{Q}$ ve E sabit uzayında Q ile gösterelim. $\overline{Q}$ ve Q, sırası ile, hareketli ve sabit uzaylarda $\overline{\alpha}$ ve α hareketli ve sabit pol eğrilerini çizerler. $\forall t \in I$ için böyle pol eğrileri daima vardır. Bu eğriler pol noktaları üzerinde kayarak yuvarlanırlar.

Pol noktalarda bu eğrilerin hızları sıfırdır; yani, $\dot{x} = 0$ ve $\dot{\overline{x}} = 0$'dır. O halde

$$\dot{S}\bar{x}+\dot{C}=0,$$

$$\bar{\alpha}=-\left(\dot{S}\right)^{-1}\dot{C} \tag{3.1.1}$$

$$\alpha=-\left(\dot{S}S^{-1}\right)\dot{C}+C \tag{3.1.2}$$

olur. Böylece, sırasıyla, hareketli ve sabit pol eğrileri (3.1.1) ve (3.1.2) ile ifade edilirler.

Şimdi her $\bar{\alpha}(t)$ noktasına bağlanmış $\left\{\bar{e}_1(t),\bar{e}_2(t),...,\bar{e}_k(t)\right\}$ ortonormal vektör alan sistemini göz önüne alalım.

Tanım 3.1.1.
$x=S\bar{x}+C$ homotetik hareketi altında $\left\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_k\right\}$ sistemi $\bar{\alpha}$ eğrisi boyunca hareket ederken bir $\bar{E}$ hareketli uzayında $(k+1)-$boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye E^n'de homotetik hareketin $(k+1)-$boyutlu hareketli genelleştirilmiş regle yüzey denir ve $\bar{\phi}$ ile gösterilir.

$\bar{\phi}$ için bir parametrizasyon

$$\bar{\phi}\left(\bar{t},\bar{u}_1,...,\bar{u}_k\right)=\bar{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{u}_i\bar{e}_i(t) \tag{3.1.3}$$

dir.

$$S\bar{e}_i(t)=\varepsilon_i(t) \quad , \quad 1\leq i\leq k \tag{3.1.4}$$

alarak α sabit pol eğrisinin $\alpha(t)=S\bar{\alpha}(t)+C(t)$ noktasına bağlanmış bir

$$\left\{\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),...,\varepsilon_k(t)\right\} \tag{3.1.5}$$

ortogonal sistemini göz önüne alalım.

Tanım 3.1.2.

Homotetik hareketi altında $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k\}$ sistemi α eğrisi boyunca hareket ederken E sabit uzayında bir $(k+1)-$boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye E^n'de homotetik hareketin $(k+1)-$boyutlu sabit genelleştirilmiş regle yüzeyi denir.

Teorem 3.1.3.

$x = S\bar{x} + C$ homotetik hareketi altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ regle yüzeyleri dayanak eğrileri boyunca, birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanır [2].

İspat:

$\bar{\phi}$ ve ϕ'nin dayanak eğrileri pol eğrileri olarak seçilirse hareketli ve sabit pol eğrilerinin hızları arasında

$$\dot{\alpha} = S\dot{\bar{\alpha}}$$

bağıntısı vardır. $\bar{\alpha}$ ve α nın yay elementleri hesaplanırsa

$$\left\|\dot{\alpha}\right\| dt = \left\|S\dot{\bar{\alpha}}\right\| dt$$

$$\left\|\dot{\alpha}\right\| dt = |h| \left\|A\dot{\bar{\alpha}}\right\| dt \quad , \quad S = hA$$

$$\left\|\dot{\alpha}\right\| dt = |h| \left\|\dot{\bar{\alpha}}\right\| dt$$

$$ds = |h| d\bar{s}$$

bulunur. Bu $\bar{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin dayanak eğrileri boyunca, birbirleri üzerinde kayarak yuvarlandığı anlamına gelir.

Tanım 3.1.4.

$\bar{\phi}$ ve ϕ, sırasıyla, hareketli ve sabit genelleştirilmiş regle yüzeylerinin birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanmasını sağlayan $x = S\bar{x} + C$ hareketine E^n'nin k. mertebeden homotetik hareketi denir ve

$$
\begin{aligned}
F &: E^n \to E^n \\
&\quad \bar{x} \to F(\bar{x}) = S\bar{x} + C \\
F_* &: T_{\bar{x}}(E^n) \to T_{\bar{x}}(E^n) \\
&\quad \bar{e_i} \to F_*(\bar{e_i}) = S\bar{e_i} = \varepsilon_i \quad , \quad 1 \le i \le k
\end{aligned}
$$

bağıntıları ile ifade edilir. O halde

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = h^2 \delta_{ij} \quad , \quad 1 \le i, j \le k \tag{3.1.6}$$

dir. Böylece $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\}$ ortogonal sistemini

$$e_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|} = \frac{\varepsilon_i}{h}, \; 1 \le i \le k$$

alarak ortonormalleştirebiliriz ve ϕ sabit genelleştirilmiş regle yüzeyine ait $E_k(t)$'nin doğal taşıyıcı bazı olarak $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ ortonormal sistemi alabiliriz. $E_k(t)$ altuzayı, ϕ'nin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı ve α eğrisine de ϕ'nin dayanak eğrisi olan ϕ için parametrizasyon

$$\phi(t, u_1, \ldots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i e_i(t) \tag{3.1.7}$$

dir.

$\bar{\phi}$'nin $\bar{E}_k(t)$'ye göre asimptotik demeti $\bar{A}(t)$'nin $\{\bar{e}_1,...,\bar{e}_k,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_{k+m}\}$ ortonormal bazı için

$$S\bar{a}_{k+i} = \tilde{A}_{k+i} \quad , \quad 1 \le i \le m$$

olmak üzere ϕ'nin $E_k(t)$'ye göre asimptotik demeti $A(t)$'nin

$$\{e_1,...,e_k,a_{k+1},...,a_{k+m}\} \tag{3.1.8}$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir. Burada

$$a_{k+i} = \frac{\tilde{A}_{k+i}}{h} \quad , \quad 1 \le i \le m \tag{3.1.9}$$

dir.

$\bar{\phi}$'nin $\bar{T}(t)$ teğetsel demetinin boyutunun $k+m+1$ olması halinde $\bar{T}(t)$'nin bir $\{\bar{e}_1,...,\bar{e}_k,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_{k+m+1}\}$ ortonormal bazı için ϕ'nin $T(t)$ teğetsel demetine ait bir ortonormal baz $\{e_1,...,e_k,a_{k+1},...,a_{k+m+1}\}$'dir. Burada

$$a_{k+m+1} = \frac{\tilde{A}_{k+m+1}}{h} \quad , \quad \tilde{A}_{k+m+1} = S\bar{a}_{k+m+1} \tag{3.1.20}$$

dir.

Teorem 3.1.5.

E^n'de k. mertebeden homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen hareketli ve sabit regle yüzeyler, sırasıyla, $\bar{\phi}$ ve ϕ olsun. $\bar{\phi}$ ve ϕ'nin asli çatılarını oluşturan vektörler arasındaki bağıntı

$$A\bar{e}_i = e_i \quad , \quad 1 \le i \le k \tag{3.1.21}$$

dir [2].

Teorem 3.1.6.

E^n'de k.mertebeden homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ, sırasıyla, hareketli ve sabit regle yüzeylerin asli çatılarını oluşturan vektörlerin türevlerine ait

$$\dot{\overline{e}}_i = \sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha}_{ij}\overline{e}_j + \overline{\kappa}_i \overline{a}_{k+i} \quad , \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad , \quad 1 \le i \le m$$

eşitliklerindeki katsayılar arasında

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{S}S^{-1} + \overline{\alpha}_{ii} = \left(\dot{h}/h\right) + \alpha_{ii} & , \ i = j \\ \overline{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} & , \ i \ne j \end{array}\right\} , \quad 1 \le i \le m \tag{3.1.22}$$

$$\overline{\kappa}_i = \kappa_i \qquad , \quad 1 \le i \le m \tag{3.1.23}$$

bağıntılar vardır [2].

Teorem 3.1.7.

E^n'de k.mertebeden homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ, sırasıyla, hareketli ve sabit regle yüzeylerinin dayanak eğrileri sırasıyla $\overline{\alpha}$ ve α olmak üzere

$$\dot{\overline{\alpha}} = \sum_{i=1}^{k} \overline{\xi}_i \overline{e}_i + \sum_{j=1}^{k} \overline{\eta}_j \overline{a}_{k+j} \ \text{ ve } \ \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i + \sum_{j=1}^{k} \eta_j a_{k+j}$$

ifadelerindeki katsayılar arasında,

$$h\overline{\xi}_i = \xi_i \quad , \quad 1 \le i \le k \tag{3.1.24}$$

$$\left|h\overline{\eta}_{m+1}\right| = \left|\eta_{m+1}\right| \tag{3.1.25}$$

bağıntıları vardır [2].

Teorem 3.1.8.

E^n'de k.mertebeden homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ, sırasıyla hareketli ve sabit regle yüzeylerinin i – inci dağılma parametreleri sırasıyla $\overline{\rho_i}$ ve ρ_i olmak üzere bu dağılma parametreleri arasında

$$|\rho_i| = |h||\overline{\rho_i}| \quad , \quad 1 \leq i \leq m \tag{3.1.26}$$

bağıntısı vardır [2].

Teorem 3.1.9.

E^n'de k.mertebeden homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ, sırasıyla hareketli ve sabit regle yüzeylerinin $\overline{\rho}$ ve ρ dağılma parametreleri arasında

$$\rho = |h|\overline{\rho} \tag{3.1.27}$$

bağıntısı vardır [2].

BÖLÜM 4. E^n'DE SİMETRİK HOMOTETİK HAREKETLERE İŞTİRAK EDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ ve ONLARIN BLASCHKE İNVARYANTLARI

Tanım 4.1.1.

E^n'de k. mertebeden homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen hareketli ve sabit regle yüzeyler, sırasıyla, $\bar{\phi}$ ve ϕ olsun. $\bar{\phi}$'nin doğrultman uzayı $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_k\}$ ve $S\bar{e}_i = \varepsilon_i$, $1 \le i \le k$, olmak üzere, ϕ'nin doğrultman uzayı da $E_k(t) = Sp\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k\}$ olsun. $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_k\}$ ortonormal sistemi ve $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k\}$ ortogonal sistemi homotetik hareket altında, birbirlerine

$$S\bar{e}_i = -\varepsilon_i \quad , \quad \left(\dot{S} S^{-1}\right)\varepsilon_i = 0 \quad , \quad 1 \le i \le k \tag{4.1.1}$$

ifadesi ile karşılık geliyorsa bu homotetik harekete E^n nin k. mertebeden simetrik homotetik hareketi adı verilir [1].

Çalışmamız boyunca k. mertebeden simetrik homotetik hareketler için $h(t)$ homotetik oranı her $t \in I \subset IR$ için pozitif kabul edilecektir.

Teorem 4.1.2.

E^n'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ regle yüzeyleri dayanak eğrileri boyunca, birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanır [1].

İspat:

$\bar{\phi}$ ve ϕ'nin dayanak eğrileri pol eğrileri olarak seçilirse hareket altında hareketli ve sabit pol eğrilerinin hızları arasında

$$\dot{\alpha} = S\dot{\bar{\alpha}} \tag{4.1.2}$$

bağıntısı vardır. $\bar{\alpha}$ ve α'nin yay uzunlukları sırasıyla $\bar{s}$ ve s olmak üzere

$$\left\|\dot{\alpha}\right\|dt = \left\|S\dot{\bar{\alpha}}\right\|dt,$$

$$\left\|\dot{\alpha}\right\|dt = |h|\left\|A\dot{\bar{\alpha}}\right\|dt \quad , \quad S = hA \quad , \quad A \in SO(n),$$

$$\left\|\dot{\alpha}\right\|dt = |h|\left\|\dot{\bar{\alpha}}\right\|dt,$$

$$ds = |h|d\bar{s}$$

bulunur.Bu $\bar{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin simetrik homotetik hareket altında birbirleri üzerinde kayarak yuvarlandığı anlamına gelir.

Teorem 4.1.3.

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerin doğrultman uzayları, sırasıyla, $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = Sp\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k\}$ olmak üzere

$$S\dot{\bar{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i \quad , \quad 1 \le i \le k \tag{4.1.3}$$

dir [1].

İspat:

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerin doğrultman uzaylarının vektörleri birbirine

$$\overline{S}e_i = -\varepsilon_i \quad , \quad \left(\dot{S}\,S^{-1}\right)\varepsilon_i = 0 \quad , \quad 1 \le i \le k$$

ifadesi ile karşılık gelir. Bu bağıntının türevi alındığında

$$\dot{S}\,\overline{e}_i + S\,\dot{\overline{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i$$

elde edilir. $\overline{e}_i = S^{-1}\varepsilon_i$ olduğundan

$$\dot{S}\,S^{-1}\varepsilon_i + S\,\dot{\overline{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i$$

bulunur. $\left(\dot{S}\,S^{-1}\right)\varepsilon_i = 0$ eşitliği göz önüne alındığında

$$S\,\dot{\overline{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i \quad , \quad 1 \le i \le k$$

bağıntısı elde edilir.

Sonuç 4.1.4.

E^n de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerin doğrultman uzayları $\overline{E}_k(t) = Sp\left\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k\right\}$ ve $E_k(t) = Sp\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\}$'ye göre asimptotik demetleri, sırasıyla,

$$\overline{A}(t) = Sp\left\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k, \dot{\overline{e}}_1, \ldots, \dot{\overline{e}}_k\right\}$$

ve

$$A(t) = Sp\left\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_1, \ldots, \dot{\varepsilon}_k\right\}$$

ise bu uzayın vektörleri birbirine

$S\overline{e}_i = -\varepsilon_i,$

$S\dot{\overline{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i \quad , \quad 1 \le i \le k$

bağıntıları ile karşılık gelirler [1].

Kabul edelim ki $boy\overline{A}(t) = k + m, \quad 0 \le m \le k$ olsun. $\overline{A}(t)$ asimptotik demetinin $\dot{\overline{e}}_1, \dot{\overline{e}}_2, \ldots, \dot{\overline{e}}_k$ vektörlerinin lineer bağımsız olan m tanesi $\dot{\overline{e}}_{k+1}, \ldots, \dot{\overline{e}}_{k+m}$ olarak sıralanırsa $\overline{A}(t)$ asimptotik demetinin bir bazı

$$\left\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k, \dot{\overline{e}}_{k+1}, \ldots, \dot{\overline{e}}_{k+m}\right\} \quad , \quad 0 \le m \le k \tag{4.1.4}$$

olarak bulunur.

Benzer düşünce ile $A(t)$ asimptotik demetinin bir bazı da

$$\left\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_{k+1}, \ldots, \dot{\varepsilon}_{k+m}\right\} \quad , \quad 0 \le m \le k \tag{4.1.5}$$

dır [1].

$\overline{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerinin $\overline{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin sırasıyla (4.1.4) ve (4.1.5) ile verilen bazları ortonormalleştirebiliriz. O halde $\overline{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerinin, sırasıyla, $\overline{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetleri için

$$\left\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k, \overline{a}_{k+1}, \ldots, \overline{a}_{k+m}\right\} \tag{4.1.6}$$

ve

$$\left\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\right\} \tag{4.1.7}$$

ortonormal bazları bulunur.

Teorem 4.1.5.

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortonormal bazları, sırasıyla, $\{\bar{e}_1,...,\bar{e}_k,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_{k+m}\}$ ve $\{e_1,...,e_k,a_{k+1},...,a_{k+m}\}$ ise bu bazlar birbirine

$$\begin{aligned} S\bar{e}_i &= -he_i \quad , \ 1 \le i \le k, \\ S\bar{a}_{k+j} &= -ha_{k+j} \quad , \ 1 \le j \le m \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

bağıntıları ile karşılık gelirler, [1].

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerinin teğetsel demetleri, sırasıyla, $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ ise

$$\bar{T}(t) = Sp\left\{\bar{e}_1,...,\bar{e}_k,\dot{\bar{e}}_1,...,\dot{\bar{e}}_k,\dot{\bar{\alpha}}\right\}$$

ve

$$T(t) = Sp\left\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k,\dot{\varepsilon}_1,...,\dot{\varepsilon}_k,\dot{\alpha}\right\}$$

dır [1].

Burada $boy\bar{T}(t) = k+m$ ise $\bar{T}(t)$'nin bir bazı $\left\{\bar{e}_1,...,\bar{e}_k,\dot{\bar{e}}_{k+1},...,\dot{\bar{e}}_{k+m}\right\}$ ve $boyT(t) = k+m$ ise $T(t)$'nin bir bazı $\left\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k,\dot{\varepsilon}_{k+1},...,\dot{\varepsilon}_{k+m}\right\}$'dır. Bunlar aynı zamanda $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin bazları olduğundan $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$'nin sırasıyla (4.1.6) ve (4.1.7) ortonormal bazları $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ içinde bir ortonormal bazdır.

Kabul edelim ki $boy\overline{T}(t) = boyT(t) = k + m + 1$ olsun. O zaman $\overline{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin sırasıyla,

$$\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k, \overline{a}_{k+1}, \ldots, \overline{a}_{k+m}, \overline{a}_{k+m+1}\}$$
ve
$$\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

ortonormal bazları bulunur [1].

Teorem 4.1.6.
E^n'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerinin $\overline{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin ortonormal bazları, sırasıyla, $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k, \overline{a}_{k+1}, \ldots, \overline{a}_{k+m}, \overline{a}_{k+m+1}\}$ ve $\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ olmak üzere bu ortonormal bazlar birbirlerine

$$\begin{aligned} S\overline{e}_i &= -he_i \quad , \ 1 \le i \le k \ , \\ S\overline{a}_{k+j} &= -ha_{k+j} \ , \ 1 \le j \le m, \\ S\overline{a}_{k+m+1} &= ha_{k+m+1} \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

bağıntıları ile karşılık gelir [1].

E^n'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerinin teğetsel demetleri, sırasıyla, $\overline{T}(t)$ ve $T(t)$ olsunlar. $\overline{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin bazları, sırasıyla, E^n'nin

$$\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k, \overline{a}_{k+1}, \ldots, \overline{a}_{k+m}, \overline{a}_{k+m+1}, \ldots, \overline{a}_n\}$$
ve
$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \ldots, a_n\}$$
bazlarına tamamlanabilir. Burada $\overline{\phi}$ ve ϕ merkez regle yüzeyli ise $\{\overline{a}_{k+m+2}, \ldots, \overline{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \ldots, a_n\}$ sistemlerine tamamlayıcı baz adı verilir [1].

Teorem 4.1.7.

E^n 'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ merkez regle yüzeyli regle yüzeylerinin E^n 'deki tamamlayıcı ortonormal bazları sırasıyla, $\{\overline{a}_{k+m+2},...,\overline{a}_n\}$, ve $\{a_{k+m+2},...,a_n\}$ olmak üzere bu baz vektörleri birbirine

$$S\overline{a}_{k+m+\lambda} = ha_{k+m+\lambda} \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntısı ile karşılık gelirler [1].

Böylece Teorem 4.1.6. ve Teorem 4.1.7. den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.8.

E^n 'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ regle yüzeylerinin teğetsel demetleri, sırasıyla, $\overline{T}(t)$ ve $T(t)$ olsun. E^n 'nin $\overline{T}(t)$ ve $T(t)$'ye göre iki ortonormal bazı, sırasıyla, $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_k,\overline{a}_{k+1},...,\overline{a}_{k+m},\overline{a}_{k+m+1},...,\overline{a}_n\}$ ve $\{e_1,e_2,...,e_k,a_{k+1},...,a_{k+m},a_{k+m+1},...,a_n\}$ olmak üzere bu iki baz birbirine

$$\begin{aligned}
S\overline{e}_i &= -he_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \; , \\
S\overline{a}_{k+j} &= -ha_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m, \\
S\overline{a}_{k+m+r} &= ha_{k+m+r} \quad , \quad 1 \leq r \leq n-k-m
\end{aligned}$$

bağıntıları ile dönüştüğünden E^n 'de k. mertebeden simetrik homotetik hareket E^n 'nin $(n-k-m)-$ boyutlu $Sp\{a_{k+m+1},...,a_n\}$ altuzayına göre bir yansımadır [1].

Teorem 4.1.9.

E^n 'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerin asli çatılarını oluşturan vektörlerin türevlerine ait

$$\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^{k} \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \quad , \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad , \quad 1 \le i \le m$$

eşitliklerindeki katsayılar arasında

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{\alpha}_{ii} = \left(\dot{h}/h\right) + \alpha_{ii} & , \; i = j \\ \bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} & , \; i \ne j \end{array}\right\} \; , \; 1 \le i \le m \; , \; 1 \le j \le k \, , \tag{4.1.10}$$

$$\bar{\kappa}_i = \kappa_i \qquad , \; 1 \le i \le m \tag{4.1.11}$$

bağıntıları vardır [1].

Teorem 4.1.10.

E^n'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin dayanak eğrileri $\bar{\alpha}$ ve α olmak üzere

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \text{ ve } \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

ifadelerindeki katsayılar arasında

$$\begin{array}{l} \xi_i = -h\bar{\xi}_i \quad , \quad 1 \le i \le k \\ \eta_{m+1} = h\bar{\eta}_{m+1} \end{array} \tag{4.1.12}$$

bağıntıları vardır [1].

Teorem 4.1.11.

E^n'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ, sırasıyla hareketli ve sabit regle yüzeylerinin $i-$inci dağılma parametreleri, sırasıyla, $\bar{\rho_i}$ ve ρ_i olmak üzere bu dağılma parametreleri arasında

$$\rho_i = h\bar{\rho}_i \quad , \quad 1 \le i \le m \tag{4.1.13}$$

bağıntısı vardır [1].

Teorem 4.1.12.

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin $\overline{\rho}$ ve ρ dağılma parametreleri arasında

$$\rho = h\overline{\rho} \qquad (4.1.14)$$

bağıntısı vardır [1].

Teorem 4.1.13.

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ, sırasıyla, hareketli ve sabit regle yüzeylerinin $\overline{D}$ ve D toplam parametreleri arasında

$$D = h^m \overline{D} \qquad (4.1.15)$$

bağıntısı vardır [1].

Teorem 4.1.14.

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin asli Blaschke invaryantları, sırasıyla, $\overline{b}_i$ ve b_i olsun. $\overline{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin asli Blaschke invaryantları arasında

$$b_i = -h\overline{b}_i \quad , \quad 1 \le i \le m \qquad (4.1.16)$$

ilişkisi vardır.

İspat:

(2.2.26) denklemi ile verilen i – inci asli Blaschke invaryantı

$$b_i = \frac{\xi_i}{\kappa_i} \quad , \quad 1 \le i \le m$$

olduğundan (4.1.11) ve (4.1.12)'de elde edilen bağıntılar göz önüne alındığında

$$b_i = \frac{-h\overline{\xi}_i}{\overline{\kappa}_i} \quad , \quad 1 \le i \le m$$
$$b_i = -h\overline{b}_i \quad , \quad 1 \le i \le m$$

elde edilir.

Teorem 4.1.15.

E^n 'de k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin asli Blaschke invaryantları, sırasıyla, $\overline{b}_i$ ve b_i olmak üzere, $\overline{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin Blaschke invaryantları arasında

$$B = h\overline{B} \tag{4.1.17}$$

ilişkisi vardır.

İspat:

(2.2.27) denklemi ile verilen Blaschke invaryantı

$$B = \sqrt[m]{|b_1 \ldots b_m|}$$

olduğundan, (4.1.16) denklemi göz önüne alındığında

$$B = h\sqrt[m]{|\overline{b}_1 \ldots \overline{b}_m|}$$
$$B = h\overline{B}$$

elde edilir.

Şimdi tartışılacak nokta $m = k$ ise k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen doğrultmanlar tarafından oluşturulan $\overline{\psi}$ ve ψ hareketli ve sabit 2-regle yüzeylerin Blaschke invaryantları arasında ilişkidir.

ψ, 2- regle yüzeyi α dayanak eğrisi ile birlikte $E(t) = Sp\{e(t)\} \subset E_k(t)$, $1-$boyutlu altuzayı tarafından oluşturulur. Benzer şekilde

$$S\overline{e} = -he$$

denklemi göz önünde bulundurularak $\overline{E}$ hareketli uzayında $\overline{\alpha}$ dayanak eğrisi ile birlikte $\overline{E}(t) = Sp\{\overline{e}(t)\}$ altuzayı tarafından oluşturulan $\overline{\psi}$ hareketli 2- regle yüzeyi elde edilir

Teorem 4.1.16.

E^n'de $m = k$ iken k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\psi}$ ve ψ hareketli ve sabit 2-regle yüzeylerinin Blaschke invaryantları, sırasıyla, $\overline{b}$ ve b olmak üzere, $\overline{\psi}$ ve ψ hareketli ve sabit 2-regle yüzeylerinin Blaschke invaryantları arasında

$$b = h\overline{b} \tag{4.1.18}$$

ilişkisi vardır.

İspat:

$\overline{\phi}$ ve ϕ genelleştirilmiş regle yüzeylerinin, sırasıyla, $\overline{E}_k(t)$ ve $E_k(t)$ doğrultman uzaylarının teğet vektörleri

$$e(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu e_\nu(t), \quad \theta_\nu = \text{sbt}$$

ve

$$\overline{e}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \cos\overline{\theta}_\nu \overline{e}_\nu(t), \quad \overline{\theta}_\nu = \text{sbt}$$

olmak üzere

$$\cos\overline{\theta}_\nu = \cos\theta_\nu \tag{4.1.19}$$

bağıntısı vardır.

(2.2.28) denklemi ile verilen Blaschke invaryantı $e(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu e_\nu(t), \quad \theta_\nu = \text{sabit}$,

$\|e\| = 1$ olmak üzere,

$$b = \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu \cos\theta_\nu}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{k}\left[\left(\sum_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu \alpha_{\nu\mu}\right)^2 + (\cos\theta_\mu \kappa_\mu)^2\right]}}$$

dir. (4.1.11), (4.1.12) ve (4.1.19) denklemleri son denklemde yerine yerleştirildiğinde

$$b = \frac{-h\sum_{\nu=1}^{k}\bar{\xi}_{\nu}\cos\bar{\theta}_{\nu}}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{k}\left[\left(\sum_{\nu=1}^{k}\cos\bar{\theta}_{\nu}\bar{\alpha}_{\nu\mu}\right)^{2}+\left(\cos\bar{\theta}_{\mu}\bar{\kappa}_{\mu}\right)^{2}\right]}}$$

$$b = -h\bar{b}$$

elde edilir.

Bu durumda $\bar{e} = \bar{e}_i$, $1 \le i \le m$ alınarak (4.1.18)'den (4.1.16) görülür ve Böylece (4.1.18), (4.1.16)'in genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir.

Teorem 4.1.17.

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\bar{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin asli dağılma parametreleri, sırasıyla, $\bar{\rho}_i$ ve ρ_i olmak üzere asli dağılma parametreleri ve Blaschke invaryantları arasında

$$B = \frac{1}{\eta_{m+1}}\sqrt[m]{\left|\prod_{i=1}^{m}\xi_i\rho_i\right|} \quad , \quad 1 \le i \le m \qquad (4.1.20)$$

ve

$$\bar{B} = \frac{1}{\bar{\eta}_{m+1}}\sqrt[m]{\left|\prod_{i=1}^{m}\bar{\xi}_i\bar{\rho}_i\right|} \quad , \quad 1 \le i \le m \qquad (4.1.21)$$

eşitlikleri vardır.

İspat:

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\bar{\phi}$ hareketli regle yüzeyinin asli dağılma parametreleri

$$\bar{\rho}_i = \frac{\bar{\eta}_{m+1}}{\bar{\kappa}_i} \quad , \quad 1 \le i \le m$$

olarak tanımlandığından

$$\overline{\kappa}_i = \frac{\overline{\eta}_{m+1}}{\overline{\rho}_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bulunur. Bu denklem (2.2.26) denklemi ile verilen $i-$inci asli Blaschke invaryantı denkleminde yerine konduğunda

$$\overline{b}_i = \frac{\overline{\xi}_i \overline{\rho}_i}{\overline{\eta}_{m+1}}$$

elde edilir ve bu son denklem (2.2.27) denklemi ile verilen Blaschke denkleminde yerine konduğunda $\overline{\phi}$ hareketli regle yüzeyinin asli dağılma parametreleri ile Blaschke invaryantı arasında

$$\overline{B} = \frac{1}{\overline{\eta}_{m+1}} \sqrt[m]{\left|\prod_{i=1}^{m} \overline{\xi}_i \overline{\rho}_i\right|} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı vardır. Benzer şekilde ϕ sabit regle yüzeyinin asli dağılma parametreleri ile Blaschke invaryantı arasında

$$B = \frac{1}{\eta_{m+1}} \sqrt[m]{\left|\prod_{i=1}^{m} \xi_i \rho_i\right|} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı vardır.

Teorem 4.1.18.

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirine karşılık gelen $\overline{\phi}$ ve ϕ hareketli ve sabit regle yüzeylerinin toplam dağılma parametreleri, sırasıyla, $\overline{D}$ ve D olmak üzere, toplam dağılma parametreleri ve Blaschke invaryantları arasında

$$B = \frac{1}{\eta_{m+1}} \sqrt[m]{\left|D \prod_{i=1}^{m} \xi_i\right|} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \tag{4.1.22}$$

ve

$$\overline{B}=\frac{1}{\overline{\eta}_{m+1}}\sqrt[m]{\left|\overline{D}\prod_{i=1}^{m}\overline{\xi}_i\right|} \quad , \quad 1\leq i\leq m \tag{4.1.23}$$

bağıntıları vardır.

İspat:

E^n'de k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında $\overline{\phi}$ hareketli regle yüzeyinin toplam dağılma parametresi

$$\overline{D}=\prod_{i=1}^{m}\overline{\rho}_i$$

denklemi (4.1.21) denkleminde yerine yerleştirildiğinde $\overline{\phi}$ hareketli regle yüzeyinin toplam dağılma parametreleri ile Blaschke invaryantı arasında

$$\overline{B}=\frac{1}{\overline{\eta}_{m+1}}\sqrt[m]{\left|\overline{D}\prod_{i=1}^{m}\overline{\xi}_i\right|} \quad , \quad 1\leq i\leq m$$

bağıntısı vardır. Benzer şekilde ϕ sabit regle yüzeyinin toplam dağılma parametreleri ile Blaschke invaryantı arasında

$$B=\frac{1}{\eta_{m+1}}\sqrt[m]{\left|D\prod_{i=1}^{m}\xi_i\right|} \quad , \quad 1\leq i\leq m$$

bağıntısı vardır.

SONUÇLAR ve TARTIŞMALAR

E^n'de homotetik hareketler altında genelleştirilmiş regle yüzey çiftlerinin Blaschke invaryantları Sadık Keleş ve Ali İhsan Sivridağ tarafından çalışıldı. [1]de İsmail Aydemir tarafından simetrik homotetik hareketler tanıtılıp, simetrik homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzey çiftleri ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildi. Biz bu çalışmada gerek [10] ve gerekse [1] çalışmalarını göz önüne alarak, simetrik homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzey çiftlerinin Blaschke invaryantları ile ilgili teorem ve sonuçlara yer verdik.

Bundan sonraki amacımız, IR_1^n Minkowski Uzayında $(k+1)-$boyutlu time-like ve space-like yüzeylerin Blaschke invaryantlarını çalışmak olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] AYDEMİR, İ., E^nde Simetrik Homotetik Hareketler İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1992.

[2] ÇALIŞKAN, M., Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, 1983.

[3] ÇALIŞKAN, M., On the Pair of Axoids, Pure and Applied Mathematica Sciences Vol.XXX, No.1-2, September 1989.

[4] FRANK, H. and GIERING, O., Verallagemeinerte Regelflachen, Math.Z.150, 261-271, 1976.

[5] FRANK, H., On Kinematics of the n-dimensional Euclidean Space, Contributions to Geometry, Proceedings of the Geometry Symposium in Siegen, Edited by Jurgen Tölke and Jörg. Wills, pp. 335-342, Birkhauser Verlag Basel, 1979.

[6] FRANK, H. and LINSIN, I., Hauptregelflächen Einer Verallagemeinerten Regelflache Mit Zentralregelfläche, Journal of Geometry, Vol.16, 63-71, 1981.

[7] FRANK, H. and GIERING, O., Verallagemeinerte Regelflachen Im Groben I, Arch. Math., Vol. 38, 106-115, 1982.

[8] HACISALİHOĞLU, H. H., On the Rolling of One Curve or Surface Upon Another, Proceedings of the Royal Irish Academy, Vol.71, Sec. A, Num.2, Dublin, 1971.[9] HACISALİHOĞLU, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No.2, Malatya, 1983

[10] KELEŞ, S. ve ASLANER R., E^nde $(k+1)-$Regle Yüzeylerin Blaschke İnvaryantları Üzerine Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, 6,1-2, 928-935, 1990.

[11] NOMIZU K., Kinematics of Differential Geometry of Submanifolds, Tohoku Mth. Journ. 30, 627-637,1977.

[12] THAS C., Een(lokale), Studie Van de (m+1)-dimensonale Varieteiten, Van de n-dimensionale Euclidshe Ruimte IR^n $n \geq 2m+1$, en$m \leq 1$ Beschereven door Een Eendimesionale Familie Van m-dimensionale Lineare Ruiten. Paleis Der Academien-Herttogsstraat, I Brussel, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

Soley ERSOY, 25.02.1978 tarihinde Hatay'ın İskenderun ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Aydın'ın Didim ilçesinde Yenihisar İlkokulunda, ortaokul öğrenimini Söke Hilmi Fırat Anadolu Lisesinde ve lise öğrenimini Aydın Adnan Menderes Anadolu Lisesinde tamamladı. 1996 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans eğitimini 2000 yılında tamamladı. 2000-2001 öğretim yılında Aydın'ın Köşk ilçesinde Adnan Menderes İlköğretim Okulunda Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 2001-2002 yılları arasında Sakarya ilinde Adapazarı Atatürk Lisesinde Matematik Öğretmenliği yaptı. Şubat 2002'de Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Programına kaydoldu. Aralık 2002'de Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı ve halen görevlendirme ile Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Soley ERSOY evli ve bir kız çocuğu annesidir.