

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN
CEBİRSEL YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bilal AYDIN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAMAN

Eylül 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN CEBİRSEL
YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bilal AYDIN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 15 / 09 /2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Yrd.Doç.Dr. Hüseyin Kocaman
Jüri Başkanı**

**Prof.Dr.Abdullah Yıldız
Üye**

**Yrd.Doç.Dr.Cemalettin Kubat
Üye**

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmamın her aőamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, yardımlarını ve ilgisini esirgemeyen danışman Hocam, Sayın Yrd. D. Dr. Hüseyin KOCAMAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca sürekli yardımlarını gördüğüm Matematik bölümünün değerli öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Eylül 2006

Bilal AYDIN

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
ÖZET.....	viii
SUMMARY.....	ix
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
1.1.Amaç ve Tanımlar.....	1
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Adi Diferansiyel Denklemler.....	4
2.2. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözüm Yöntemleri.....	9
2.2.1. Sonlu fark formülü İle Euler türev yöntemi.....	9
2.2.1.1. Euler yönteminin geometrik yorumu.....	11
2.2.2. Başlangıç değer probleminin varlığı ve tekliği.....	12
2.2.3. Çok adımlı yöntemler.....	18
2.2.3.1. Trapezoidal Euler yöntemi.....	18
2.2.3.2. Theta yöntemleri.....	18
2.2.3.3. Genel s-adım yöntemi.....	19
2.2.3.4. İleri Euler yöntemi.....	19
2.2.3.5. Trapezoidal yöntem.....	19
2.2.3.6. Geri Euler yöntemi.....	20
2.2.3.7. θ yöntemi.....	20
2.2.3.8. Picard yöntemi.....	20

2.2.3.9. Adams yöntemi.....	21
2.2.3.10. Adams Bashfort yöntemi.....	21
2.2.3.11. Adams Moulton yöntemi.....	22
2.2.3.12. Milne yöntemi.....	22
2.2.3.13. Orta nokta yöntemi.....	23
2.2.3.14. Geri diferansiyel formül.....	23
2.2.3.15. Tahmini ve düzeltici yöntemler.....	24
2.3. Çoklu Adıma Başlama.....	24
2.4. Hata Kaynakları.....	25
2.5. Yerel Kesme Hataları.....	25
2.6. Tutarlılık.....	26
2.7. Taylor Serisi Yöntemler.....	31
2.8. Runge-Kutta Yöntemi.....	33
2.9. Orta Nokta Yöntemi.....	33
2.10. Heun Yöntemi.....	33
2.11. Runge-Kutta 4.....	34

BÖLÜM 3.

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	38
3.1. Lineer Diferansiyel Denklemler.....	38
3.2. Özdeğerler ve Özvektörler.....	38
3.3. Üstel Matris.....	43
3.4. Köşegen Matris ve Köşegenleştirilebilen Matrisler.....	44
3.5. Jordan Blokları.....	45
3.6. Genelleştirilmiş Çözüm.....	49
3.7. Homojen Olmayan Problem.....	51
3.8. Adi Türevli Dif. Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözüm Yön.....	53
3.8.1. Euler yönteminin sistemlere uygulanması.....	53
3.8.2. Taylor seri yönteminin sistemlere uygulanması.....	54
3.8.3. Picard yönteminin sistemlere uygulanması.....	55
3.8.4. Runge Kutta yönteminin sistemlere uygulanması.....	55
3.9. Mathematica da bazı programlar.....	74

BÖLÜM 4.	
SONUÇLAR.....	78
KAYNAKLAR.....	79
ÖZGEÇMİŞ.....	80

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{C}^n	: n boyutlu kompleks uzay
\in	: Elemanıdır
L	: Lipschitz sabiti
\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^n	: n boyutlu uzay
τ	: Transpoz
λ	: Özdeğer
Δt	: Adım aralığı
\approx	: Yaklaşık olarak

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1: $y = e^{-t}$ ve $y' = -e^{-t}$ grafikleri.....	5
Şekil 2.2: t_0 dan t_1 e yaklaşık çözüm.....	6
Şekil 2.3: $y' = -y$ için yaklaşık çözüm.....	8
Şekil 2.4: Sonlu fark ile Euler formülü.....	11
Şekil 2.5: Euler yönteminin geometrik yorumu.....	11
Şekil 3.1: x_1 in çözümü (3.5).....	60
Şekil 3.2.a: x_1 in EzplicitRungeKutta yöntemi ile çözümü(3.5).....	61
Şekil 3.2.b: x_1 in İmplicitRungeKutta yöntemi ile çözümü(3.5).....	61
Şekil 3.2.c: x_1 in Adams yöntemi ile çözümü(3.5).....	61
Şekil 3.2.d: x_1 in BDF yöntemi ile çözümü(3.5).....	62
Şekil 3.3: x_2 in çözümü (3.5).....	62
Şekil 3.4.a: x_2 in EzplicitRungeKutta yöntemi ile çözümü(3.5).....	63
Şekil 3.4.b: x_2 in İmplicitRungeKutta yöntemi ile çözümü(3.5).....	63
Şekil 3.4.c: x_2 in Adams yöntemi ile çözümü(3.5).....	63
Şekil 3.4.d: x_2 in BDF yöntemi ile çözümü(3.5).....	64
Şekil 3.5: x_3 in çözümü (3.5).....	64
Şekil 3.6.a: x_3 in EzplicitRungeKutta yöntemi ile çözümü(3.5).....	65
Şekil 3.6.b: x_3 in İmplicitRungeKutta yöntemi ile çözümü(3.5).....	65
Şekil 3.6.c: x_3 in Adams yöntemi ile çözümü(3.5).....	65
Şekil 3.6.d: x_3 in BDF yöntemi ile çözümü(3.5).....	66

ÖZET

Anahtar kelimeler: adi diferansiyel denklemler, diferansiyel denklemlerin sayısal çözüm yöntemleri

Birinci bölümde birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler ve bunların sayısal çözüm yöntemleri tartışılmıştır. İkinci bölümde birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri göz önünde bulundurularak lineer diferansiyel denklemler sisteminin sayısal çözüm yöntemleri irdelenmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

THE NUMERICAL SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS BY ALGEBRIC METHODS

SUMMARY

Keywords: ordinary differential equations, numerical solution, differential equation systems

In the first chapter we will consider first ordered ordinary differential equations and numerical solution methods of these differential equations. In the second chapter we will consider numerical solution methods of linear differential equation systems by using solution methods of first order differential equations and some examples about this methods will be given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Tanımlar

Genellikle diferansiyel denklemler analitik olarak çözülür. Fakat çoğu zaman nümerik çözüm yöntemleri de gerekebilir. Analitik çözümler mümkün olsa bile nümerik çözümler teorik hesaplama yöntemlerinden daha kolaydır. Bu çalışmamızda birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri ve bunların sayısal çözüm yöntemlerini göz önünde bulundurarak lineer diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözüm yöntemlerini irdedeleyeceğiz. Öncelikle bazı kavramları ifade etmek gerekebilir..

Matematikte birbirine bağlı olarak değişen büyüklüklere değişkenler yani bağımlı ve bağımsız değişkenler; bir değişkenin diğer bir değişkene göre değişme oranına kabaca türev denir. Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren bir bağıntıya diferansiyel denklem denir. Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir tek bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin (veya değişkenlerin) bir tek bağımsız değişkene göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren bir diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir. Kısaca bir diferansiyel denklemde bir tek bağımsız değişken varsa denkleme adi diferansiyel denklem denir. Genel olarak y bağımlı, x bağımsız değişkenli bir adi diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin birden çok bağımsız değişkene göre kısmi türevleri ile beraber bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Kısaca bir diferansiyel denklemde birden çok bağımsız değişken varsa denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Genel olarak u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem,

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Bir diferansiyel denklem içinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi; en yüksek mertebeli türevin derecesine de diferansiyel denklemin derecesi denir. y bağımlı değişken ve x bağımsız değişken olmak üzere n . mertebeden bir lineer adi diferansiyel denklem

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = b(x)$$

şeklinde ifade edilebilen bir denklemdir. Diğer bir deyişle, bir diferansiyel denklemde her bağımlı değişken ve her mertebeden türevler 1. dereceden ise ve aynı zamanda bağımlı değişkenler veya türevler çarpım halinde yer almıyorlarsa bu şekildeki denklemlere lineer; aksi halde lineer olmayan diferansiyel denklemler denir.

y bağımlı, x bağımsız değişkenli n . mertebeden

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = b(x)$$

diferansiyel denklemindeki y bağımlı değişken ve türevlerinin $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ katsayılarının hepsi reel sabitlerden oluşuyorsa denkleme sabit katsayılı diferansiyel

denklem; $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ katsayılarının en az bir tanesi bağımsız değişken olan x e bağlı ise denkleme değişken katsayılı diferansiyel denklem adı verilir.

Diferansiyel denklemleri kabaca şu şekilde sınıflandırabiliriz.

1.) Bir diferansiyel denklem, içinde bulunan bağımsız değişkenlerin sayısına göre önce ikiye ayrılır.

- a.) Adi türevli diferansiyel denklemler (bağımsız değişken sayısı bir)
- b.) Kısmi türevli diferansiyel denklemler (bağımsız değişken sayısı birden fazla)

2.) Diferansiyel denklemler, denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebe ve derecesine göre sınıflandırılabilir.

3.) Denklemde bulunan bağımlı değişken ve türevlerinin lineerlik koşullarını sağlamasına göre de şu şekilde sınıflandırılabilir.

- a.) Lineer diferansiyel denklemler
- b.) Lineer olmayan diferansiyel denklemler .

4.) Bağımlı değişkenler ve türevlerinin katsayılarının cinsine göre

- a.) Sabit katsayılı diferansiyel denklemler
- b.) Değişken katsayılı diferansiyel denklemler olarak sınıflandırılabilir.

Diferansiyel denklemler, yapısına göre homojen ve homojen olmayan olarak da sınıflandırılabilir.

Bağımsız değişken x , bilinmeyen fonksiyon $y(x)$ ve bilinmeyen fonksiyonun bağımsız değişkene göre türevi olan $y'(x)$ i içeren, $F(x, y, y') = 0$ ifadesine birinci mertebeden adi diferansiyel denklem denir. $F(x, y, y')$ fonksiyonu x ve y değişkenlerinin birine veya her ikisine birden bağlı olabileceği gibi denkleminin diferansiyel denklem olması için bu fonksiyonun y' ye bağlı olacağı açıktır

BÖLÜM 2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Adi Diferansiyel Denklemler

Başlarda birinci mertebeli adi diferansiyel denklemler üzerinde konsantre olunsun. Başlangıç değer problemleri genelde $y' = f(t, y)$ olarak gösterilir. Burada $t \geq t_0$ ve $y(t_0) = y_0$ şartı geçerlidir. Bu genel form adi diferansiyel denklemlerin bağımlı değişken $y = (y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}, \dots, y_{(n)})^T$ 'i, bağımsız değişken t ' nin d-mertebeli sistemini gösterir. Sistem tam olarak yazılırsa,

$$\frac{dy_{(1)}}{dt} = f_1(t, y); \dots \dots \dots ; \frac{dy_{(d)}}{dt} = f_d(t, y)$$

elde edilir.

Başlangıç şartı $y_{(1)}(t_0) = y_{(1)0}, y_{(2)}(t_0) = y_{(2)0}, \dots \dots \dots, y_{(d)}(t_0) = y_{(d)0}$ adi diferansiyel denklemin t_0 başlangıç değerinden sonra bütün t değerleri için kullanılır. Adi diferansiyel denklemlerin birinci mertebeli sistemleri genelde $y' = f(t, y)$ burada $t \geq t_0$ ve $y(t_0) = y_0$ şeklinde gösterilir. Örneğin,

$$\frac{dy}{dt} = \sin t + \sin y \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = t^2 + y^2$$

İkinci mertebeli adi diferansiyel denklemlerine bir örnek vermek gerekirse

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \sin(t) \frac{dy}{dt} + \cos(t) = 3$$

ve başlangıç şartları $y(t_0)=1$ ve $\frac{dy}{dt} = -1$

$z = \frac{dy}{dt}$ dersek $\frac{dz}{dt} = -\sin(t)z - \cos(t)y + 3$ ve $y(t_0)=1$ $z(t_0) = -1$

olur .

Örnek 2.1: Basit 1.mertebeden denklem $\frac{dy}{dt} = -y$ ve $y(0)=1$ olarak verilsin. Bu analitik olarak çözümlerse,

$$\frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -dt \Rightarrow \log y = -t + c$$

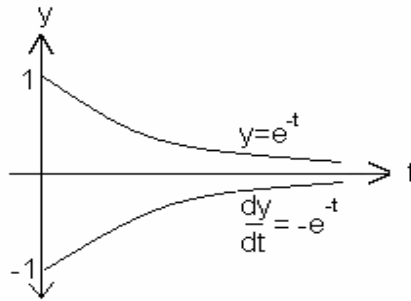
$$y = e^{-t+c} \Rightarrow y = e^{-t} e^c \Rightarrow y = Ae^{-t}$$

elde edilir.

İntegrasyon sabitini bulmak için başlangıç şartı yerine yazılırsa

$$1 = Ae^{-0} \Rightarrow 1 = A \Rightarrow y = e^{-t}$$

bulunur.



Şekil 2.1. ($y = e^{-t}$ ve $y' = -e^{-t}$ grafikleri)

Genel durumda 1-boyutlu sistemlerde $t \geq t_0$ ve $y(t_0) = y_0$ olan $y' = f(t, y)$ ye nasıl bir çözümle yaklaşılabilir. $y' = f(t, y)$ nin zamana göre integralinin alınması gerekir. Sonraki adımda $t_1 > t_0$ şartıyla y' yi hesaplamak için t_0 dan t_1 'e integral alınmalıdır.

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dy = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt$$

$$y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt$$

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt$$

Eğer $y(t_1)$ için bir değer burada $t_1 - t_0$ çok büyük olmamak üzere yaklaştırdığımız

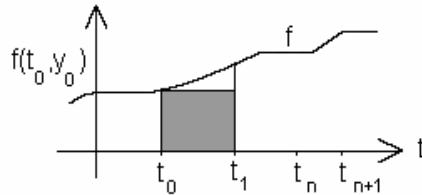
$f(t, y)$, $[t_0, t_1]$ aralığında $t_0 \in [t_0, t_1]$ değeri ile yani $f(t_0, y_0)$

$$y(t_1) \approx y_0 + (t_1 - t_0) f(t_0, y_0)$$

nümerik olarak $y(t_1)$; y olarak gösterilir. Böylece

$$y_1 = y_0 + (t_1 - t_0) f(t_0, y_0)$$

olur .



Şekil 2.2. (t_0 dan t_1 e yaklaşık çözüm)

y_1 yaklaşım değerini t_1 zamanında bulduktan sonra $t_2 > t_1$ bulmak içinde kullanılır.

Burada y_2 şu şekildedir.

$$y_2 = y_1 + (t_2 - t_1)f(t_1, y_1)$$

Bu işlem t_3, t_4, \dots içinde aynı şekilde sürdürülür. Genel olarak şu şekilde yazılır.

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, y_n)$$

Verilen bir dizin $t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_1 + \Delta t, \dots, t_{n+1} = t_n + \Delta t$ olsun (burada Δt zaman adımı olarak verilir) bu dizin üstteki ifadede kullanılırsa

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + [(t_n + \Delta t) - t_n]f(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n)$$

olarak bulunur ($n=0,1,2,3,\dots$). Farklı t_1, t_2 zamanlarında yaklaşık çözüm yöntemi olarak kullanılan bu yöntem Euler Yöntemi denir.

Örnek 2.2: Euler yöntemi örnek 1.1 deki $t \geq 0$ ve $y(0)=1$ için $y' = -y$ ye uygulanırsa;

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n) \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot (-y_n) \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = (1 - \Delta t)y_n$$

şeklinde düzenlenir. Önce bir zaman adımı seçilir $\Delta t=0,1$ olsun. Sonra $t=0$ ve $y_0=1$ için başlanır.

$$y_1 = (1 - \Delta t) \cdot y_0 \Rightarrow y_1 = (1 - 0,1) \cdot 1 \Rightarrow y_1 = 0,9$$

$$y_2 = (1 - \Delta t) \cdot y_1 \Rightarrow y_2 = (1 - 0,1) \cdot (0,9) \Rightarrow y_2 = (0,9)^2$$

$$y_3 = (1 - \Delta t) \cdot y_2 \Rightarrow y_3 = (1 - 0,1) \cdot (0,9)^2 \Rightarrow y_3 = (0,9)^3$$

$$y_n = (1 - \Delta t) y_{n-1} \Rightarrow y_n = (1 - 0,1) \cdot (0,9)^{n-1} \Rightarrow y_n = (0,9)^n$$

Buna rağmen verimlilik için daha ileri bir adım denense, mesela $\Delta t = 2$ alınsa

$$y_{n+1} = (1 - \Delta t) y_n \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = (1 - 2) y_n \Rightarrow y_{n+1} = -y_n$$

bulunur ki bu yaklaşım 1 ve -1 arasında dalgalanır. Benzer şekilde $\Delta t = 3$ alınsa

$$y_{n+1} = (1 - \Delta t) y_n \Rightarrow$$

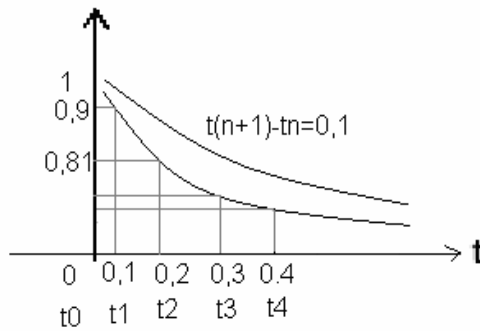
$$y_{n+1} = (1 - 3) y_n \Rightarrow y_{n+1} = -2y_n$$

elde edilir ki bu dalgalanmada sınır yoktur. Son olarak $\Delta t = 1$ alınsa

$$y_{n+1} = (1 - \Delta t) y_n \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = (1 - 1) y_n \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = 0 = y_1 = y_2 = \dots = y_n \quad (n \geq 1 \text{ için})$$



Şekil 2.3. ($y' = -y$ için yaklaşık çözüm ve gerçek çözüm)

Örnek 2.3: Skaler lojistik $y' = y(1-y)$ denklemini ele alınsın; başlangıç şartları

$y(0) = \frac{1}{10}$ olsun. Euler metodunu kullanarak $\Delta t = 1$ zaman aralıkları ile yaklaşım

nümerik çözümü elde edilir. Burada gerekli düzenleme yapılırsa

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + 1 \cdot [y_n(1 - y_n)]$$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_n^2$$

elde edilir. Başlangıç şartını kullanarak işleme devam edilirse

$$y_1 = 2y_0 - y_0^2 \Rightarrow y_1 = 2 \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2 \Rightarrow y_1 = \frac{19}{100} = 0,19$$

$$y_2 = 2y_1 - y_1^2 \Rightarrow y_2 = 2 \cdot (0,19) - (0,19)^2 \Rightarrow y_2 = 0,3439$$

$$y_3 = 2y_2 - y_2^2 \Rightarrow y_3 = 2 \cdot (0,3439) - (0,3439)^2 \Rightarrow y_3 = 0,5695$$

olur. Benzer şekilde işlemler devam ettirilirse,

$$y_4 = 0,8147$$

$$y_5 = 0,9650$$

$$y_6 = 0,9988$$

$$y_7 = 0,9999$$

$$y_8 = 0,9999$$

şeklinde bulunur. $y' = y(1-y)$ denkleminin kısmi toplamalar dizisi kullanılarak veya normal logaritmik integrasyon kullanılarak çözümü mümkündür.

2.2. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözüm Yöntemleri

Diferansiyel denklemlerin bazı sayısal çözüm yöntemleri şunlardır.

2.2.1. Sonlu fark formülü kullanarak Euler türev yöntemi

Diferansiyel denklemler, integral denkleme çevrilerek Euler Yöntemi elde edilir ve

dikdörtgen kuralı kullanılarak integral hesaplanır. Sonlu fark yaklaşımını kullanarak $t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_1 + \Delta t, \dots, t_{n+1} = t_n + \Delta t$ için Euler yöntemi elde edilir. $y' = \frac{dy}{dt}$ nin t_n zamanında ki türevi ileri fark formülü ile,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_n} \approx y(t_{n+1}) + \frac{y(t_n)}{\Delta t}$$

hesaplanır. Formülden diferansiyel denklem fark denklemine dönüştürülür;

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y_n)$$

şeklinde düzenleme yapılırsa türev formülü elde edilir.

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n)$$

Sonlu fark formülü $t = t_n$ de Taylor seri açılımıyla elde edilir,

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_n} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t_n} + \frac{\Delta t^3}{3!} \left. \frac{d^3 y}{dt^3} \right|_{t_n} + \dots$$

kısaca ;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left. \frac{d^k y}{dt^k} \right|_{t_n}$$

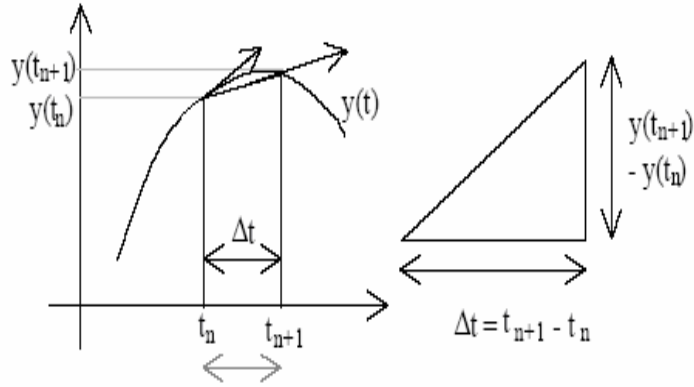
olarak yazılır. Diğer şekli

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_n} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=\zeta}$$

burada $t_n \leq \zeta \leq t_{n+1}$ dir ki Taylor serisini ikinci terimden sonra keserek

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_n}$$

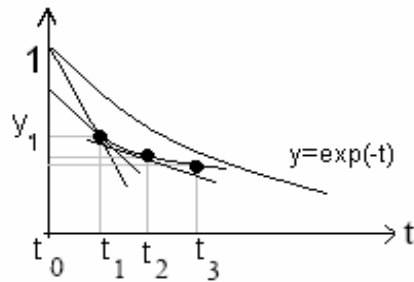
olur. Hata $O(\Delta t^2)$ ile bulunur. Böylece yaklaşım birinci derecedendir, daha yüksek dereceler Taylor serisinde daha çok terim alarak elde edilebilir.



Şekil 2.4. (sonlu fark ile Euler formülü)

2.2.1.1. Euler yönteminin geometrik yorumu

Altta, Euler yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözüm ve elemanter yöntemle elde edilen doğru çözüm görülüyor.



Şekil 2.5. (Euler yönteminin geometrik yorumu)

Diferansiyel denklem $y' = -y$, $t \geq 0$, $y(0)=1$ ve fark $y_{n+1} = y_n - \Delta t y_n$ dir.

2.2.2. Birinci derecede adi diferansiyel denklemlerdeki başlangıç değer problemlerin varlığı, tekliği ve kararlılığı

Şimdiye kadar $y' = f(t,y)$ başlangıç değer problemlerini çözebileceğimizi farz etmiştik. Aşağıdaki teoremler $f(t,y)$ nin çözümünün olduğunu, tek olduğunu ve fonksiyonel şartları vererek ilk değer şartlarının kararlı olduğunu göstermektedir. $f(t, y)$ esas şartları olan t ve y üzerinde süreklidir ve $f(t,y)$ y içinde Lipschitz şartlarını sağlar.

Tanım 2.1: Bir $f(t,y)$ fonksiyonunun y değişkeni üzerinde $l > 0$ sabit olmak kaydıyla Lipschitz şartını sağlaması aşağıdaki eşitlikle mümkündür. [3]

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < l |y_1 - y_2|$$

Teorem 2.1.

$f(x, y)$ ve $f_y(x, y)$ fonksiyonları $D: x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ ile belirlenen kapalı bir D bölgesinde sürekli, dolayısıyla sınırlı olsunlar; bir başka deyişle $|f(x, y)| \leq M$ ve $|f_y(x, y)| \leq N$ eşitsizliklerini gerçekleyen pozitif M ve N sayıları var olsun. $l = \min(a, \frac{b}{M})$ olmak üzere $x_0 - l \leq x \leq x_0 + l$ ile belirlenen bir aralıkta $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin $y_0 = y(x_0)$ başlangıç koşulunu gerçekleyen bir ve yalnız bir çözümü vardır.

İspat: D bölgesinde ait keyfi herhangi iki nokta $A_1(x, y_1)$ ve $A_2(x, y_2)$ olsun $f(x, y)$ fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygulayalım

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = f_y(x, c)(y_2 - y_1)$$

Burada c , y_2 ile y_1 arasındadır. Her iki yanın mutlak değeri alınırsa

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f_y(x, c)| |y_2 - y_1| \leq N |y_2 - y_1|$$

yazabiliriz. Yukarıdaki koşulu gerçekleyen bir fonksiyonun Lipschitz şartını sağladığı söylenir.

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$$

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_0)| dx \leq M |x - x_0| \leq Ml \leq b$$

buluruz; bunun anlamı $y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$ denklemi ile belirlenen $y = y_1(x)$

fonksiyonunun D bölgesi içinde kalmasıdır. Benzer şekilde devam edersek

$$|y_2 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_1)| dx \leq M |x - x_0| \leq Ml \leq b$$

bulunur. Devam edilerek matematiksel tümevarım yöntemi ile, n bir doğal sayı ve $x_0 - 1 \leq x \leq x_0 + 1$ olmak üzere

$$|y_n - y_0| \leq b$$

olduğu gösterilebilir. Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$ bağıntısını $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel

denklemini ve $y_0 = y(x_0)$ başlangıç koşulunu gerçekleyen bir $y(x)$ fonksiyonunun var olduğu gösterilsin.. Bu amaçla aşağıdaki seri oluşturulursa,

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

Bu serinin terimlerinin mutlak değerleri için bir üst sınır bulunursa

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_0)| dx \leq M|x - x_0|$$

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_0)] dx \right| = \left| \int_{x_0}^x f_y(x, c_1)(y_1 - y_0) dx \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f_y(x, c_1)| |y_1 - y_0| dx \leq NM \int_{x_0}^x |x - x_0| dx = \frac{NM}{2} |x - x_0|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_3 - y_2| &= \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_2) - f(x, y_1)] dx \right| = \left| \int_{x_0}^x f_y(x, c_2)(y_2 - y_1) dx \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f_y(x, c_2)| |y_2 - y_1| dx \leq \frac{N^2M}{2} \int_{x_0}^x |x - x_0| dx = \frac{N^2M}{3!} |x - x_0|^3 \end{aligned}$$

devam edilerek, matematiksel tümevarım metoduyla

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{N^{n-1}M}{n!} |x - x_0|^n$$

bulunur. Serinin terimlerinin mutlak değerlerini almak suretiyle elde edilen serinin, yukarıdaki bağıntıları ve $|x - x_0| < 1$ olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned} &|y_0| + |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \dots + |y_{n-1} - y_{n-2}| + |y_n - y_{n-1}| + \dots \leq \\ &|y_0| + M|x - x_0| + \frac{MN}{2}|x - x_0|^2 + \frac{MN^2}{3!}|x - x_0|^3 + \dots + \frac{MN^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n + \dots \end{aligned}$$

bağıntısını gerçeklediği görülür. Yukarıdaki eşitliğin sağ yanındaki serinin yakınsak olduğunu D'Alambert oran kriteri kullanarak gösterilirse:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{MN^n}{(n+1)!} I^{n+1}}{\frac{MN^{n-1}}{n!} I^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nl}{n+1} = 0 < 1$$

dir; sağ taraf yakınsak olduğu için sol taraftaki seri de yakınsaktır; dolayısıyla $y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}) + \dots$ serisi mutlak yakınsaktır. Bu nedenle ilk $n+1$ terimin toplamı oluşturulup ve $n \rightarrow \infty$ limiti alınırsa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [y_0 + \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(x)$$

$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}) + \dots$ serisinin terimlerinin tamamı sürekli fonksiyonlar olduğu için $y(x)$ de sürekli bir fonksiyondur. Öte yandan Her n için $y_n(x_0) = y_0$ dır; yani $y_n(x)$ lerin tamamı $y_0 = y(x_0)$ başlangıç koşulunu gerçekler. Şimdi de $y(x)$ in $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denklemini gerçeklediğini gösterelim.

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(x)$ demek: ε yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere n sayısının yeterince büyük değerleri için

$$|y - y_n| < \frac{\varepsilon}{N|x - x_0|}$$

demektir, buradan

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, y_n)] dx \right| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y_n)| dx \right| = \\ &= \int_{x_0}^x |f_y(x, c_n)| |y - y_n| dx \leq N \frac{\varepsilon}{N|x - x_0|} \int_{x_0}^x dx = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur ki bunun anlamı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f[x, y_{n-1}(x)] dx = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

demektir. Şimdi $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y_{n-1}(x)] dx \right] \Rightarrow \\ y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \end{aligned}$$

bulunur bu $y(x)$ in diferansiyel denklemi gerçeklediğini gösterir. Şimdi de çözümün tek olduğu gösterilsin. $Y(x)$ in yanı sıra $z(x)$ gibi ikinci bir çözümün daha olduğunu varsayalım. Bir başka deyişle $z(x_0) = y_0$ olmak üzere

$$z = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

olsun

$$\begin{aligned} |y - z| &= \left| \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, z)] dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, z)| dx \\ &= \int_{x_0}^x |f_y(x, c)| |y - z| dx \leq N \int_{x_0}^x |y - z| dx \end{aligned}$$

$[x_0, x]$ aralığı yeterince küçük seçerek $x - x_0 < \frac{1}{N}$ olmasını sağlanırsa ve bu aralıkta

bulunan bir x^* için $|y - z|$ farkının en büyük değeri aldığı varsayılsa ve bu değeri λ ile gösterilirse

$$|y - z| \leq N \int_{x_0}^x |y - z| dx$$

ilişkisinde $|y - z|$ yerine λ ve x yerinede x^* olarak tekrar yazılırsa

$$\lambda \leq N \int_{x_0}^{x^*} \lambda dx \leq N\lambda |x^* - x_0| < N\lambda \frac{1}{N} = \lambda \Rightarrow \lambda < \lambda$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Çelişkinin kaynağı $y(x)$ ve $z(x)$ gibi iki farklı çözümün olabileceği kabulüdür; iki farklı çözüm olamaz, yani çözüm tektir.

Başlangıç değerindeki küçük bir değişiklikle adi diferansiyel denklemin çözümünün nasıl olacağını bilmek önemlidir. Problem eğer çözüm sonucu kaygılandırmayacak şekilde yakınsa kararlıdır. İyi bir problemin tek çözümü vardır ve kararlıdır. [3]

Not: Bir fonksiyonun lipschitz şartını sağladığını görmenin en kolay metodu aşağıdaki teoremi kullanmaktır.

Teorem 2.2.

Eğer $f(t, y)$ her (t, y) için $\left| \frac{df}{dy}(t, y) \right| < l$ şartını sağlıyorsa y değişkeni o küme içinde l , Lipschitz sabitiyle Lipschitz şartını sağlıyordur. [3]

Örnek 2.4: $y' = -y$ burada $f(t, y) = -y$ ve $\frac{df}{dy} = -1$ ve böylece $\left| \frac{df}{dy} \right| = 1$

Teorem 2.3.

Lipschitz şartını sağlayan $f(t, y)$ fonksiyonları için Euler yakınsaktır

2.2.3. Çok adımlı yöntemler

Euler metodunun $y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n)$ için çok doğru olmadığını ve çok kararlı olmadığını bilinmektedir.

2.2.3.1. Trapezoidal (geliştirilmiş) Euler yöntemi

$$y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt$$

integralinin trapezoidal yaklaşımla integrali alınırsa

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot \frac{1}{2} \cdot [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

elde edilir.

2.2.3.2. Theta yöntemleri

Bu yöntemler trapezoidal kuralların genelini gösterir ve $f(t_n, y_n)$ ve $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ in ağırlıklı ortalaması olan

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot [(1-\theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

elde edilir.

Not:

Yukarıdaki ifade

- 1.) $\theta=0$ ise Euler Yöntemi
- 2.) $\theta=\frac{1}{2}$ ise Trapezoidal Yöntemi
- 3.) $\theta=1$ ise Geri Euler Yöntemi

$\theta=0$ ise yöntem açık $\theta \neq 0$ ise yöntem kapalıdır. θ yöntemi tek adımlı bir yöntemdir. t_n ve t_{n+1} değerlerini içerir. Bunlar önceden hesaplanmış değerlerdir.

Örneğin y_{n-1}, y_{n-2}, \dots gibi. Başlangıç değer problemlerindeki mantık kullanılır. Burada çözüm tek bir başlangıç şartına bağlıdır. Dikkat edilirse y nin daha önceki değerleri daha doğru yöntem elde etmek için kullanılır. Buna da çoklu adım yöntemi denir.

2.2.3.3. Genel s-adım yöntemi

$$\sum_{m=0}^s a_m y_{n+m} = \Delta t \sum_{m=0}^s b_m f(t_{n+m}, y_{n+m})$$

Olur. Burada $n=0,1,2,\dots$ ve a_m, b_m verilen sabitlerdir. Δt ise n den ve çözülecek olan diferansiyel denklemden bağımsızdır. Genelde a_s birim olarak $a_s = 1$ elde etmek için normalize edilir. Eğer $b_s = 0$ ise yöntem açık, aksi halde kapalıdır.

2.2.3.4. İleri Euler yöntemi (açık)

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \cdot f(t_n, y_n)$$

burada $s=1$ ve $a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = \Delta t b_0 f(t_n, y_n)$ dir. Böylece $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ ve tüm diğer a_m ve b_m ler 0 dır.

2.2.3.5. Trapezoidal (değiştirilmiş) yöntem

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \left[\frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right]$$

$S=1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $b_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$ dir.

2.2.3.6. Geri Euler yöntemi

$$y_{n+1} - y_n = \nabla t \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$S=1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ dir.

2.2.3.7. θ yöntemi

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \cdot [(1-\theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

$0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere $S=1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1-\theta$, $b_1 = \theta$ dir

2.2.3.8. Picard yöntemi

Ardışık yerine koyma yöntemi olarak da bilinen bu yöntemde, her adım sonunda bir yaklaşım değeri elde edilir. Böylece n adım sonucunda y_1, y_2, \dots, y_n şeklinde bir fonksiyon dizisi bulunur. Diferansiyel denklemin varlık ve teklik teoremine göre bu fonksiyon dizisi denklemin çözümü olan $y(x)$ e yakınsar. $y' = f(x, y)$ ve $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemi için $f(x, y)$ fonksiyonu x - y düzleminde (x_0, y_0) noktasını içine alan bir bölgede tek değerli ve üstten sınırlı olsun bu durumda verilen denklem

$$\int_{y_0}^y y' dx = \int_{x_0}^x f(x, y) dx \Rightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

şeklinde yazabilir. Yani

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0 \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y_0) du \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y_1) du \\
&\vdots \\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y_{n-1}) du
\end{aligned}$$

şeklinde yaklaşımlar elde edilir.

2.2.3.9. Adams yöntemi

Çok adımlı yöntemlerin en önemli alt sınıfı Adams Yöntemi olarak bilinir. Açık olanlara Adams – Bashfort; kapalı olanlara ise Adams-Moulton Yöntemi denir. Kat sayılar kararlı ve doğru sonuç için seçilirler.

2.2.3.10. Adams Bashfort yöntemi

S=2 adımda Adams – Bashfort

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \Delta t \cdot \frac{1}{2} [3f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_n, y_n)]$$

S=3 adımda Adams – Bashfort

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \Delta t \cdot \frac{1}{12} [23f(t_{n+2}, y_{n+2}) - 16f(t_{n+1}, y_{n+1}) - 5f(t_n, y_n)]$$

S=4 adımda Adams – Bashfort

$$y_{n+4} - y_{n+3} = \Delta t \cdot \frac{1}{24} [55f_{n+3} - 59f_{n+2} - 37f_{n+1} - 9f_n]$$

S=5 adımda Adams – Bashfort

$$y_{n+5} - y_{n+4} = \frac{\Delta t}{720} [1901f_{n+4} - 2774f_{n+3} + 2616f_{n+2} - 1274f_{n+1} + 251f_n]$$

2.2.3.11. Adams Moulton yöntemi

S=2 adımda Adams – Moulton

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{\Delta t}{12} [5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n]$$

S=3 adımda Adams – Moulton

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{\Delta t}{24} [9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n]$$

S=4 adımda Adams – Moulton

$$y_{n+4} - y_{n+3} = \frac{\Delta t}{720} [251f_{n+4} + 646f_{n+3} - 246f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n]$$

dir. S-adım ve (S-1)-adım Adams-Moulton Yöntemi mukayesesi yapılabilir. İki de f nin S-kere hesaplanabilmesini gerektirmektedir ve ikisinin de aynı doğruluğu vardır.

2.2.3.12. Milne yöntemi

Milne açık (S=4)

$$y_{n+4} - y_n = \frac{4\Delta t}{3} [2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1}]$$

Milne kapalı (S=2) (Simpson Yöntemi)

$$y_{n+2} - y_n = \frac{\Delta t}{3} [f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n]$$

Milne Yöntemi, Adams yöntemlerinden daha doğru olmasına rağmen sınırlıdır çünkü karalı problemlerdir.

2.2.3.13. Mid-Point (orta nokta) yöntemi

$$y_{n+2} - y_n = \Delta t [2f_{n+1}]$$

Bu metod Taylor Seri Yöntemi ve Runge-Kutta Yöntemi ile bağlantılıdır.

2.2.3.14. Geri diferansiyel formül

Bu sınıf genelde adi diferansiyel denklemler de kullanılır.

Geri Euler Yöntemi (S=1)

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t [f_{n+1}]$$

Geri Euler Yöntemi (S=2)

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} \Delta t [f_{n+2}]$$

Geri Euler Yöntemi (S=3)

$$y_{n+3} - \frac{18}{11} y_{n+2} + \frac{9}{11} y_{n+1} - \frac{2}{11} y_n = \frac{6}{11} \Delta t [f_{n+3}]$$

2.2.3.15. Tahmini ve düzeltici yöntemler

Genelde, kapalı projelerin açıklara göre doğruluğu ve karahlığı gelişmiştir. Fakat açık bir tasarımın çözümü nasıl elde edilir. Genelde doğrusal olmayan bir fonksiyon denkleminin y_{n+1} için çözümü bulunamaz.

Örnek 2.5: $y' = e^y$, $t \geq 0$ ve $y(0)=1$ için düşünölsün, bunun için Değiştirilmiş Euler Yöntemi ile

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \frac{1}{2} [f_n + f_{n+1}] \quad \text{ve } f(t, y) = e^y \text{ için}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \frac{1}{2} [e^{y_n} + e^{y_{n+1}}]$$

Bu tam olarak y_{n+1} için çözümlenemez. Popöler strateji y_{n+1} in ilk yaklaşımının y_{n+1}^* başlangıç olarak almak ve bir açık tanımla tahmini al ve kapalı deyim in sağ tarafına uygula

Örnek 2.6: Euler – Değiştirilmiş Trapezoidal Euler tahmini-düzeltilici kısım

$$y_{n+1}^* = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n) \quad (\text{tahmini})$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (\text{düzeltilici})$$

Düzeltilici gerekirse tekrarlanır, Δt azaltılarak daha iyi bir sonuç genelde elde edilir. Tahmini ve düzeltilici aynı doğruluk sırasınca seçilerek iyi bir hata analizi ve akıllı bir kod yaklaşımı dinamik olarak zaman aralıklarını iyi ayarlamak için yapılır (değişken adımlı algoritmalarda)

2.3. Çoklu Adıma Başlama

Çoklu adıma $t = t_0$ dan başlarken s-adım yönteminde kullanmak için

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$ değerleri ile Runge-Kutta (tek adım yöntemi) kullanılır.

2.4. Hata Kaynakları

Diferansiyel denklemlerin nümerik olarak hesaplanmasında oluşan bazı hatalara kesme hataları denir. Bir diferansiyel denklem fark denklemiyle yer değiştirdiğinde t_n den t_{n+1} arasında ileri bir adım atılarak yerel kesme hatası yapılır. Her zaman aralıkta yapılan yerel kesme hataları küresel kesme hatalarını oluşturur ki akümüle kesme hatası olarak bilinir. Bu tip hataları analiz etmek çok zordur.

Kesme hatalarına ilave olarak yuvarlama hataları da yapılır. Bilgisayarlarda, hesap makinelerinde sonlu matematik duyarlılığı bulunur. Bunlara hesaplama hataları ya da kararlılık hataları denir. Çözüme yakınsanacak bir nümerik yöntem zaman adımlarıyla çözüme yaklaştırılır.

Yaklaşık çözümü elde ettikten sonra akümüle kesme hatasını $t_n : e_n = y(t_n) - y_n$ (doğru çözüm-yaklaşık çözüm) zamanında bilmek yararlıdır.

Bunu hesaplamak zordur, çünkü $y(t)$ yi bilinemez. Relatif akümüle kesme hatası önemlidir. Zira doğru çözüm büyüdüğünde belki daha da büyük hatalar tolere edilir.

Fakat eğer gerçek çözüm kaybolursa hata aynı şeyi yapmalıdır ya da doğru çözüm hatalarla boğulur ve çözüm anlamsız olur.

İlgili(fakat-farklı) bir konuda kararlıdır. Kararlı bir yöntem başlangıç verisine sürekli bağlı bir yöntemdir. Eğer bir hesaplamada küçük bir hata gösterilirse, ardışık hesaplamalarda küçük değişikliklere yol açabilir.

2.5. Yerel Kesme Hataları

Yerel kesme hataları diferansiyel denklemin bir fark denklemine yaklaşmasıyla oluşan hataları gösterir. Bir başlangıç değeri alınsa

$y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ ve herhangi bir adımda

$$\psi(\Delta t, f, y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, y_0) = 0$$

Şimdi $y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n)$ ya da $y_{n+1} - y_n - \Delta t \cdot f(t_n, y_n) = 0$

t_n zamanında yerel kesme şu şekillerde

1. Tam çözümün farkta yerleştirilmesi
2. Taylor seri açılımıyla
3. Δt ye bölerek elde edilir.

Eğer ilk terim yerel kesmedeki hata $(\Delta t)^P$ ye bağlı ise zaman adımını mertebesi P dir denir. Yerel kesme hatasını τ_{n+1} olarak gösterelim, öyle ki

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \psi(\Delta t, f, y(t_{n+1}), y(t_n), \dots, y(t_1), y(t_0))$$

olsun. Eğer yerel kesme hatası derecesi Δt^P ise $\tau_{n+1} = O(\Delta t^P)$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ olarak yazılır.

2.6. Tutarlılık

Eğer bir nümerik ifade $\Delta t \rightarrow 0$ yaklaşırken yerel kesme hatası sıfır ise diferansiyel denkleme tutarlıdır denir.

Örnek 2.7: Euler Yöntemi ile yerel kesme hatası $y' = f(t, y)$ kullanarak bulalım. Euler Yöntemi şu şekilde yazılır.

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n) \Rightarrow \frac{1}{\Delta t}(y_{n+1} - y_n) - f(t_n, y_n) = 0$$

Tam çözümde yerine yazılırsa kesme hatası olarak

$$\tau_{n+1} = \frac{-1}{\Delta t}(y(t_{n+1}) - y(t_n) + f(t_n, y(t_n)))$$

olur. Şimdi Taylor serisi olarak $y(t_{n+1}) = y(t_n + \Delta t)$ ifadesi açılırsa

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \cdot y'(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y''(\zeta_n)$$

burada $t_n \leq \zeta_n \leq t_{n+1}$ dir ve τ_{n+1} yerine yazılırsa

$$\tau_{n+1} = \frac{-1}{\Delta t}[(\Delta t \cdot y'(t_n) + 0(\Delta t)^2) + f(t_n, y(t_n))] = -y'(t_n) + 0\Delta t + f(t_n, y(t_n))$$

böylece

$$\tau_{n+1} = 0(\Delta t)$$

elde ederiz.

Örnek 2.8: Euler Yöntemi ile $y' = (\frac{y}{t})^2 + (\frac{y}{t})$ denkleminin fark denklemini yazalım.

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot ((\frac{y}{t})^2 + (\frac{y}{t}))$$

Örnek 2.9: Değiştirilmiş Euler (trapezoidal) Yöntemi ile $y' = -y$, $t \geq 0$ ve $y(0)=1$ şartını sağlayan yaklaşık çözümü bulalım. Zaman adımını $\frac{1}{10}$, 1 ve 2 olarak alalım.

Sonuçlar tam çözümle karşılaştıralım.

Değiştirilmiş Euler Yöntemi şu şekildeydi,

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \frac{1}{2} [-y_n - y_{n+1}] \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = y_n \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) - y_{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y_{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right) = y_n \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = y_n \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2}}{1 + \frac{\Delta t}{2}}\right)$$

olur ve $\Delta t = 0,1$ ise

$$y_1 = y_0 \left(\frac{1 - \frac{0,1}{2}}{1 + \frac{0,1}{2}}\right) =$$

$$y_1 = y_0 \left(\frac{1 - 0,05}{1 + 0,05}\right)$$

$$y_1 = y_0 \left(\frac{0,95}{1,05}\right)$$

$$y_1 = 1,0 \cdot 0,90476 = 0,90476$$

şeklinde bulunur. İşleme devam edilirse

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0,90476 \\
y_2 &= 0,81859 \\
y_3 &= 0,74063 \\
y_4 &= 0,67009 \\
y_5 &= 0,60627
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $\Delta t=1$ alınsın

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 \left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \right) = \\
y_1 &= y_0 \left(\frac{1 - 0,5}{1 + 0,5} \right) \\
y_1 &= y_0 \left(\frac{0,5}{1,5} \right) \\
y_1 &= 1 \cdot \frac{1}{3} = 0,33333
\end{aligned}$$

şeklin de bulunur. İşleme devam edilirse

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0,33333 \\
y_2 &= 0,11111 \\
y_3 &= 0,03703 \\
y_4 &= 0,01234 \\
y_5 &= 0,00411
\end{aligned}$$

olur . Şimdi de $\Delta t=2$ alınsın

$$y_1 = y_0 \left(\frac{1 - \frac{2}{2}}{1 + \frac{2}{2}} \right) = y_0 \left(\frac{1-1}{1+1} \right) = y_0 \left(\frac{0}{2} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

Buradan görüldüğü gibi $\Delta t=2$ iken $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$ bulunur. Tam çözüm $y = e^{-t}$ dir. Tam çözümde t değişkeni ile çözüm karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}
y = e^{-t} \Rightarrow t = 0,1 \Rightarrow y = e^{-0,1} \Rightarrow y = 0,9048 \\
y = e^{-t} \Rightarrow t = 0,2 \Rightarrow y = e^{-0,2} \Rightarrow y = 0,8187 \\
y = e^{-t} \Rightarrow t = 0,3 \Rightarrow y = e^{-0,3} \Rightarrow y = 0,7408 \\
y = e^{-t} \Rightarrow t = 0,4 \Rightarrow y = e^{-0,4} \Rightarrow y = 0,6703 \\
y = e^{-t} \Rightarrow t = 0,5 \Rightarrow y = e^{-0,5} \Rightarrow y = 0,6065
\end{aligned}$$

Örnek 2.10: Değiştirilmiş Euler Yönteminin yerel kesme hatasını bulunuz.

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \Delta t \frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \\
\frac{1}{\Delta t} (y_{n+1} - y_n) - \frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] &= 0
\end{aligned}$$

Yukarıdaki $y' = f(t, y)$ nin $f(t_0) = y_0$ başlangıç değeriyle farkı gösterir. Eğer tam çözümü yukarıdaki ifade de yerine yazılırsa kesme hatası

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - \frac{1}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]$$

Şimdi $y(t_{n+1}) = y(t_n + \Delta t)$ Taylor serisi olarak açarsak

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \cdot y'(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y''(t_n) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} y'''(\zeta_n)$$

burada $t_n \leq \zeta_n \leq t_{n+1}$ dir ve τ_{n+1} yerine yazılırsa

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (y(t_n) + \Delta t \cdot y'(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y''(t_n) + 0(\Delta t)^3 - y(t_n)) - \frac{1}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]$$

$$\tau_{n+1} = y'(t_n) + \frac{\Delta t}{2!} y''(t_n) + 0(\Delta t)^2 - \frac{1}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]$$

Şimdi $y' = f(t, y)$ biliniyor ya da $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$ ve $y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ ifadeleri de yerine yazılırsa

$$\tau_{n+1} = y'(t_n) + \frac{\Delta t}{2!} y''(t_n) + 0(\Delta t)^2 - \frac{1}{2} [y'(t_n) + y'(t_{n+1})]$$

Şimdi de $y'(t_{n+1})$ i Taylor serisi olarak açılırsa

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n + \Delta t) = y'(t_n) + \Delta t \cdot y''(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y'''(\zeta_n) \Rightarrow$$

$$\tau_{n+1} = y'(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot y''(t_n) + 0(\Delta t)^2 - \frac{1}{2} (y'(t_n) + y'(t_n) + \Delta t \cdot y''(t_n) + 0(\Delta t)^2)$$

$$\tau_{n+1} = y'(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot y''(t_n) + 0(\Delta t)^2 - \frac{1}{2} (2y'(t_n) + \Delta t y''(t_n) + 0(\Delta t)^2)$$

$$\tau_{n+1} = y'(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot y''(t_n) + 0(\Delta t)^2 - y'(t_n) - \frac{\Delta t}{2} y''(t_n) - \frac{0(\Delta t)^2}{2}$$

$$\tau_{n+1} = \frac{0(\Delta t)^2}{2} = 0(\Delta t)^2$$

Böylece yerel kesme hatasının derecesi 2 olur.

2.7. Taylor Serisi Yöntemleri

Basit Euler Yöntemi, Taylor serisinin ilk iki terimini kullandığını hatırlayalım.

Yüksek dereceli Taylor Serisi k gibi daha fazla terimi içerir. Şimdi $t_n \leq \zeta_n \leq t_{n+1}$

olmak üzere

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \cdot y'(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y''(t_n) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} y'''(t_n) + \dots + \frac{(\Delta t)^k}{k!} y^{(k)}(t_n) + \frac{(\Delta t)^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\zeta_n)$$

Bunu kullanmak için $y(t)$ nin daha büyük türevlerine ihtiyacımız olabilir. Fakat orijinal Adi Diferansiyel Denklem $y' = f(t, y)$ nin t ye göre türevi alırsak

$$y' = f(t, y), \quad y'' = f'(t, y), \quad y''' = f''(t, y), \quad \dots, \quad y^{(k)} = f^{(k-1)}(t, y)$$

$f(t, y)$ nin fonksiyonel formunu biliniyor ve prensipte türevi alınabilir. Taylor açılımının türevi alınırsa,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \cdot f(t_n, y(t_n)) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} f'(t_n, y(t_n)) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} f''(t_n, y(t_n)) + \dots$$

$$\dots + \frac{(\Delta t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-2)}(t_n, y(t_n)) + \frac{(\Delta t)^k}{k!} f^{(k-1)}(t_n, y(t_n)) + \frac{(\Delta t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(\zeta_n, y(\zeta_n))$$

$y(t_n)$ yaklaşımını elde etmek için y_n kullanılırsa, fark metodu k mertebesinde Taylor Serisi Yöntemini verir ve yerel kesme hatası

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \cdot f(t_n, y_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} f'(t_n, y_n) + \dots + \frac{(\Delta t)^k}{k!} f^{(k-1)}(t_n, y_n)$$

$$\frac{(\Delta t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(\zeta_n, y(\zeta_n))$$

Not :

1.) Taylor Serisi Yönteminin kullanılmasının avantajı yüksek derecede doğruluk vermesidir.

2.) Taylor Serisi Yönteminin kullanılmasının dezavantajı ise $f(t, y)$ nin türevlerinin hesaplanması ve bulunmasıdır. Pratikte bu zaman alıcı bir çalışmadır. Sonuç olarak çok nadir kullanılır

3.) Genelde $\frac{df}{dt}$ hesaplanması $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$ zincir kuralının kullanılmasını gerektirir.

Örnek 2.11: $f = f(t, y)$ için $\frac{dy}{dt}$ ve $\frac{d^2 f}{dt^2}$ ifadelerini hesaplayınız.

Şayet $f = f(t, y) = t^2$ ise $f' = 2t$, $f'' = 2$, $f''' = 0$ yani $\forall k > 2$ için $f^{(k)} = 0$ dir.

Eğer $f = f(t, y) = y^2$ olsun burada $y = y(t)$ ve $f' = 2y \frac{dy}{dt} = 2yy' = 2yf$ dir.

Yüksek türevlerde operatör $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y}$ ve örneğin

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

2.8. Runge – Kutta Yöntemi

Runge-Kutta Yöntemi Taylor Serilerinin daha yüksek doğruluk derecelerini kullanır. $f(t, y)$ türevlerini kaldırarak işlem yapılır. Bu işlem $f(t, y)$ nin ilk değerlerinde yaklaştırma kullanılarak $[t_n, t_{n+1}]$ zaman aralığında yapılır. Runge-Kutta Yöntemi tek adımlı olsa da çok aşamalıdır.

Runge-Kutta türevlerinin bulunması $f(t, y)$ nin iki değişkeninin Taylor Serisi açılımıdır. Bir kısmı cebir gerektirir, böylece Taylor Serisi Yönteminin doğruluk derecesiyle örtüşür.

İkinci derecede Runge-Kutta Yöntemi aslında bir iterasyonla değiştirilmiş Euler Yöntemi olarak gösterilir. Euler Yöntemi burada predictor olarak kullanılmıştır.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + \Delta t f(t_n, y_n))]$$

2.9. Orta Nokta Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

2.10. Heun Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{4} [f(t_n, y_n) + 3f(t_n + \frac{2}{3}\Delta t, y_n) + \frac{2}{3}\Delta t f(t_n, y_n)]$$

2.11. Popüler Runge Kutta 4

En popüler Runge-Kutta k_1, k_2, k_3, k_4 kullanılarak yazılır.

$$k_1 = \Delta t f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = \Delta t f(t_{n+1}, y_n + k_3) \quad (t_{n+1} = t_n + \Delta t)$$

doğruluk derecesi 4 olan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

şeklinde bulunur k_i değerleri iç içe geçmiş f fonksiyonunun yazılmasını ortadan kaldırmak için kullanılmıştır.

Örnek 2.12: Başlangıç değer problemi $y' = -y + 1$, $0 \leq t \leq 1$ ve $y(0)=0$ ele alınarak

a.) tam çözümü

b.) $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ noktalarındaki tam çözümü

c.) Runge-Kutta dördüncü derece metodu ve $\Delta t = 0,1$ için yaklaşık çözüm

d.) Euler Metodu ile $\Delta t = 0,1$ ve $\Delta t = 0,025$ için yaklaşık çözümü

e.) Değiştirilmiş Euler Metodu ile $\Delta t = 0,1$ ve $\Delta t = 0,05$ için yaklaşık çözümü hesaplayınız.

Çözüm:

a.) Tam çözüm $y = 1 - e^{-t}$ dir.

b.) $y(0,1)=0,095163$

$$y(0,2)=0,18269$$

$$y(0,3)=0,259182$$

$$y(0,4)=0,32968$$

$$y(0,5)=0,393469$$

c.) $f(t_n, y_n) = -y_n + 1$ ve Runge-Kutta dörd $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ idi

$$k_1 = (0,1)(-y_n + 1) \Rightarrow k_1 = (0,1)(-0 + 1) = 0,1$$

$$k_2 = (0,1)\left(-\left(y_n + \frac{k_1}{2}\right) + 1\right) \Rightarrow k_2 = (0,1)\left(-\left(0 + \frac{0,1}{2}\right) + 1\right) = (0,1)(0,95) = 0,095$$

$$k_3 = (0,1)\left(-\left(y_n + \frac{k_2}{2}\right) + 1\right) \Rightarrow k_3 = (0,1)\left(-\left(0 + \frac{0,095}{2}\right) + 1\right) = (0,1)(0,9525) = 0,09525$$

$$k_4 = (0,1)\left(-\left(y_n + k_3\right) + 1\right) \Rightarrow k_4 = (0,1)\left(-\left(0 + 0,09525\right) + 1\right) = (0,1)(0,90475) = 0,090475$$

Böylece

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(0,1 + 2(0,095) + 2(0,09525) + 0,090475) = 0,0951625$$

görüldüğü gibi bu değer yukarıda bulunan gerçek çözüm değerine oldukça yakındır.

Benzer şekilde y_2, y_3, y_4, y_5 değerleri de hesaplanır. Sonuç olarak dördüncü dereceden Runge Kutta Yöntemi ile bulunan değerler gerçek çözüme çok yakındır.

d.) Euler Yöntemi ile $\Delta t = 0,1$ iken

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot (-y_n + 1) \Rightarrow$$

$$y_1 = 0 + (0,1) \cdot (-0 + 1) \Rightarrow y_1 = 0,1$$

$$y_2 = y_1 + (0,1).(-y_1 + 1) \Rightarrow y_2 = 0,1 + (0,1)(-0,1 + 1) \Rightarrow y_2 = 0,19$$

$$y_3 = 0,19 + (0,1).(-0,19 + 1) \Rightarrow y_3 = 0,271$$

$$y_4 = 0,271 + (0,1).(-0,271 + 1) \Rightarrow y_4 = 0,3439$$

$$y_5 = 0,40951$$

Euler Yöntemi ile $\Delta t = 0,025$ iken

$$y_1 = 0 + (0,025).(-0 + 1) \Rightarrow y_1 = 0,025$$

$$y_2 = 0,025 + (0,1)(-0,025 + 1) \Rightarrow y_2 = 0,049375$$

$$y_3 = 0,049375 + (0,1).(-0,049375 + 1) \Rightarrow y_3 = 0,0731406$$

$$y_4 = 0,0731406 + (0,1).(-0,0731406 + 1) \Rightarrow y_4 = 0,096312109$$

$$y_5 = 0,118904306$$

Sonuç olarak $\Delta t = 0,025$ değerleri $\Delta t = 0,1$ değerlerinden daha doğrudur.

e.) Değiştirilmiş Euler Metodu ile $\Delta t = 0,1$ iken

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \frac{1}{2} [(-y_n + 1) + (-y_{n+1} + 1)]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} (-y_n) + \frac{\Delta t}{2} (-y_{n+1}) + \Delta t$$

$$y_{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right) = y_n \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) + \Delta t$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) + \Delta t}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = \frac{2\left(y_n \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) + \Delta t\right)}{(2 + \Delta t)}$$

$$y_1 = \frac{2(0(1 - \frac{0,1}{2}) + 0,1)}{(2 + 0,1)} \Rightarrow y_1 = 0,095238$$

$$y_2 = \frac{2((0,95238)(1 - \frac{0,1}{2}) + 0,1)}{(2 + 0,1)} \Rightarrow y_2 = 0,1814$$

$$y_3 = \frac{2((0,1814)(1 - \frac{0,1}{2}) + 0,1)}{(2 + 0,1)} \Rightarrow y_3 = 0,2594$$

benzer şekilde $y_4 = 0,3299$ ve de $y_5 = 0,3937$ olarak bulunur. Görüldüğü gibi sonuçlar oldukça yakın gerçekleşti.

Değiştirilmiş Euler Yöntemi ile $\Delta t = 0,05$ iken

$$y_1 = \frac{2(0(1 - \frac{0,05}{2}) + 0,05)}{(2 + 0,05)} \Rightarrow y_1 = 0,04878$$

$$y_2 = \frac{2((0,04878)(1 - \frac{0,05}{2}) + 0,05)}{(2 + 0,05)} \Rightarrow y_2 = 0,09518$$

$$y_3 = 0,1393 \text{ ve } y_4 = 0,1813$$

Yine görüldüğü gibi Δt değerleri küçüldükçe çözüme daha yakın değerler elde edildi. $\Delta t = 0,1$ olduğunda Euler Yöntemi daha da iyi sonuç verdi.

BÖLÜM 3. LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3.1. Lineer Diferansiyel Denklemler

Burada lineer eşitlikler sistemlerini sabit katsayılarla ifade edelim bu sistemler bağımsız olarak ele alınırlar ve bu da bağımsız değişken t nin açık olarak gösterilmediğini ifade eder. Bu şekildeki bir sistem aşağıdaki gibi görünür.

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

Vektör matris gösterimi de basitçe $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ ve $X' = (x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')^T$ olduğu yerde şöyledir.

$$X' = AX \quad (2)$$

3.2. Özdeğerler ve Özvektörler

Şimdi V nin sabit vektör olduğu $X(t) = e^{\lambda t}V$ şeklindeki vektörle çözmeye çalışılsın. Bu deneme çözümünü $X' = AX$ eşitliğinde yerine koyulursa

$$\lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}AV \quad (3)$$

eşitliğini elde edilir. Böylelikle eğer

$$\lambda V = AV$$

olursa $e^{\lambda t}V$ vektör fonksiyonu aslında $X' = AX$ eşitliğinin çözümü olacaktır. Şimdi de kanıtladığımız teoremi ifade edilsin.

Teorem 3.1.

Eğer λ da A matrisinin bir özdeğeri ise ve V de ona karşılık gelen uygun özvektörse $X(t) = e^{\lambda t}V$ eşitliği $X' = AX$ denkleminin bir çözümüdür. [4]

Bu teorem $X' = AX$ diferansiyel eşitliğini çözenin A'nın özdeğerleri ve özvektörleri hakkında biraz bilgi sahibi olunması gerektiğini gösterir. Buna ek olarak benzer matrisler teorisi bize değişkenleri değiştirerek lineer diferansiyel eşitlikler sisteminin nasıl basitleştirebileceğini gösterir.

Şimdi bu konular ele alınarak $X' = AX$ eşitliğinin en iyi ilişki durumu teorem 2.2 ile tanımlansın.

Teorem 3.2

$n \times n$ A matrisi $AV_i = \lambda_i V_i$ ile $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ gibi çizgisel lineer bağımsız özvektörlere sahipse $X' = AX$ denkleminin çözüm aralığı

$$X_i = e^{\lambda_i t} V_i \quad . \quad 1 \leq i \leq n$$

dir. [4]

İspat:

Bu seri $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ çizgisel olarak bağımsızdır; çünkü $1 \leq i \leq n$ için

$\sum_{i=1}^n c_i X_i = 0$ ifadesinden dolayı $\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i = 0$, $c_i e^{\lambda_i t} V_i = 0$ ve $c_i = 0$ dır.

Sorudaki serinin $X' = AX$ eşitliğinin çözüm aralığını kapsadığı kanıtlamak için X in herhangi bir çözüm olduğunu düşünelim. R^n ya da \mathbb{C}^n nin elemanı olarak $X(0)$ başlangıç değer vektörü, $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ nin bir lineer kombinasyonudur.

Diyelim ki;

$$X(0) = \sum_{i=1}^n c_i V_i$$

$Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ yi tanımlarsak

$$Y' = \sum_{i=1}^n c_i X_i' = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i e^{\lambda_i t} V_i = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} A V_i = A \left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right) = AY$$

olur.

Böylelikle X ve Y diferansiyel denklemin çözümleri olur ve ikisi de aynı başlangıç değerine sahiptir. $y(0)=x(0)$ başlangıç değeri teoreminin kendi türünde tek olması sayesinde $Y=X$ ve diğer bir deyişle

$$X = \sum_{i=1}^n c_i X_i$$

olduğu sonucuna varılabilir..

Eğer A matrisi teorem 2.2 de belirtilen özelliklere sahipse, sütunları $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ vektörleri olan tekil olmayan bir P matrisi olması gerekir. $AV_i = \lambda_i V_i$ eşitliği matris gösterimine şu şekilde aktarılır

$$AP = P\Lambda \quad (4)$$

Eğer Λ köşegen matrisinin köşegen sırasında $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ elemanları olduğunda bağımlı değişkendeki değişikliğin $X = PY$ şeklinde tanımlandığı varsayalım. P tekil matris olduğu için X den Y yi elde edebiliriz. Şimdi Y aşağıdaki özelliklere sahip olur.

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = \Lambda Y \quad (5)$$

Bu yüzden Y nin diferansiyel eşitliği X inkinden çok daha kolaydır. Çünkü bir köşegen matristir. $Y' = \Lambda Y$ sistemindeki bu ayrı eşitlikler bir araya gelemez ve ayrı ayrı çözülebilirler.

Örnek 3.1:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve $X(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ olduğunda $X' = AX$ başlangıç değer problemini

çözünüz.

Çözüm:

$A - \lambda I$ matrisi $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$ dir ve determinanı da A nın polinom

karakteristiğidir.

$$(1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

Bu polinomun kökleri A nın özdeğerleridir.

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$$

$AV_i = \lambda_i V_i$ eşitliğini çözerek bunların her biri için özvektör bulunur. Bu özvektörleri P matrisinde yerine koyulursa

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve daha sonra P matrisinin tersini

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Eğer $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)^T$ ise o zaman Y nin başlangıç değer problemi

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğu her yerde $Y' = AY$ olur. Böylelikle

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 0 \\ y_3' = -y_3 \end{cases} \quad \text{ve} \quad Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bunun çözümü ise

$$y_1 = 8e^t, y_2 = 7, y_3 = -3e^{-t}$$

şeklinde gerçekleşir.

$X = PY$ olduğu için, $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ için çözümü

$$x_1 = 8e^t - 3e^{-t} \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 6e^{-t}$$

olur.

3.3. Üstel Matris

$X' = AX$ sistemin çözmenin daha uygun bir yöntemi vardır. Bu yöntem sayesinde çözümü sayısal olarak hesaplamak istediğimiz sürece A nın özdeğerlerine başvurmaya gerek olmayacak. Buna üslü matrisi tanımlayarak başlanabilir..

Tanım 3.1.

Eğer A matrisi kareyse

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots \quad (6)$$

eşitliğini kurar. Bu tanım standart serilerde

$$e^Z = I + Z + \frac{1}{2!}Z^2 + \frac{1}{3!}Z^3 + \dots \quad (7)$$

karmaşık değişkenin yerine bir matris koyarak oluşturulur. e^A da serilerin birbirine yaklaştığını görmek için \mathbb{C}^n üzerinde herhangi bir değer alınır ve aşağıdaki alt matris değerini $n \times n$ tipindeki matrisler için kullanılır. Serinin sonu aşağıdaki gibi hesaplanabilir. [4]

$$\left\| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \quad (8)$$

Bu son ifade $Z = \|A\|$ olduğunda sıradan üslü ifadenin sonu olur. Bu yüzden e^A serisinin sonu $m \rightarrow \infty$ olarak 0 a kadar gider.

Bu yargı verilen değerlere göre $n \times n$ tipindeki matrislerin aralık bütünlüğü olarak bilinir. Eğer t gerçek değişkense $tA = At$ olur ve bu tanım

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad (9)$$

sonucuna götürür. Serideki t ye göre fark ve bunun basitleştirilmiş hali bize

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad (10)$$

eşitliğini verir.

Teorem 3.3.

Başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) \end{cases}$$

$$X(t) = e^{At} X(0)$$

dir. [4]

3.4. Köşegen Matris ve Köşegenleştirilebilen Matrisler

Pratikte önceki sonucu kullanmak için üslü matrisi daha iyi bir şekilde hesaplamak gerekmektedir. Bu işleme A nın köşegen matris olduğu durumlarla başlansın. Eğer $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ ise $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \dots, \lambda_n^k)$ olur. Basit bir şekilde kanıtlanmış olduğu gibi bu yüzden böyle bir A matrisi için

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \dots, \lambda_n^k)$$

$$= \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \quad (11)$$

dir. Bu özel durumda $X' = AX$ diferansiyel denkleminin çözümü

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} x_i(0) \quad (1 \leq i \leq n)$$

elemanlarına sahiptir.

Burada belirtilen analiz bizi A nın köşegen olmadığı ama köşegenleştirilebilir olduğu duruma kadar götürür. Bu terim A nın köşegen matrise benzer olduğu anlamına gelir ya da başka bir ifadeyle herhangi bir köşegen Λ matrisi ve herhangi bir tekil olmayan P matrisi için $P^{-1}AP = \Lambda$ olması demektir. Eğer bu doğrudursa $X = PY$ değişkenindeki değişim $X' = AX$ diferansiyel denklemini $Y' = \Lambda Y$ ye dönüştürür. Başlangıçtaki $X(0)$ durumu $Y(0) = P^{-1}X(0)$ olur ve çözüm

$$X = PY = P(e^{\Lambda t} P^{-1} X(0)) = P \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) P^{-1} X(0) \quad (12)$$

olur.

3.5. Jordan Blokları

A nın köşegenleştirilemez olma durumunu şimdiye kadar ertelendi. Bu \mathbb{C}^n in A nın özvektörlerinden oluşan bir dayanağı olmadı anlamına gelir. İki basit örnekle bu durum gösterilebilir.

$$J(\lambda, 2) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad J(\lambda, 3) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$J(\lambda, 3)$ ü daha detaylı bir şekilde incelenirse bu matris üst üçgensel olduğu için onun köşegen elemanları onun özdeğerleri olur. Böylece $J(\lambda, 3)$ tek özdeğere (λ) sahiptir ve bu eşitlikte şu şekilde yazılırsa $J(\lambda, 3)X = \lambda X$, sonuç

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ \lambda x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ \lambda x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

olur. Bu da açıkça $x_2 = x_3 = 0$ olduğunu gösterir ve bu yüzden tek çözüm $X(\beta, 0, 0)^T$ şeklinde olur. Çözümler tek boyutlu aralık oluştururlar. Başka bir deyişle $J(\lambda, 3)$ ün değerleri \mathbb{R}^3 veya \mathbb{C}^3 de sadece tek boyutlu alt aralığını kapsarlar. $J(\lambda, k)$ nın matrisleri her bir $k \geq 2$ için mevcuttur ve hepsi $J(\lambda, 3)$ te gözlemlenen özelliklerle aynı özelliklere sahiptir. Bu matrislere Jordan Blokları denir. Bu konunun ana teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.4.

Her kare matris, köşegeninde Jordan öbeklerine sahip öbek köşegen matrise benzer. [4]

Bu özel şekil verilen matrisin Jordan doğal biçimi teoremi altında bahsedilir. Aşağıda 3×3 tipindeki matrislerin Jordan doğal biçimi örnekleri verilmiştir

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Bunlardan ikincisi, üçüncüsü ve dördüncüsü 2 Jordan bloğuna sahipken birincisi 3 taneye sahiptir. Beşinci matris ise kendisi bir Jordan bloğudur.

Bir Jordan bloğu aşağıdaki biçimde yazılabilir

$$J(\lambda, k) = \lambda I_k + H_k \quad (13)$$

burada I_k , $k \times k$ tipinde ki birim matrisi, H_k de aşağıda şekildeki gibi $k \times k$ tipindeki matrisi gösterir.

$$H_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Bir vektörü H_k ile çarparsak sonucu kolayca görebilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{k-2} \\ \varepsilon_{k-1} \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{k-1} \\ \varepsilon_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Şimdi $H_k^k V = 0$ olduğu aşikardır. H_k nın V ile yapılan her işlemi bir bileşenini sıfırlar. Buradan dolayı H_k nilpotent matristir. $H_k^k = 0$ olur. Bu durum e^{At} yi hesaplarken, A Jordan bloğu olmak şartıyla bize kolaylık sağlayacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} e^{(\lambda I_k + H_k)t} &= e^{t\lambda I_k} e^{H_k t} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t I_k)^j}{j!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t H_k)^j}{j!} \\ &= e^{\lambda t} (I_k + t H_k + \frac{t^2}{2!} H_k^2 + \frac{t^3}{3!} H_k^3 \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} H_k^{k-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

elde ederiz.

Seriler yukarıda ki gibi sonlanır çünkü H_k nın k . kuvvetleri 0 dır. İlerleyen hesaplamada $e^{A+B} = e^A e^B$ formülünden geçerli bir durumu kullanıldı..Şimdi A Jordan bloğuyrsa $X' = AX$ diferansiyel denklemini çözelim. $A = \lambda I_k + H_k$ diyelim teorem 2.3 ü ve denklem (16) yı uygularsak

$$X(t) = e^{At}X(0) = e^{\lambda t} \left(I_k + tH_k + \frac{t^2}{2!}H_k^2 + \frac{t^3}{3!}H_k^3 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}H_k^{k-1} \right) X(0) \quad (17)$$

denklemini elde edilir.

Örnek 3.2: $X' = AX$ başlangıç değer problemini çözünüz..

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad X(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Çözüm:

A matrisi $3I_4 + H_4$ formundadır (17) denkleminle gösterilmiştir

$$X(t) = e^{3t} \left(I + tH_4 + \frac{1}{2}t^2H_4^2 + \frac{1}{6}t^3H_4^3 \right) X(0)$$

$$= e^{3t} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} + t e^{3t} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}t^2 e^{3t} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}t^3 e^{3t} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 + 1.5t + 1.5t^2 + 1.5t^3 \\ 5 + 3t + 4.5t^2 \\ 3 + 9t \\ 9 \end{bmatrix} e^{3t}$$

3.6. Genelleştirilmiş Çözüm

Şimdi A nın sadeleştirilmiş Jordan formuyla ve A yı oluşturan benzer dönüşümle başlayan $X' = AX$ diferansiyel denkleminin çözümünü tanımlamak mümkündür. C , A nın bir sade formu olması şartıyla

$$P^{-1}AP = C$$

Olduğunu kabul edelim. $X = PY$ denkleminde ki değişkenlerin değişimi $Y' = CY$ diferansiyel denkleminin değişimine öncülük eder. $Y' = CY$ diferansiyel denklemi çift olmayan bloklara ayrılabilir. Bunu görebilmek için şu örneğe bir bakalım;

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Burada diferansiyel denklemler

$$y_1' = 5y_1 + y_2$$

$$y_2' = 5y_2 + y_3$$

$$y_3' = 5y_3$$

$$y_4' = 7y_4 + y_5$$

$$y_5' = 5y_5$$

şeklindedir. Eğer ilk üç denklem bir grup olursa kendi aralarında çözümlenebilir ve son iki denklem grubunda kendi aralarında çözümlenebilir. Genel koşul tamamen analogdur. Ve C deki her Jordan bloğu çift olmayan diferansiyel denklemler kümesini verir. Her Jordan bloğuyla (17) deki çözümler gibi bir çözümü elde edilebilir.

Örnek 3.3: Yukarıdaki C matrisini kullanarak başlangıç koşulu $Y(0) = (3, 2, 8, 4, 1)^T$ olan $Y' = CY$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm:

Çift olmayan iki sistem aşağıdaki gibi olsun

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{başlangıç değeri} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_4' \\ y_5' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad \text{başlangıç değeri} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Örnek 3.2 de kullanılan yöntemle aşağıdaki çözümleri elde edilir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= e^{5t} \left(I + tH_3 + \frac{1}{2}t^2H_3^2 \right) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \\ &= e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} + te^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}t^2e^{5t} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= e^{5t} \begin{bmatrix} 3+2t+4t^2 \\ 2+8t \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} &= e^{7t} (I + tH_2) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{7t} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + te^{7t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{7t} \begin{bmatrix} 4+t \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$X' = AX$ lineer diferansiyel denklemin teorisindeki e^{At} üstel ifadesine denklemin temel matrisi denir. Başlangıç değer problemini çözenin anahtarı diferansiyel eşitlikle alakalıdır. Eğer A nın sadeleştirilmiş Jordan C formu biliniyorsa

$$P^{-1}AP = C$$

dönüşümünü ile $X = PY$ yi kullanılarak değişkenler değiştirilebilir. $Y' = CY$ denklemini çözersek X e dönersek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$X = PY = Pe^{Ct}Y(0) = Pe^{Ct}P^{-1}X(0) \quad (18)$$

Başka bir açıdan, çözüm için başka bir form biliniyor, $X = e^{At}X(0)$ olmak üzere denklem (18) ile kıyaslanırsa

$$e^{At} = Pe^{Ct}P^{-1}$$

ifadesi elde edilir. Bu temel matrisi hesaplama yolu olarak göz önüne alınabilir.

3.7. Homejen Olmayan Problem

Kurulan ilke şimdi de homojen olmayan problemlere uygulanırsa

$$X' = AX + W \quad (19)$$

burada W , t nin bir vektör fonksiyonu olabilir. Öncelikle A nın köşegenleştirilebilir olduğu düşünülürse buradan benzerlik dönüşümü $P^{-1}AP = \Lambda$, Λ köşegen matrisini üretir. $X=PY$ deki değişken değişimi (19) u aşağıdaki denkleme dönüştürür.

$$Y' = \Lambda Y + P^{-1}W \quad (20)$$

Bu da aşağıdaki formun tipik bir örneği olan n tane denklemin ayrıştırılmış kümesidir.

$$\eta'(t) = \lambda\eta(t) + g(t) \quad (21)$$

bunun da çözümü

$$\eta'(t) = e^{\lambda t} \left[\eta(0) + \int_0^t e^{-\lambda s} g(s) \right] \quad (22)$$

Örnek 3.4: $X' = AX + W$ denklemini aşağıdaki koşullarla çözünüz..

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad X(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Çözüm:

Sistem aşağıdaki tekil çift olmayan denklemlerden oluşur.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ \sin t \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1' = t^2$$

$$x_2' = x_2 + t$$

$$x_3' = 2x_3 + \sin t$$

Denklem (22) den elde edilen çözümler

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1 \text{ ve } \lambda_3=2 \Rightarrow$$

$$x_1(t) = e^{0t} [X_1(0) + \int_0^t e^{-0s} \cdot s^2 ds] = 5 + \int_0^t s^2 ds = 5 + \frac{1}{3} t^3$$

$$x_2(t) = e^t [X_2(0) + \int_0^t e^{-t} \cdot s ds] = e^t [7 + \int_0^t e^{-s} \cdot s ds] = 8e^t - t - 1$$

$$x_3(t) = e^{2t} [9 + \int_0^t e^{-2s} \cdot \sin s ds] = \frac{46}{5} e^{2t} - \frac{2}{5} \sin t - \frac{1}{5} \cos t$$

Eğer $X' = AX + W$ denklemindeki A matrisi köşegenleştirilebilir değilse sistemi çift olmayan alt sistemlere ayırmak için Jordan sadeleştirme formunu kullanarak değişken değiştirilir. Bu işlem bir tek Jordan bloğuyla gerçekleştirilebilir.

3.8. Adi Türevli Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

3.8.1. Euler yönteminin sistemlere uygulanması

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

sistemi ve $y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, y_3(x_0) = y_{30}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$ başlangıç şartları göz önüne alınsın ve birinci mertebe diferansiyel denklemlerde anlatılan Euler sistemi göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} y_1(x_0 + h) &= y_{10} + h \cdot f_1(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \\ y_2(x_0 + h) &= y_{20} + h \cdot f_2(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \\ &\vdots \\ y_n(x_0 + h) &= y_{n0} + h \cdot f_n(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \end{aligned}$$

Şeklinde bir adım sonraki çözümleri veren formüller yazılabilir.

3.8.2. Taylor seri yönteminin sistemlere uygulanması

Aşağıdaki başlangıç değer problemini göz önüne alarak

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2) & y_1(x_0) &= y_{10} \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2) & y_2(x_0) &= y_{20}\end{aligned}$$

i. noktadaki fonksiyon değerleri belli iken (i+1). noktadaki değerler,

$$\begin{aligned}y_{1,i+1} &= y_{1,i} + h \cdot y'_{1,i} + \frac{h^2}{2!} y''_{1,i} + \frac{h^3}{3!} y'''_{1,i} + \dots \\ y_{2,i+1} &= y_{2,i} + h \cdot y'_{2,i} + \frac{h^2}{2!} y''_{2,i} + \frac{h^3}{3!} y'''_{2,i} + \dots\end{aligned}$$

Şeklinde Taylor seri açılımı yapılarak hesaplanabilir. Formüllerdeki türevler $y'_1 = f_1(x, y_1, y_2)$ ve $y'_2 = f_2(x, y_1, y_2)$ denklemlerinden hesaplanır. Genellikle ikinci türev içeren terimlere kadar olan terimler alınarak hesaplamalar yapılır. N denklemden ibaret sistem ve başlangıç değerleri için formüller;

$$\begin{aligned}y_{1,i+1} &\cong y_{1,i} + h \cdot y'_{1,i} + \frac{h^2}{2!} y''_{1,i} \\ y_{2,i+1} &\cong y_{2,i} + h \cdot y'_{2,i} + \frac{h^2}{2!} y''_{2,i} \\ &\vdots \\ y_{n,i+1} &\cong y_{n,i} + h \cdot y'_{n,i} + \frac{h^2}{2!} y''_{n,i}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

3.8.3. Picard yönteminin sistemlere uygulanması

Picard yöntemini

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z); & y(x_0) &= y_0 \\ z' &= g(x, y, z); & z(x_0) &= z_0 \end{aligned}$$

sistemini uygularsak

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y_{n-1}, z_{n-1}) du \\ z_n(x) &= z_0 + \int_{x_0}^x g(u, y_{n-1}, z_{n-1}) du \end{aligned}$$

temel formülleri elde edilir.

3.8.4. Dördüncü mertebe Runge Kutta yönteminin sistemlere uygulanması

Dördüncü mertebeden Runge Kutta yöntemini

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y, z); & y_1(x_0) &= y_{10} \\ y_2' &= f_2(x, y, z); & y_2(x_0) &= y_{20} \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y, z); & y_n(x_0) &= y_{n0} \end{aligned}$$

sistemine uygularsak

$$\begin{aligned} k_{11} &= h.f_1(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \\ k_{21} &= h.f_2(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \\ &\vdots \\ k_{n1} &= h.f_n(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{12} &= h.f_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{k_{11}}{2}, y_{20} + \frac{k_{21}}{2}, \dots, y_{n0} + \frac{k_{n1}}{2}) \\
k_{22} &= h.f_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{k_{11}}{2}, y_{20} + \frac{k_{21}}{2}, \dots, y_{n0} + \frac{k_{n1}}{2}) \\
&\vdots \\
k_{n2} &= h.f_n(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{k_{11}}{2}, y_{20} + \frac{k_{21}}{2}, \dots, y_{n0} + \frac{k_{n1}}{2}) \\
k_{13} &= h.f_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{k_{12}}{2}, y_{20} + \frac{k_{22}}{2}, \dots, y_{n0} + \frac{k_{n2}}{2}) \\
k_{23} &= h.f_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{k_{12}}{2}, y_{20} + \frac{k_{22}}{2}, \dots, y_{n0} + \frac{k_{n2}}{2}) \\
&\vdots \\
k_{n3} &= h.f_n(x_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{k_{12}}{2}, y_{20} + \frac{k_{22}}{2}, \dots, y_{n0} + \frac{k_{n2}}{2}) \\
&\vdots \\
k_{14} &= h.f_1(x_0 + h, y_{10} + k_{13}, y_{20} + k_{23}, \dots, y_{n0} + k_{n3}) \\
k_{24} &= h.f_2(x_0 + h, y_{10} + k_{13}, y_{20} + k_{23}, \dots, y_{n0} + k_{n3}) \\
&\vdots \\
k_{n4} &= h.f_n(x_0 + h, y_{10} + k_{13}, y_{20} + k_{23}, \dots, y_{n0} + k_{n3})
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_{10} + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}) \\
y_2 &= y_{20} + \frac{1}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}) \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n0} + \frac{1}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})
\end{aligned}$$

şeklinde fonksiyon değerleri elde edilir.

Örnek 3.5: Aşağıdaki şartlarla $X' = AX$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Çözüm: A matrisi köşegenleştirilemez bir matristir bu nedenle A matrisinin sadeleştirilmiş Jordan formuna sahip olup olmadığını Mathematica programı yardımıyla bakılırsa A matrisi şu şekilde yazılabilmektedir.

$$P^{-1}CP = A$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve

$$Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Y' = CY$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$y_1' = -2y_1$$

$$y_2' = 4y_2 + y_3$$

$$y_3' = 4y_3$$

$$y_1' = -2y_1 \Rightarrow y_1 = ae^{-2t}$$

$$y_3' = 4y_3 \Rightarrow y_3 = be^{4t}$$

$y_1(0) = 4$ ve $y_3(0) = 6$ başlangıç değerlerini kullanırsak

$$y_1 = 4e^{-2t}$$

$$y_3 = 6e^{4t}$$

elde edilir.

$$y_2' = 4y_2 + y_3$$

$$y_2' = 4y_2 + 6e^{4t}$$

$$y_2' - 4y_2 = 6e^{4t}$$

Sol tarafın bir çözümünü araştırılsın

$$y_2' - 4y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = c(t).e^{4t}$$

yerine yazarsak

$$c'(t).e^{4t} + 4c(t)e^{4t} - 4c(t)e^{4t} = 6e^{4t}$$

$$c'(t).e^{4t} = 6e^{4t}$$

$$c'(t) = 6 \Rightarrow c(t) = 6t + d$$

$$y_2 = (6t + d).e^{4t}$$

yine başlangıç değeri $y_2(0) = -1$ kullanılırsa $d = -1$ bulunur.

$$y_1 = 4e^{-2t}$$

$$y_2 = (6t - 1)e^{4t}$$

$$y_3 = 6e^{4t}$$

olur. $X = PY$ den,

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

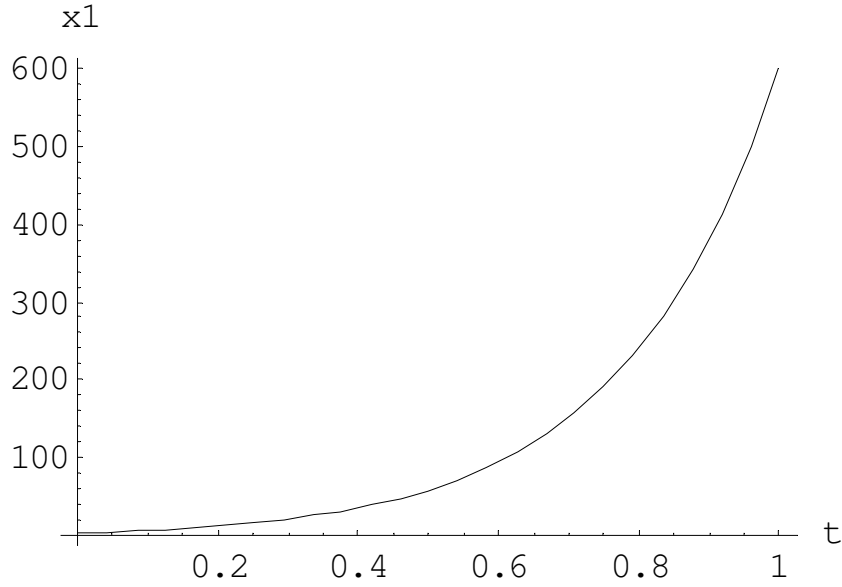
$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4e^{-2t} \\ (6t - 1)e^{4t} \\ 6e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -4e^{-2t} + 6te^{4t} + 5e^{4t} \\ 4e^{-2t} - 6te^{4t} + e^{4t} \\ 4e^{-2t} + 6te^{4t} - e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -4e^{-2t} + 6te^{4t} + 5e^{4t} \\
 x_2 &= 4e^{-2t} - 6te^{4t} + e^{4t} \\
 x_3 &= 4e^{-2t} + 6te^{4t} - e^{4t}
 \end{aligned}$$

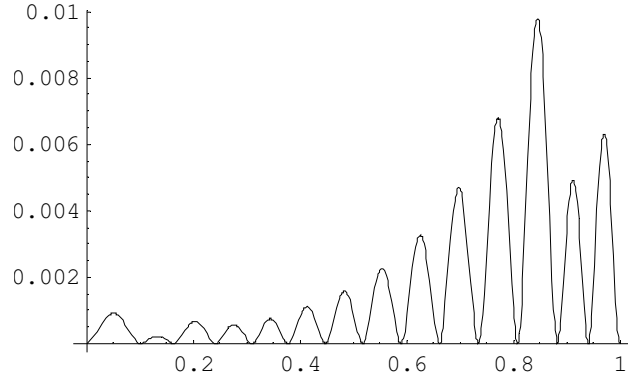
olarak bulunur. Bu problemin analitik çözümünü ve bazı sayısal yöntemlerle çözümünü $[0,1]$ aralığında aynı grafik üzerinde gösterelim.

x_1 için analitik çözümü, Adams yöntemi ile çözümü, BDF yöntemi ile çözümü, Explicit Runge Kutta yöntemi ile çözümü ve İmplicit Runge Kutta Yöntemi ile çözümü aynı grafikte gösterilirse aşağıdaki grafik elde edilir.

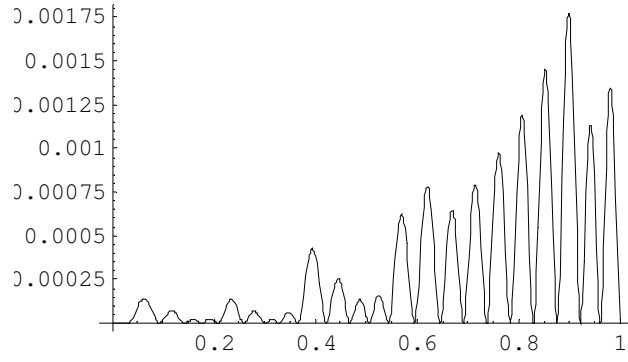


Şekil 3.1. (örnek 3.5 x_1 in çözümü)

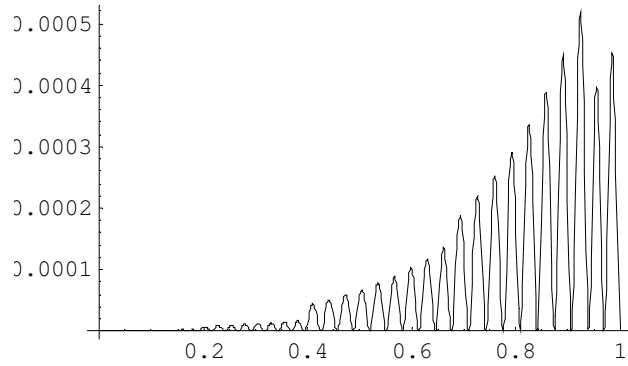
Şekil 3.1 de görüldüğü üzere örnek 3.5 deki sistem için x_1 in çözümleri hemen hemen aynı eğriyi oluşturdular yani çakıştılar. Bunların arasında nasıl bir fark olduğunu gerçek çözüm ile sayısal çözümlerin farkları incelenerek görülebilir



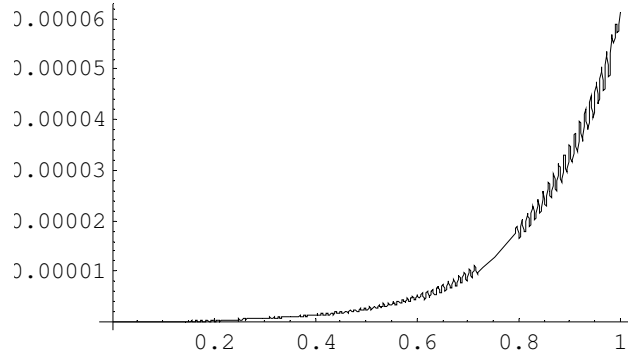
Şekil 3.2.a. (örnek 3.5 x_1 in ERK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.2.b. (örnek 3.5 x_1 in IRK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



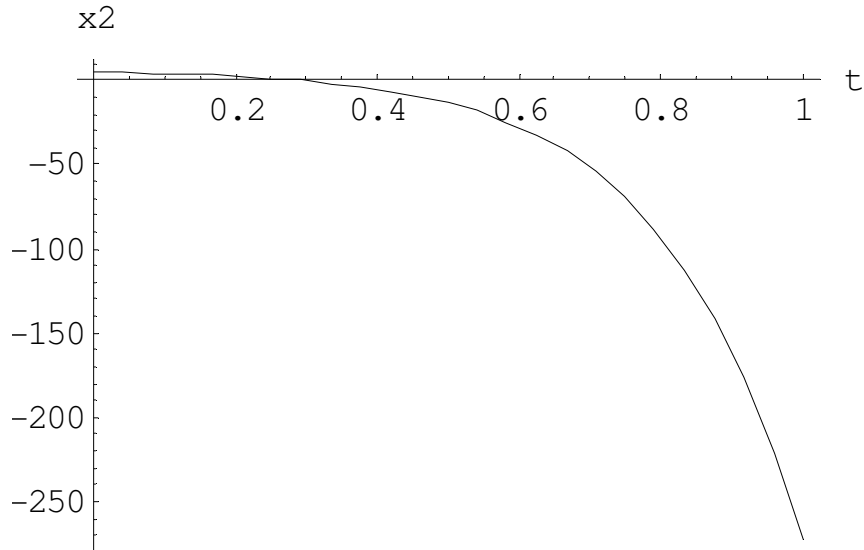
Şekil 3.2.c. (örnek 3.5 x_1 in Adams yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.2.d. (örnek 3.5 x_1 in BDF yöntemi ile analitik çözümün farkı)

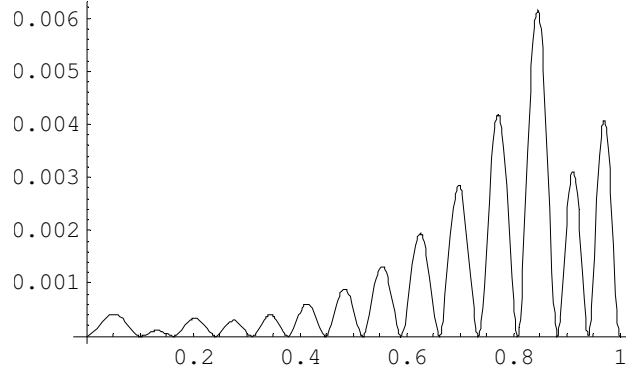
Şekil 3.1 in sonucu çizilen yukarıdaki şekiller bize x_1 için en iyi çözümü bize 600 de 0,00006 hatayla Geri Diferansiyel Formül yani BDF yönteminin verdiğini gösteriyor. Onu sırasıyla 0,0005 hata ile Adams yöntemi, 0,00175 hata ile İRK ve 0,01 hata ile ERK yöntemleri izlemektedir.

İkinci olarak x_2 için analitik çözümü, Adams yöntemi ile çözümü, BDF yöntemi ile çözümü, Explicit Runge Kutta yöntemi ile çözümü ve İmplicit Runge Kutta Yöntemi ile çözümü aynı grafik ile gösterilirse aşağıdaki grafik elde edilir.

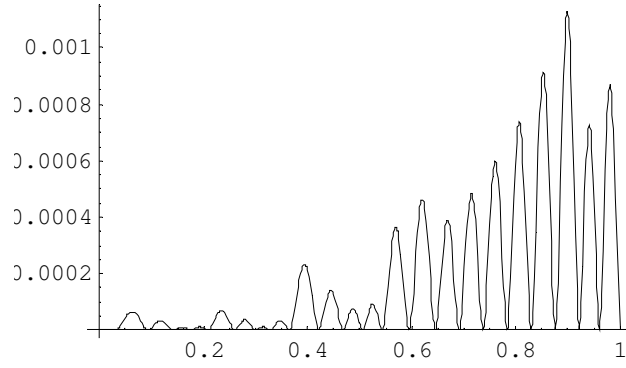


Şekil 3.3. (örnek 3.5 x_2 in çözümü)

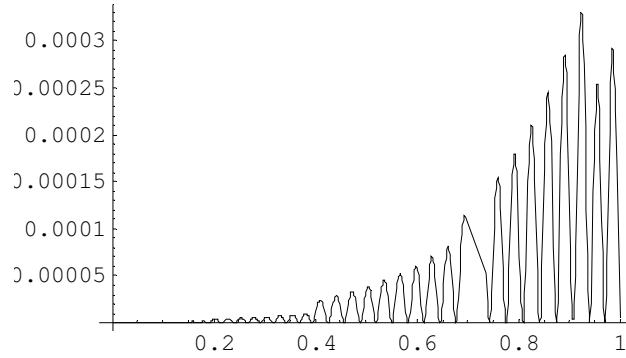
Şekilden görüldüğü gibi x_1 için olduğu gibi x_2 içinde beş çözüm çakıştı. Yani yöntemler bize bu sistem için güzel sonuçlar verdi. Yine farkları incelersek,



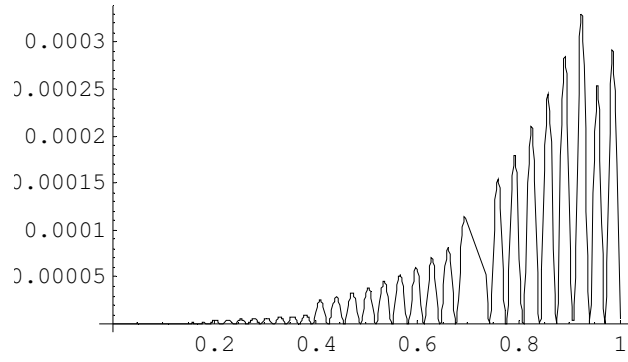
Şekil 3.4.a. (örnek 3.5 x_2 in ERK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.4.b. (örnek 3.5 x_2 in İRK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



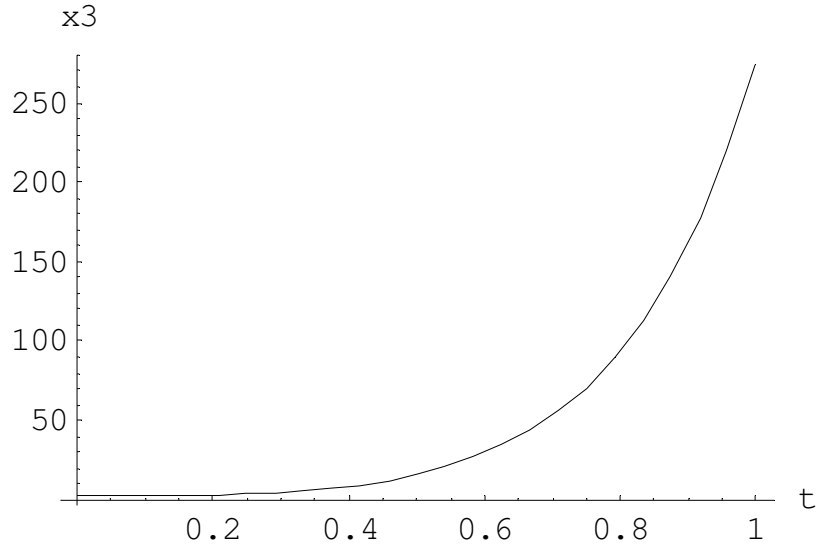
Şekil 3.4.c. (örnek 3.5 x_2 in Adams yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.4.d. (örnek 3.5 x_2 in BDF yöntemi ile analitik çözümün farkı)

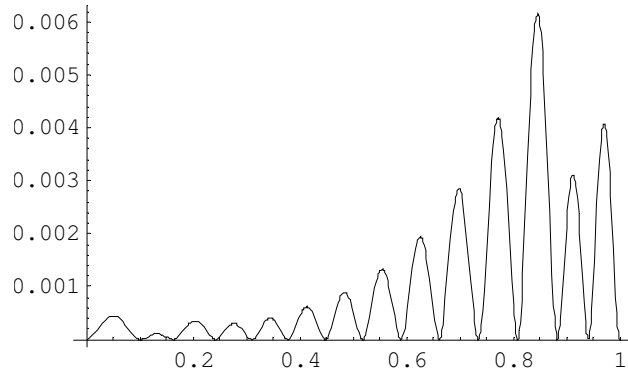
x_2 için en iyi çözümü 600 de 0,0003 hatayla BDF ve Adams yöntemleri verdiler.

Son olarakta x_3 e bakılırsa

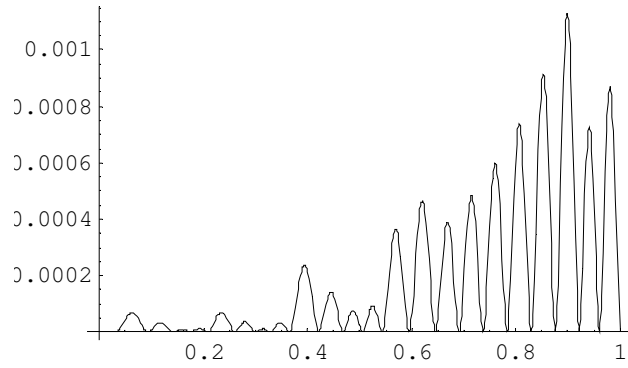


Şekil 3.5. (örnek 3.5 x_3 in çözümü)

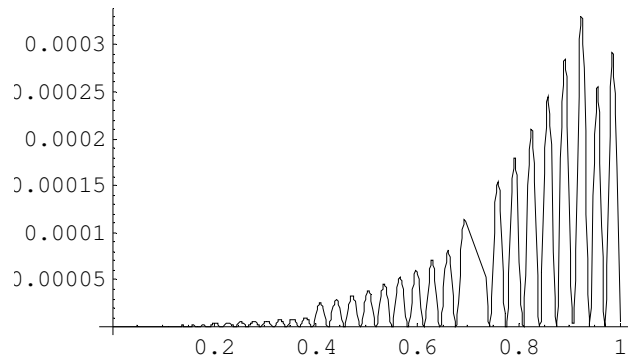
x_1 ve x_2 için olduğu gibi x_3 içinde bu beş yöntemin çözümü çakıştı. En iyi sonucu hangi yöntemin verdiği bakılırsa



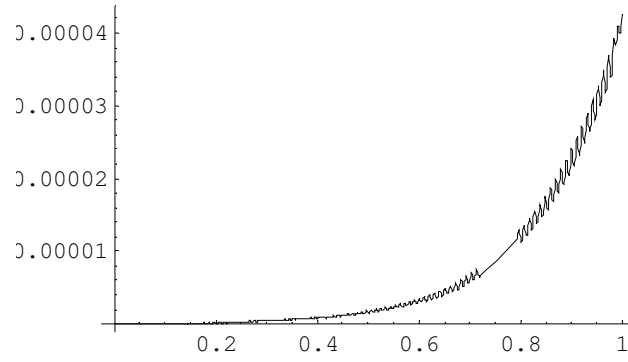
Şekil 3.6.a. (örnek 3.5 x_3 in ERK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.6.b. (örnek 3.5 x_3 in İRK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.6.c. (örnek 3.5 x_3 in Adams yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.6.d. (örnek 3.5 x_3 in BDF yöntemi ile analitik çözümün farkı)

x_3 için ise en iyi çözümü 250 de 0,00004 hatayla yine BDF yöntemi verdi. Diğerleri sırasıyla 0,006 hata, 0,001 hata ve 0,0003 hata ile onu izlediler.

Örnek 3.6: $X' = AX + W$ denklemini aşağıdaki koşullarla çözünüz ve sistemin bazı sayısal çözüm yöntemleriyle yaklaşık değerini bilgisayar yardımıyla $[0,1]$ aralığında hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad X(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Çözüm:

Bireysel denklemler şunlardır

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ \sin t \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1' = 5x_1 + x_2 + t^2$$

$$x_2' = 5x_2 + x_3 + t$$

$$x_3' = 5x_3 + \sin t$$

Burada gerekli olan en alttan başlayıp denklemleri ters sırayla çözmektir.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(5-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1=5, \lambda_2=5 \text{ ve } \lambda_3=5 \Rightarrow$$

$$x_3(t) = e^{5t} \left[9 + \int_0^t e^{-5s} \cdot \sin s \, ds \right] \Rightarrow x_3(t) =$$

$$\left(9 + \frac{1}{16} \right) e^{5t} - \frac{5}{26} \sin t - \frac{1}{26} \cos t$$

$$x_2(t) = e^{5t} \left[7 + \int_0^t e^{-5s} \cdot (x_3(s) + s) \, ds \right] \Rightarrow$$

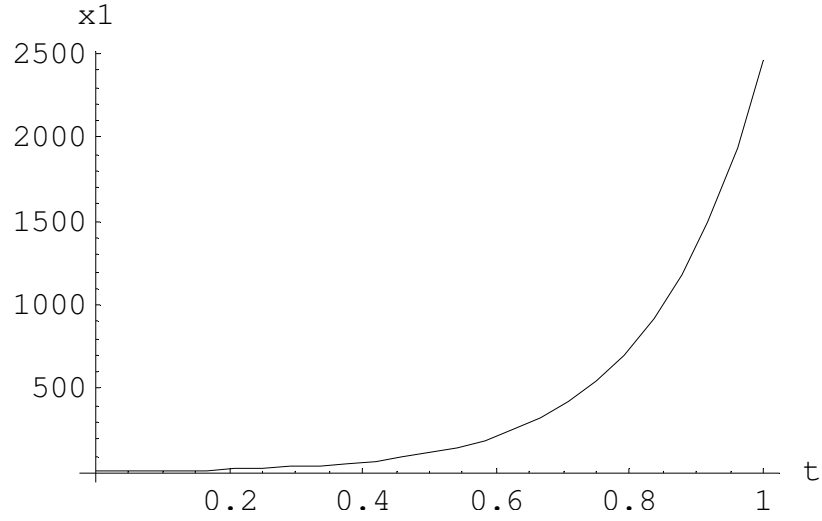
$$x_2(t) = \left(\frac{175}{25} - \frac{10}{26^2} \right) e^{5t} + \frac{216}{52} t e^{5t} + \frac{2}{26^2} (12 \sin t + t \cos t) - \frac{1}{5} t - \frac{1}{25}$$

$$x_1(t) = e^{5t} \left[5 + \int_0^t e^{-5s} \cdot (x_2(s) + s^2) \, ds \right] \Rightarrow$$

$$x_1(t) = \left(5 + \frac{74}{26^3} \right) e^{5t} + \left(7 + \frac{1}{25} - \frac{10}{26^2} \right) t e^{5t} + \frac{216}{52} t^2 e^{5t} - \frac{2}{26^3} (55 \sin t + 37 \cos t) - \frac{1}{5} t^2 - \frac{1}{25} t$$

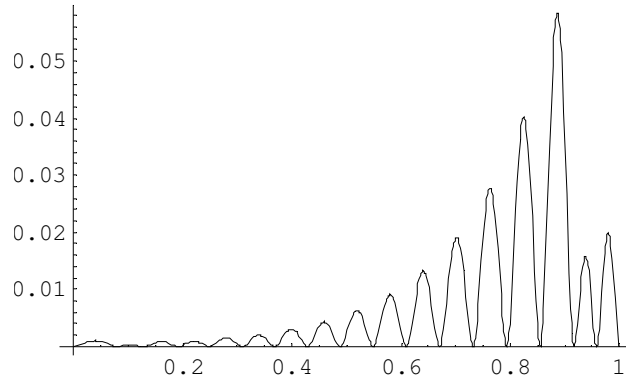
Mathematica programı yardımıyla (0,1) aralığında bazı sayısal çözüm yöntemleriyle hesaplanan x_1, x_2 ve x_3 ün değerleri ile analitik çözüm sonucu bulunan değerlerin farkları grafikler yardımıyla incelenirse aşağıdaki grafikler elde edilir..

Öncelikle x_1 in analitik çözümünü ve diğer sayısal çözüm yöntemleriyle bulunan sonuçları bu aralıkta grafiğe aktarılırsa aşağıdaki grafik elde edilir.

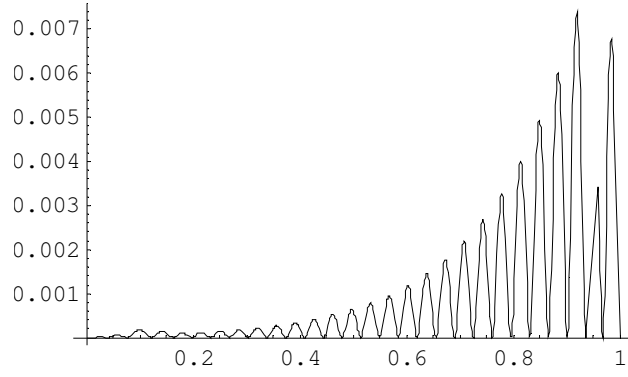


Şekil 3.7. (Örnek 3.6 için analitik çözüm ve sayısal çözümler)

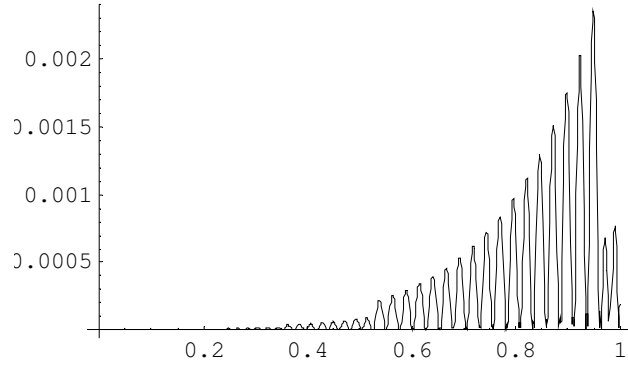
Şekil 3.7 de örnek 3.6 nın analitik çözümü ,Explicit Runge Kutta, İmplicit Runge Kutta, Adams ve BDF yöntemleri ile çözümünü aynı grafikte gösterildi. Grafikten görüldüğü üzere beş çözüm bir önceki örnekte de görüldüğü gibi çakıştı. Sayısal çözüm yöntemleri bize gerçek çözüme yakın çözümler verdi. Şimdi farklar incelenirse,



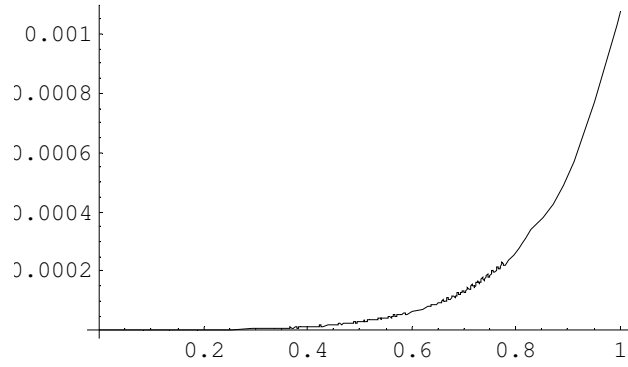
Şekil 3.8.a.(örnek 3.6 x_1 in ERK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.8.b .(örnek 3.6 x_1 in İRK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



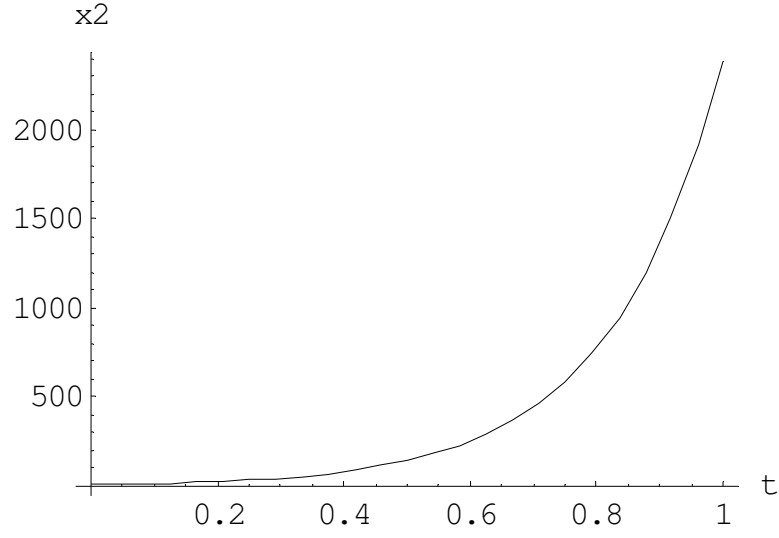
Şekil 3.8.c .(örnek 3.6 x_1 in Adams yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.8.d .(örnek 3.6 x_1 in BDF yöntemi ile analitik çözümün farkı)

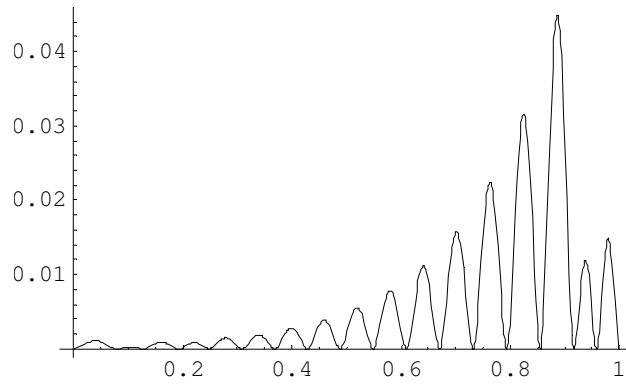
x_1 için en iyi sonucu 2500 de 0,001 fark ile BDF yöntemi sağladı onu sırasıyla 0,002 fark ile Adams yöntemi, 0,007 fark ile İmplicit Runge Kutta yöntemi ve son olarakta 0,05 fark ile Expilicic Runge Kutta yöntemleri izledi.

Şimdi x_2 nin çözümü,

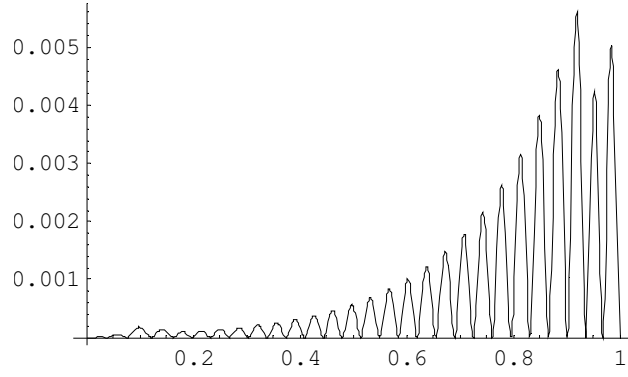


Şekil 3.9. (Örnek 3.6 x_2 için analitik çözüm ve sayısal çözümler)

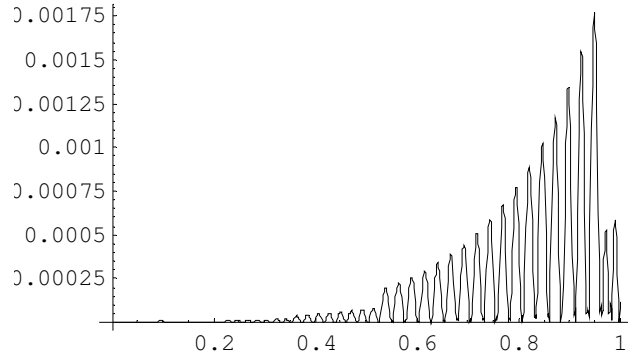
Yine şekilde çözümlerin çakıştığını görülmektedir. Sayısal çözüm yöntemleri bize gerçek çözüme yakın çözümler verdi. Yine farkları incelersek;



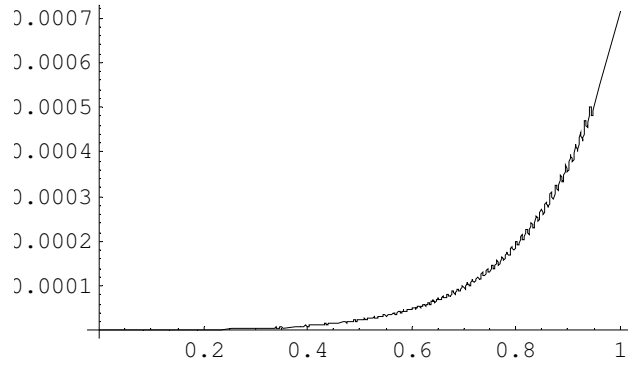
Şekil 3.10.a. (örnek 3.6 x_2 in ERK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.10.b .(örnek 3.6 x_2 in İRK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



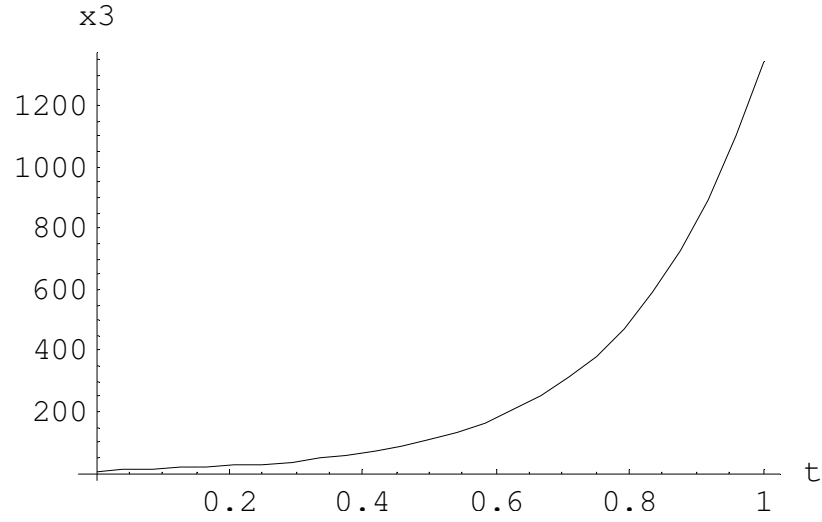
Şekil 3.10.c .(örnek 3.6 x_2 in Adams yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.10.d .(örnek 3.6 x_2 in BDF yöntemi ile analitik çözümün farkı)

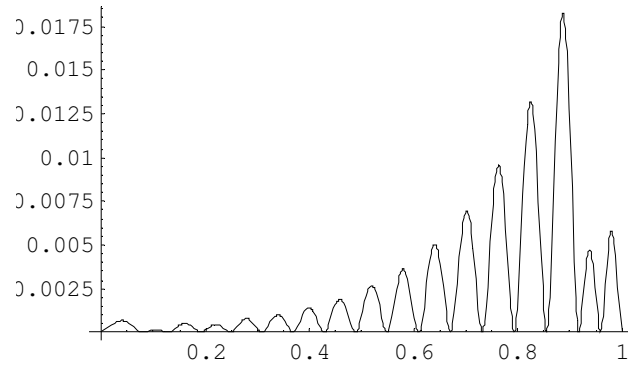
x_2 için en iyi sonucu ise 2000 de 0,0007 fark ile yine BDF yöntemi sağladı onu sırasıyla Adams, İRunge Kutta yöntemleri izledi.

Son olarak da x_3 ün çözümünü bakılırsa,

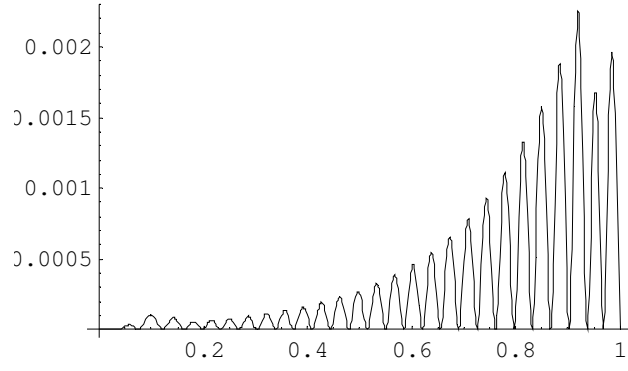


Şekil 3.11. (Örnek 3.6 x_3 için analitik çözüm ve sayısal çözümler)

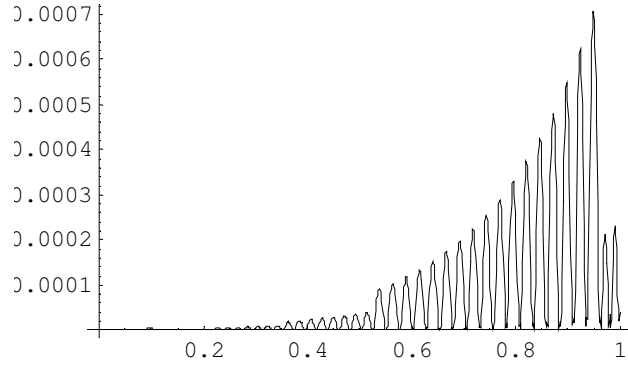
Çözümler ilk ikisi gibi çakıştı. Farklara bakılırsa



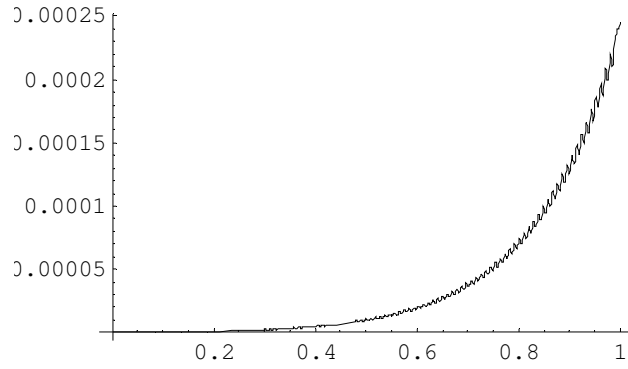
Şekil 3.12.a .(örnek 3.6 x_3 in ERK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.12.b .(örnek 3.6 x_3 in İRK yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.12.c .(örnek 3.6 x_3 in Adams yöntemi ile analitik çözümün farkı)



Şekil 3.12.d .(örnek 3.6 x_3 in BDF yöntemi ile analitik çözümün farkı)

x_3 için ise en iyi sonucu ise 1200 de 0,00025 fark ile yine BDF yöntemi sağladı .

3.9. Mathematicada Bazı Programlar

Expilicite Runge-Kutta yöntemiyle örnek 3.5 i çözen program;

```
Solution1=NDSolve[{ x1'[t]=5*x1[t]+4*x2[t]+3*x3[t], x1[0]=1,
  x2'[t]=-1*x1[t]-3*x2[t], x2[0]=5,
  x3'[t]=x1[t]-2*x2[t]+x3[t], x3[0]=3},
  {x1,x2,x3},{t,0,1},Method->{"ExpiliciteRungeKutta"}]
```

```
A1=-4*Exp[-2*t]+6*t*Exp[4*t]+5*Exp[4*t];
```

```
a1=Plot[Evaluate[First[x1[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel->{"ExpiliciteRungeKutta"},AxesLabel->{"t","x1"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[A1,{t,0,1},AxesLabel->{"t","x1"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x1[t]/.solution1]-A1],{t,0,1},PlotRange->A11];
```

```
A2=4*Exp[-2*t]-6*t*Exp[4*t]+Exp[4*t];
```

```
a2=Plot[Evaluate[First[x2[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel->{"ExpiliciteRungeKutta"},AxesLabel->{"t","x2"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[A2,{t,0,1},AxesLabel->{"t","x2"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x2[t]/.solution1]-A2],{t,0,1},PlotRange->A11];
```

```
A3=4*Exp[-2*t]+6*t*Exp[4*t]-Exp[4*t];
```

```
a3=Plot[Evaluate[First[x3[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel->{"ExpiliciteRungeKutta"},AxesLabel->{"t","x3"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[A3,{t,0,1},AxesLabel->{"t","x3"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x3[t]/.solution1]-A3],{t,0,1},PlotRange->A11];
```

İmplicit Runge-Kutta yöntemiyle örnek 3.5 i çözen program;

```
Solution2=NDSolve[{ x1'[t]=5* x1 [t]+4* x2 [t]+3* x3 [t], x1 [0]=1,
                  x2'[t] = -1* x1 [t]-3* x2 [t], x2 [0]=5,
                  x3'[t] = x1 [t] -2* x2 [t]+ x3 [t], x3 [0]=3},
                  { x1,x2,x3 }, {t,0,1}, Method -> {"İmplicitRungeKutta"}]
```

```
A1= -4*Exp[-2*t] + 6*t*Exp[4*t] + 5*Exp[4*t];
```

```
a1=Plot[Evaluate[First[ x1 [t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel -> {"İmplicitRungeKutta"}, AxesLabel -> {"t","x1"},PlotRange -> A11];
```

```
Plot[A1,{t,0,1},AxesLabel -> {"t","x1"}, PlotRange -> A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[ x1 [t]/.solution1]]-A1],{t,0,1}, PlotRange -> A11];
```

```
A2= 4*Exp[-2*t] -6*t*Exp[4*t] + Exp[4*t];
```

```
a2=Plot[Evaluate[First[ x2 [t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel -> {"İmplicitRungeKutta"}, AxesLabel -> {"t","x2"},PlotRange -> A11];
```

```
Plot[A2,{t,0,1},AxesLabel -> {"t","x2"}, PlotRange -> A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[ x2 [t]/.solution1]]-A2],{t,0,1}, PlotRange -> A11];
```

```
A3= 4*Exp[-2*t] + 6*t*Exp[4*t] -Exp[4*t];
```

```
a3=Plot[Evaluate[First[ x3 [t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel -> {"İmplicitRungeKutta"}, AxesLabel -> {"t","x3"},PlotRange -> A11];
```

```
Plot[A3,{t,0,1},AxesLabel -> {"t","x3"}, PlotRange -> A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[ x3 [t]/.solution1]]-A3],{t,0,1}, PlotRange -> A11];
```

Adams yöntemiyle örnek 3.5 i çözen program;

```
Solution3=NDSolve[{ x1'[t]=5*x1[t]+4*x2[t]+3*x3[t], x1[0]=1,
                  x2'[t] = -1*x1[t]-3*x2[t], x2[0]=5,
                  x3'[t] = x1[t] -2*x2[t]+ x3[t], x3[0]=3},
                  {x1,x2,x3}, {t,0,1}, Method -> {"Adams"}]
```

```
A1= -4*Exp[-2*t] + 6*t*Exp[4*t] + 5*Exp[4*t];
```

```
a1=Plot[Evaluate[First[x1[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel -> {"Adams"}], AxesLabel -> {"t","x1"},PlotRange -> A11];
```

```
Plot[A1,{t,0,1},AxesLabel -> {"t","x1"}, PlotRange -> A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x1[t]/.solution1]-A1],{t,0,1}, PlotRange -> A11];
```

```
A2= 4*Exp[-2*t] -6*t*Exp[4*t] + Exp[4*t];
```

```
a2=Plot[Evaluate[First[x2[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel -> {"Adams"}], AxesLabel -> {"t","x2"},PlotRange -> A11];
```

```
Plot[A2,{t,0,1},AxesLabel -> {"t","x2"}, PlotRange -> A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x2[t]/.solution1]-A2],{t,0,1}, PlotRange -> A11];
```

```
A3= 4*Exp[-2*t] + 6*t*Exp[4*t] -Exp[4*t];
```

```
a3=Plot[Evaluate[First[x3[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel -> {"Adams"}], AxesLabel -> {"t","x3"},PlotRange -> A11];
```

```
Plot[A3,{t,0,1},AxesLabel -> {"t","x3"}, PlotRange -> A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x3[t]/.solution1]-A3],{t,0,1}, PlotRange -> A11];
```

BDF yöntemiyle örnek 3.5 i çözen program;

```
Solution4=NDSolve[{ x1'[t]=5*x1[t]+4*x2[t]+3*x3[t], x1[0]=1,
                  x2'[t]=-1*x1[t]-3*x2[t], x2[0]=5,
                  x3'[t]=x1[t]-2*x2[t]+x3[t], x3[0]=3},
                  {x1,x2,x3},{t,0,1}, Method->{"BDF"}]
```

```
A1=-4*Exp[-2*t]+6*t*Exp[4*t]+5*Exp[4*t];
```

```
a1=Plot[Evaluate[First[x1[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel->{"BDF"}, AxesLabel->{"t","x1"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[A1,{t,0,1},AxesLabel->{"t","x1"}, PlotRange->A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x1[t]/.solution1]-A1],{t,0,1}, PlotRange->A11];
```

```
A2=4*Exp[-2*t]-6*t*Exp[4*t]+Exp[4*t];
```

```
a2=Plot[Evaluate[First[x2[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel->{"BDF"}, AxesLabel->{"t","x2"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[A2,{t,0,1},AxesLabel->{"t","x2"}, PlotRange->A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x2[t]/.solution1]-A2],{t,0,1}, PlotRange->A11];
```

```
A3=4*Exp[-2*t]+6*t*Exp[4*t]-Exp[4*t];
```

```
a3=Plot[Evaluate[First[x3[t]/.solution1]],{t,0,1},
```

```
PlotLabel->{"BDF"}, AxesLabel->{"t","x3"},PlotRange->A11];
```

```
Plot[A3,{t,0,1},AxesLabel->{"t","x3"}, PlotRange->A11];
```

```
Plot[Abs[Evaluate[First[x3[t]/.solution1]-A3],{t,0,1}, PlotRange->A11];
```

BÖLÜM 4. SONUÇLAR

Kitaplarda ve diğer dökümanlarda teorik denklem sistemleri olduğu halde yaşanan hayatta daha çok sayısal çözümlerle karşılaşmaktadır.. Adi türevli pek çok diferansiyel denklemin analitik çözüm yöntemi olmasına karşılık, bir çoğunda bilinen yöntemler yardımıyla çözümü ya mümkün olmamaktadır yada çok zor olmaktadır. Sayısal çözümler her ne kadar sürekli fonksiyonlar ve bunların diferansiyel denklemleri kadar sağlıklı sonuç vermeseler ve hata içerseler bile günlük hayatta çok kullanılmaları dolayısıyla bu çözüm yöntemler irdelenmiştir.

Özellikle son yıllarda gelişen teknoloji sayesinde bilgisayar ile çözüm yapabilme imkanlarının artmasıyla, elemanter yöntemler yardımıyla integral hesabının çok zor olduğu bazı sistemlerin sayısal çözüm yöntemleriyle çözümü mümkün olmaktadır. Bu yöntemlerin bazıları analitik çözümlere oldukça yakın sonuçlar vermektedir. Her yöntem her sistem için uygun olmasa bile bazı programlar sayesinde en uygun yöntem seçilerek işleme devam etmek mümkün olmaktadır. Bu çalışmada bu yöntemleri irdelemeye çalıştık.

Bölüm 3 de bulunan örnek 3.5 ile bir homojen bir sistemin çözümü yapıldı ve sayısal çözüm yöntemleriyle incelendi. Bu problem için bulunan x_1, x_2 ve x_3 ün analitik çözümü ile Mathematica programı yardımı ile bulunan sayısal çözümünün farklarını ayrı ayrı her yöntem için grafik halinde inceledik. Bu örnekte ki x_1 için en iyi sayılacak çözümü Geri Diferansiyel formül yani BDF yöntemi sağladı. Benzer şekilde x_2 için BDF ve Adams yöntemlerinin ikisinde iyi çözümler üretirken x_3 için ise en iyi çözümü yine BDF yöntemi sağladı. Bu örnek sonrasında da örnek 3.6 ile homojen olmayan bir sistem çözüldü ve incelendi. Bu çözüm sonucunda da x_1, x_2 ve x_3 için en iyi sonuçları BDF yöntemi sağladı.

KAYNAKLAR

- [1] ATKINSON, K., Elemantery Nümerical Analysis, 1985
- [2] BOYCE; W.E. and DİPRİMA, D.C., Elemantry Differential Equations and Baundry Valu Problems
- [3] Hermann G., Keese M. A., Steindorf, J., “Lecture notes Introduction to Scientific Computing” , 2004/2005
- [4] KİNCAİD, D. and Cheney, W., Nümerical Analysis of Scintific computing, 1991
- [5] PINKSKY, M., and A., Partial Differantial Equations and Baundry-Value Problems with Applications, Mc Graw-Hill İnternational Editions, 1990
- [6] TÜRKER, E.S., CAN, E., Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Değişim Yayınları,
- [7] CERİT, Cevdet, Çözümlü Diferansiyel Denklem Sistemlei,1998
- [8] TUNCER, Talat, Alıştırmalarla Diferansiyel Denklemler, İstanbul 1969,

ÖZGEÇMİŞ

1978'de Zonguldak Kozlu'da doğdu. 1999'da 19 Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Sakarya'da göreve başladı. Halen Sakarya Adapazarı Atatürk Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.