T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LEGENDRE POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar TEMUR

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR**

Mayıs 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LEGENDRE POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar TEMUR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 06 / 06 /2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Metin BAŞARIR	Doç. Dr. Elman ALİYEV	Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı vererek beni yönlendiren ve çalışmalarım sırasında benden yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR'e en derin teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$L_n(x)$	: Basit Laguerre polinomları
$B(m,n)$	: Beta fonksiyonu
$J_n(x)$	: Birinci Tür Bessel fonksiyonu
$(a)_n$	: Faktöriyel fonksiyonu
$\Gamma(x)$	: Gama Fonksiyonu
$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$	: Hipergeometrik fonksiyon
∇^2	: Laplace Operatörü
$P_n(x)$	: Legendre polinomu
D_x^n	: x e göre n yinci basamaktan türev operatörü
r	: yarıçap

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Legendre Diferensiyel Denklemi, Legendre Polinomları, Laplace denklemi, Küresel koordinatlar, Doğurucu fonksiyon.

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Legendre polinomlarının kullanım alanlarından bahsedilmiş teze giriş yapılmıştır. Ayrıca Legendre polinomları ile ilgili ilk çalışmadan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki ifadesinden yararlanılarak Legendre denklemi elde edilmiştir. Daha sonra Legendre denkleminin çözümleri olan Legendre polinomları üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde Legendre polinomlarının özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde Legendre polinomlarının fiziksel uygulaması üzerinde durulmuştur.

Altıncı bölümde ise tez çalışmasından elde edilen sonuçlar belirtilmiştir.

LEGENDRE POLYNOMIALS

SUMMARY

Key Words: Legendre Differential Equation, Legendre polynomials, Laplace equation, spherical coordinates, Generating Functions.

This thesis is consists of six chapters.

In the first chapter , it is mentioned about the using areas of the polinomials and there is an introduction to the thesis. Furthermore, it is discussed about the first study of the Legendre polynomial.

In the second chapter, main definitions and concepts used in the thesis are given.

In the third chapter, the Legendre equation is obtained by benefiting from the statement of spherical coordinates in the Laplace equation . The Legendre polinomials are emphasized which are the solutions of the Legendre equation.

In the fourth part , the features of the Legendre equation are emphasized.

In the fifth chapter , it is focused on the physical practice of the Legendre polinomials.

Finally in the sixth chapter , the results are stated gained through the study of thesis.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematiksel fizik problemleri çoğu zaman katsayıları değişkenlerine bağlı olan Adi Diferensiyel Denklemler veya Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler yardımıyla ifade edilmektedir. Bu tipteki denklemlerin özelliği araştırma yapılan bölgede veya bölgenin sınır çizgisinin üzerinde katsayıların tekil (singüler) olmasıdır. Yani bölgenin bazı noktalarında katsayıların sıfır olması veya belirsizlik halinde bulunmasıdır. Böyle tipteki denklemlere dönüşen fiziksel problemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zor olduğu gibi bazı durumlarda çözüme ulaşmakta mümkün değildir. Problemin zorluğu, denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde aranmasından kaynaklanmaktadır. Böyle durumlarda ise karşımıza yeni bir problem çıkmaktadır. Bu da denklemin tüm özel durumları için sonsuz serinin yakınsaklığının ispatlanması ve özdeğer fonksiyonlarının ortogonalliğinin gösterilmesidir. Ayrıca matematiksel fizik probleminin çözümünün kararlılığını ispatlamak ve korumakta gerekir.

Bu cins fiziksel problemlere uyan denklemler Bessel, Legendre, Chebyshev-Hermite, Chebyshev- Laguerre tipindeki denklemlerdir. Bu tipteki denklemlere fiziksel problemlerin çözümlerinde sıkça rastlanmaktadır. Örneğin bu uygulama klasik mekanik problemlerinde başlamış, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziği ve termodinamik problemlerinde de kullanılmıştır.

Bu zorlukları aşmak için bilimde birçok önemli özel fonksiyonlar sınıfı oluşturulmuştur. Bunlardan en çok kullanılanı silindirik fonksiyonlar (Bessel, Hankel, Weber, Neuman fonksiyonları) , küresel fonksiyonlar (Legendre polinomları) ve özel polinomlar (Chebyshev-Hermite, Chebyshev- Laguerre polinomları) nın oluşturduğu sınıflardır. Bu tür denklemlerin yardımıyla ve özel fonksiyonların kullanılması ile çeşitli fiziksel olaylarda ve tekniğin önemli problemlerinde yaklaşık çözümler bulunmakta ve problemlere açıklık getirilebilmektedir.

Bu nedenlerle konunun önemi dikkate alınarak bu tezde, Legendre diferensiyel denklemi, onun çözümü olan Legendre polinomları ve Legendre polinomlarının özelikleri incelenerek tek bir kaynakta toplanmıştır.

$\{P_n(x)\}$ Legendre polinomları 1785 yılında Legendre tarafından

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

bağıntısı yardımıyla tanımlanmıştır. 1874 yılında Gegenbauer, Legendre polinomlarını genelleştirmiş ve

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-v} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^v t^n$$

bağıntısını sağlayan cümle için $\{C_n^v(x)\}$ notasyonunu kullanmıştır. Burada v, sıfır ve negatif tamsayı olmayan herhangi bir reel sayıdır.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1. Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin bulunması problemine **Başlangıç Değer Problemi** denir. Verilen şartlara da **Başlangıç Şartları** denir. [2]

Tanım 2.2. Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin bulunması problemine **Sınır Değer Problemi** denir. Verilen şartlara da **Sınır Şartları** denir. [2]

Tanım 2.3. Birinci mertebeden bir diferensiyel denklem aranan fonksiyon ile onun türevine göre lineerse, bu durumda denkleme birinci mertebeden **lineer diferensiyel denklem** denir. [2]

Tanım 2.4. Reel değişkenli f(x) fonksiyonu, h nin komşuluğunda (x-h) nin kuvvetlerine göre Taylor serisine açılabiliyorsa bu fonksiyon h de analitiktir. Bir (a,b) aralığının her noktasında analitik olan bir fonksiyon o aralıkta analitiktir.

Karmaşık değişkenli ve tek değerli bir f fonksiyonu, D nin ancak bazı noktaları hariç diğer noktalarında türevlenebiliyorsa, bu fonksiyon D de analitiktir. Eğer bu fonksiyon D nin bütün noktalarında türevlenebiliyorsa buna düzgün **analitik fonksiyon** denir. Örneğin,

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu, z=1 noktası hariç her yerde analitiktir. [4]

Tanım 2.5. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ denkleminde P(x) ve Q(x) fonksiyonları x_0 noktasında analitik iseler, x_0 noktasına **adi nokta** denir. [2]

Tanım 2.6. Tanım 1.5 deki P(x) ve Q(x) fonksiyonları x_0 da analitik değil iseler bu taktirde x_0 noktasına , $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ denkleminin **tekil nokta**sıdır denir. [2]

Tanım 2.7. λ gerçel (veya karmaşık) parametre olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx} \right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad a \le x \le b \tag{2.1}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. L diferensiyel operatörü

$$Ly = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx} \right) + q(x)y \tag{2.2a}$$

olarak tanımlanırsa (2.1) denklemi bu operatör yardımıyla

$$Ly - \lambda\rho(x)y = 0 \tag{2.2b}$$

biçiminde yazılabilir. Burada L ye ikinci mertebeden **lineer diferensiyel operatör,** λ sayısına **spektral parametre,** $q(x)$ fonksiyonuna ise **potansiyel fonksiyonu** denir.

(2.2a,b) denkleminin

$$\begin{aligned} U_1 y &= A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ U_2 y &= A_2 y(a) + B_2 y'(a) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine **Sturm-Liouville sınır değer problemi** adı verilir. [5]

Tanım 2.8. (2.1) ifadesi, λ spektral parametresine bağlı bir denklemler ailesidir.y(x)=0 fonksiyonu λ nın her bir değerinde denklemi ve verilmiş sınır koşullarını sağladığına göre aşikar bir çözümdür. Eğer bu homojen denklemin, λ nın herhangi bir değerinde (2.3) homojen sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı çözümü varsa, λ nın bu değerine sınır değer probleminin **özdeğeri** , bu özdeğere karşılık gelen çözüme ise **özfonksiyon** denir. [5]

Tanım 2.9. xyz uzayında bir P(x,y,z) noktası verilmiş olsun. P noktasının orjine olan uzaklığı ρ, OP doğru parçasının oz-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü θ olsun. OP doğru parçasının xoy düzlemindeki dik izdüşümü $[OP']$, ve $[OP']$ doğru parçasının ox-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü φ olsun.

$$[OP'] = \rho \sin\theta$$

olduğundan,

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = \rho \cos\theta$$

olur.Böylece xyz-koordinat sisteminden $\rho\theta\varphi$ koordinat sistemine bir bölge dönüşümü elde edilmiş olur. Bu durumda P noktasının $\rho\theta\varphi$ sistemindeki koordinatları ($\rho\theta\varphi$) olur. Bu sayılara P noktasının **küresel koordinatları** adı verilir. [3]

Tanım 2.10. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sabit gerçel sayılar olmak üzere

$$x^n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

şeklindeki diferensiyel denkleme **Euler-Cauchy diferensiyel** denklemi denir. [2]

Tanım 2.11. $A \subset R$ ve V bir vektör uzayı olsun. A nın her bir elemanına V nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren fonksiyona bir **vektör değerli fonksiyon** adı verilir. [2]

Tanım 2.12. F ve G vektör değerli fonksiyonlar olsun.

$\forall$ t$\in$ A için F(t).G(t)=0 ise F ile G , A üzerinde **ortogonaldir**(diktir) denir.

Tanım 2.13.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx} \right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

denklemi uygulamalarda karşılaşılan ve özfonksiyonlarına **özel fonksiyon** denilen bir dizi denklemin genel biçimidir. Regüler Sturm-Liouville probleminden farklı olarak, p(x) fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının uç noktalarında sıfır olması veya bu aralığın sonsuz olması halinde bu denklemler için tanımlanan sınır değer problemi tekil Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır. O halde özel fonksiyonlar, tekil Sturm-Liouville sınır değer probleminin çözümleri olan fonksiyonlardır. [8]

Tanım 2.14. a herhangi bir reel sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere $(a)_n$ **faktöriyel fonksiyonu**,

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) \qquad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(a)_n$ sembolü, a çarpanından başlayarak her bir çarpanın bir öncekinden bir fazla olduğu n tane çarpanın çarpımını göstermektedir. Özel olarak,

$$(a)_0 = 1 \qquad a \neq 0 \text{ için}$$

olarak tanımlanır. Faktöriyel fonksiyonu

$(1)_n = 1.2.3\ldots n = n!$ için bilinen faktöriyelin genişletilmişidir. [9]

Tanım 2.15. $x > 0$ olmak üzere **Gamma fonksiyonu**

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

ile tanımlanır.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x > 0$$

bağıntısı vardır ve bu bağıntının tekrar tekrar kullanılmasıyla bir n tamsayısı için

$$\begin{aligned} \Gamma(a+n) &= (a+n-1)\,\Gamma(a+n-1) \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\,\Gamma(a+n-2) \\ &\ \vdots \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a)\Gamma(a) \\ &= (a)_n \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Faktöriyel fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \qquad n \text{ tamsayı} \quad n > 0 \text{ ve } a > 0$$

bağıntısı vardır. $n \geq 1$ tamsayısı için $x = n$ alırsak,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\Gamma(1)$$

ve

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$$

olduğundan

$$\Gamma(n+1) = n!$$

bulunur. [9]

Tanım 2.16. p bir sabit olmak üzere,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad (2.4)$$

diferensiyel denklemine p inci mertebeden **Bessel denklemi** denir. (2.4)
denklemin çözümü

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

şeklindedir. Eğer $a_0 = 1$ olarak alınırsa, denklemin özel çözümü, J_0 ile gösterilen ve **sıfırıncı mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonu** olarak adlandırılan

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

fonksiyonudur. [9]

Tanım 2.17. a, b, c sabit parametreler olmak üzere,

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{2.5}$$

denklemine **Hipergeometrik denklem** adı verilir. (2.5) denkleminin bir özel çözümü

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}$$

şeklindedir. Bu özel çözüm **hipergeometrik fonksiyon** olarak adlandırılır ve $F(a,b;c;x)$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$F(a,b;c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}$$

(2.5) denkleminin bir çözümüdür. [9]

Tanım 2.18. $B(m,n)$ ile gösterilen **Beta fonksiyonu** Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}.dx$$

şeklinde tanımlanır. [9]

Tanım 2.19.

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{2.6}$$

diferensiyel denklemi **Laguerre denklemi** olarak adlandırılır ve bu denklemin bir özel çözümü **Laguerre polinomu** olarak adlandırılan

$$y_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\, x^k}{(k!)^2},$$

fonksiyonudur Burada

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}$$

dir. Laguerre polinomu $L_n(x)$ ile gösterilir ve

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\, x^k}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n! x^k}{(k!)^2 (n-k)!}$$

şeklinde tanımlanır. n=0, 1, 2,… için Laguerre polinomları

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

şeklinde de yazılabilir. [9]

Tanım 2.20. n bir parametre olmak üzere

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

diferensiyel denklemine **Hermite denklemi** adı verilir. Bu denklemin çözümü tüm sonlu x ve $a_{0,}\ a_1$ keyfi değerleri için

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (-n)(-n+2)\cdots(-n+2k-2) x^{2k}}{(2k)1} \right]$$

$$+a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(1-n)(1-n+2)\cdots(1-n+2k-2)x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] \tag{2.7}$$

şeklindedir.Eğer n sıfır veya pozitif tamsayı ise Hermite denklemi daima n inci dereceden (2.7) şeklinde polinomsal bir çözüme sahiptir. Bu polinomsal çözüm; $\left[\frac{1}{2}n\right]$, $\frac{1}{2}n$ den büyük ya da eşit olan en büyük tamsayı olmak üzere, $H_n(x)$ ile gösterilir ve

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}\frac{(-1)^k n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

fonksiyonu ile tanımlanır ve **Hermite polinomu** olarak bilinir. [9]

Tanım 2.21. $\{f_n(x)\}$ şeklinde gösterilen fonksiyonlar kümesi için **doğurucu fonksiyon**

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n f_n(x)t^n$$

şeklindedir. Burada c_n, $\{f_n(x)\}$ kümesinin parametrelerini içeren n nin bir fonksiyonu x ve t ise bağımsız değişkenlerdir. Örnek olarak $\{1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots\}$ fonksiyon kümesinin bir doğurucu fonksiyonu $\exp\{xt\}$ dir. Çünkü

$$\exp\{xt\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xt)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n t^n$$

yazılabilmektedir. Burada G(x,t) yerine $\exp\{xt\}$, c_n yerine $\frac{1}{n!}$ ve $f_n(x)$ yerine x^n gelmiştir. [7]

Teorem 2.1. $\varphi_n(x)$, a<x<b üzerinde $\omega(x) > 0$ olacak şeklinde reel ortogonal polinomların bir kümesi olsun. h_n

$$\varphi_n(x) = h_n x^n + \pi_{n-1}$$

olacak şekilde bir katsayı olsun ve

$$g_k = (\varphi_k, \varphi_k) = \int_a^b \omega(x)\varphi_k^{\,2}(x)dx$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{n} g_k^{-1}\varphi_k(x)\varphi_k(y) = \frac{h_n}{g_n h_{n+1}} \cdot \frac{\varphi_{n+1}(y)\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)\varphi_n(y)}{y - x}$$

dır. [6]

Teorem 2.2. $\psi_n(x)$ polinomları $\omega(x)$ >0 olacak şekilde (a,b) aralığında ortonormal bir küme ise ve

$$\int \omega(x) f^2(x)dx$$

mevcut ise

$$\lim_{n\to\infty} \int \omega(x) f(x)\psi_n(x)dx = 0 \qquad (2.8)$$

dir. Eğer (2.8) ortogonal polinomlara göre belirlenmek istenirse

$$g_n = \int_a^b \omega(x)\varphi_n^{\,2}(x)dx$$

ve (2.8) de

$$\lim_{n\to\infty} g_n^{-\frac{1}{2}} \int_a^b \omega(x) f(x)\varphi_n(x)dx = 0$$

olarak alınmalıdır. [6]

BÖLÜM 3. LEGENDRE DİFERENSİYEL DENKLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

3.1. Legendre Diferensiyel Denklemi

$$\partial^2 \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.1.1)$$

Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki ifadesinden yararlanılarak Legendre denklemi elde edilebilir.

(3.1.1) ile verilen üç boyutlu Laplace denklemi için (x,y,z) düzleminde

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi \sin\vartheta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

dönüşümleri ile (r,φ,ϑ) küresel koordinatlarına geçilirse,

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (3.1.2)$$

denklemi elde edilir.Bu denklemin,

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r).\Theta(\vartheta).\Phi(\varphi)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir çözümünü bulmak için

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{dR}{dr}\Theta\Phi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}=\frac{d\Theta}{d\vartheta}R\Phi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}=\frac{d\Phi}{d\varphi}R\Theta$$

türevleri (3.1.2) de yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)+\frac{R(r)}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta}\right)\Phi(\varphi)+\frac{R(r)\Theta(\vartheta)}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=0$$

elde edilir. $R(r)\Theta(\vartheta)\sin^2\vartheta\neq 0$ olduğundan bulunan son denklemin $R\Theta\sin^2\vartheta$ ile bölünmesiyle ,

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta}\right)$$
$$+\frac{1}{\Phi(\varphi)\sin^2\vartheta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=0 \qquad (3.1.3)$$

elde edilir. Bu denklemde ilk terim yalnızca r ye bağlı olduğundan ve son iki terim de r den bağımsız olduğundan ilk terim bir sabite eşit olur. Bu sabit n(n+1) olarak alınırsa,

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)=n(n+1) \qquad (3.1.4)$$

veya

$$\frac{d}{dR}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-n(n+1)R(r)=0$$

elde edilir. Buradan

$$2r\left(\frac{dR(r)}{dr}\right)+r^{2}\frac{d^{2}R(r)}{dr^{2}}-n(n+1)R(r)=0$$

Euler diferensiyel denklemi elde edilmiş olur. Euler diferensiyel denkleminin çözümü ise

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}r^{n+c}$$

yardımıyla

R(r)=A $r^{n}+Br^{-(n+1)}$

şeklinde bulunabilir.

(3.1.4) ün (3.1.3) de yerine yazılmasıyla,

$$n(n+1)\sin^{2}\vartheta+\frac{\sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^{2}\Phi(\varphi)}{d\varphi^{2}}=0 \tag{3.1.5}$$

denklemi elde edilir.

(3.1.5) in sol tarafındaki son ifade yalnızca φ nin bir fonksiyonu olduğundan bir sabite eşittir. Bu sabiti -m^{2} olarak seçilirse,

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^{2}\Phi(\varphi)}{d\varphi^{2}}=-m^{2}$$

veya

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

elde edilir.

(3.1.5) in her iki tarafı $\Theta(\vartheta)$ ile çarpılırsa,

$$\text{n(n+1)}\sin^2\vartheta\Theta(\vartheta) + \sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\Theta(\vartheta) = 0$$

elde edilir.

Bu son ifadede

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2$$

değeri yerine yazılırsa,

$$\left(n(n+1)\sin^2\vartheta - m^2\right)\Theta(\vartheta) + \sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta}\right) = 0 \qquad (3.1.6)$$

elde edilir.

(3.1.5) de $u = \cos\vartheta$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{du}{d\vartheta} = -\sin\vartheta \qquad \text{ve} \qquad \frac{d}{d\vartheta} = \frac{d}{du}\frac{du}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\frac{d}{du}$$

olur ve $1-u^2 = \sin^2\vartheta$ yardımıyla

$$\left(n(n+1)(1-u^2-m^2\right)\Theta(u)+(1-u^2)\frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{d\Theta(u)}{du}\right)=0$$

elde edilir. Son denklemin düzenlenmesiyle de

$$(1-u^2)\frac{d^2\Theta(u)}{du^2}-2u\frac{d\Theta(u)}{du}+n(n+1)\Theta(u)=0$$

Legendre diferensiyel denklemi elde edilir.

3.2.Legendre Diferensiyel Denkleminin Çözümü

$$(1-x^2)y''+2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (3.2.1)$$

denklemine n. dereceden Legendre denklemi denir. Burada n herhangi bir pozitif reel sayıdır.

(3.2.1) denklemi

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}y=0$$

şeklinde yazılırsa $x=\pm 1$ noktaları düzgün tekil noktalar olacaktır. Ayrıca s=$1/x$ dönüşümü yapıldığında , (3.2.1) denklemi

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\left[\frac{2}{s}-\frac{2}{s(s^2-1)}\right]\frac{dy}{ds}+\frac{n(n+1)}{s^2(s^2-1)}y=0$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, diferensiyel denklem sonsuzda da bir düzgün singüleriteye sahiptir. Öyle ise bu noktalar dışında,

$$P_1(x)=-\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{ve} \quad P_2(x)=\frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. Bu nedenle , $x = 0$ noktası komşuluğunda $|x| \langle 1$ aralığında (3.2.1) denkleminin,

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

şeklinde bir çözümü bulunabilir. y nin kendisi ve

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}$$

türevleri (3.2.1) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

elde edilir.

Bu denklemde x in aynı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

x^0 : $\quad 2(1)c_2 + n(n+1)c_0 = 0$

veya

$$c_2 = -\frac{1}{2} n(n+1) c_0 .$$

x^1 : $\quad 3(2)c_3 - 2c_1 + n(n+1)c_1 = 0$

$$3(2)c_3 + [n(n+1) - 2]c_1 = 0$$

$$3(2)c_3 + (n-1)(n+2)c_1 = 0$$

veya

$$c_3 = -\frac{1}{2.3}(n-1)(n+2)c_1.$$

x^2 :

$$\begin{aligned} 4(3)c_4 - 2(1)c_2 - 2(2)c_2 + n(n+1)c_2 &= 0 \\ 4(3)c_4 + [n(n+1) - 6]c_2 &= 0 \\ 4(3)c_4 + (n-2)(n+3)c_2 &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$c_4 = -\frac{1}{3.4}(n-2)(n+3)c_2.$$

x^3 :

$$\begin{aligned} 5(4)c_5 - 3(2)c_3 - 2(3)c_3 + n(n+1)c_3 &= 0 \\ 5(4)c_5 + [n(n+1) - 12]\,c_3 &= 0 \\ 5(4)c_5 + (n-3)(n+4)c_3 &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$c_5 = -\frac{1}{4.5}(n-3)(n+4)c_3$$

$x^{k:}$

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)c_{k+2} + [-k(k-1) - 2k + n(n+1)]c_k &= 0 \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} + [n^2 + n - k(k+1)]\,c_k &= 0 \end{aligned}$$

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + (n-k)(n+k+1)c_k = 0$$

veya

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k, \qquad k \geq 0 \tag{3.2.2}$$

yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
c_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{3.4}c_2 \\
&= \frac{(-1)^2(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{4.5}c_3 \\
&= \frac{(-1)^2(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_6 &= -\frac{(n-4)(n+5)}{5.6}c_4 \\
&= \frac{(-1)^3(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}c_0 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_7 &= -\frac{(n-5)(n+6)}{6.7}c_5 \\
&= \frac{(-1)^3(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_8 &= -\frac{(n-6)(n+7)}{7.8}c_6 \\
&= \frac{(-1)^4(n-6)(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}{8!}c_0 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_9 &= -\frac{(n-7)(n+8)}{8.9}c_7 \\
&= \frac{(-1)^4(n-7)(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)}{9!}c_1 \ ,
\end{aligned}
$$

olur.

Bu şekilde devam edilirse $-1 < x < 1$ aralığında iki lineer bağımsız çözümü ;

$$y_1(x) = c_0(1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \frac{(n-6)(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}{8!}x^8 - \cdots)$$

$$y_2(x) = c_1(x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \frac{(n-7)(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)}{9!}x^9 - \cdots)$$

şeklinde bulunur.

Eğer n çift ise y_1 için sonsuz seri sınırlandırılır ve n. dereceden bir polinom elde edilir. Eğer n tek ise bu kez y_2 sınırlandırılır ve yine n. dereceden bir polinom elde edilir. c_0 ve c_1 keyfi sabitler olduğundan her bir n için onların değerlerini seçebiliriz. Böylece çözüm x=1 de 1 değerine sahiptir. Bu şekilde elde edilen çözüm Legendre polinomu olarak adlandırılır. Aşağıda ilk dört Legendre polinomu verilmiştir.

$n = 0:$ $c_0 = 1,$ ve y_1 çözümü

$$P_0(x) = 1 \tag{3.2.3}$$

$n = 1:$ $c_1 = 1,$ ve y_2 çözümü

$$P_1(x) = x \tag{3.2.4}$$

$n = 2:$ $c_0 = -1/2,$ ve y_1 çözümü

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \tag{3.2.5}$$

$n = 3:$ $c_1 = -3/2,$ ve y_2 çözümü

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \tag{3.2.6}$$

olarak bulunur.

Genel olarak, $n = 2, 4, 6, \ldots,$ için

$$c_0 = (-1)^{n/2}\left[\frac{1.3...(n-1)}{2.4...n}\right], \tag{3.2.7}$$

ve $n = 1, 3, 5, \ldots,$ için

$$c_1 = (-1)^{(n-1)/2}\left[\frac{1.3\ldots n}{2.4\ldots(n-1)}\right]. \tag{3.2.8}$$

(3.2.7) ve (3.2.8) deki c_0 ve c_1 değerleri $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ formüllerinde yerine yazılırsa çeşitli Legendre polinomları elde edilir.

Örneğin n=4 için,

$$c_0 = (-1)^2\left(\frac{1.3}{2.4}\right) = \frac{3}{8},$$

bulunur ve y_1 çözümü

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \frac{3}{8}\left(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right). \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Her Legendre polinomu Legendre diferensiyel denkleminin özel bir çözümüdür.

Örneğin

$P_2(x)$,

$$(1\text{-}x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0,$$

denkleminin özel çözümü,

$P_3(x)$,

$$(1\text{-}x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0,$$

denkleminin özel çözümü,

Genel olarak $P_n(x)$ ise

$$(1\text{-}x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

denkleminin özel çözümüdür.

n. dereceden Legendre polinomunun toplam formülü

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!}\right]x^{n-2k} \qquad (3.2.9)$$

dir. Burada eğer n çift ise $N = n/2$ eğer n tek ise $N = (n-1)/2$ dir.

Örnek: $P_3(x)$ i (3.2.9) u kullanarak bulalım.

Çözüm: Burada $N = (3-1)/2 = 1$ dir.

$$P_3(x) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{1}\left[\frac{(-1)^k(6-2k)!}{k!(3-2k)!(3-k)!}\right]x^{3-2k}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{6!}{0!3!3!}\right)x^3 - \left(\frac{4!}{1!1!2!}\right)x\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(20x^3 - 12x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right).$$

3.3. Legendre Polinomları

Legendre polinomunun doğurucu fonksiyonu

$$(1\text{-}2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Legendre polinomunun serisel ifadesi bu bağıntıdan yararlanılarak elde edilir.

$(a)_{2n}$ ifadesi.

$$(a)_{2n} = \left[a(a+2)\ldots(a+2n-2)\right]\left[(a+1)(a+3)\ldots(a+2n-1)\right]$$

$$= 2^{2n}\left(\frac{a}{2}\right)_n\left(\frac{a+1}{2}\right)_n \qquad (3.3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu özdeşlikte $a = 1$ alınmasıyla

$$(2n)! = 2^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)_n n! \qquad (3.3.2)$$

elde edilir.

$(a)_{n-k}$ değeri ise

$$(a)_{n-k} = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-k-1)\left[(a+n\_k)\ldots(a+n-1)\right]}{\left[(a+n-k)\ldots(a+n-1)\right]}$$

$$= \frac{(a)_n}{(-1)^k(1-a-n)_k} \tag{3.3.3}$$

şeklinde hesaplanabilir. (3.3.3) de $a=1$ alınmasıyla

$$(n-k)! = \frac{n!}{(-1)^k(-n)_k} \tag{3.3.4}$$

elde edilir. $(1-t)^{-a}$ ifadesi binom açılımı yardımıyla

$$(1\text{-t})^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)(-a-1)\ldots(-a+n+1)}{n!}(-1)^n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{n!}\, t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}t^n \tag{3.3.5}$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca serilerin özelliklerinden bilinmektedir ki, çift indisli ve A(k,n) genel terimli bir seri

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k) \tag{3.3.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A(k,n-2k) \tag{3.3.7}$$

bağıntılarını sağlar. Burada $\left[\frac{n}{2}\right]$, $\frac{n}{2}$ ye eşit olan ya da $\frac{n}{2}$ den küçük olan en büyük tamsayıyı göstermektedir.

(3.3.6) ve (3.3.7) nin bir sonucu olarak ve A($k,n-k)=C(k,n)$ konularak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}C(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C(k,n-k) \tag{3.3.8}$$

yazılabilir. Bu notasyonlar

$$(1\text{-}2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

bağıntısıyla verilen $P_n(x)$ Legendre polinomunun serisel ifadesinin elde edilmesinde kullanılabilir. İfadenin sol tarafı,

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\left[1-(2xt-t^2)\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)_n\frac{(2xt-t^2)^n}{n!}$$

şeklinde yazılabilir. Binom açılımı kullanılarak,

$$(1\text{-}2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}(2xt)^n\left(1-\frac{t}{2x}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}(2xt)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{k!}\left(\frac{t}{2x}\right)^k$$

eşitliği elde edilir. (3.3.8) eşitliğinin ve $\frac{(-n)_k}{n!} = \frac{(-1)^k}{(n-k)!}$ ifadesinin kullanılmasıyla

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}(2x)^{n-2k}(-1)^k}{(n-2k)!k!}t^n$$

yazılabilir.

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} = \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}(n-k)!}$$

olduğundan

$$(1\text{-}2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2n-2k)!(2x)^{n-2k}(-1)^k}{(n-2k)!k!2^{2n-2k}(n-k)!}t^n \qquad (3.3.9)$$

yazılır.

$$(1\text{-}2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

ifadesi ile (3.3.9) karşılaştırılır t^n in katsayıları eşitlenise

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

elde edilir.

3.4. Rodrigues Formülü

Legendre polinomları Rodrigues formülü adı verilen bir formül yardımıyla bulunur.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \qquad (3.4.1)$$

ifadesi elde edilmişti.

Eğer $D = \dfrac{d}{dx}$ olarak alınır ve

$$\mathrm{D}^s x^m = \frac{d^s}{dx^s} x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-s)!} x^{m-s} & , s \le m \\ 0 & , s > m \end{cases}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa ,

$$D^s x^m = \frac{m! x^{m-s}}{(m-s)!} \quad \text{ifadesi yardımıyla} \qquad (3.4.2)$$

(3.4.1) denklemindeki $\dfrac{(2n-2k)! x^{n-2k}}{(n-2k)!}$ ifadesi

$$D^n x^{2n-2k} = \frac{(2n-2k)! x^{n-2k}}{(n-2k)!}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu nedenle (3.4.1) serisel ifadesi,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k D^n x^{2n-2k}}{2^n k!(n-k)!} \tag{3.4.3}$$

şeklinde yazılabilir.

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ olduğundan

(3.4.3) denklemi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k D^n C_{n,k} x^{2n-2k}}{2^n.n!} \tag{3.4.4}$$

olarak yazılır. Buradan

$$P_n(x) = \frac{D^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n,k} x^{2n-2k}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\left[\frac{n}{2}\right] < k \le n, 0 \le 2n-2k < n$$ olacak şekilde

k nın bütün değerleri için $D^n x^{2n-2k} = 0$ dır. Böylece (3.4.4) ün sağ taraftaki toplam k=0 dan k=n ye kadar genişletilebilir ve

$$P_n(x) = \frac{D^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{n,k} x^{2n-2k} \tag{3.4.5}$$

veya binom açılımından yararlanarak,

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

ifadesi (3.4.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2-1)^n \qquad \text{(n=0,1,2,3,...)} \tag{3.4.6}$$

şeklinde Rodrigues formülü elde edilir. (3.4.6)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \tag{3.4.7}$$

şeklinde de yazılabilir.

Bu formül Legendre polinomları hesaplamak için kolay bir yöntem vermektedir. Bu formülle hesaplanan ilk altı Legendre polinomu

$$P_o(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

şeklindedir. x in kuvvetleri

$$x = P_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}\left[P_0(x) + 2P_2(x)\right]$$

$$x^3 = \frac{1}{5}\left[3P_1(x) + 2P_3(x)\right]$$

$$x^4 = \frac{1}{35}\left[7P_0(x) + 20P_2(x) + 8P_4(x)\right]$$

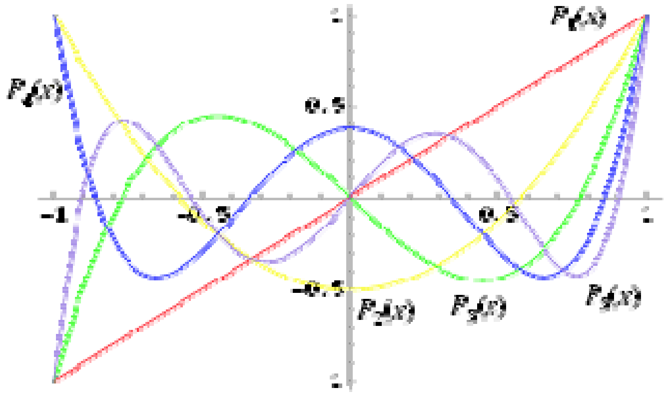
$$x^5 = \frac{1}{63}\left[27P_1(x) + 28P_3(x) + 8P_5(x)\right]$$

$$x^6 = \frac{1}{231}\left[33P_0(x) + 110P_2(x) + 72P_4(x) + 16P_6(x)\right]$$

şeklinde bulunur. Genel olarak

$$x^n = \sum_{l=n,n-2,n-4,\ldots} \frac{(2l+1)n!}{2^{(n-l)/2}\left(\frac{1}{2}(n-l)\right)!\,(l+n+1)\,!!} P_l(x)$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.1

$P_n(x)$ için diğer formülleri elde etmek için (3.4.6) denklemi kullanılabilir.

$D = \dfrac{d}{dx}$ olmak üzere

Leibnitz formülünden

$$D^n(u.v) = (u.v)^n = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... + uv^{(n)}$$

veya

$$D^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(D^k u)(D^{(n-k)}v) \tag{3.4.8}$$

olduğundan Rodrigues formülü

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n\left[(x-1)^n (n+1)^n\right]$$

olarak alındığında

$u = (x-1)^n$, $v = (x+1)^n$ olmak üzere,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} (D^k (x-1)^n)\left(D^{n-k} (x+1)^n\right)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \frac{n!(x-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!(x+1)^k}{k!}$$

olur. Veya,

$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ olduğundan

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}^2 \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k$$

bulunur.

Örnek: Denklem (3.4.8) i kullanarak $P_3(x)$ i bulunuz.

Çözüm: Denklem (3.4.8) de $n = 0$ yazılırsa,

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3$$

$$= \frac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}(6x^5 - 12x^3 + 6x)$$

$$= \frac{1}{48}\frac{d}{dx}\left(30x^4 - 36x^2 + 6\right)$$

$$= \frac{1}{48}(120x^3 - 72x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 4. LEGENDRE POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ

4.1. Doğurucu Fonksiyonlar

Küresel fonksiyonlar matematiksel fizik problemlerinin çözümünde çok önemli rol oynarlar. Legendre polinomları ise $\frac{1}{R}$ Laplace denkleminin temel çözümü ile ilgilidir. Burada R, M ve M_0 noktaları arasındaki mesafedir. Ayrıca r ve r_0, M ve M_0 noktalarının yarıçap vektörleri, φ ise onların arasındaki açı olsun.

Bu durumda

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{r_o^{\,2}-2rr_0\cos\varphi+r^2}}=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} & r<r_0 \ i\c{c}in \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} & r>r_0 \ i\c{c}in\end{array}\right\}$$

yazılabilir. Burada $x=\cos\varphi$ $(-1\le x\le 1)$ ve $t=\frac{r}{r_0}<1$ veya $t=\frac{r_0}{r}<1$ dir.

$$\Psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},\qquad (0<t<1,\ 0\le x\le 1)$$

fonksiyonuna Legendre polinomlarının doğurucu fonksiyonu denir.

$\Psi(t,x)$ fonksiyonunun t ye göre açılımı

$$\Psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \qquad (4.1.1)$$

şeklindedir. Bu açılım keyfi x ler ve $|z|<\left|x\pm\sqrt{x^2-1}\right|$ ler için geçerlidir. (4.1.1) açılımının $P_n(x)$ katsayıları n-yinci dereceden polinomlardır ve bunlara Legendre polinomları denir. Buradan $\frac{1}{R}$ ifadesi

$$\frac{1}{R}=\begin{cases}\dfrac{1}{r_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\varphi)\,; & r<r_0\\[2ex] \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\varphi)\quad ; & r>r_0\end{cases}$$

biçiminde yazılabilir.

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n d\varphi$$

integral gösteriminden yararlanarak (4.1.1) açılımı

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)t\right]^n$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)t}$$

$$=\frac{1}{\pi\, t\sqrt{x^2-1}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\dfrac{1-xt}{t\sqrt{x^2-1}}-\cos\varphi} \qquad (4.1.2)$$

biçiminde yazılır.

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{z-\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}}$$

formülünü göz önüne alalım. Bu bağıntıda z, $[-1,+1]$ aralığında olmadığı kabul edilir ve $\sqrt{z^2-1}$ belirlenmiş sabit değerini alması gerekir ki ($\left|z-\sqrt{z^2-1}\right|<1$) eşitsizliği sağlansın. Bu koşullar çerçevesinde (4.1.2) nin sağ tarafı

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

ye eşit olur.

(4.1.1) serisi $|x|<1$ ve $|z|<1$ koşullarında düzgün yakınsaktır. Çünkü $-1 \le x \le 1$ aralığında $|P_n(x)| \le 1$ dir. Buna göre

$$\left|P_n(x)t^n\right| \le |t|^n$$

olur. Eğer $|t|>1$ ise bu durumda $t_1 = \frac{1}{t}$ dönüşümü yardımıyla $|t_1|<1$ olduğundan

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{t_1}{\sqrt{1-2xt_1+t_1{}^2}} = t_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{t^{n+1}}$$

elde edilir. Böylece sonuç olarak

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, & |t|<1 \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{P_n(x)}{t^{n+1}}, & |t|>1 \end{cases} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

yazılabilir.

$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ doğurucu fonksiyonu Legendre polinomunu t nin kuvvetleri cinsinden ifade etmek için kullanılabilir.

Örneğin,

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \left[(1-xt)^2 - t^2(x^2-1)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

eşitliğinin sağ tarafı $(1-xt)^2$ parantezine alınırsa,

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \left[(1+xt)^2\left(\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan,

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-xt)^{-1}\left[1-\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

bulunur. Son ifade de hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla ,

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-xt)^{-1}\,{}_1F_0\left[\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{4.1.3}$$

olduğundan,

$$(1-xt)^{-1}\,{}_1F_0\left[\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

dir. Bu ifade ise

$${}_1F_0\left[\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right)^k}{k!}$$

yardımıyla

$$\begin{aligned}(1-xt)^{-1}\,{}_1F_0\left[\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right] &= \frac{1}{(1-xt)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k t^{2k}(x^2-1)^k}{k!(1-xt)^{2k+1}}\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\frac{1}{(1-xt)^{2k+1}} = (1-xt)^{-(2k+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+1)_n (xt)^n}{n!}$$

ifadesi (4.1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$(1-xt)^{-1}{}_1F_0\left[\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k t^{2k}(x^2-1)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+1)_n(xt)^n}{n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (2k+1)_n(x^2-1)^k t^{2k+n}x^n}{k!n!}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı

$$(2k+1)_n=\frac{(n+2k)!}{(2k)!}$$

yardımıyla

$$(1-xt)^{-1}{}_1F_0\left[\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (n+2k)!(x^2-1)^k x^n t^{n+2k}}{k!n!(2k)!}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A(k,n-2k)$$ olduğundan ,

$$(1-xt)^{-1}{}_1F_0\left[\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k n!(x^2-1)^k x^{n-2k}t^n}{k!(2k)!(n-2k)!}$$

olup

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k=\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}$$ ile

$$(1-xt)^{-1}\,{}_1F_0\left[\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!(x^2-1)^k x^{n-2k} t^n}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!} \tag{4.1.5}$$

elde edilir.

(4.1.3) ve (4.1.5) denklemlerinde t^n nin katsayıları eşitlenerek $P_n(x)$ için yeni bir

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!(x^2-1)^k x^{n-2k}}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}$$

formülü elde edilir

$P_n(x)$ için yeni bir doğurucu fonksiyon elde etmek için

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!(x^2-1)^k x^{n-2k}}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!} \tag{4.1.6}$$

ifadesi ele alınarak keyfi bir c sabiti için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n P_n(x)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(c)_n(x^2-1)^k x^{n-2k}}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}t^n$$

yazılabilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n+2k)$$

olduğundan ,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n P_n(x)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_{n+k}(x^2-1)^k x^n}{2^{2k}(k!)^2 n!}t^{n+2k}$$

$(c)_{n+2k} = (c+2k)_n (c)_{2k}$ yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n P_n(x)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c+2k)_n (xt)^n}{n!}\frac{(c)_{2k}(x^2-1)^k t^{2k}}{2^{2k}n!}$$

bulunur.

$(c)_{2k} = 2^{2k}\left(\frac{c}{2}\right)_k\left(\frac{c+1}{2}\right)_k$ ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c+2k)_n (xt)^n}{n!}={}_1F_0(c+2k;-;xt)$$

olduğundan ,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n P_n(x)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c+2k)_n (xt)^n}{n!}\frac{(c)_{2k}(x^2-1)^k t^{2k}}{2^{2k}n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}{}_1F_o(c+2k;-;xt)\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k(x^2-1)^k t^{2k}}{(k!)^2}$$

dir.

${}_1F_0(c+2k;-;xt) = (1-xt)^{-(c+2k)}$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty}{}_1F_o(c+2k;-;xt)\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k(x^2-1)^k t^{2k}}{(k!)^2}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(1-xt)^{-(c+2k)}\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k(x^2-1)^k t^{2k}}{(k!)^2}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k(x^2-1)^k t^{2k}}{(k!)^2(1-xt)^{c+2k}}$$

$$=(1-xt)^{-c}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}; & \\ & \frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\\ 1; & \end{matrix}\right] \tag{4.1.7}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n P_n(x)t^n}{n!}$$

yazılır. Burada c herhangi bir kompleks sayı olabilir.

$$p=(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

olarak alırsa (4.1.7) için denklik formu şöyle kurulur:

$$p^{-a}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}c,1-c; & \\ & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1-xt}{p}\right)\\ 1; & \end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n P_n(x)t^n}{n!}.$$

Şimdi (4.1.6) denklemine geri dönüp

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(x^2-1)^k x^{n-2k}t^n}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(x^2-1)^k x^n t^{n+2k}}{2^{2k}(k!)^2 n!}$$

$$= e^{xt} {}_0F_1(-;1;\frac{1}{2}t^2(x^2-1))$$

toplamı ele alınırsa

$$e^{xt} {}_0F_1(-;1;\frac{1}{2}t^2(x^2-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı,

$$J_0(z) = {}_0F_1(-;1;-\frac{1}{4}z^2)$$

ile

$$e^{xt} J_0(t\sqrt{1-x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)t^n}{n!} \qquad (4.1.8)$$

Bessel fonksiyonu olarak da yazılabilir.

(4.1.8) de x yerine $\frac{(x-t)}{\rho}$, t yerine $-\frac{ty}{\rho}$ alınıp, her bir terim ρ^{-1} ile çarpılırsa,

$$\rho^{-1} \exp\left[\frac{-ty(x-t)}{\rho^2}\right] {}_0F_1\left[\begin{matrix} -; \\ \\ 1; \end{matrix} \quad \frac{y^2t^2(x^2-1)}{4\rho^4}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \rho^{-n-1} P_n\left(\frac{x-t}{\rho}\right) t^n y^n}{n!} \qquad (4.1.9)$$

elde edilir.

Burada

$$\rho^{-n-1}P_n\left(\frac{x-t}{\rho}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!P_{n+k}(x)t^k}{k!n!}$$

olduğundan (4.1.9) un sağ tarafı

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+k)!P_{n+k}(x)t^{n+k}y^n}{k!(n!)^2}$$

olarak da yazılabilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k)$$

ifadesi kullanılarak

$$\rho^{-1}\exp\left[\frac{-ty(x-t)}{\rho^2}\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-; & \\ & \dfrac{y^2t^2(x^2-1)}{4\rho^4}\\ 1; & \end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!y^{n-k}P_n(x)t^n}{k![(n-k)!]^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!y^k P_n(x)t^n}{(k!)^2(n-k)!} \qquad (4.1.10)$$

elde edilir.

Hipergeometrik fonksiyonların

$$ {}_1F_1(a;b;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} $$

şeklindeki gösteriminden yararlanılarak,

$$ {}_1F_1(-n;1;y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k y^k}{(1)_k k!} $$

yazılabilir. Ayrıca

$(-n)_k = \dfrac{n!}{(-1)^k (n-k)!}$ ve $(1)_k = k!$ olduklarından

$$ {}_1F_1(-n;1;y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!\, y^k}{(k!)^2 (n-k)!} $$

yazılır. Bu ifade (4.1.10) de yerine yazılırsa,

$$ \rho^{-1} \exp\left[\frac{-ty(x-t)}{\rho^2}\right] {}_0F_1\left[\begin{matrix} -; \\ 1; \end{matrix} \quad \frac{y^2t^2(x^2-1)}{4\rho^4}\right] $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!\, y^{n-k} P_n(x) t^n}{k!\left[(n-k)!\right]^2} $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k} n!\, y^{k} P_n(x) t^n}{(k!)^2 (n-k)!} $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} {}_1F_1(-n;1;y) P_n(x) t^n \qquad (4.1.11) $$

ifadesi elde edilir.

Basit Laguerre polinomları

$L_n(x) = {}_1F_1(-n;1;x)$

şeklinde gösterilir. Bu notasyon (4.1.11) de yerine yazılırsa,

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-ty(x-t)}{1-2xt+t^2}\right] {}_0F_1\left[\begin{matrix} -; & \\ & \dfrac{y^2t^2(x^2-1)}{4(1-2xt+t^2)^2} \\ 1; & \end{matrix}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(y)P_n(x)t^n$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\rho^{-1}\exp\left[ty(t-x)\rho^{-2}\right] J_0(ty\sqrt{1-x^2}\,\rho^{-2}) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(y)P_n(x)t^n$$

ifadesi elde edilmiş olur. Burada,

$$\rho = (1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

dir.

4.2. Diferensiyel İndirgeme Bağıntısı

$$F(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{4.2.1}$$

İfadesinde her iki tarafının t ye göre türevinin alınmasıyla,

$$-\frac{1}{2}(1\text{-}2xt\text{+}t^2)^{-\frac{3}{2}}(\text{-}2x\text{+}2t)\text{=}\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

elde edilir. Her iki taraf $(1\text{-}2xt\text{+}t^2)$ ile çarpılırsa,

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

elde edilir. Bu son eşitlik de (4.2.1) yardımıyla

$$(x\text{-}t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} \qquad (4.2.2)$$

şeklinde yazılabilir. (4.2.2) ifadesi,

$$x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1}$$

veya bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[-(k+1)P_{k+1}(x) + (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)\right]t^k = 0$$

şeklinde yazılabilir. t nin aynı kuvvetlerinin katsayılarının karşılaştırılmasıyla,

$$(n+1)P_{n+1}(x)\text{-}(2n+1)xP_n(x) + nP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \qquad n = 1,2,3.... \qquad (4.2.3)$$

elde edilir.

Benzer indirgeme bağıntıları Legendre polinomlarının türevleri arasında da bulunmaktadır. Bu bağıntıları bulmak için önce (4.2.1) in x e göre türevi alınırsa,

$$-\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}.2x=\sum_{n=0}^{\infty}P_n{}'(x)t^n$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı (1-2xt+t ^{2}) ile çarpılırsa,

$$\frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}P_n{}'(x)t^n \tag{4.2.4}$$

veya

$$t\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. t nin aynı derecelerdeki katsayılarının karşılaştırılmasıyla bu kez

$$P_n(x)=P_{n+1}'(x)+P_{n-1}'(x)-2xP_n'(x) \tag{4.2.6}$$

bağıntısına ulaşılır.

(4.2.3) ifadesinin bir kez türevi alınırsa,

$$(n+1)P_{n+1}'(x)-(2n+1)P_n'(x)+nP_{n-1}'(x)=0$$

elde edilir. Son denklemden $P_{n+1}'(x)$ in değeri (4.2.6) da yerine yazılırsa

$$nP_n(x)=xP_n{}'(x)-P_{n-1}'(x) \tag{4.2.7}$$

elde edilir.

(4.2.6) ve (4.2.7) den $xP_n'(x)$ in yok edilmesiyle

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \tag{4.2.8}$$

bulunur. Şimdi

$$P'_{-1}(x) = 0$$

alınır ve (4.2.8) formülünde n=0,1,2,3,...,n yazılarak elde edilen bağlantılar toplanırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x) = P'_{n+1}(x) + P'_n(x) \tag{4.2.9}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı elde edilir.

(4.2.6) ve (4.2.8) denklemleri bağımsız indirgeme bağıntılarıdır. Böylece bu iki denklemden çeşitli bağıntılar elde edilebilir. (4.2.6) ve (4.2.8) in birleştirilmesiyle

$$xP'_n(x) = P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x)$$

bulunur.

4.3. İndirgeme Bağıntıları Yardımıyla Legendre Diferensiyel Denkleminin Elde Edilmesi

Legendre diferensiyel denklemi indirgeme bağıntıları kullanılarak elde edilebilir.

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x) \tag{4.3.1}$$

$$xP'_n(x) = P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x) \tag{4.3.2}$$

bağıntıları elde edilmişti.

Şimdi sadece $P_n(x)$ ve onun türevlerini içeren bir bağıntı bulmak için (4.3.2) denkleminde n yerine (n-1) yazılırsa

$$xP_{n-1}'(x) = P_n'(x) - nP_{n-1}(x) \qquad (4.3.3)$$

elde edilir.

(4.3.3) de türev alınırsa,

$$xP_{n-1}''(x) = P_n''(x) - (n+1)P_{n-1}'(x) \qquad (4.3.4)$$

bulunur.

(4.3.1) denkleminden ,

$$P_{n-1}'(x) = xP_n'(x) - nP_n(x)$$

yazılır ve türev alınırsa

$$P_{n-1}''(x) = P_n'(x) + xP_n''(x) - nP_n(x)$$

bulunur.

Bu ifadeler (4.3.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$x\left[(P_n'(x) + xP_n''(x) - nP_n(x)\right] = P_n''(x) - (n+1)\left[xP_n'(x) - nP_n(x)\right]$$

elde edilir.

Terimlerin yeniden düzenlenmesiyle $P_n(x)$ için

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

Legendre diferensiyel denklemi elde edilir.

4.4. $P_n(x)$ in Hipergeometrik Formu

Öncelikle

$$F\begin{bmatrix} a,b; & \\ & z \\ c; & \end{bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanan hipergeometrik fonksiyonu ve onun genelleştirmesi olan

$${}_pF_q\begin{bmatrix} a_1,a_2,\ldots,a_p; & \\ & z \\ b_1,b_2,\ldots,b_q; & \end{bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\ldots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!}$$

eşitliğini verelim. Burada hiçbir payda parametresi sıfır ya da negatif tamsayı değildir. Buna rağmen p veya q nun sıfırdan farklı olmasına gerek yoktur.

Şimdi ${}_pF_q$ notasyonunu $P_n(x)$ Legendre polinomlarının gösterilmesinde kullanalım. Legendre polinomlarının,

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

ifadesinde

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(-1)^k\left(\frac{1}{2}-n\right)_k}$$

$$(n-2k)!=\frac{n!}{(-n)_{2k}}$$

$$(-n)_{2k}=2^{2k}\left(-\frac{n}{2}\right)_k\left(\frac{-n+1}{2}\right)_k$$

değerlerinin yazılmasıyla,

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n(2x)^n\left(-\frac{n}{2}\right)_k\left(\frac{-n+1}{2}\right)_k}{k!n!\left(\frac{1}{2}-n\right)_k(x^2)^k}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n(2x)^n}{n!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\frac{-n+1}{2}; & \\ & \frac{1}{x^2}\\ \frac{1}{2}-n; & \end{matrix}\right]$$

elde edilir.

$P_n(x)$ Legendre polinomunun

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \tag{4.4.1}$$

eşitliğini verelim.Burada,

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\left[(1-t)^2-2t(x-1)\right]^{-\frac{1}{2}}$$ -

şeklinde yazılabilir.Eşitliğin sağ tarafı $(1-t)^2$ parantezine alınırsa

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\left[(1-t)^2\left(1-\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}=(1-t)^{-1}\left[1-\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.4.2)$$

sonucuna varılır.

Hipergeometrik fonksiyonların özelliklerinden

$${}_1F_o(a;-;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n z^n}{n!} \qquad \text{ve}$$

$${}_1F_o(a;-;z)=(1-z)^{-a}$$

oldukları bilinmektedir.

Buna göre

$$\left[1-\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}={}_1F_o\left(\frac{1}{2};-;\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right) \qquad \text{ve}$$

$${}_1F_o\left(\frac{1}{2};-;\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left[\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right]^n}{n!} \qquad (4.4.3)$$

dir.

(4.4.3) (4.4.2) de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{(1-t)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k 2^k t^k (x-1)^k}{k!(1-t)^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k 2^k t^k (x-1)^k}{k!(1-t)^{2k+1}}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k 2^k (n+2k)!(n-1)^k t^{n+k}}{k!(2k)!n!}$$

bulunur.

$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$ değerinin yerine yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+2k)!(n-1)^k t^{n+k}}{k!2^k k!n!}$$

elde edilir.

n yerine (n-k) yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!(n-1)^k t^{n}}{k!2^k k!(n-k)!}$$

olur.

$(n-k)! = \frac{n!}{(-1)^k(-n)_k}$ değeri yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-n)_k(n+k)!(x-1)^k t^{n}}{2^k (k!)^2}$$

elde edilir .Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-n)_k(n+k)_k(x-1)^k t^n}{2^k(k!)^2}$$

bulunur. Bu nedenle

$$P_n(x) = {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, n+1; & \\ & \frac{1-x}{2} \\ 1; & \end{matrix}\right] \qquad \text{dir.}$$

$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ olduğundan;

$$P_n(x) = (-1)^n\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, n+1; & \\ & \frac{1+x}{2} \\ 1; & \end{matrix}\right]$$

bulunur.

4.5. Legendre Polinomlarının Dikliği

$P_n(x)$ ve $P_m(x)$ polinomları Legendre denkleminin birer çözümleri olduklarından

$(m \neq n)$

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \qquad (4.5.1)$$

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0 \qquad (4.5.2)$$

bağıntılarını sağlamaktadırlar. Bu bağıntılar

$$\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{4.5.3}$$

$$\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' + m(m+1)P_m(x) = 0 \tag{4.5.4}$$

şeklinde yazılabilir. (4.5.3) $P_m(x)$ ile ve (4.5.4) de $P_n(x)$ ile çarpılır taraf tarafa çıkarılırsa,

$$P_m(x)\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + n(n+1)P_n(x)P_m(x) = 0$$

$$P_n(x)\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' + m(m+1)P_m(x)P_n(x) = 0$$

$$P_m(x)\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' - P_n(x)\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' + \left[n(n+1)-m(m+1)\right]P_n(x)\,P_m(x) = 0$$

elde edilir.

$$(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x) + P_n(x)\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' - (1-x^2)P_m'(x)P_n'(x) -$$
$$P_m(x)\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' \tag{4.5.5}$$

olduğundan (4.5.5) denklemi

$$(n-m)(n+m-1)\ P_n(x)\ P_m(x) = \left[(1-x^2)\left\{P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x)\right\}\right]' \tag{4.5.6}$$

olarak yazılabilir.

(4.5.6) denkleminde integralin herhangi sonlu aralığı için,

$$(n-m)(n+m-1)\int_a^b P_n(x)P_m(x)dx = \left[(1-x^2)\left\{P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x)\right\}\right]_a^b \tag{4.5.7}$$

elde edilir.

x=1 ve x=-1 için $(1-x^2)$=0 olduğundan,

$$(n-m)(n+m-1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=0$$

yazılabilir.

m ve n negatif olmayan tamsayılar olsun.Bu durumda $n+m+1\neq 0$ dır.

Ayrıca $n\neq m, n-m\neq 0$ ise

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=0\ ,\ m\neq n \qquad (4.5.8)$$

elde edilir.

Eğer $m=n$ ise

$$\int_{-1}^{1} \left[P_n(x)\right]^2 dx=\frac{2}{2n+1} \qquad (4.5.9)$$

olarak bulunur.

(4.5.8) ifadesi -1<x<1 aralığı üzerinde $P_n(x)$ polinomlar kümesinin dik olduğunu ifade eder. Böylece Legendre polinomları ortogonal polinomların sağladığı özelliklere sahiptir denilebilir.

4.6. $P_n(x)$ in Yeni Özellikleri

$$e^{xt}J_0(t\sqrt{1-x^2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)t^n}{n!} \qquad (4.6.1)$$

ifadesi elde edilmişti.

(4.6.1) de ilk önce $x=\cos\alpha, t=v\sin\alpha$ ikinci olarakta $x=\cos\beta,\quad t=v\sin\alpha$ dönüşümleri yapılarak

$$\exp(v\cos\alpha \quad \sin\beta)J_0(v\sin\beta \ \sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(\cos\alpha)v^n\sin^n\beta}{n!} \tag{4.6.2}$$

$$\exp(v\cos\beta\sin\alpha)J_0(v\sin\alpha\sin\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(\cos\beta)v^n\sin^n\alpha}{n!} \tag{4.6.3}$$

bağıntıları elde edilebilir.

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

olduğundan,

$$\exp(v\cos\alpha\sin\beta)=\exp[v\sin(\beta-\alpha)]\exp[v\cos\beta\sin\alpha] \tag{4.6.4}$$

dir. (4.6.2), (4.6.3) ve (4.6.4) yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(\cos\alpha)v^n\sin^n\beta}{n!}=\exp[v\sin(\beta-\alpha)]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(\cos\beta)v^n\sin^n\alpha}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin^{n-k}(\beta-\alpha)\sin^k\alpha P_k(\cos\beta)v^n}{k!(n-k)!}$$

elde edilir. Buradan

$$\sin^n\beta P_n(\cos\alpha)=\sum_{k=0}^{n}C_{n,k}\sin^{n-k}(\beta-\alpha)\sin^k\alpha P_k(\cos\beta)$$

dir. Burada $C_{n,k}$ binom katsayısıdır. Bu son denklem

$$P_n(\cos\alpha) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \left[\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\right]^{n-k} P_k(\cos\beta) \tag{4.6.5}$$

şeklinde yazılabilir.

$P_n(x)$ in orijinal tanımı ele alınır ve uygunluk için $\rho = (1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}$ olarak alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \rho^{-1} \tag{4.6.6}$$

olarak yazılabilir.

(4.6.6) denkleminde $t = \dfrac{v}{\rho},\ x = \dfrac{(x-t)}{\rho}$ olarak alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{x-t}{\rho}\right)\rho^{-n}v^n = \left[1 - \frac{2(x-t)v}{\rho^2} + \frac{v^2}{\rho^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \rho\left[\rho^2 - 2(x-t)v + v^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Burada v^n lerin katsayıları eşitlenirse

$$\rho^{-n-1} P_n\left(\frac{x-t}{\rho}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!\,P_{n+k}(x)t^k}{k!\,n!} \tag{4.6.7}$$

elde edilir.

4.7. Legendre Polinomlarının İntegral Gösterimi

Legendre polinomlarının integral gösterilimi

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\phi)^n \, d\phi \tag{4.7.1}$$

biçimindedir. Bu formülü gerçeklemek için önce integral altındaki ifadeyi binom serisi şeklinde yazalım. Buradan

$$\frac{1}{\pi}\int_o^{\pi} x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\phi)^n \, d\phi = \frac{1}{\pi}\int_o^{\pi} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(x^2-1)^{k/2} \cos^k \phi \, d\phi$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(x^2-1)^{k/2} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^k \phi \, d\phi$$

elde edilir.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^k \phi d\phi = \begin{cases} \dfrac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} & k = 2m \\ 0 & k = 2m+1 \end{cases}$$

olduğundan

$$\frac{1}{\pi}\int_o^{\pi} x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\phi)^n \, d\phi \; = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n! x^{n-2k}(x^2-1)^k}{2^{2k}(n-2k)!(k!)^2} \tag{4.7.2}$$

elde edilir. Sağ taraftaki ifadenin Legendre polinomu olduğunu kanıtlamak için

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

doğurucu fonksiyonunu düzenleyelim.

$$F(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{1-xt}\right)\left[1-\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right] \tag{4.7.3}$$

şeklinde yazalım. (4.7.3) ün sağ tarafındaki ilk ifade

$$\frac{1}{1-xt}=\sum_{s=0}^{\infty}(xt)^s \tag{4.7.4}$$

şeklinde yazılabilir. (4.7.3) ün sağ tarafındaki ikinci çarpan ise

$$\left[1-\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-1/2}{k}\frac{t^{2k}(x^2-1)^k}{(1-xt)^{2k}} \tag{4.7.5}$$

şeklinde seriye açılabilir.

$$\frac{1}{(1-xt)^{2k}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-2k}{n}(xt)^n \tag{4.7.6}$$

olduğundan (4.7.6) serisi (4.7.5) yardımıyla

$$\left[1-\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\binom{-1/2}{k}\binom{-2k}{n}x^n(x^2-1)t^{2k+n} \tag{4.7.7}$$

şeklinde yazılır. Son ifade $n\to n-2k$ alınarak t nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\left[1-\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^{n-k}\binom{-1/2}{k}\binom{-2k}{n-2k}x^{n-2k}(x^2-1)^k t^n \tag{4.7.8}$$

veya

$$\left[1-\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n t^n \tag{4.7.9}$$

elde edilir. Burada

$$A_n=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^{n-k}\binom{-1/2}{k}\binom{-2k}{n-2k}x^{n-2k}(x^2-1)^k \tag{4.7.10}$$

dir.

(4.7.4) ve (4.7.9) (4.7.3) de yerine yazılırsa

$$F(x,t)=\sum_{s=0}^{\infty}(xt)^s\sum_{n=0}^{\infty}A_n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}A_n x^s t^{n+s}$$

elde edilir. $n\to n-s$ alarak son ifade t nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n-s}A_{n-s}x^s\right)t^n \tag{4.7.11}$$

veya

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \tag{3.7.12}$$

elde edilmiş olur. Burada

$$F(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

açılımı uyarınca $P_n(x)$ ler Legendre polinomlarıdır. Devam edecek olunursa

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{n-s} A_{n-s} x^s$$

veya (4.7.10) göz önünde bulundurulursa

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{n-s} \left(\sum_{k=0}^{[(n-s)/2]} (-1)^{n-s-k} \binom{-1/2}{k} \binom{-2k}{n-s-2k} x^{n-s-2k} (x^2-1)^k \right) x^s$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} \left((-1)^{-k} \binom{-1/2}{k} \sum_{s=0}^{n-2k} (-1)^{n-s} \binom{-2k}{n-s-2k} x^{n-2k} (x^2-1)^k \right) \qquad (4.7.13)$$

olduğu görülür. Son bağıntıyı sadeleştirmek için

$$(\text{-}1)^{n-s} \binom{-2k}{n-s-2k} = \binom{n-s-1}{2k-1}$$

ve

$$\sum_{s=0}^{n-2k} \binom{n-s-1}{2k-1} = \binom{n}{2k} = \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}$$

ifadesinden yararlanılırsa (4.7.13)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left((-1)^{-k} \binom{-1/2}{k} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} (x^2-1)^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} (x^2-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^{2k} (k!)^2 (n-2k)!} x^{n-2k} (x^2-1)^k$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu ifade (4.7.2) ile karşılaştırılarak (4.7.1) ifadesi elde edilir.

4.8. Laplace ın ilk integral formu

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!x^{n-2k}(x^2-1)^k}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!} \tag{4.8.1}$$

ifadesi elde edilmişti. Bu ifade

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k=\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}$$

olduğundan,

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!\left(\frac{1}{2}\right)_k x^{n-2k}\left(x^2-1\right)^k}{k!(2k)!(n-2k)!} \tag{4.8.2}$$

şeklinde de yazılabilir.

Gamma ve Beta fonksiyonlarının tanım ve özellikleri yardımıyla (4.8.2) deki $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!}$ ifadesi

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+k)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\pi\Gamma(k+1)}=\frac{1}{\pi}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+k\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2k}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2k}\varphi\,d\varphi$$

yazılabilir. Buradan (4.8.2)

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!\, x^{n-2k}(x^2-1)^k}{(k!)^2(n-2k)!}\int_o^{\pi} \cos^{2k}\varphi\, d\varphi \tag{4.8.3}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

m tek sayı olduğunda $\int_o^{\pi} \cos^m \varphi\, d\varphi = 0$ olduğundan (4.8.3) denkleminin sağ tarafındaki toplamda k ile $2k$ yer değiştirebilir. Böylece (4.8.3) den

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!\, x^{n-k}(x^2-1)^{\frac{1}{2}k}}{k!(n-k)!}\int \cos^k \varphi\, d\varphi \tag{4.8.4}$$

elde edilir. Burada k tek sayısını içeren her bir terim sıfırdır. Böylece (4.8.4) ifadesi

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right]^n d\varphi \tag{4.8.5}$$

şeklinde Laplace ın ilk integralini verir.

(4.8.5) den $P_n(x)$ in bazı basit özellikleri elde edilebilir.

-1< x <1 aralığında

$$\left| x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi \right| = \sqrt{x^2 + (x^2-1)\cos^2\varphi}$$

$$= \sqrt{x^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \text{ dir.} \tag{4.8.6}$$

dır. Bu yüzden -1< x < 1 için

$$\left| x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \right| = \sqrt{1 - (1 - x^2)\sin^2\varphi}$$

olur. (4.8.6) denkleminden $\varphi = 0$ ve $\varphi = \pi$ noktaları dışında

$$\left| x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \right| < 1$$

olduğundan

$$\left|P_n(x)\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left| x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \right|^n d\varphi < \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1.d\varphi$$

bulunur.

Teorem 4.8.1. $-1 < x < 1$ için $\left|P_n(x)\right| < 1$ dir.

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \right]^n d\varphi \tag{4.8.7}$$

denklemini elde etmek için bu denklem (4.8.6) ile birleştirilirse

$$\left|P_n(x)\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[1 - (1 - x^2)\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}n} d\varphi$$

veya

$$|P_n(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[1-(1-x^2)\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}n} d\varphi$$

elde edilir. Burada $0<\varphi<\frac{1}{2}\pi$ ve $\sin\varphi > 2\varphi/\pi$ dir. $y>0$ için $1-y<\exp(-y)$ kullanılırsa

$$1-(1-x^2)\sin^2\varphi < 1-\frac{4\varphi^2(1-x^2)}{\pi^2} < \exp\left[-\frac{4\varphi^2(1-x^2)}{\pi^2}\right]$$

elde edilir. Buradan

$$|P_n(x)| < \frac{2}{\pi}\int \exp\left[-\frac{2n\varphi^2(1-x^2)}{\pi^2}\right] d\varphi$$

$$< \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \exp\left[\frac{-2n\varphi^2(1-x^2)}{\pi^2}\right] d\varphi$$

yazılabilir.

$$|P_n| < \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\left[2n(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty}\exp(-\beta^2)d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$$

ifadesinin elde edilmesi için $\beta=(\varphi/\pi)\left[2n\,(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}$ yazılarak integralin yeni bir türü elde edilir.

Teorem 4.8.2. Eğer -1<x<1 ve n herhangi bir pozitif tamsayı ise

$$|P_n(x)| < \left[\frac{\pi}{2n(1-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

dir.

4.9. Fonksiyonların Legendre Polinom Serileri Yardımıyla Gösterimi

Analitik fonksiyonların kuvvet serileri şeklindeki çözümleri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

olarak gösterilir. Burada $c_n = f^{(n)}(0)/n!$ dir.

f fonksiyonu ;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x) \qquad (4.9.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada -1 < x <1 ve $P_n(x)$ n. dereceden Legendre polinomudur. (4.9.1) ifadesine Legendre polinom serilerinin f cinsinden gösterilmesi denir.

(4.9.1) deki b_n katsayısının hesaplanması için (4.9.1) ün her iki tarafı $P_k(x)$ ile çarpılır ve integre edilirse;

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n \int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)dx\right]$$

$$= b_k\left(\frac{2}{2k+1}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$b_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx \qquad (4.9.2)$$

olarak elde edilir. Bu formül denklem (4.9.1) de kullanılan b_k nın katsayısını verir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun Legendre polinomları yardımıyla serisel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: (4.9.2) kullanılarak Legendre katsayıları hesaplanabilir.

$$b_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (1)(1)dx = \frac{1}{2},$$

$$b_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 (1)(x)dx = \frac{3}{4},$$

$$b_2 = \frac{5}{2}\int_0^1 (1)\left(\frac{1}{2}\right)(3x^2 - 1)dx = 0,$$

$$b_3 = \frac{7}{2}\int_0^1 (1)\left(\frac{1}{2}\right)(5x^3 - 3x)dx = -\frac{7}{16},$$

$$b_4 = \frac{9}{2}\int_0^1 (1)\left(\frac{1}{8}\right)(35x^4 - 30x^2 + 3)dx = 0,$$

$$b_5 = \frac{11}{12}\int_0^1 (1)\left(\frac{1}{8}\right)(63x^5 - 70x^3 + 15x)dx = \frac{11}{32},$$

ve bu şekilde devam edilebilir. Bu yüzden

$$f(x)=\frac{1}{2}P_o(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\frac{11}{32}P_5(x)-\cdots$$

bulunur.

4.10. Legendre Polinomlarının Sıfırları

Legendre polinomlarının sıfırları Gaussian quadrature olarak bilinen belirli integral yaklaşımları için kullanılan nümerik metotlarda kısmi olarak faydalıdır.

$\int_a^b f(x)dx$ integrali yaklaşık olarak uygun

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \qquad (4.10.1)$$

toplamı yardımıyla hesaplanır.

Legendre polinomunun sıfırları x_i ve a_i lerin hesaplanması için kullanılır. (4.10.1) formülü $f(x)$ polinomu 2n-1 ya da daha küçük dereceden polinom olduğunda tam sonuç verir. Metodun uygulanabilmesi için $P_n(x)$ in sıfırlarının reel olduğunun bilinmesine ihtiyaç vardır.

Tablo 4.1.

Gaussian Quadrature Kullanılarak Çeşitli Tamsayılar için Belirli İntegralin Yaklaşık Değerleri

n	Kök	Katsayı
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	- 0.3399810436	0.6521451549
	- 0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850

Teorem 4.10.1 : $P_n(x)$ legendre polinomları -1<x<1 aralığı üzerinde n tane farklı köke sahiptir.

Tablo (4.1) de, (4.10.1) deki denklemin a_i katsayıları ile birlikte n nin çeşitli değerleri için legendre polinomlarının kökleri listelenmiştir.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \tag{4.10.2}$$

belirli integrali $f(x_i)$ her bir kökü için hesaplandığında yaklaşık olarak bulunabilir.

ÖRNEK: n nin 2 farklı değeri için quadratürler yardımıyla belirli integrali hesaplayalım.

n=2: $$\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{(0.5773502692)^2/2}+e^{(-0.5773502692)^2/2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1.69296345)$$

$$=0.6753946993.$$

n=5 $$\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[(0.2369268850)e^{(0.9061798459)^2/2}$$

$$+(0.4786286705)\,e^{(0.5384693101)^2/2}$$

$$+(0.5688888889)(1)$$

$$+(0.4786286705)\,e^{(-0.5384693101)^2/2}$$

$$+(0.2369268850)\,e^{(-0.9061798459)^2/2}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1.711249393)$$

$$=0.6826897354$$

bulunur.

Teorem 4.10.2 : $-1 \le x \le 1$ aralığı üzerinde $f(x)$ sonlu süreksizlik noktaları dışında sürekli ise $-1 \le x \le 1$ aralığı üzerinde $f'(x)$ mevcut ise burada $f(x)$ sürekli ve süreksizlik noktalarında sağ ve sol türevleri mevcuttur ve eğer

$$a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(y)P_n(y)dy \qquad (4.10.3)$$

ise bu durumda $f(x)$ in sürekli olduğu noktalarda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = f(x), \qquad -1 < x < 1 \tag{4.10.4}$$

dir. (4.10.4) in sol tarafındaki seri, f in süreksizlik noktalarında

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0) \right]$$

orta değerine yakınsaktır.

İspat: (4.10.4) in sol tarafı (4.10.3) yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^{1} f(y) P_n(y) P_n(y) dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^{1} f(y) P_k(y) P_k(x) dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(y) \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) P_k(x) P_k(y) dy$$

yazılabilir.

(4.10.4) in sol tarafındaki seri $f(x)$ toplamına yakınsar ancak ve ancak

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(y) K_n(x,y) dy = f(x) \tag{4.10.5}$$

dir. Burada

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) P_k(x) P_k(y) \tag{4.10.6}$$

dir.

(4.10.4) ün sağ tarafındaki serinin toplamı için Teorem 2.1.1. den yaralanılarak (4.10.5)

$$\sum_{k=0}^{n} g_k^{-1}\varphi_k(x)\varphi_k(y) = \frac{h_n}{g_n h_{n+1}} \cdot \frac{\varphi_{n+1}(y)\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(y)}{y-x} \tag{4.10.7}$$

$$g_k = \int_{-1}^{1} P_k^{\,2}(x)dx = \frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$$

şeklinde yazılır.

Burada

$$h_n = \frac{2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}$$

dir. Böylece

$$\frac{h_n}{(g_n h_n+1)} = \frac{1}{2}(n+1)$$

olur ve (4.10.7) den

$$K_n(x,y) = \frac{n+1}{2}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \tag{4.10.8}$$

elde edilir.

(4.10.4) koşulu

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x) - \int_{-1}^{1} f(y)K_n(x,y)dy \right] = 0 \qquad (4.10.9)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

$$\int_{-1}^{1} P_k(y)dy = 0 \qquad k>0$$

olduğundan

$$\int_{-1}^{1} K_n(x,y)dy = \int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)P_k(x)P_k(y)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(k+\frac{1}{2})P_k(x)P_k(y)dy\right]$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dy = 1$$

şeklinde yazılabilir.
(4.10.9)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[f(x)-f(y)]K_n(x,y)dy = 0$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\left[P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)\right]dy = 0 \qquad (4.10.10)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.2 yardımıyla

$\int_{-1}^{1} g^2(y)dy$ olacak şekilde herhangi bir $g(y)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1} g(y)P_n(y)dy = 0 \qquad (4.10.11)$$

elde edilir. Böylece

$g(y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ile birlikte $\int_{-1}^{1} g^2(y)dy$ mevcuttur.

(4.10.11) den

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}P_n(y)dy = 0 \qquad (4.10.12)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}P_{n+1}(y)dy = 0 \qquad (4.10.13)$$

elde edilir.

Böylece eğer $n\to\infty$ için

$$\frac{n+1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} P_{n+1}(x)\ , \qquad\qquad \frac{n+1}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} P_n(x)$$

ifadeleri sınırlı ise $-1<x<1$ aralığında $f(x)$ in sürekli olduğu noktalarda (4.10.10) sağlanır.

Teorem 4.8.2 kullanılarak $-1 < x < 1$ aralığı üzerinde

$$\left|\frac{n+1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} P_{n+1}(x)\right| < \left[\frac{(n+1)^2}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2(n+1)(1-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$< \left[\frac{\pi(n+1)}{4(2n+1)(1-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}} < \left[\frac{\pi}{4(1-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\left|\frac{n+1}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} P_{n}(x)\right| < \left[\frac{(n+1)^2}{4\left(n+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2n(1-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$< \left[\frac{\pi(n^2+2n+1)}{4(2n^2+3n)(1-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}} < \left[\frac{\pi}{4(1-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ifadeleri sağlanır.

Böylece $f(x)$ in sürekli olduğu noktalarda Teorem 4.10.2 deki (5) in (4.10.3) denklemini sağladığı görülür.

4.11. x^n Genişlemesi

Herhangi bir polinom legendre polinomları cinsinden seriye açılabilir.Katsayıların belirlenmesinde $P_n(x)$ in ortogonalliği rol oynar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{2xt}{1+t^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (2x)^n t^n}{n!(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

ifadesini ele alalım. Buradan

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (2x)^n t^n}{n!(1+t^2)^n} = (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \tag{4.11.1}$$

elde edilir.

$$t = \frac{2v}{1+\sqrt{1-4t^2}}$$

olarak alınırsa

$$1+t^2 = \frac{2}{1+\sqrt{1-4t^2}}, \qquad \frac{t}{1+t^2} = v$$

olur ve böylece (4.11.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (2x)^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) v^n \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4v^n}}\right)^{n+\frac{1}{2}} \tag{4.11.2}$$

şeklinde yeniden yazılır.

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4v^2}}\right)^{n+\frac{1}{2}} = {}_2F_1\left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right); & \\ & 4v^2 \\ n+\frac{3}{2}; & \end{array}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)_{2k}v^{2k}}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_{k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+2k}\left(\frac{3}{2}\right)_{n}v^{2k}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{n}k!\left(\frac{3}{2}\right)_{n+k}}$$

olduğundan

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4v^2}}\right)^{n+\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_{n+2k}v^{2k}}{k!\left(\frac{3}{2}\right)_{n+k}} \tag{4.11.3}$$

yazılabilir.

(4.11.1) ve (4.11.3) yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n}(2x)^n v^n}{n!}=\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_{n+2k}P_n(x)v^{n+2k}}{k!\left(\frac{3}{2}\right)_{n+k}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(2n-4k+1)\left(\frac{1}{2}\right)_{n}P_{n-2k}(x)v^{n}}{k!\left(\frac{3}{2}\right)_{n-k}}$$

elde edilir.

Bir önceki teoremdeki y^n in katsayılarının karşılaştırılmasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.11.1 : Negatif olmayan bir n tamsayısı için

$$x^n = \frac{n!}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(2n-4k+1)P_{n-2k}(x)}{k!\left(\frac{3}{2}\right)_{n-k}}$$

dir. [6]

Teorem 4.11.2 : Eğer $|x|$ yeterince küçük ve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!} \tag{4.11.4}$$

ise

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x) \tag{4.11.5}$$

dir. Burada

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n+1)a_{n+2k}}{2^{n+2k}\,k!\left(\frac{3}{2}\right)_{n+k}} \tag{4.11.6}$$

dir. (4.11.5) nin yakınsaklık bölgesi $x = 0$ merkezli elipsin iç kısmıdır. [6]

4.12 İkinci Tip Legendre Fonksiyonu

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0$$

denkleminin genel çözümünün bulunması için $P_n(x)$ Legendre polinomu ile bağımlı olmayan başka bir tane de özel çözüm bulunması gerekir. Bu fonksiyon

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1} - \sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x)$$

dir. Burada N değeri n çift ise $N = \frac{1}{2}n$, n tek sayı ise $N = \frac{1}{2}(n+1)$ dir.

n=0, 1, 2, 3 için;

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x$$

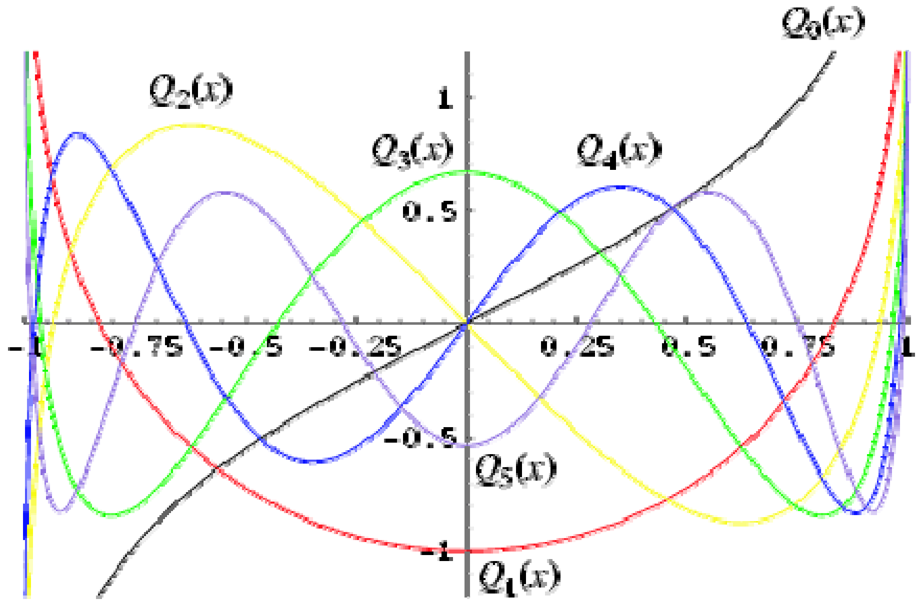
$$Q_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3-3x)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}$$

olur.

$P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ lineer bağımsız fonksiyon olduğundan denklemin genel çözümü

$$y = C_1(x)P_n(x) + C_2Q_n(x)$$

biçiminde yazılır. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.



Şekil 4.1.

4.13. Birleştirilmiş Legendre Polinomları

$P_l^x(x)$ ve P_l^{-m} eş Legendre polinomları birleştirilmiş legendre denkleminin çözümleridir. Burada l pozitif tamsayı ve $m = 0,1,\ldots l$ dir. $P[l, m, x]$ olarak gösterilirler. m pozitif tamsayısı için

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \tag{4.13.1}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \tag{4.13.2}$$

ile verilirler. Burada $P_l(x)$ birleştirilmiş olmayan Legendre polinomudur. Birleştirilmiş Legendre polinomu negatif m sayısı için

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \tag{4.13.3}$$

ile tanımlanır.

Birleştirilmiş polinomlar Ferrers fonksiyonu olarak adlandırılır. m=0 ise birleştirilmiş olmayan polinom olarak yazılırlar. Birleştirilmiş Legendre fonksiyonları küresel koordinatlarda Laplace denkleminin çözümü olan küresel harmonikleri bir parçasıdır. Bunlar $[-1,1]$ aralığında $\omega = 1$ ve $\omega = \dfrac{1}{1-x^2}$ ağırlık fonksiyonlar için diktirler. Bu nedenle

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l\,l'} \qquad (4.13.4)$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_l^{m'}(x) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \delta_{m\,m'} \qquad (4.13.5)$$

yazılabilir.

Birleştirilmiş Legendre polinomları

$$(l-m)P_l^m(x) = x(2l-1)P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x)$$

indirgeme bağıntısını sağlarlar.

$x = \cos\theta$ alınmasıyla (genellikle μ ile gösterilir.)

$$\frac{dP_l^m}{d\theta} = \frac{l\mu P_l^m(\mu) - (l+m)P_{l-1}^m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \qquad (4.13.6)$$

ve

$$(2l+1)\mu P_l^m(\mu) = (l+m)P_{l-1}^m(\mu) + (l-m+1)P_{l+1}^m(\mu) \qquad (4.13.7)$$

elde edilir. Ayrıca

$$P_l^l(x) = (-1)^l (2l-1)!!(1-x^2)^{1/2} \tag{4.13.8}$$

$$P_{l+1}^l(x) = x(2l+1)P_l^l(x) \tag{4.13.9}$$

dir.

$(-1)^m$ yi içeren ilk beş birleştirilmiş Legendre polinomu

$$P_0^0(x) = 1$$

$$P_1^0(x) = x$$

$$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_3^0(x) = \frac{1}{2}x(5x^2-3)$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_3^3(x) \quad = \quad -15(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4^0(x) \quad = \quad \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_4^1(x) \quad = \quad \frac{5}{2}x(3-7x^2)(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_4^2(x) \quad = \quad \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)$$

$$P_4^3(x) \quad = \quad -105x(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4^4(x) \quad = \quad 105(1-x^2)^2$$

$$P_5^0(x) \quad = \quad \frac{1}{8}x\left(63x^4 - 70x^2 + 15\right)$$

olarak bulunur.

$x = \cos\theta$ olarak alındığında ise

$$P_0^0(\cos\theta) \quad = \quad 1$$

$$P_1^0(\cos\theta) \quad = \quad \cos\theta$$

$$P_1^1(\cos\theta) \quad = \quad -\sin\theta$$

$$P_2^0(\cos\theta) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$P_2^1(\cos\theta) \quad = \quad -3\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$$

$$P_3^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta(5\cos^2\theta - 3)$$

$$P_3^1(\cos\theta) = -\frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$P_3^2(\cos\theta) = 15\cos\theta\sin^2\theta$$

$$P_3^3(\cos\theta) = -15\sin^3\theta$$

olarak elde edilir.

Orjindeki türev

$$\left[\frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx}\right]_{x=0} = \frac{2^{\mu+1}\sin\left[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu+1\right)}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\right)}$$

dir. Logaritmik türev ise

$$\left[\frac{d\ln P_\lambda^\mu(z)}{dz}\right]_{z=0} = 2\tan\left[\frac{1}{2}\pi(\lambda+\mu)\right]\frac{\left[\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\right]!\left(\frac{1}{2}(\lambda-\mu)\right)!}{\left[\frac{1}{2}(\lambda+\mu-1)\right]!\left[\frac{1}{2}(\lambda-\mu-1)\right]!}$$

olur.

4.14. Birleştirilmiş Legendre Fonksiyonunun Belirsiz İntegrali İçin Rekürans Bağıntısı

Reel değişkenli, tam sayı mertebe ve dereceli birleştirilmiş Legendre fonksiyonunun integralinin hesabı için iki rekürans formülü elde edilecektir.

Burada amaç, $P_n^m(x)$ n-yinci dereceden ve m-yinci mertebeden x değişkenli klasik birleştirilmiş Legendre fonksiyonunu göstermek üzere, $n \geq m \geq 0$ indisleri üzerinden

$$S_n^m(x) \equiv \int_a^x P_n^m(t)\,dt \qquad |x| \leq 1, \quad -1 \leq a < 1 \quad (1)$$

integrali için rekürans denklemleri geliştirmektir. $P_n^0(x) = P_n(x)$ n-yinci dereceden Legendre polinomu, yani

$$P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (4.14.2)$$

olmak üzere

$$P_n^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}\left[P_n(x)\right] \qquad (4.14.3)$$

tanımı kullanılmaktadır. n ve m indisleri bundan böyle negatif olmayan tam sayılar olarak kabul edilecek ve a genelde 0 veya negatif olan bir sabit olarak alınacaktır.

Önce kolay gönderme yapılabilmesi için bazı iyi bilinen formüller listelenmiştir.

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}xP_n - \frac{n}{n+1}P_{n-1}, \qquad n \geq 0 \ \ (P_{-1} \equiv 0)\ (4)$$

$$P_{n+1}^m = \frac{2n+1}{n-m+1}xP_n^m - \frac{n+m}{n-m+1}P_{n-1}^m, \qquad n \geq m \geq 0 \qquad (4.14.5)$$

$$P_n^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}(1-x^2)^{n/2} \quad , \quad P_{n+1}^n = (2n+1)\, x\, P_n^n \tag{4.14.6}$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^m = (n+1)\, x\, P_n^m - (n-m+1)P_{n+1}^m \tag{4.14.7}$$

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{m+1} &= P_{n-1}^{m+1} + (n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1} \\ &\quad - (n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1} \end{aligned} \tag{4.14.8}$$

$$\sqrt{1-x^2}\, P_n^m = \frac{1}{2n+1}\left[(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1} - (n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}\right] \tag{4.14.9}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{m/2} P_n^m\right] = -(n-m+1)(n+m)(1-x^2)^{(m-1)/2} P_n^{m-1} \tag{4.14.10}$$

n üzerinden elde edilmek istenen rekürans formülünü elde etmek için önce (4.14.7) nin integrali alınır daha sonra sol tarafa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} (1-x^2)P_n^m(t)\Big|_a^x + 2\int_a^x tP_n^m(t)dt &= (n+1)\int_a^x tP_n^m(t)dt \\ &\quad - (n-m+1)S_{n+1}^m \end{aligned} \tag{4.14.11}$$

elde edilir. Sonra (4.14.5) integrali alınır (4.14.11) de kullanılırsa istenilen sonuç yani

$$\begin{aligned} S_{n+1}^m &= \frac{(n-1)(n+m)}{(n+2)(n-m+1)} S_{n-1}^m \\ &\quad - \frac{2n+1}{(n+2)(n-m+1)}(1-t^2)P_n^m(t)\Big|_a^x , \quad 0 \le m \le n \end{aligned} \tag{4.14.12}$$

elde edilir.

(4.14.1) için m üzerinden rekürans formüllerini veren adımlar (4.14.8) in integraliyle başlar. Sonuç

$$S_{n+1}^{m+1} = S_{n-1}^{m+1} + (n+m)(n+m-1)S_{n-1}^{m-1}$$
$$-(n-m+1)(n-m+2)S_{n+1}^{m-1} \tag{4.14.13}$$

olur. Şimdi (4.14.12) de m yerine (m-1) yazılırsa ve bazı uygun işlemler yapılırsa

$$(n+m-1)(n+m)S_{n-1}^{m-1}$$
$$= \frac{(2n+1)(n+m)}{n-1}\left[\frac{(n-m+2)(n+2)}{2n+1}S_{n+1}^{m-1} + (1-t^2)P_n^{m-1}(t)\ \Big|_a^x\right] \tag{4.14.14}$$

elde edilir. (4.14.14), (4.14.13) de yerine yazılırsa

$$S_{n+1}^{m+1} = S_{n-1}^{m+1} + \frac{(2n+1)(m+1)(n-m+2)}{n-1}S_{n+1}^{m-1}$$
$$+\frac{(2n+1)(n+m)}{n-1}(1-t^2)P_n^{m-1}(t)\ \Big|_a^x \tag{4.14.15}$$

elde edilir. (4.14.12) de m yerine (m+1) yazılırsa

$$\frac{(n-1)(n+m+1)}{2n+1}S_{n-1}^{m+1} = \frac{(n-m)(n+2)}{2n+1}S_{n+1}^{m+1} + (1-t^2)P_n^{m+1}(t)\ \Big|_a^x$$

denklemi elde edilir. Bu sonuç (4.14.15) de kullanılırsa

$$S_{n+1}^{m+1} = \frac{1}{m-1}\Big\{(m+1)(n-m+2)(n+m+1)S_{n+1}^{m-1}$$
$$+(1-t^2)\left[P_n^{m+1}(t) + (n+m)(n+m+1)P_n^{m-1}(t)\right]\Big|_a^x\ \Big\} \tag{4.14.16}$$

elde edilir. (4.14.16) da n+1 yerine n yazılırsa istenen sonuç

$$S_n^{m+1} = \frac{1}{m-1}\Big\{(m+1)(n-m+1)(n+m)S_n^{m-1}$$

$$+(1-t^2)\left[P_{n-1}^{m+1}(t)+(n+m-1)(n+m)P_{n-1}^{m-1}(t)\right]\Big|_a^x \quad , \quad 2 \le m \le n \tag{4.14.17}$$

olur.

(4.14.12) ve (4.14.17) reküràns formüllerini açmak için

$$P_0^1 = 1\,, \quad P_1^0 = x\,, \quad P_2^0 = \frac{1}{2}(3x^2-1)\,, \quad P_1^1 = \sqrt{1-x^2} \tag{4.14.18}$$

(4.14.4) den

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}xP_n - \frac{n}{n+1}P_{n-1}\,, \qquad n \ge 0\,, \quad P_{-1} \equiv 0 \tag{4.14.19}$$

$$S_0^0 = x-a\,, \quad S_1^1 = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1-t^2}+\sin^{-1}t\right]\Big|_a^x \tag{4.14.20}$$

$$S_1^0 = \frac{x^2-a^2}{2} \tag{4.14.21}$$

ve genel olarak

$$S_n^0 = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(t)-P_{n-1}(t)\right]\Big|_a^x \tag{4.14.22}$$

(4.14.12) yardımıyla

$$S_n^1 = \frac{(n-2)n}{(n-1)(n+1)} S_{n-2}^1 - \frac{2n-1}{(n-1)(n+1)}(1-t^2)P_{n-1}^1(t) \Big|_a^x \quad n \geq 2 \tag{4.14.23}$$

bulunur. (4.14.2), (4.14.4) ve (4.14.9) dan

$$S_n^2 = -2S_n^0 + \left[(n+3)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)\right] \Big|_a^x \tag{4.14.24}$$

olur. (4.14.8) ve (4.14.9) dan

$$P_{n+1}^m = \frac{2n+1}{n-m+1} xP_n^m - \frac{n+m}{n-m+1} P_{n-1}^m \quad , \quad n \geq 0, n \geq m$$

$$P_{n+1}^{n+1} = (2n+1)\sqrt{1-x^2}\, P_n^n \tag{4.14.25}$$

elde edilir. (4.14.6) dan

$$S_n^n = \frac{1}{n+1}\left[n(2n-3)(2n-1)S_{n-2}^{n-2} + tP_n^n(t) \Big|_a^x\right] \tag{4.14.26}$$

$$S_{n+1}^n = -\frac{1}{n+2}\sqrt{1-t^2}\, P_{n+1}^{n+1}(t) \Big|_a^x \tag{4.14.27}$$

bulunur.

$P_n^m(x)$ ve $S_n^m(x)$ in normalleştirilmişleri rekürans formüllerinin sonuçları çok büyük olmasın diye kullanılabilir.

$$\int_{-1}^{1} \left[P_n^m(t)\right]^2 dt = \left(\frac{2}{2n+1}\right)\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{4.14.28}$$

olduğu için $\overline{P}_n^m(x)$ normalleştirilmiş Legendre fonksiyonları

$$\overline{P}_n^m \equiv \left[\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{1/2} P_n^m(x) \qquad (4.14.29)$$

ile tanımlanır. Buradan, sırasıyla (4.14.5), (4.14.12) ve (4.14.17) için normalleştirilmiş formları aynı denklem numarasının üzerine çizgi koyarak elde edilmiştir.

$$\overline{S}_n^m(x) \equiv \left[\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{1/2} S_n^m(x)$$

olmak üzere

$$\overline{P}_{n+1}^m = \left[\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n+m+1)(n-m+1)}\right]^{1/2} x\overline{P}_n^m(x) \qquad (4.14.\overline{5})$$

$$-\left[\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}\right]^{1/2} \overline{P}_{n-1}^m(x) \ , \qquad 0 \le m \le n+1$$

$$-\frac{1-t^2}{n+2}\left[\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n+m+1)(n-m+1)}\right]^{1/2} \overline{P}_n^m(t) \Big|_a^x \quad , \quad 1 \le m < n+1 \qquad (4.14.1\overline{2})$$

$$\overline{S}_n^{m+1}(x) = \frac{1}{m-1}\left\{(m+1)\left[\frac{(n+m)(n-m+1)}{(n+m+1)(n-m)}\right]^{1/2} \overline{S}_n^{m-1}\right.$$

$$+(1-t^2)\left[\frac{(2n+1)(n-m-1)}{(2n-1)(n+m+1)}\right]^{1/2} \overline{P}_{n-1}^{m+1}(t) \Big|_a^x \qquad (4.14.1\overline{7})$$

$$+(1-t^2)\left[\frac{(2n+1)(n+m)(n+m-1)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m)}\right]^{1/2} \overline{P}_n^{m-1}(t) \Big|_a^x \quad 2 \le m < n$$

olur. (4.14.18)-(4.14.27) denklemlerinin açılmışları normalleştirilmiş formda

$$\overline{P}_0 = 1/\sqrt{2}\,, \quad \overline{P}_1(x) = (3/2)^{1/2}\, x\,, \quad \overline{P}_2(x) = \left(5/2\right)^{1/2} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\overline{P}_1^{\,1}(x) = \left[3(1-x^2)\right]^{1/2} \;/2 \tag{4.14.1$\overline{8}$}$$

$$\overline{P}_{n+1}(x) = \frac{\left[(2n+3)(2n+1)\right]^{1/2}}{n+1}\, x\overline{P}_n(x) \tag{4.141$\overline{9}$}$$

$$-\frac{n}{n+1}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{1/2} \overline{P}_{n-1}(x) \quad , \qquad n \geq 0$$

$$\overline{S}_0^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-a) \quad , \quad \overline{S}_1^{\,1} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[t\sqrt{1-t^2} + \sin^{-1} t\right] \Big|_a^x \tag{4.14.2$\overline{0}$}$$

$$\overline{S}_1^{\,0} = \frac{\left(3/2\right)^{1/2}}{2}(x^2 - a^2) \tag{4.14.2$\overline{1}$}$$

$$\overline{S}_n^{\,0} = \left\{\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]^{1/2} \overline{P}_{n+1}(t) - \left[\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\right]^{1/2} \overline{P}_{n-1}(x)\ \right\} \Big|_a^x \tag{4.14.2$\overline{2}$}$$

$$\overline{S}_n^{\,1} = \frac{n-2}{n+1}\left[\frac{(2n+1)n(n-2)}{(2n-3)(n+1)(n-1)}\right]^{1/2} \overline{S}_{n-2}^{\,1}$$

$$-\frac{(1-t^2)}{n+1}\left[\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+1)(n-1)}\right]^{1/2} \overline{P}_{n-1}^{\,1}(t) \Big|_a^x \tag{4.14.2$\overline{3}$}$$

$$\overline{S}_n^{\,2} = \frac{1}{\left[(n+2)(n+1)n(n-1)\right]^{1/2}}$$

$$x\left\{-2\overline{S}_n^{\,0} + \left[(n+3)\overline{P}_n(t) - (n+1)\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{1/2}\overline{P}_{n+1}(t)\right]\Big|_a^x\right\} \qquad (4.14.2\overline{4})$$

$$\overline{P}_{n+1}^{\,n+1}(x) = \left[\frac{2n+3}{2n+2}\right]^{1/2}(1-x^2)^{1/2}\,\overline{P}_n^{\,n}(x) \qquad (4.14.2\overline{5})$$

$$\overline{S}_n^{\,n} = \frac{1}{n+1}\left\{\left[\frac{n(2n-1)(2n+1)}{4(n-1)}\right]^{1/2}\overline{S}_{n-2}^{\,n-2} + t\overline{P}_n^{\,n}\ \Big|_a^x\right\} \qquad (4.14.2\overline{6})$$

$$\overline{S}_{n+1}^{\,n} = -\frac{1}{n+2}\left[2(n+1)\right]^{1/2}(1-t^2)^{1/2}\,\overline{P}_{n+1}^{\,n+1}(t)\ \Big|_x^a \qquad (4.14.2\overline{7})$$

olarak yazılır.

BÖLÜM 5. LEGENDRE POLİNOMLARININ UYGULAMALARI

5.1. FİZİKSEL PROBLEMLER

Legendre polinomlarının fiziksel problemlerdeki uygulamasını l uzunluğunda olan homojen telin bir nokta etrafında dönüşümü probleminde göstereceğiz. Eğer havanın etkisi ve telin ağırlığı dikkate alınmazsa , bu halde telin denge durumu düzlemin üzerinde doğrunun sabit ω açısal hızı ile dönmesi şeklinde olacaktır. Bu telin denge etrafında titreşim olayı yalnız o zaman meydana gelecektir. Eğer tel denge durumundan çıkmış olsa yani telin noktaları düzlemin üzerinde hareket etmeseler, telin titreşimini incelemek için tel doğrusallığını kaybetmeli ve onun noktaları $u(x,t)$ fonksiyonu kadar düzlemin üzerinden çıkmış olmalıdır. Üstelik $u(x,t)$ kayma fonksiyonu dönme düzlemine diktir.

Bu halde dönüşen telin tüm noktalarında noktasal ivme meydana gelmektedir ve iki vektörden oluşmaktadır. Birisi x sabit uzunluğunda diğeri ise değişen u uzunluğundadır. Üstelik u uzunluğu bir eksen etrafında dönüşen düzleme diktir. Vektörlerin ikiside ω açısal hızı ile dönmektedirler.

$u(x,t)$ fonksiyonu dönüşen düzleme dik olduğundan bu $u(x,t)$ fonksiyonları tüm noktalarında $(-\omega^2 x)$ kadar x ekseni yönünde ivme kuvveti oluşmakta ve bu da $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ kadar u yönüne doğru olmaktadır. Dayanak noktasından x uzaklığında olan telin dx elemanını etkileyen kuvvet,

$$\rho\, dx \cdot \omega^2 x \tag{5.1.1}$$

dir. Burada ρ telin yoğunluğudur.

Telin x noktasında oluşan gerilmesi telin (x,ℓ) aralığındaki bütün noktalarının etrafında oluşan elemanlarındaki gerilmelerin toplamına eşittir, yani ;

$$T(x)=\int_x^{\ell}\rho\,\omega^2 x\,dx=\frac{\rho\,\omega^2}{2}(\ell^2-x^2) \tag{5.1.2}$$

dir. Bunları göz önüne alarak düzlemin üzerinde dönüşen telin serbest titreşiminin denklemi,

$$\rho\,dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left[\frac{\rho\,\omega^2}{2}(\ell^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\Bigg|_{x+dx} - \left[\frac{\rho\,\omega^2}{2}(\ell^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\Bigg|_{x}=$$

$$=\frac{\rho\,\omega^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[(\ell^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx$$

biçiminde olmaktadır. Veya,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(\ell^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \qquad \left(a^2=\frac{\omega^2}{2}\right) \tag{5.1.3}$$

dir. (5.1.3) denkleminin ‘Sınır ve Değer’ koşulları ise

$$u\Big|_{x=0}=0 \tag{5.1.4}$$

$$u\Big|_{t=0}=f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=F(x) \tag{5.1.5}$$

dir. (5.1.3) ve (5.1.4) probleminin çözümünü

$$u=T(t)\,X(x) \tag{5.1.6}$$

şeklinde arayalım.

(5.1.6) (5.1.3) de yerine yazılırsa

$$\frac{T''(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{\frac{d}{dx}\left[\left(\ell^2 - x^2\right)X'(x)\right]}{X(x)} \tag{5.1.7}$$

elde edilir. (5.1.7) denkleminin sağ ve sol tarafları $(-\lambda)$ ya eşitlenirse,

$$T''(t) + a^2\,\lambda\,T(t) = 0 \tag{5.1.8}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(\ell^2 - x^2)X'(x)\right] + \lambda\,X(x) = 0 \tag{5.1.9}$$

denklemleri elde edilir.

$x = \ell\xi$ dönüşümü yapılırsa (5.1.9)

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right] + \lambda X = 0 \tag{5.1.10}$$

şekline dönüşür. Bu ise Legendre denklemidir.

Fiziksel anlama göre telin $u(x,t)$ yer değiştirme fonksiyonunun $[0,\ell]$ aralığında sonlu değer alması gerekir. Buna göre (5.1.9) denkleminin çözümlerinin bu aralığın uçlarıda dahil sonlu olması gerekir. Önceden gösterilmiş $\lambda = n(n+1)$ ler için (5.1.10) Legendre denkleminin $[-1,+1]$ aralığında olan çözümleri $\xi = \pm 1$ olarak almaktadır. Bu çözümler $P_n(\xi)$ Legendre polinomlarıdır. Burada –x değişkenine dönülürse

$$X(x) = P_n\left(\frac{x}{\ell}\right) \tag{5.1.11}$$

elde edilir. Polinomlar $x = \pm\, \ell$ aralığında $\lambda = n(n+1)$ için (5.1.9) denkleminin sonlu çözümüdür. (5.1.4) sınır koşulundan

$$P_n(0) = 0$$

dır. Bu ise $n = 2k - 1$ olduğunda geçerlidir. Burada k pozitif bir sayıdır.

Böylece (5.1.9) denkleminin

$$X(0) = 0 \quad , \qquad X(\ell) = \text{sınırlı} \tag{5.1.12}$$

koşullarından aşikar olmayan çözümleri,

$$\lambda_k = 2k(2k-1) \qquad (\text{k=1,2,3,}\ldots) \tag{5.1.13}$$

parametrelerinin aldığı değerlerde mümkündür. Bu parametreler özdeğer olarak adlandırılır.

Bu özdeğerlere uygun

$$X(x) = P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) \tag{5.1.14}$$

şeklinde fonksiyonun özdeğerleri vardır. (5.1.14) özdeğer fonksiyonlar sistemi $[0,\ell]$ aralığında ortogonal fonksiyonlar sistemini oluşturmaktadır.

$\lambda = \lambda_n$ için (5.1.8) denkleminin genel çözümü

$$T_k(t) = a_k \cos\sqrt{2k(2k-1)}\, at + b_k \sin\sqrt{2k(2k-1)}\, at \tag{5.1.15}$$

olur. (5.1.6) göz önüne alınırsa $u_k(x,t)$ fonksiyonu

$$u_k(x,t) = \left[a_k \cos\sqrt{2k(2k-1)}\, at + b_k \sin\sqrt{2k(2k-1)}\, at\right] P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) \tag{5.1.16}$$

biçimini alır. (5.1.16) fonksiyonu (5.1.3) denklemini ve (5.1.4) sınır koşulunda istenen a_k ve b_k lar için sağlanmaktadır. $u(x,t)$ çözümünün elde edilmesi için (5.1.5) başlangıç koşullarını sağlayan

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\sqrt{2k(2k-1)}\, at + b_k \sin\sqrt{2k(2k-1)}\, at\right] P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) \tag{5.1.17}$$

serisi ele alınmalıdır. O halde bu seri

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) \tag{5.1.18}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k(2k-1)}\, ab_k P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) = F(x) \tag{5.1.19}$$

koşullarını sağlar. (5.1.18) serisi düzgün yakınsak olarak kabul edildiğinde serinin a_k katsayılarının elde edilmesi için (5.1.18) eşitliğinin sağ ve sol tarafları $P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right)$ ile çarpılır, x e göre 0 dan ℓ ye kadar integral alınır ve özdeğer fonksiyonlarının ortogonalliği göz önüne alınırsa

$$\int_0^{\ell} f(x) P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) dx = \int_0^{\ell} P_{2k-1}^2\left(\frac{x}{\ell}\right) dx$$

$$= \frac{\ell a_k}{2} \int P_{2k-1}^2(\xi)\, d\xi = \frac{\ell}{4k-1} a_k$$

elde edilir. Buradan a_k katsayıları

$$a_k = \frac{4k-1}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\, P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) dx \qquad (5.1.20)$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde b_k katsayıları

$$b_k = \frac{4k-1}{a\,\ell\sqrt{2k(2k-1)}} \int_0^{1} F(x) P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) \qquad (5.1.21)$$

biçiminde bulunmaktadır.

Böylece problemin çözümü (5.1.17) serisi ile verilmektedir ve katsayıları ise (5.1.20) ve (5.1.21) formülleri ile belirlenmektedir.

(5.1.17) serisi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin\sqrt{2k(2k-1)}\; at + \varphi_k) P_{2k-1}\left(\frac{x}{\ell}\right) \qquad (5.1.22)$$

biçiminde yazılırsa buradan şu anlaşılır. Telin dönüşüm zamanı oluşan küçük titreşimler harmonik titreşimlerden oluşmaktadır. ω_k titreşimin frekansı

$$\omega_k = \sqrt{2k(2k-1)}\, a = \sqrt{2k(2k-1)}\, \omega$$

formülü ile hesaplanmaktadır.

Buradan sonuç olarak şunu vurgulamak gerekir. ω_k titreşimlerinin frekansları ω açısal hızı ile bağımlıdır. Telin uzunluğu ve telin yoğunluğuna bağlı değildir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde Legendre diferensiyel denklemi, Laplace denkleminin küresel koordinatlarındaki ifadesinden yararlanılarak elde edilmiştir. Legendre diferensiyel denkleminin çözümleri olan Legendre polinomları elde edilmiş ve onların özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca Legendre polinomlarının fiziksel uygulaması hakkında bilgi verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] ALİYEV, G.G., TURHAN, H.N., Özel Fonksiyonlar, Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara 2000.

[2] AYDIN, M., KURYEL, B. ,GÜNDÜZ, G., Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları, E.Ü. Mühendislik Fakültesi, İzmir 2001

[3] BALCI, M., Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Eylül 1997

[4] DEMİRTAŞ, A., Ansiklopedik Matematik Sözlüğü, Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara 1986.

[5] DİDONATO, A.R., Recurrence Relations for the Indefinite Integrals of the Associated Legendre Functions, Mathematics of Computation Volume 38, Number 158, April 1982, Pages 547-551.

[6] GİORDANO, F. R., WEIR, M.D., Differential Equations A Modeling Approach, U.S Military Academy, 1989

.

[7] GÜR, Ş., Doğurucu Fonksiyonlar, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 1996.

[8] HASANOV, E. , UZGÖREN, G. , BÜYÜKAKSOY, A. , Diferensiyel Denklemler Teorisi, Mart 2002.

[9] ÖZER, N. , ESER, D. ,Diferensiyel Denklemler, Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Eskişehir 2000.

[10] RAINVILLE, E. D. ,Special Functions. Mac Millan, New york 1960.

[11] WAYLAND, H., Differential Equations Applied in Science and Engineering, California Institute of Technology, 1980

[12] YAŞAR, İ. B. , Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları , Ankara 1999.

[13] http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Ankara'da doğdu. 1999 yılında girdiği Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesinden 2003 yılında mezun oldu. 2003 yılından beri Kocaeli ilinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.