

**T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

## **TERS ÖZDEĞER PROBLEMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hülya GÖZÜTOK SARAL**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ**

**Mayıs 2006 T.C.**

**SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TERS ÖZDEĞER PROBLEMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hülya GÖZÜTOK SARAL**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Bu tez .. / .. /2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.**

.....  
**Jüri Başkanı**

.....  
**Üye**

.....  
**Üye**

## **TEŞEKKÜR**

Bu çalıőmanın her aőamasında çok değerli destekleri için danıőman hocam sayın Prof. Dr. Abdullah YILDIZ'a, katkılarından dolayı sayın Araőtırma Grevlisi Mustafa ERÖZ'e teőekkürlerimi sunarım.

Hülya

GÖZÜTOK SARAL

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
TABLOLAR LİSTESİ.....	vii
ÖZET.....	viii
SUMMARY.....	ix
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
TERS ÖZDEĞER PROBLEMLERİ .....	5
2.1. Giriş.....	5
2.2. Temel Sistemin Oluşturulması .....	8
2.3. Özdeğer ve Özfonksiyonların Asimptotik Davranışları .....	20
2.4. Bazı Hiperbolik Problemler .....	38
2.5. Ters Problem .....	48
2.6. Parametre Belirleme Problemi .....	57
2.7. Sayısal Çözüm Teknikleri .....	63
BÖLÜM 3.	
SONUÇLAR.....	72
3.1. Klasik Ters Sturm-Liouville Probleminin Çözümü.....	72
3.2. Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi.....	75

3.3. Uygulamalar.....	77
BÖLÜM 4.	
TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	90
KAYNAKLAR.....	91
ÖZGEÇMİŞ.....	94

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$C[a,b]$	: $[a,b]$ de tanımlı sürekli fonksiyon sınıfı
$C^n[a,b]$	: $[a,b]$ de tanımlı n. türeve varana kadar sürekli fonksiyon sınıfı
$C_0[0,1]$	: $= \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$
$C_0^j[0,1]$	: $= C^j[0,1] \cap C_0[0,1]$ , $j = 1,2$
$H^2(0,1)$	: Sobolev uzayı. ( bkz. sf. 5)
$H^1(0,1)$	: $= \left\{ f \in C[0,1] : f(x) = \alpha + \int_0^x g(t)dt, \alpha \in R, g \in L^2(0,1) \right\}$
$H_0^1(0,1)$	: $= H^1(0,1) \cap C_0[0,1]$
$L^2(0,1)$	: $(0,1)$ de ikinci dereceden integrallenebilen fonksiyon sınıfı
$O$	: Büyük o sembolü
$o$	: Küçük o sembolü
$\ f\ _\infty$	: $= \max_{0 \leq x \leq 1}  f(x) $ $C_0[0,1]$
$\ f\ _{C^j}$	: $= \max_{l=1,\dots,j} \max_{0 \leq x \leq 1}  f^{(l)}(x) $ $C_0^j[0,1]$

$\ f\ _{H^1}$	$:= \sqrt{\ f\ _{L^2}^2 + \ f'\ _{L^2}^2}$ $H^1(0,1)$ ve $H_0^1(0,1)$
$T^*$	: $T$ 'nin $L^2$ -adjoint (devriğini)'unu belirtir
$T^{-1}$	: $T$ 'nin tersi
$(T^*)^{-1}$	: $T$ 'nin devriğinin tersi
$\Omega_T$	$:= (0,1) \times (0,T) \subset \mathbb{R}^2, q \in C[0,1]$
$\overline{\Omega_T}$	: $\Omega_T$ 'nin kapanışı
$C(\overline{\Omega_T})$	: $\overline{\Omega_T}$ 'de tanımlı sürekli fonksiyon sınıfı
$B_M$	$:= \{q \in L^\infty(0,1) : \ q\ _\infty \leq M\}$

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.	$u^i$ dalgasının $D$ objesinden saçılması.....	1
Şekil 1.2.	$\Gamma$ eğrisi.....	2
Şekil 2.1.	$[0,20]$ ile $[5,100]$ üzerindeki $q_1$ 'in karakteristik fonksiyonu.....	32
Şekil 2.2.	$[0,20]$ ile $[5,100]$ üzerindeki $q_2$ 'nin karakteristik fonksiyonu.....	32
Şekil 3.1.1.	5 özdeğer için $q(x) = x(x-1)$ fonksiyonunun grafiği.....	80
Şekil 3.1.2.	10 özdeğer için $q(x) = x(x-1)$ fonksiyonunun grafiği.....	81
Şekil 3.1.3.	20 özdeğer için $q(x) = x(x-1)$ fonksiyonunun grafiği.....	82
Şekil 3.2.1.	$q(x) = x(x-1)$ fonksiyonunun lineer çözümünün grafiği .....	86
Şekil 3.2.2.	$q(x) = x(x-1)$ fonksiyonunun lineer olmayan çözümünün grafiği .....	87

Şekil 3.3.1.  $q(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (x-1)^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$  nın lineer

çözümünün

grafığı.....

.....88

Şekil 3.3.2.  $q(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (x-1)^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$  lineer olmayan

çözümünün

grafığı.....

.....89

## TABLolar LİSTESİ

Tablo 1.1.  $q_1(x)$  potansiyeline ait asimptotik formülden elde edilen özdeğerler...33

Tablo 1.2.  $q_2(x)$  potansiyeline ait asimptotik formülden elde edilen özdeğerler....34

## ÖZET

Anahtar kelimeler: Özdeğer problemleri, ters özdeğer problemleri.

İnvers özdeğer problemleri kendi başlarına önemli oldukları gibi pratik başka önemli uygulamalara da sahiptir. Parabolik ve hiperbolik diferansiyel denklemlerin parametre belirlemeleri ve grating teori de bunların kullanım alanlarından bazılarıdır.

Biz bu çalışmamızda kanonik sturm-liouville özdeğer problemini çeşitli sınır koşulları için analiz ettik. Sayılabilir sayıda  $\lambda_n$  özdeğerinin bulunduğunu, bunlara ait asimptotik formülleri teoremleriyle beraber

ispatladık. Bundan sonra da ters probleme yani özdeğerlerin bilinmesi halinde potansiyel fonksiyonun belirlenmesi işini yaptık.

Son kısımda da nümerik işlemlerle  $q$  potansiyelinin nasıl elde edileceğini örneklerle gösterdik.

## **INVERSE EIGENVALUE PROBLEMS**

### **SUMMARY**

Key Words: Eigenvalue problems, Inverse eigenvalue problems.

Inverse eigenvalue problems are not only interesting in their own right but also have important practical applications. Other applications appear in parameter identification problems for parabolic or hyperbolic differential equations and in grating theory.

We will study the canonical Sturm-Liouville eigenvalue problem some different boundary conditions. We will prove that there exists a countable number of eigenvalues  $\lambda_n$  of this problem and also obtain some asymptotic formula for eigenvalues.

We also study inverse problem, i.e, we are given the eigenvalues  $\lambda_n$  and then determine the potential function  $q(x)$ .

Finally in last section we use some numerical procedure and obtain some results with examples.



## BÖLÜM 1. GİRİŞ

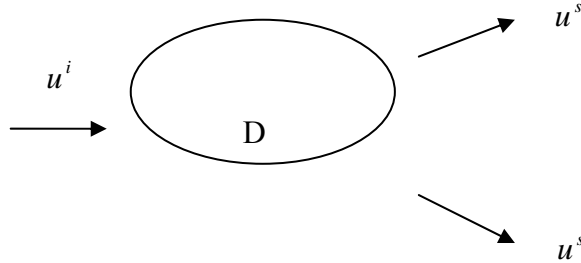
Öncelikle ters problemleri çeşitli örneklerle tanıyarak bizim problemimizin yerini belirtmek istiyoruz. İşte bazı basit ters problemleri örneklemekle başlayalım.

1.  $n$ . dereceden  $p(x)$  polinomunu,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  köklerine sahip bir polinom olarak belirlemek, verilen bir  $p(x)$  polinomunun köklerini bulma işleminin tersi bir problemdir.

2.  $A$  matrisi  $n \times n$  lik reel simetrik bir matris olsun.  $N$  tane  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  reel sayıları verilsin. Öyle bir  $D$  köşegen matrisi bulalım ki  $A+D$  matrisi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sayılarını özdeğer kabul etsin. Bu problem  $A+D$  matrisinin özdeğerlerini hesaplama işinin ters problemidir.

3. Ters saçılma problemi:

Verilen bir yoğunlukta sesin veya elektromanyetik dalgalarının bir objeden saçılmasından yararlanarak saçan nesnenin şeklini(formunu) belirlemek.



Şekil 1.1.  $u^i$  dalgasının  $D$  objesinden saçılması

Buna ait direkt problem ise  $D$  objesi verilip saçılan dalgayı belirlemektir

$D \subset R^n$   $n=2$  veya  $3$   $\partial D$  düzgün sınırına sahiptir.  $u^i$  gelen dalgası

$e^{ik\hat{\theta}x}$   $k > 0$  dalga sayısı  $\hat{\theta}$  birim vektör gelen dalganın yönünü belirleyen vektördür.

Direkt problem  $u = u^i + u^s$  toplamının değişim alanını ( $u^i$  gelen  $u^s$  saçılan dalgadır)  $\Delta u + k^2 u = 0$   $\partial D$  sınırında  $u = 0$  dır.

$$\frac{\partial U^s}{\partial r} - iku^s = O\left(r^{-\frac{(n+1)}{2}}\right) \quad r = |x| \rightarrow \infty$$

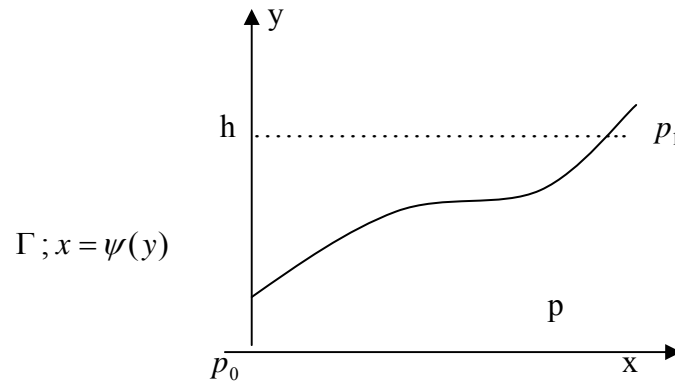
Son eşitlik radyasyon şartı olarak bilinir ki

$$U^s(x) = \frac{\exp(ik|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} U_\infty(\hat{x}) + O\left(|x|^{-\frac{(n+1)}{2}}\right) \quad |x| \rightarrow \infty$$

asimptotik davranışına sahiptir. Burada  $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$  dir.

İnvers problem  $U_\infty(\hat{x})$  uzak çözüm değerleri belli ise D şeklini belirlemektir.

#### 4. Abel integral denklemi



Şekil 1.2.  $\Gamma$  eğrisi

$\Gamma$  verilen eğrisi üzerinde  $h > 0$  yüksekliğinde  $p_1$  noktasından  $p_0$  noktasına ( $h = 0$  seviyesi) bir partikül element yer çekimi etkisinden başka (mg) bir kuvvetin olmadığı bir hareket içindedir.

Direkt problem verilen  $\Gamma$  eğrisi üzerinde  $p_1$  den  $p_0$  a geliş zamanı  $T$  yi belirlemektir.  $T = T(h)$  olup ters problem  $T(h)$  belli ise  $\Gamma$  eğrisini bulmaktır.

$$\Gamma: \quad x = \psi(y) \text{ ise } P(\psi(y), y)$$

$$E + U = \frac{m}{2}v^2 + mgy = \text{sabit} = mgh \quad \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2g(h-y)}$$

$$T = T(h) = \int_{p_0}^{p_1} \frac{ds}{v} = \int_0^h \sqrt{\frac{1 + \psi'(y)^2}{2g(h-y)}} dy \quad h > 0$$

$$\psi(y) = \sqrt{1 + \psi'(y)^2} \quad f(t) = \frac{T(h)}{\sqrt{2g}} \text{ dersek}$$

$$\int_0^h \frac{\psi(y)}{\sqrt{h-y}} dy = f(h) \quad h > 0$$

Abel integral denkleminin çözümü gerekmektedir.

Bu denklemin uygulamaları için R.Corenflvand S.Vessella [1] başvurulabilir.

## 5. Isı transferi problemi

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{bir boyutlu ısı denklemi} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq 1$  başlangıç sınır değer probleminin klasik çözümünü bulmak düz problemidir. Yani,  $T$  anındaki sıcaklık miktarını  $U(.,T)$ ,  $u_0$  başlangıç sıcaklığı bilindiğinde belirlemektir.  $U(.,T)$  bilinmesi halinde  $u_0$  veya  $t < T$  anındaki sıcaklıkları belirlemek ise ters problemidir.

6. Homojen olmayan ortamlarda difüzyon problemi de parametre belirleme problemi gibi ters bir problemidir.

## 7. Sturm-liouville problemi

L uzunluğunda  $\rho = \rho(x) > 0$   $0 \leq x \leq L$  kütle yoğunluğuna sahip bir telin  $x=0$  ve  $x=L$  de sabitleyelim.

$v(x,t)$   $t>0$   $0 \leq x \leq L$  için x noktasında t anında yer değiştirme ise

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < L \quad t > 0$$

$v(0,t) = v(L,t) = 0$   $t > 0$  dalga denklemini

$v(x,t) = w(x)[a \cos \omega t + b \sin \omega t]$   $\omega > 0$  frekanstır.

$w(x)$  için Sturm-liouville özdeğer problemi

$$w''(x) + \omega^2 \rho(x) w(x) = 0 \quad 0 < x < L \quad w(0) = w(L) = 0$$

direkt problem,  $\rho(x)$  bilindiğinde  $w$  özdeğerlerini özfonksiyonlarını bulmaktır.

Ters problem ise  $w, \omega^2$  belli iken  $\rho(x)$  belirlenmesidir.

Bu örneklerin hepsini  $K(x)=y$  gibi bir operatör denklemlere verebiliriz. Direkt problem  $K$  operatörünün  $x$  verildiğinde  $X$  model uzayında uygulamaktır. Ters ise  $K(x)=y$  denklemden  $x$ 'i çözmektir.

Direkt problem  $x$  ve  $K$  operatörü verilip  $K(x)$  i hesaplamaktır. Ters problem  $y$  ve  $K$  verilip  $x$ 'i  $K(x)=y$  denklemden çözmektir.

Ters problemde  $K$ 'nın tanımında  $K$  operatörünün tanım ve değer kümelerinin bilinmesiyle mümkündür. Sonlu boyutlu, sonsuz boyutlu, lineer ve lineer olmayan operatörler bilinen farklılıklardır. Genelde  $K(x)$

in hesaplanması sınır değer problemini çözmektir veya integral hesaplamaktır.

## BÖLÜM 2. TERS ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

### 2.1 Giriş

Ters özdeğer problemleri, kendi başına önemli olduğu gibi aynı zamanda başka önemli pratik uygulamalara da sahiptirler [2]. Parabolik yada hiperbolik diferansiyel denklemler için parametre tayin etme problemlerinde (Bkz. [4,7,10] ) sıkça görülen ters problemler grating teoride de ortaya çıkar ( [3]) ve daha bir çok problemlerde uygulama sahasına sahiptir.

Biz bu çalışmada, Sturm-Liouville özdeğer problemini kanonik formda inceleyeceğiz. Direkt problem,

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

(2.1a)

$$u(0) = 0 \quad \text{ve} \quad hu'(1) + Hu(1) = 0,$$

(2.1b)

ile verilen sınır değer probleminden  $\lambda$  özdeğerleri ve  $u \neq 0$  özfonksiyonlarını belirlemektir.

Burada  $q \in L^2(0,1)$  ve  $h^2 + H^2 > 0$   $h, H \in R$  olarak verilmiştir. Bu bölümde bütün fonksiyonların gerçel (reel) değerli olduklarını varsayıyoruz. Bazı uygulamalarda, örneğin grating teoride,  $q$  karmaşık (kompleks)-değerli fonksiyonların aynı zamanda pratik bir önemi de

vardır. Esas itibariyle, bu bölümün bütün sonuçları,  $q$  nun karmaşık-  
değerli olması halinde de doğrudur. (2.1a), (2.1b), özdeğer problemi  $w$   
için daha genel özdeğer probleminin özel bir durumudur. Yani

$$\frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dw(t)}{dt} \right) + [\rho r(t) - g(t)] w(t) = 0, \quad t \in [a, b],$$

$$(2.2a)$$

$$\alpha_a w'(a) + \beta_a w(a) = 0, \quad \alpha_b w'(b) + \beta_b w(b) = 0$$

$$(2.2b)$$

Burada  $p, r$  ve  $g$   $t \in [a, b]$  için  $p(t) > 0$  ve  $r(t) > 0$  ile verilen fonksiyonlardır  
ve  $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a, \beta_b \in R$   $\alpha_a^2 + \beta_a^2 > 0$  ve  $\alpha_b^2 + \beta_b^2 > 0$  ile sabitlerdir.  
Bununla birlikte, eğer  $g \in C[a, b]$  ve  $p, r \in C^2[a, b]$  varsayarsak, o zaman  
Liouville transformasyonu (2.2a), (2.2b) ters özdeğer problemini (2.1a), (2.1b)  
kanonik forma çevirir. Özel olarak

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}, \quad f(t) := [p(t)r(t)]^{1/4}, \quad L := \int_a^b \sigma(s) ds, \quad (2.3)$$

tanımlarsak

$$x : [a, b] \rightarrow [0, 1] \quad \text{monoton fonksiyon}$$

$$x(t) := \frac{1}{L} \int_a^t \sigma(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (2.4)$$

ve  $u : [0, 1] \rightarrow R$  yeni fonksiyon

$$u(x) := f(t(x))w(t(x)), \quad x \in [0, 1],$$

$t = t(x)$  ;  $x = x(t)$  'nin tersi

olarak verilirse hesaplamalar sonucunda,  $\lambda = L^2 \rho$  ,

$$q(x) = L^2 \left[ \frac{g(t)}{r(t)} + \frac{f(t)}{r(t)} \left( \frac{p(t)f'(t)}{f(t)^2} \right)' \right]_{t=t(x)}$$

$$(2.5)$$

olur.

Aynı zamanda (2.2b) sınır koşullarında, kolaylıkla aşağıdaki şekle dönüştüğünü  
görürüz.

$$h_0u'(0) + H_0u(0) = 0 \text{ ve } h_1u'(1) + H_1u(1) = 0 \quad (2.6)$$

Burada

$$h_0 = \alpha_a \sigma(a) / (Lf(a)) \text{ ve } H_0 = \beta_a / f(a) - \alpha_a f'(a) / f(a)^2 \text{ dir.}$$

Benzer tarzda

$$h_1, H_1 \text{ verilir. } a \text{ yerine } b \text{ konur.}$$

Bu bölümde, biz sadece (2.1a), (2.1b) kanonik Sturm-Liouville özdeğer problemini inceleyeceğiz. İlk etapta,  $h = 0$  durumunu detaylı bir biçimde inceleyeceğiz. Bölüm 2.3'ün sonunda  $h = 1$  halini kısaca tartışacağız. Bölüm 2.3'te bu problemin sayılabilir sayıda  $\lambda_n$  özdeğerini ve aynı zamanda asimptotik formunu(formül) vereceğiz.  $q$  gerçek-değerli olduğu için, problemin kendine eş ve sayılabilir sayıda özdeğerinin varlığı, fonksiyonel analizin genel spectral teoreminden elde edilir. (Bkz.sayfa 21 Teorem).

Bu genel teorem, özdeğerlerin sonsuza gitmesini gerektirdiğinden, yakınsama hızı hakkında daha fazla bilgiye ihtiyacımız vardır. Asimptotik davranışının formülünün ispatındaki temel faktör,  $|\lambda|$  sonsuzluğa gittiğinden, (2.1a) diferansiyel denklemin temel sistemin asimptotik davranışı olacaktır. Bütün veri ve özdeğerler reel değerli olduğu halde, kompleks analizden çıkan sonuçları, özellikle Rouché teoremini kullanacağız. Bu, temel sistemdeki  $\lambda$  parametresinin kompleks (karmaşık)-değerli olmasına izin verilmesini gerekli kılar. Temel çözümün varlığı ve onun asimptotik davranışı sonraki kısmın konusu olacaktır.

Bölüm 2.5 ters probleme ayrılmıştır:  $\lambda_n$  özdeğerleri verildiğinde  $q$  fonksiyonunu bulunacaktır. Bölüm 2.6'te ters spektral problemlerin, parabolik başlangıç değer problemi için, bir parametre belirleme probleminde nasıl ortaya çıktığını göstereceğiz. Son olarak Bölüm 2.7 de Rundell ve diğerlerinin (Bkz. [6,8,9]) ileri sürdükleri  $q$ 'nün bulunmasının sayısal çözümleme işlemlerini inceleyeceğiz.

Bu bölümü aşağıdaki örnekte görüleceği gibi negatif bir sonuç ile bitiriyoruz.

### Örnek 2.1.

$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  probleminin  $\lambda$  bir özdeğeri ve  $u$  bir öz fonksiyonu olsun.

O zaman  $\lambda$  özdeğerine uygun  $\tilde{q}$  aşağıdaki denklemin  $v(x) := u(1-x)$  olan bir öz fonksiyonudur.

$$-v''(x) + \tilde{q}(x)v(x) = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0$$

$$\tilde{q}(x) := q(1-x)$$

İleride göreceğimiz gibi  $q$  fonksiyonunun tek olarak belirlenebilmesi için  $x = \frac{1}{2}$  ye göre çift bir fonksiyon olması gerektiği veya eğer ikinci bir spektrumu biliyorsak (yani  $u(1) = 0$  dan farklı sınır koşuluyla bulunan spektrum)  $q$  tek türlü bulunabilir.

## 2.2. Temel Sistemin Oluşturulması

Lineer diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere aşağıdaki başlangıç değer problemleri, her  $\lambda \in \mathbb{C}$  ve her reel veya kompleks-değerli  $q \in C[0,1]$  için tek çözümü vardır.

$$-u_1'' + q(x)u_1 = \lambda u_1, \quad 0 < x < 1, \quad u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0 \quad (2.7a)$$

$$-u_2'' + q(x)u_2 = \lambda u_2, \quad 0 < x < 1, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1 \quad (2.7b)$$

$q \in L^2(0,1)$ 'in varlık ve tekliği ise Teorem 2.4'de gösterilmektedir.  $\{u_1, u_2\}$  fonksiyonlar kümesine  $-u'' + qu = \lambda u$  un  $(0,1)$  de diferansiyel denklemlerin *temel sistemi* adı verilir.  $u_1$  ve  $u_2$  fonksiyonları lineer bağımsızdır çünkü Wronskian determinantı

$$[u_1, u_2] := \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{bmatrix} = u_1 u_2' - u_1' u_2 = 1 \quad \text{dir.} \quad (2.8)$$

Bu,



$$\frac{d}{dx}[u_1, u_2] = u_1 u_2'' - u_1'' u_2 = u_1(q - \lambda)u_2 - u_2(q - \lambda)u_1 = 0 \quad \text{ile} \quad [u_1, u_2](0) = 1$$

'den

görülmektedir.  $u_1, u_2$  fonksiyonları  $\lambda$  ve  $q$ 'ya bağlıdır. Bu bağılılığı çoğu zaman  $u_j = u_j(\cdot, \lambda, q)$ ,  $j=1,2$  şeklinde ifade edebiliriz.  $q \in L^2(0,1)$  için denklem ikinci dereceden sürekli türevlenemez ancak Sobolev uzayının bir elemanıdır.

$r \geq 0$  için  $H^r(0, 2\pi)$  Sobolev uzayı;

$$H^r(0, 2\pi) := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^r |a_k|^2 < \infty \right\} \text{ ile tanımlanır.}$$

$H^0(0, 2\pi)$ ,  $L^2(0, 2\pi)$  ile çakışır.

$$H^2(0, 1) := \left\{ u \in C^1[0, 1] : u'(x) = \alpha + \int_0^x v(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad v \in L^2(0, 1) \right\}$$

$v$  için  $u'' \in L^2(0, 1)$  yazarız.

En önemli örnek  $q=0$  olduğu durumdur. Bu durumda (2.7a) ile (2.7b)'yi açık olarak çözebiliriz.

### Örnek 2.2.

$q=0$  olsun. (2.7a) ve (2.7b)'nin çözümleri,

$$u_1(x, \lambda, 0) = \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad \text{ve}$$

$$u_2(x, \lambda, 0) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{dir.} \quad (2.9)$$

$s \mapsto \cos(sx)$  ve  $s \mapsto \sin(sx)/s$  çift fonksiyonlardır.

Herhangi bir  $q \in L^2(0,1)$  için temel çözümlerin  $|\lambda|$  sonsuza gittiği zaman (2.9) çözümü gibi davrandığını göreceğiz. Bundan sonraki teoremin kanıtı için, aşağıdaki Lemmaya ihtiyacımız vardır.

**Lemma 2.3.**

$q \in L^2(0,1)$  ve  $\tilde{k}, k \in C[0,1]$  olmak üzere öyle bir  $\mu > 0$  reel sayısı vardır ki bütün  $\tau \in [0,1]$  için

$$|\tilde{k}(\tau)| \leq \exp(\mu\tau) \text{ ve } |k(\tau)| \leq \exp(\mu\tau) \text{ dir.}$$

$\tilde{K}, K : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ , operatörleri her biri sırasıyla  $\tilde{k}(x-t)q(t)$  ve  $k(x-t)q(t)$  çekirdekli Volterra integral operatörleri olsunlar. Bu halde bütün  $\varphi \in C[0,1]$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\left| \tilde{K}K^{n-1}\varphi(x) \right| \leq \|\varphi\|_{\infty} \frac{1}{n!} \hat{q}(x)^n e^{\mu x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.10)$$

Burada  $\hat{q}(x) := \int_0^x |q(t)| dt$  dir.

Eğer  $\varphi \in C[0,1]$  aynı zamanda tüm  $\tau \in [0,1]$  için  $|\varphi(\tau)| \leq \exp(\mu\tau)$  ifadesini sağlarsa bütün  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\left| \tilde{K}K^{n-1}\varphi(x) \right| \leq \frac{1}{n!} \hat{q}(x)^n e^{\mu x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.11)$$

ifadesini elde ederiz.

**İspat:**

İspatı tümevarım yöntemiyle yapacağız.

$n = 1$  için

$$\left| \tilde{K}\varphi(x) \right| = \left| \int_0^x \tilde{k}(x-t)q(t)\varphi(t) dt \right|$$

$$\leq \|\varphi\|_{\infty} \int_0^x e^{\mu(x-t)} |q(t)| dt \leq \|\varphi\|_{\infty} e^{\mu x} \hat{q}(x)$$

elde ederiz.

Şimdi keyfi bir  $n$  için (2.10)'nun doğru olduğunu kabul edelim bu aynı zamanda  $K = \tilde{K}$  içinde doğru olduğundan

$$\begin{aligned} |\tilde{K}K^n \varphi(x)| &\leq \int_0^x e^{\mu(x-t)} |q(t)| \|K^n \varphi(t)\| dt \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty} \frac{1}{n!} e^{\mu x} \int_0^x |q(t)| \hat{q}(t)^n dt \end{aligned}$$

doğrudur.

Son integrali

$$\begin{aligned} \int_0^x |q(t)| \hat{q}(t)^n dt &= \int_0^x \hat{q}'(t) \hat{q}(t)^n dt = \frac{1}{n+1} \int_0^x \frac{d}{dt} (\hat{q}(t)^{n+1}) dt \\ &= \frac{1}{n+1} \hat{q}(x)^{n+1} \quad \text{ile hesaplarız.} \end{aligned}$$

Bu ise (2.10) un  $(n+1)$  için ispatıdır. (2.11) ispatı için, sadece 1. adımı

$$|\tilde{K}\varphi(x)| \leq \int_0^x e^{\mu(x-t)} e^{\mu t} |q(t)| dt \leq e^{\mu x} \hat{q}(x)$$

şeklinde ifade etmemiz yeterlidir.

Kalan kısım, aynı şekilde ispatlanır.

Şimdi  $u_j, j = 1, 2,$  için başlangıç değer probleminin Volterra integral denklemlerin denkliğini ispatlayacağız.

#### **Teorem 2.4.**

$q \in L^2(0,1)$  ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  olsun.

(a)  $u_1, u_2 \in C[0,1]$  aşağıdaki Volterra integral denklemlerinin çözümleri iseler  $u_1, u_2 \in H^2(0,1)$  (2.7a) ve (2.7b)'nin çözümleridir.

$$u_1(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) u_1(t) dt, \quad (2.12a)$$

$$u_2(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) u_2(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{dir.} \quad (2.12b)$$

(b) (2.12a) ve (2.12b) integral denklemler ile (2.7a) ve (2.7b) başlangıç değer problemleri tek türlü çözülebilir. Çözümler, Neumann serileri ile temsil edilir. K integral operatörü olmak üzere

$$K\varphi(x) := \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) \varphi(t) dt, \quad x \in [0,1] \quad (2.13)$$

ve

$$C(x) := \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad \text{ve} \quad S(x) := \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{olsun.} \quad (2.14)$$

O halde

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} K^n C \quad \text{ve} \quad u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} K^n S \quad \text{dir.} \quad (2.15)$$

Bütün sınırlı  $\Lambda \subset C$  ve  $Q \subset L^2(0,1)$  kümeler için seriler düzgün olarak yakınsar,  $(x, \lambda, q) \in [0,1] \times \Lambda \times Q$  için düzgün yakınsak olurlar.

**İspat:**

(a)  $f, g \in H^2(0,1)$  için kısmi entegrasyonun aşağıdaki biçimini kullanacağız.

$$\int_a^b [f''(t)g(t) - f(t)g''(t)] dt = [f'(t)g(t) - f(t)g'(t)] \Big|_a^b \quad (2.16)$$

Sadece  $u_1$  için ispat yapacağız.  $u_1$ , (2.7a)'nın bir çözümü olsun.

O halde

$$\begin{aligned} \int_0^x S(x-t)q(t)u_1(t)dt &= \int_0^x S(x-t)[\lambda u_1(t) + u_1''(t)]dt \\ &= \int_0^x u_1(t) \underbrace{[\lambda S(x-t) + S''(x-t)]}_{=0} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [u_1'(t)S(x-t) + u_1(t)S'(x-t)] \Big|_{t=0}^{t=x} \\
& = u_1(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad \text{dır.}
\end{aligned}$$

Diğer taraftan  $u_1 \in C[0,1]$  (2.12a) integral denklemin bir çözümü olsun.

O halde  $u_1$  hemen hemen her yerde türevlenebilir ve

$$u_1'(x) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t)q(t)u_1(t)dt \quad \text{dir.}$$

Burdan  $u_1'$  nin sürekli ve hatta hemen hemen her yerde türevlenebilir olduğunu gözlemleriz. Ve

$$\begin{aligned}
u_1''(x) &= -\lambda \cos(\sqrt{\lambda}x) + q(x)u_1(x) \\
&\quad - \int_0^x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(x-t)q(t)u_1(t)dt \\
&= -\lambda u_1(x) + q(x)u_1(x)
\end{aligned}$$

ifadesi söz konusu iddiayı kanıtlar. Çünkü sağ taraf  $L^2(0,1)$  sınıfından olduğundan iddiamızı doğrular ve başlangıç koşulu açıkça sağlanmaktadır.

(b) Bütün  $k(\tau) = \cos(\sqrt{\lambda}\tau)$ ,  $k(\tau) = \sin(\sqrt{\lambda}\tau)$  ve  $k(\tau) = \sin(\sqrt{\lambda}\tau)/\sqrt{\lambda}$  fonksiyonlarının  $\tau \in [0,1]$  için  $\mu = |\text{Im} \sqrt{\lambda}|$  ile  $|k(\tau)| \leq \exp(\mu\tau)$  şartlarını sağladığını gözlüyoruz. Bu, ilk iki fonksiyon için açıktır. Üçüncüsü için

$$\left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\tau)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \int_0^\tau |\cos(\sqrt{\lambda}s)| ds = \int_0^\tau \cosh(\mu s) ds \leq e^{\mu\tau} \quad \text{den doğar.}$$

$k(\tau) = \sin(\sqrt{\lambda}\tau)/\sqrt{\lambda}$  olmak üzere  $k(x-t)q(t)$  çekirdekli  $K$  integral operatörü üzerinde çalışmak zorundayız.  $\tilde{K} = K$  ile Lemma 2.3'e başvuruyoruz. (2.10) tahmini, yeterince büyük  $n$  için, aynı biçimde  $q \in Q$  ve  $\lambda \in \Lambda$  için

$$\|K^n\| \leq \frac{\hat{q}(1)^n}{n!} e^\mu < 1$$

sağlar. Bu yüzden, Neumann serileri yakınsak olurlar (aşağıdaki teoreme bakınız) bu da (b) şıkkının ispatıdır.

### **Teorem 2.4.1: Neumann Serisi**

$X$   $R$  veya  $C$  de tanımlı Banach uzayı ve

$K : X \rightarrow X$  lineer sınırlı bir operatör

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|K^n\|^{1/n} < 1 \quad \text{ise}$$

O zaman  $I - K$  tersi alınabilir.

$\sum_{n=0}^{\infty} K^n$  Neumann serisi operatör norma göre yakınsaktır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} K^n = (I - K)^{-1} \quad \text{dir.}$$

(Eğer  $m \in N$  için  $\|R^m\| < 1$  ise  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|K^n\|^{1/n} < 1$  şartı sağlanır.)

Önceki teoremin integral ifadesi, keyfi  $q$ 'nün durumunu  $q = 0$ ' ın durumuyla karşılaştırmak suretiyle temel sistemin aşağıdaki asimptotik davranışını verir.

### **Teorem 2.5.**

$q \in L^2(0,1)$  ve  $\lambda \in C$  olsun ve  $u_1, u_2$  temel sistem olsun, yani, sırasıyla (2.7a) ve (2.7b) başlangıç değer problemlerinin çözümleri olsun. Bütün  $x \in [0,1]$  için aşağıdakiler doğrudur.

$$\left| u_1(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp \left( \left| \text{Im} \sqrt{\lambda} \right| x + \int_0^x |q(t)| dt \right), \quad (2.17a)$$

$$\left| u_2(x) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp\left( |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \int_0^x |q(t)|dt \right), \quad (2.17b)$$

$$\left| u_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \exp\left( |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \int_0^x |q(t)|dt \right), \quad (2.17c)$$

$$\left| u_2'(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left( |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \int_0^x |q(t)|dt \right), \quad (2.17d)$$

**İspat:** Yine Neumann serilerini kullanıyoruz ve  $C(\tau) := \cos(\sqrt{\lambda}\tau)$  ve  $S(\tau) := \sin(\sqrt{\lambda}\tau)/\sqrt{\lambda}$  tanımlıyoruz.  $K$ , çekirdeği  $q(t) \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))/\sqrt{\lambda}$  ile integral operatör olsun. Sonra

$$\left| u_1(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |K^n C(x)| \text{ dir.}$$

Şimdi  $\tilde{k}(\tau) = \sin(\sqrt{\lambda}\tau)$  ve  $k(\tau) = \sin(\sqrt{\lambda}\tau)/\sqrt{\lambda}$  koyuyoruz ve  $\tilde{K}$  ile  $K$  aracılığıyla, sırasıyla  $\tilde{k}(x-t)$  ve  $k(x-t)$  çekirdekleri olan Volterra integral operatörlerini belirtiyoruz. O zaman  $K^n = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tilde{K} K^{n-1}$  ve Lemma 2.3 ile kısım (b)'nin yardımıyla sonuçlandırıyoruz.  $n \geq 1$  için

$$\left| K^n C(x) \right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}| n!} \left( \int_0^x |q(t)|dt \right)^n \exp\left( |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x \right) \text{ dir. Şimdi, toplama istenilen}$$

tahmini verir.

$$\left| u_1(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left( |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \int_0^x |q(t)|dt \right)$$

$$\left| S(x) \right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left( |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x \right) \text{ den dolayı, aynı deliller, (2.17b)'yi de ispatlar.}$$

(2.12a) ve (2.12b) integral denklemlerin türevini alarak aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) = \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t) q(t) u_1(t) dt,$$

$$u_2'(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x) = \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t) q(t) u_2(t) dt.$$

Şimdi de daha önce yaptığımız gibi  $K$  ve  $\tilde{K}$  operatörlerinin çekirdekleri  $q(t) \cos \sqrt{\lambda}(x-t)$  olacak şekilde yeniden tanımlayalım.

$$u_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) = \tilde{K} \sum_{n=0}^{\infty} K^n C$$

$$u_2'(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x) = \tilde{K} \sum_{n=0}^{\infty} K^n S$$

ve Lemma 2.3, kısım (b) yi tekrar kullanırız. (2.17c) ve (2.17d) elde ederiz.

Gelecek kısımda, özfonksiyonların  $q$  ve  $\lambda$  ya göre sürekli türevlenebilirliklerinin kabulüne ihtiyacımız olacaktır.  $X$  ve  $Y$  Banach uzayları arasında Fréchet türevi kavramına da ihtiyacımız olacaktır.

### Fréchet Türevi 2.5.1.

Normlu uzaylar arasında lineer olmayan dönüşümlerin lineerleştirilmesi hususunda önemli bir kavram olan Fréchet türevinden bahsedeceğiz. Sürekli ve diferansiyellenebilir olma bu tanımla izah edilebilecektir.

**Tanım:**  $X$  ve  $Y$  reel veya kompleks normlu uzaylar olsun.  $U \subset X$  açık bir alt kümesi  $\hat{x} \in U$  ve  $T : X \supset U \rightarrow Y$  lineer olmayan bir operatör olsun.

(a) Şayet  $\|x - \hat{x}\| \leq \delta$  için  $\|T(x) - T(\hat{x})\| \leq \varepsilon$  olacak şekilde her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $\delta > 0$  sayısı bulunabiliyorsa  $T$ ,  $\hat{x}$  de süreklidir.

(b)  $\hat{x} \in U$  için  $T$  diferansiyellenebilir deriz. Eğer  $\hat{x}$ 'ya bağlı lineer sınırlı  $A : X \rightarrow Y$  operatörü

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|T(\hat{x} + h) - T(\hat{x}) - Ah\| = 0 \quad \text{ise}$$

$T'(\hat{x}) := A$  yazarız.  $T'(\hat{x}) \in L(X, Y)$  dir.



(c) Eğer  $\hat{x}$ 'nin  $V$  komşuluğunda  $T$  Fréchet türevlenebilir ve  $T' : V \rightarrow L(X, Y)$   $\hat{x}$ 'da sürekli ise  $\hat{x} \in U$ 'da  $T$  dönüşümü Fréchet sürekli diferansiyellenebilir deriz.

Sürekli ve diferansiyellenebilme  $X$  ve  $Y$ 'deki normlara bağlıdır. Eğer  $T$ ,  $\hat{x}$ 'da diferansiyellenebilirse (b) şıkkındaki lineer sınırlı  $T$  operatörü tektir. Yani  $T'(\hat{x}) := A$  iyi tanımlıdır. Eğer  $T$ ,  $x$ 'de diferansiyellenebilirse  $x$ 'de aynı zamanda sürekli dir.  $X = K^n$  ve  $Y = K^m$  ise bu özel halde lineer sınırlı  $T'(x)$  dönüşümü Jacobianden ibarettir.

### Örnek 2.5.2: İntegral Operatörü

$f : [c, d] \times [a, b] \times C \rightarrow C$  argümanlarına göre sürekli ve sürekli türevlenebilirsin.

$T : C[a, b] \rightarrow C[c, d]$

$$T(x)(t) := \int_a^b f(t, s, x(s)) ds, \quad t \in [c, d], x \in C[a, b]$$

şeklinde tanımlansın.  $T$  sürekli Fréchet türevine sahiptir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$(T'(x)z)(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, s, x(s)) z(s) ds, \quad t \in [c, d], x, z \in C[a, b]$$

Aşağıdaki teorem Fréchet türevinin özelliklerini vermektedir.

### Teorem 2.5.3.

(a)  $T, S : X \supset U \rightarrow Y$   $x \in U$  için Fréchet diferansiyellenebilirsin. O zaman  $T + S$  ve  $\lambda T$  de  $\lambda \in K$  için Fréchet diferansiyellenebilir ve  $(T + S)'(x) = T'(x) + S'(x)$ ,  $(\lambda T)'(x) = \lambda T'(x)$  dir.

(b) Zincir kuralı:  $T : X \supset U \rightarrow V \subset Y$  ve  $S : Y \supset V \rightarrow Z$   $x \in U$  ve  $T(x) \in V$  için Fréchet türevlenebilirsinler. O zaman  $ST$  de  $x$  de Fréchet türevlenebilir ve

$$(ST)'(x) = \underbrace{S'(T(x))}_{\in L(Y, Z)} \underbrace{T'(x)}_{\in L(X, Y)} \in L(X, Z) \quad \text{dir.}$$

$j = 1, 2$  için  $(\lambda, q) \mapsto u_j(\cdot, \lambda, q) \in C \times L^2(0,1)$  den  $C[0,1]$  ye bir dönüşüm olsun. Bu dönüşümleri yine  $u_j$  ile gösterip aşağıdaki teoremi ispatlarız.

**Teorem 2.6.**

$u_j : C \times L^2(0,1) \rightarrow C[0,1]$ ,  $j = 1, 2$ , sırasıyla (2.7a) ile (2.7b)'nin çözümleri olsunlar. Aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

(a)  $u_j$  süreklidir.

(b)  $u_j$  sürekli bir biçimde her  $(\hat{\lambda}, \hat{q}) \in C \times L^2(0,1)$  için F-türevlenebilirdir.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} u_j(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{q}) = u_{j,\lambda}(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{q}), \quad (2.18a)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial q} u_j(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{q})(q) = u_{j,q}(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{q}) \quad \text{dir.} \quad (2.18b)$$

$u_{j,\lambda}(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{q})$  ve  $u_{j,q}(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{q})$ ,  $j = 1, 2$  için aşağıdaki sınır değer problemlerinin çözümleridirler.

$$\begin{aligned} -(u_{j,\lambda})'' + (\hat{q} - \hat{\lambda})u_{j,\lambda} &= u_j(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{q}) \quad (0,1) \text{ de} \\ u_{j,\lambda}(0) &= 0, \quad (u_{j,\lambda})'(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} -(u_{j,q})'' + (\hat{q} - \hat{\lambda})u_{j,q} &= -qu_j(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{q}) \quad (0,1) \text{ de} \\ u_{j,q}(0) &= 0, \quad (u_{j,q})'(0) = 0, \end{aligned}$$

ayrıca, bütün  $x \in [0,1]$  için aşağıdakileri elde ederiz:

$$\int_0^x u_j(t)^2 dt = [u_{j,\lambda}, u_j](x), \quad j = 1, 2, \quad (2.20a)$$

$$\int_0^x u_1(t)u_2(t) dt = [u_{1,\lambda}, u_2](x) = [u_{2,\lambda}, u_1](x), \quad (2.20b)$$

$$-\int_0^x q(t)u_j(t)^2 dt = [u_{j,q}, u_j](x), \quad j = 1, 2, \quad (2.20c)$$

$$-\int_0^x q(t)u_1(t)u_2(t)dt = [u_{1,q}, u_2](x) = [u_{2,q}, u_1](x), \quad (2.20d)$$

$[u, v]$ , (2.8)'den bildiğimiz Wronskian determinantını gösterir.

**İspat:**

(a), (b):  $u_j$ 'nin sürekliliği ve diferansiyellenebilirliği (2.12a) ile (2.12b) integral denklemlerden elde edilir. Çünkü çekirdek ve sağ taraf sürekli ve diferansiyellenebilir bir şekilde  $\lambda$  ve  $q$ 'ya bağlıdır. Geriye (b) içindeki ifadeleri göstermek kalır.  $u = u_j$ ,  $j = 1$  veya 2 olsun.

$$\begin{aligned} -u''(\cdot, \hat{\lambda} + \varepsilon) + (\hat{q} - \hat{\lambda} - \varepsilon)u(\cdot, \hat{\lambda} + \varepsilon) &= 0, \\ -u''(\cdot, \hat{\lambda}) + (\hat{q} - \hat{\lambda})u(\cdot, \hat{\lambda}) &= 0 \quad \text{dır.} \end{aligned}$$

Böylece,

$$-\frac{1}{\varepsilon}[u(\cdot, \hat{\lambda} + \varepsilon) - u(\cdot, \hat{\lambda})]'' + (\hat{q} - \hat{\lambda})\frac{1}{\varepsilon}[u(\cdot, \hat{\lambda} + \varepsilon) - u(\cdot, \hat{\lambda})] = u(\cdot, \hat{\lambda} + \varepsilon) \text{ olur.}$$

Fark oranları için homojen başlangıç şartları sağlanır,  $\varepsilon \rightarrow 0$  a giderken sağ taraf düzgün olarak  $u(\cdot, \hat{\lambda})$ 'ya yakınsar. Bu nedenden ötürü, fark oranı  $x$ 'e göre  $u$ ,  $u_{\lambda}$ 'ya düzgün olarak yakınsar. Aynı nedenler  $q$ 'nun türevi için de geçerlidir.

(c) Diferansiyel denklemde  $u_{j,\lambda}$  yi  $u_j$  ile  $u_j$  yi  $u_{j,\lambda}$  ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned} u_j^2(x) &= u_j''(x)u_{j,\lambda}(x) - u_{j,\lambda}''(x)u_j(x) \\ &= \frac{d}{dx}(u_j'(x)u_{j,\lambda}(x) - u_{j,\lambda}'(x)u_j(x)). \end{aligned}$$

Bu denklemi integre ederek ve homojen sınır koşullarını kullanarak (2.20a)'nın birinci denklemini buluruz. Kalan denklemlerin kanıtlanması için aynı ispatlar kullanılır. Bu kısmın hiçbir yerinde  $q$ 'nun reel-değerli olduğu varsayımını

kullanmadık. Bu yüzden, 2.4, 2.5, ve 2.6 Teoremlerinin iddiaları, kompleks-değerli  $q$  içinde doğrudur.

### 2.3. Özdeğer ve Özfonksiyonların Asimptotik Davranışları

İlk etapta kendimizi Dirichlet problemiyle sınırlandıralım aşağıdaki özdeğer problemiyle uğraşalım

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (2.21)$$

Bölümün sonunda farklı sınır koşullarından bahsedeceğiz. Tekrar  $q \in L^2(0,1)$  reel-değerli olsun. Eğer sadece  $\lambda$ ,  $f(\lambda) := u_2(1, \lambda, q)$  fonksiyonunun bir sıfırı ise; o zaman  $\lambda \in C$ 'nin bu problemin bir özdeğeri olduğunu söyleriz. Tekrar  $u_2 = u_2(., \lambda, q)$   $u_2(0) = 0$  ve  $u_2'(0) = 1$ 'in (2.7b) başlangıç koşullar ile başlangıç değer probleminin çözümünü belirtir. O halde  $u_2(1, \lambda, q) = 0$  ise  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen  $u_2(., \lambda, q)$  özfonksiyondur.  $f$  fonksiyonu, matrisin karakteristik polinomu gibi davranır ve bu sebeple özdeğer probleminin karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır. Teorem 2.6,  $f$ 'nin türevlenebilir olduğunu, yani,  $C$ 'nin tamamında analitik olduğunu söyler. Bu gözlem, karmaşık (kompleks) analizden (çıkan) sonuçları kullanma imkanını sağlar. İlk önce, soyut spektral teoriden türetilen Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarına ilişkin çok iyi bilinen gerçekleri özetliyoruz.

#### **Teorem 2.6.1.**

$A: X \rightarrow X$  bir lineer operatör olsun

a) Farklı  $\lambda_j \in C$  özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonların sonlu kümesi  $x_j \in X, j = 1, \dots, n$  olsun.  $\{x_1, \dots, x_n\}$  kümesi lineer bağımsızdır.

Eğer  $X$  Hilbert uzayı ve  $A$  self-adjoint ise yani  $A^* = A$  ise , tüm  $\lambda_j$  özdeğerleri reeldir ve  $\lambda_j$  özdeğerlerine karşılık gelen  $x_1, \dots, x_n$  özvektörler ikişerli ortogondur (diktirler).

b)  $X$  Hilbert uzayı ve  $A : X \rightarrow X$  self-adjoint olsun. Bu durumda  $A$ 'nın spectral yarıçapı

$$r(A) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} \text{ olmak üzere}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = r(A)$$

şeklindedir. Bu durum aşağıdaki teoremdede görüleceği üzere Compact operatörler için daha basittir.

### **Theorem 2.6.2: Compact Self-Adjoint Operatörler İçin Spectral Teorem**

$K : X \rightarrow X$  kompakt ve self-adjoint olsun ( $K \neq 0$ ). Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) Spektrum özdeğerlerden ibarettir. Sıfırda içerebilir.  $K$ 'nin her özdeğeri reeldir.  $K$  en az bir, en çokta sıfırda yığılma noktası oluşturacak şekilde sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir.

b) Her  $\lambda \neq 0$  özdeğeri için, sonlu sayıda lineer bağımsız özvektör vardır. Yani özuzaylar sonlu boyutludur. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ortogondur.

c) Özdeğerler aşağıdaki formda sıralanır

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

ve  $\lambda_j$ 'ye karşılık gelen özuzay üzerine ortogonal izdüşümleri

$P_j : X \rightarrow N(K - \lambda_j I)$  ile gösterelim. Eğer  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  özdeğerleri sonlu sayıda ise

$$K = \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j \text{ olur.}$$

Eğer özdeğerlerin ( $\lambda_j$ ) sonsuz bir dizisi ise,

$K = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j$  olur ve seri operatör normunda yakınsaktır.

Ayrıca

$$\left\| K - \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j \right\| = |\lambda_{m+1}| \quad \text{dir.}$$

d)  $K$ 'nın  $\lambda \neq 0$  özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin tümünün lineer gereni  $H$  olsun. O zaman

$$X = \overline{H} \oplus N(K)$$

dır.

Bazen (d) farklı ifade edilebilir. Sonlu ve sonsuz özdeğerlerin varlığı halinde  $J \subset N$  index kümesi tanımlansın, birinci durumda  $J$  sonlu, ikinci durumda  $J = N$  dir. Her  $\lambda_j, j \in J$  özdeğeri için,  $N(K - \lambda_j I)$  özuzayının ortonormal bir bazını seçelim. Tekrar özdeğerleri

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots > 0$$

formunda sıralanır. Her  $\lambda_j \neq 0$  katlılıklarıyla sayarsak her  $\lambda_j$  özdeğerine  $x_j$  özvektörünü tanımlayabiliriz.

Her  $x \in X$

$$x_0 \in N(K) \text{ ve } Kx = \sum_{j \in J} \lambda_j (x, x_j) x_j \quad \text{olmak üzere}$$

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} (x, x_j) x_j \quad \text{Fourier açılımına sahiptir.}$$

Sonuç olarak  $K$  bire bir ise, tüm özvektör  $\{x_j : j \in J\}$  kümesi  $X$ 'de tam sistem oluşturur. Kompakt self-adjoint operatörler için spectral teoremi  $K : X \rightarrow Y$  self-adjoint olmayan operatörlere genişletilebilir.

**Lemma 2.7.**

$q \in L^2(0,1)$  reel değerli olsun:

(a) Bütün  $\lambda$  özdeğerleri reeldir.

(b)  $\|g_j\|_{L^2} = 1$  koşulu ile sayılabilir sonsuz tane reel  $\lambda_j, j \in \mathbb{N}$  özdeğerleri vardır. Bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar  $g_j \in C[0,1]$ . Özfonksiyonlar  $L^2(0,1)$  içinde tam ortonormal bir sistem oluştururlar.

(c)  $\lambda$  özdeğerlerin geometrik ve cebirsel katlılıkları birdir, yani, özdeğer uzayı bir boyutludur ve karakteristik fonksiyonun kökleri basit köklerdir.

**İspat:**

Sınır değer problemi self adjoint olduğundan (a) ve (b) elde edilir.

(c)  $\lambda$ , bir özdeğer ve  $u, v$  iki değişik özfonksiyon olsun.  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  ile  $\alpha, \beta$  ve  $\alpha u'(0) = \beta v'(0)$  seçelim.  $w := \alpha u - \beta v$  fonksiyonu diferansiyel denklemi çözer ve  $w(0) = w'(0) = 0$  sağlanır, yani  $w$ , özdeş olarak sıfırlanır. Bu yüzden,  $u$  ile  $v$  lineer bağımlı olurlar.

$\lambda$ 'nin  $f$ 'nin basit bir kökü olduğunu göstermek gayesiyle Teorem 2.6'nın, (c) kısmına başvururuz.  $u_2(1, \lambda, q) = 0$  olduğu için,  $j=2$  için (2.20a)'dan

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2(1, \lambda, q) = u_{2,\lambda}(1, \lambda, q) \\ &= \frac{1}{u_2'(1, \lambda, q)} \int_0^1 u_2(x, \lambda, q)^2 dx \neq 0. \end{aligned}$$

buluruz.

Bu kısım (c)'yi ispatlar.

Özdeğerleri normalleştirmenin farklı yolları olduğuna işaret ediyoruz.  $L^2$  normunun bir olmasını istemek yerine,  $g'_j(0) = 1$  şeklinde normalize ederiz.  $g'_j(0) \neq 0$  için bu mümkündür. Aksi takdirde, Picard-Lindelöf teklilik teoremi,  $g_j$ 'nin özdeş olarak sıfırlanması demektir.

Bundan sonraki konular için aşağıdaki teknik sonuçlara da ihtiyacımız vardır.

**Lemma 2.8.**

$z \in \mathbb{C}$  ve  $\forall n \in \mathbb{Z}$  için,  $|z - n\pi| \geq \frac{\pi}{4}$  olsun. O zaman

$$\exp(|\operatorname{Im} z|) < 4|\sin z| \quad \text{dir.}$$

**İspat:**  $z = z_1 + iz_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  için  $\psi(z) = \exp|z_2|/|\sin z|$  olsun. İki durumu göz önüne alalım:

Birincisi:  $|z_2| > \ln 2 / 2$  olsun

$$\psi(z) = \frac{2e^{|z_2|}}{|e^{iz_1 - z_2} - e^{-iz_1 + z_2}|} \leq \frac{2e^{|z_2|}}{e^{|z_2|} - e^{-|z_2|}} = \frac{2}{1 - e^{-2|z_2|}} < 4 \quad \text{dir.}$$

Çünkü  $\exp(-2|z_2|) < 1/2$  dir.

İkinci durum:  $|z_2| \leq \ln 2 / 2$ . Bütün  $n$  için  $|z - n\pi| \geq \pi / 4$  olduğundan

$$|z_1 - n\pi|^2 \geq \pi^2 / 16 - z_2^2 \geq \pi^2 / 16 - (\ln 2)^2 / 4 \geq \pi^2 / 64 ; \text{ böylece } |\sin z_1| \geq \sin \frac{\pi}{8}.$$

Ayrıca,  $|\operatorname{Re} \sin z| = |\sin z_1| \cosh z_2 \geq |\sin z_1|$  olduğundan

$$\psi(z) \leq \frac{e^{|z_2|}}{|\operatorname{Re} \sin z|} \leq \frac{\sqrt{2}}{|\sin z_1|} \leq \frac{\sqrt{2}}{\left| \sin \frac{\pi}{8} \right|} < 4 \quad \text{elde ederiz.}$$



Şimdi , özdeğerler için birinci sadeleştirilmiş asimptotik formülünü verebiliriz. İspatta esas araç olarak Rouché teoremini kullanırız;  $F$  ve  $G$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  bölgesinde analitik fonksiyonlar olsunlar ve tüm  $z \in \partial U$  için  $|F(z) - G(z)| < |G(z)|$  ise  $F$  ve  $G$   $U$  da aynı sayıda sifıra sahiptir.

**Lemma 2.9.**

$q \in L^2(0,1)$  ve  $N > 2 \exp(\|q\|_{L^1})$  bir tam sayı olsun. O zaman

(a)  $f(\lambda) := u_2(1, \lambda, q)$  karakteristik fonksiyonu,

$$H := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < (N + 1/2)^2 \pi^2\}. \tag{2.22}$$

yarı-düzleminde  $N$  köklere sahiptir.

(b) Her  $m > N$  için

$$U_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\sqrt{\lambda} - m\pi| < \pi/2\} \quad \text{kümesinde} \tag{2.23}$$

$f$ 'nin tek kökü vardır.

Burada  $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} \geq 0$  bölümünü alırız.

(c)  $\mathbb{C}$ 'de  $f$ 'nin başka kökleri yoktur.

**İspat:**

Rouché teoremini  $F(z) = f(z^2) = u_2(1, z^2, q)$  fonksiyonuna uygulayacağız ve  $q = 0$  için özdeğer problemine karşılık gelen  $G$  fonksiyonu ,  $G(z) := \sin z / z$ .  $U$  için,

$$W_m := \{z \in \mathbb{C} : |z - m\pi| < \pi/2\},$$

$$V_R := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < (N + 1/2)\pi, |\operatorname{Im} z| < R\} \quad \text{tarafından tanımlanmış}$$

$W_m$  ve  $V_R$  kümelerinden birini sabit  $R > (N+1/2)\pi$  için alalım ve Lemma 2.8'i uygulayalım.

(i) Önce  $z \in \partial W_m$  olsun:  $n \in Z, n \neq m$  için, elimizde  $|z - n\pi| \geq |m - n|\pi - |z - m\pi| \geq \pi - \pi/2 > \pi/4$  vardır.  $n = m$  için  $|z - m\pi| = \pi/2 > \pi/4$  olduğunu gözlemleriz. Bu yüzden  $z \in \partial W_m$  için Lemma 2.8'i kullanabiliriz. Ayrıca, bütün  $z \in \partial W_m$  için  $|z| \geq m\pi - |z - m\pi| = (m - 1/2)\pi > N\pi > 2N$  eşitsizliğini buluruz.

(ii)  $z \in \partial V_R, n \in Z$  olsun. Sonra  $|\operatorname{Re} z| = (N + 1/2)\pi$  veya  $|\operatorname{Im} z| = R$ . Her iki durumda da  $|z - n\pi|^2 = (\operatorname{Re} z - n\pi)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geq \pi^2/4 > \pi^2/16$  eşitsizliğini buluruz. Bu yüzden, bütün  $z \in \partial V_R$  için Lemma 2.8'e başvururuz. Ayrıca  $|z| \geq (N + 1/2)\pi > 2N$  vardır.

Teorem 2.5 ile Lemma 2.8 bütün  $z \in \partial V_R \cup \partial W_m$  için aşağıdaki sonucu verir:

$$\begin{aligned} \left| F(z) - \frac{\sin z}{z} \right| &\leq \frac{1}{|z|^2} \exp(|\operatorname{Im} z| + \|q\|_{L^1}) \leq \frac{4|\sin z| N}{|z|^2} \frac{N}{2} \\ &= \frac{2N}{|z|} \left| \frac{\sin z}{z} \right| < \left| \frac{\sin z}{z} \right|. \end{aligned}$$

Bundan ötürü F ve  $G(z) := \sin z/z; V_R$  ile her  $W_m$ 'deki kökleri aynı sayıdadır. G'nin kökleri  $\pm n\pi, n = 1, 2, \dots$  olduğu için, G'nin  $V_R$ 'de  $2N$  köke ve her  $W_m$ 'de tek köke sahip olduğu sonucunu çıkarıyoruz. Bu, Rouché teoremi sayesinde aynı zamanda F için de geçerlidir.

Şimdi F'nin  $V_R \cup \bigcup_{m>N} W_m$  dışında hiçbir kökü olmadığını gösteriyoruz. Lemma 2.8'e tekrar başvururuz:  $z \notin V_R \cup \bigcup_{m>N} W_m$  olsun.  $z \notin V_R$ 'den  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \geq (N + 1/2)\pi$  sonucunu çıkarıyoruz.  $n > N$  için,  $z \notin W_n$ 'den  $|z - n\pi| > \pi/2$  sonucunu çıkarırız.  $n \leq N$  için,  $|z - n\pi| \geq |z| - n\pi \geq (N + 1/2 - n)\pi \geq \pi/2$  sonucunu çıkarıyoruz. Lemma 2.8'e yeniden başvurarak ikinci üçgen eşitsizliğini kullanıyoruz.

Bu şunu verir:

$$\begin{aligned}
|F(z)| &\geq \left| \frac{\sin z}{z} \right| - \frac{1}{|z|^2} \exp(|\operatorname{Im} z| + \|q\|_{L^1}) \\
&\geq \left| \frac{\sin z}{z} \right| \left[ 1 - \frac{4 \exp(\|q\|_{L^1})}{|z|} \right] \\
&\geq \left| \frac{\sin z}{z} \right| \left[ 1 - \frac{2N}{|z|} \right] > 0
\end{aligned}$$

Çünkü  $|z| \geq (N + 1/2)\pi > 2N$  dir. Bu sebepten dolayı,  $f$ 'nin her  $U_m, m > N$  de bir kökü ve

$$H_R := \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} < (N + 1/2)\pi, |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| < R\}$$

kümesinde  $N$  kökü ve başka kökü olmadığını göstermiştik.

Geriye  $H_R \subset H$ 'yi göstermek kaldı.  $\lambda = |\lambda| \exp(i\theta) \in H_R$  için,

$$\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} = \sqrt{|\lambda|} \cos \frac{\theta}{2} < (N + 1/2)\pi,$$

$$\operatorname{Re} \lambda = |\lambda| \cos(2 \frac{\theta}{2}) \leq |\lambda| \cos^2 \frac{\theta}{2} (N + 1/2)^2 \pi^2 \text{ sonucunu çıkarıyoruz.}$$

Bu Lemma sonsuz sayıdaki özdeğerin varlığını tekrar kanıtlar. Deliller,  $q$  kompleks değerli fonksiyonların durumu için değişmez. Bu durumda, genel spektral teori, sınır değer probleminin self-adjoint olmamasından ötürü uygulanabilir nitelikte değildir. Bu Lemma, aynı zamanda özdeğer dağılımına dair, hatta reel değerli durum için de, daha fazla bilgi sağlamaktadır. İlk olarak özdeğerler aşağıdaki formda sıralanır.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

Lemma 2.9' a göre

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + O(1) \text{ dir. Yani } \lambda_n = n^2 \pi^2 + O(n) \text{ dir.} \quad (2.24)$$

Ters problem işlemi için, bu formülün geliştirilmesi gerekecektir. Bizim amacımız

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t) dt + \tilde{\lambda}_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{\lambda}_n|^2 < \infty \quad (2.25)$$

olduğunu kanıtlamaktır.

(2.25)'i ispatlamanın pek çok yöntemi vardır. Biz [11] deki makaleyi referans veriyoruz. İzlenecek yol  $t \in [0,1]$  için  $t \mapsto \lambda_n(tq)$  fonksiyonuna diferansiyel hesabın temel teoremini uygulamaktır. Bununla birlikte,  $t$  parametresi aracılığıyla  $q = 0$  'a karşılık gelen  $n^2\pi^2$  özdeğerleri için  $q$ 'ya karşılık gelen  $\lambda_n$  özdeğerleri arasındaki ilişkiyi kurmaktır. Bu yaklaşım için,  $q$  ile ilgili olan özdeğerlerin diferansiyellenebilirliğine ihtiyacımız var.

Sabit  $n \in \mathbb{N}$  için,  $L^2(0,1)$  'den  $C$ 'ye  $q \mapsto \lambda_n(q)$  fonksiyonu iyi tanımlanmış ve aşağıdaki teorem ile Fréchet diferansiyellenebilirdir.

### **Teorem 2.10.**

Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $L^2(0,1)$  'den  $C$ 'ye  $q \mapsto \lambda_n(q)$  dönüşümü, her  $\hat{q} \in L^2(0,1)$  için sürekli olarak Fréchet diferansiyellenebilirdir ve

$$\lambda_n'(\hat{q})q = \int_0^1 g_n(x, \hat{q})^2 q(x) dx, \quad q \in L^2(0,1) \quad \text{dir.} \quad (2.26)$$

Burada

$$g_n(x, \hat{q}) := \frac{u_2(x, \hat{\lambda}_n, \hat{q})}{\|u_2(\cdot, \hat{\lambda}_n, \hat{q})\|_{L^2}}$$

$\hat{\lambda}_n := \lambda_n(\hat{q})$  ya karşılık gelen  $L^2$ -normalleştirilmiş özfonksiyonu belirtir.

### **İspat:**

$(\hat{\lambda}_n, \hat{q})$  komşuluğunda  $u_2(1, \hat{\lambda}_n, \hat{q}) = 0$  ifadesini gözlemleyelim ve

$u_2(1, \lambda, q) = 0$  denkleminde kapalı fonksiyon teoremini uygulayalım.

Bu mümkündür çünkü  $\hat{\lambda}_n$ ,  $u_2(1, \cdot, \hat{q})$ 'nin Lemma 2.7'ye göre basit köküdür.

Kapalı fonksiyon teoremi,  $\hat{q}$ 'nin bir komşuluğundaki bütün  $q$ 'lar için  $u_2(1, \lambda_n(q), q) = 0$  olan  $\lambda_n = \lambda_n(q)$  fonksiyonunun varlığını verir. Fakat bu, aynı zamanda  $\lambda_n$  fonksiyonunun  $q$  ya göre sürekli biçimde diferansiyellenebilir olduğunu da içerir.

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2(1, \hat{\lambda}_n, \hat{q}) \lambda'_n(\hat{q}) q + \frac{\partial}{\partial q} u_2(1, \hat{\lambda}_n, \hat{q}) q,$$

$$u_{2,\lambda}(1) \lambda'_n(\hat{q}) q + u_{2,q}(1) = 0$$

Teorem 2.6'nın (c) kısmı ile, aşağıdaki sonucu çıkarırız.

$$\begin{aligned} \lambda'_n(\hat{q}) q &= -\frac{u_{2,q}(1)}{u_{2,\lambda}(1)} = -\frac{u_{2,q}(1) u'_2(1)}{u_{2,\lambda}(1) u'_2(1)} \\ &= -\frac{[u_{2,q}, u_2](1)}{[u_{2,\lambda}, u_2](1)} = \frac{\int_0^1 q(x) u_2(x)^2 dx}{\int_0^1 u_2(x)^2 dx} = \int_0^1 g_n(x, \hat{q})^2 q(x) dx, \end{aligned}$$

Burada  $\hat{\lambda}$  ve  $\hat{q}$  argümanlarını kaldırdık.

Şimdi ana teoremi formüle etmeye ve ispatlamaya hazırız.

### **Teorem 2.11.**

$Q \subset L^2(0,1)$  sınırlı bir küme olsun,  $q \in Q$  ve  $\lambda_n \in C$  bu  $q$ 'ya ait özdeğerler olsun. O halde

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t) dt - \int_0^1 q(t) \cos(2n\pi t) dt + O(1/n) \quad \text{dir.}$$

(2.27)

$n \rightarrow \infty$  için  $q \in Q$  için düzgündür. Ayrıca,  $\|g_n\|_{L^2} = 1$  ile normleştirilmiş  $g_n$

özdeğer fonksiyonları aşağıdaki asimptotik davranışa sahiptir.

$n \rightarrow \infty$  için  $q \in Q$  ve  $x \in [0,1]$  için düzgün yakınsaklar.

$$g_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) + O(1/n) \quad \text{ve} \quad (2.28a)$$

$$g'_n(x) = \sqrt{2}n\pi \cos(n\pi x) + O(1) \quad (2.28b)$$

(2.27)'nin sağ tarafındaki ikinci integralin  $\{\cos(2\pi nt) : n = 0, 1, 2, \dots\}$  göre  $q$ 'nin  $n$ . Fourier katsayısının  $a_n$  olduğunu görürüz. Fourier teorisinden,  $a_n$  nin sıfıra yakınsadığı bilinmektedir. Parseval özdeşliği  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ , yani, (2.25)'i doğrular. Eğer  $q$  yeteri kadar düzgün ise, yani sürekli olarak diferansiyellenebilir ise, o zaman,  $a_n$   $1/n$ 'den daha hızlı sıfıra yaklaşır. Şu durumda, bu terim  $O(1/n)$  içinde ortadan kalkar.

### İspat:

İspatı dört kısma ayırıyoruz.

(a) İlk önce,  $(x, q) \in [0, 1] \times Q$  için düzgün olarak  $g_n(x) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + O(1/n)$  şeklinde olduğunu gösterelim. Lemma 2.9 sayesinde,  $\sqrt{\lambda_n} = n\pi + O(1/n)$  olduğunu biliyoruz ve ayrıca Teorem 2.5 aracılığıyla

$$u_2(x, \lambda_n) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} x)}{\sqrt{\lambda_n}} + O(1/n^2) \quad \text{dir.}$$

$$2 \int_0^1 \sin^2(\alpha t) dt = 1 - \sin(2\alpha)/(2\alpha) \quad \text{formülü ile,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_2(t, \lambda_n)^2 dt &= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 \sin^2(\sqrt{\lambda_n} t) dt + O(1/n^3) \\ &= \frac{1}{2\lambda_n} \left[ 1 - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_n})}{2\sqrt{\lambda_n}} \right] + O(1/n^3) \\ &= \frac{1}{2\lambda_n} [1 + O(1/n)] \quad \text{hesaplarız.} \end{aligned}$$

Böylece

$$g_n(x) = \frac{u_2(x, \lambda_n)}{\sqrt{\int_0^1 u_2(t, \lambda_n)^2 dt}} = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + O(1/n) \quad \text{dır.}$$

(b) Şimdi  $\sqrt{\lambda_n} = n\pi + O(1/n)$  ve  $g_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) + O(1/n)$  olduğunu görelim.

Diferansiyel hesabın temel teoremine başvurarak ve Teorem 2.10'u kullanarak

$$\begin{aligned} \lambda_n - n^2 \pi^2 &= \lambda_n(q) - \lambda_n(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \lambda_n(tq) dt \\ &= \int_0^1 \lambda_n'(tq) q dt = \int_0^1 \int_0^1 g_n(x, tq)^2 q(x) dx dt = O(1) \quad \text{elde edilir.} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Bu  $\sqrt{\lambda_n} = n\pi + O(1/n)$  ve kısım (a) ile birlikte,  $g_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) + O(1/n)$  asimptotik formunu verir.

(c) Şimdi özdeğerlerin asimptotik davranışları kolayca (2.29)'dan aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g_n(x, tq)^2 = 2 \sin^2(n\pi x) + O(1/n) = 1 - \cos(2n\pi x) + O(1/n),$$

$t \in [0,1]$  ve  $q \in Q$  için düzgün bir tarzdadır.

(d) Benzer şekilde aşağıdaki türevler oluşur

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{u_2'(x, \lambda_n)}{\sqrt{\int_0^1 u_2(t, \lambda_n)^2 dt}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + O(1)}{\sqrt{1 + O(1/n)}} \\ &= \sqrt{2} n \pi \cos(n\pi x) + O(1). \end{aligned}$$

**Örnek 2.12.**

Teorem 2.10'u aşağıdaki iki numerik örnekle gösteriyoruz.

(a)  $q_1(x) = \exp(\sin(2\pi x)), x \in [0,1]$  olsun. Sonra  $q_1$ , analitik ve 1 periyotludur.

(b)  $0 \leq x \leq 0.4$  için  $q_2(x) = -5x$  ve  $0.4 < x \leq 1$  için  $q_2(x) = 4$  olsun.  $q_2$  fonksiyonu sürekli değildir.

$q_1, q_2, q = 0$  için  $\lambda \mapsto f(\lambda)$ ,  $\lambda \mapsto \sin \sqrt{\lambda} / \sqrt{\lambda}$  karakteristik fonksiyonların izimleri Şekil 2.1. ile Şekil 2.2.'de gösterilmiştir.

Şekil 2.1.  $[0,20]$  ile  $[5,100]$  üzerindeki  $q_1$ 'in karakteristik fonksiyonu

Şekil 2.2.  $[0,20]$  ile  $[5,100]$  üzerindeki  $q_2$ 'nin karakteristik fonksiyonu



Sonraki tablolar,  $q_1$ 'e karşılık gelen  $\lambda_n$  özdeğerleri,  $q=0$  karşılık gelen  $n^2\pi^2$  özdeğerleri ve farkı göstermektedir.

$$c_n := \lambda_n - n^2\pi^2 - \int_0^1 q(x)dx \quad n = 1, \dots, 10 :$$

Tablo 2.1.  $q_1(x)$  potansiyeline ait asimptotik formülden elde edilen özdeğerler

$\lambda_n$	$n^2\pi^2$	$c_n$
11.1	9.9	$-2.04*10^{-2}$
40.9	39.5	$1.49*10^{-1}$
90.1	88.8	$2.73*10^{-3}$
159.2	157.9	$-1.91*10^{-3}$
248.0	246.7	$7.74*10^{-4}$
356.6	354.3	$4.58*10^{-4}$
484.9	483.6	$4.58*10^{-4}$
632.9	631.7	$4.07*10^{-4}$
800.7	799.4	$3.90*10^{-4}$
988.2	987.0	$3.83*10^{-4}$

Açık ve net bir biçimde hızlı yaklaşmayı gözlüyoruz.

$q_2$  sürekli olmadığı için, Fourier katsayıları köke yavaşça yaklaşır. Yine  $q_2$  için  $\lambda_n$  özdeğerleri;  $q = 0$  'a karşılık gelen  $n^2\pi^2$  özdeğerleri ve farkları listeliyoruz.

$$c_n := \lambda_n - n^2\pi^2 - \int_0^1 q(x)dx$$

$$d_n := \lambda_n - n^2\pi^2 - \int_0^1 q(x)dx + \int_0^1 q(x) \cos(2\pi nx)dx \quad n = 1, \dots, 10 \text{ için}$$

Tablo 2.2.  $q_2(x)$  potansiyeline ait asimptotik formülden elde edilen özdeğerler

$\lambda_n$	$n^2\pi^2$	$c_n$	$d_n$
12.1	9.9	$1.86*10^{-1}$	$-1.46*10^{-1}$
41.1	39.5	$-3.87*10^{-1}$	$8.86*10^{-2}$
91.1	88.8	$3.14*10^{-1}$	$2.13*10^{-2}$
159.8	157.9	$1.61*10^{-1}$	$-6.70*10^{-3}$
248.8	246.7	$2.07*10^{-2}$	$2.07*10^{-2}$
357.4	354.3	$8.29*10^{-2}$	$-4.24*10^{-3}$
484.5	483.6	$-1.25*10^{-1}$	$6.17*10^{-3}$
633.8	631.7	$1.16*10^{-1}$	$3.91*10^{-3}$
801.4	799.4	$-6.66*10^{-2}$	$-1.38*10^{-3}$
989.0	987.0	$5.43*10^{-3}$	$5.43*10^{-3}$

Şimdi Sturm-Liouville özdeğer problemleri için aşağıdaki sınır koşullarıyla verilen problemlerin çözümüne bakacağız.

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.30a)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) + Hu(1) = 0. \quad (2.30b)$$

Burada özdeğerler aşağıdaki karakteristik fonksiyonların kökleridir.

$$f(\lambda) = u_2'(1, \lambda, q) + Hu_2(1, \lambda, q), \quad \lambda \in C \quad (2.31)$$

$q = 0$  olduğu yerin özel durumu için,  $u_2(x, \lambda, 0) = \sin(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda}$  olur. Bu durumun karakteristik fonksiyonu

$$g(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda} + H \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{olarak bulunur.}$$

$q = 0$  ile  $H = 0$  için  $f$ 'nin kökleri  $\lambda_n = (n + 1/2)^2 \pi^2, n = 0, 1, 2, \dots$  dir. Eğer  $H \neq 0$  ise,  $z \cot z + H = 0$  transandantal denklemi çözülmek zorundadır.  $R^2$  deki kapalı fonksiyon teoremine başvurmak suretiyle,  $q = 0$  için özdeğerlerin  $\lambda_n = (n + 1/2)^2 \pi^2 + 2H + O(1/n)$  olarak belirlendiği gösterilebilir.

Lemma 2.7 aynen geçerlidir çünkü sınır değer problemi self-adjointtir. Özdeğerlerin sayısını veren Lemma 2.9 şimdi aşağıdaki şekli alacaktır.

**Lemma 2.13.**

$q \in L^2(0,1)$  ve  $N > 2 \exp(\|q\|_{L^1}) (1 + |H|)$  bir tam sayı olsun. Buna göre;

(a)  $f(\lambda) := u_2'(1, \lambda, q) + Hu_2(1, \lambda, q)$  karakteristik fonksiyonu,

$$H := \{\lambda \in C : \text{Re } \lambda < N^2 \pi^2\}$$

yarı-düzleminde  $N$  köke sahiptir.

(b)  $m > N$  olmak şartıyla aşağıdaki her  $U_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\sqrt{\lambda} - (m - 1/2)\pi| < \pi/2\}$ . kümesinde  $f$ 'nin tek kökü vardır.

(c)  $\mathbb{C}$ 'de  $f$ 'nin başka kökü yoktur. İspat için

$$u'_2(1, \lambda_n(q), q) + Hu_2(1, \lambda_n(q), q) = 0$$

denkleminde kapalı fonksiyon teoremine başvurabiliriz. Çünkü kökler yine basittir.  $q$ 'ya göre bu denklemin diferansiyellenmesi, aşağıdaki ifadeyi verir.

$$\begin{aligned} & [u'_{2,\lambda}(1, \hat{\lambda}_n, \hat{q}) + Hu_{2,\lambda}(1, \hat{\lambda}_n, \hat{q})]\lambda'_n(\hat{q})q \\ & + [u'_{2,q}(1, \hat{\lambda}_n, \hat{q}) + Hu_{2,q}(1, \hat{\lambda}_n, \hat{q})] = 0 \end{aligned}$$

Teorem 2.6 aşağıdaki sonucu verir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_2(t)^2 dt &= u_{2,\lambda}(1) \underbrace{u'_2(1)}_{=-Hu_2(1)} - u'_{2,\lambda}(1)u_2(1) \\ &= -u_2(1)[u'_{2,\lambda}(1) + Hu_{2,\lambda}(1)] \end{aligned}$$

Burada  $\hat{\lambda}_n$  ve  $\hat{q}$  argümanlarını kaldırdık. Benzer şekilde

$$-\int_0^1 q(t)u_2(t)^2 dt = -u_2(1)[u'_{2,q}(1) + Hu_{2,q}(1)] \quad \text{olur.}$$

Böylece

$$\lambda'_n(\hat{q})q = -\frac{u'_{2,q}(1) + Hu_{2,q}(1)}{u'_{2,\lambda}(1) + Hu_{2,\lambda}(1)} = \frac{\int_0^1 q(t)u_2(t)^2 dt}{\int_0^1 u_2(t)^2 dt} \quad \text{dir.}$$

Bu daha önce olduğu gibi aynı forma sahiptir. Dirichlet sınırlı şartı halinde olduğu gibi devam ederek aşağıdaki Teorem 2.14'e ulaşıyoruz.

**Teorem 2.14.**

$Q \subset L^2(0,1)$  sınırlanmış,  $q \in Q$  ve  $H \in R$  olsun.  $\lambda_n$  özdeğerleri aşağıdaki asimptotik forma sahiptirler

$$\lambda_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + 2H + \int_0^1 q(t)dt - \int_0^1 q(t) \cos(2n+1)\pi t dt + O(1/n) \quad (2.32)$$

$n$  sonsuza gittiğinde,  $q \in Q$  için düzgün yakınsar.  $L^2$ - normalleştirilmiş özfonksiyonlar için, aşağıdaki ifadeye sahibiz.

$$g_n(x) = \sqrt{2} \sin(n+1/2)\pi x + O(1/n) \quad \text{ve} \quad (2.33a)$$

$$g'_n(x) = \sqrt{2}(n+1/2)\pi \cos(n+1/2)\pi x + O(1) \quad (2.33b)$$

bunlar  $x \in [0,1]$  ve  $q \in Q$  için düzgündürler.

Bu kısmın başında bahsedildiği üzere, özdeğerler ile özfonksiyonların asimptotik formüllerini ispatlamanın başka yolları vardır. Bu yollar, Lemma 2.9 ve  $\lambda_n$  nin  $q$ 'ya göre diferansiyellenebilirliğinden kaçınmak içindir. Fakat örneğin [12]'deki makale, (2.27)'nin yerine, sadece asimptotik davranışı

$$\lambda_n = m_n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t)dt + O(1/n) \quad \text{şeklinde verilmektedir.}$$

Burada,  $(m_n)$  doğal sayıların bazı dizileridir.

Ters probleme dönmeden önce,  $q$ 'nun kompleks-değerli olduğu durum hakkında birkaç söz söyleyelim. Bu durumda özdeğer problemleri artık (self-adjoint) değildirler. Ve genel spektral teoride uygulanabilir nitelikte değildir. Lemma 2.7'ye göre, farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların lineer bağımsız olduklarını ve geometrik katlılıklarının hala tek olduğunu göstermek son derece kolaydır. 2.9 sayma Lemması geçerlidir. Bundan,  $\lambda_n$ 'nin cebirsel katlılıklarının da aynı zamanda tek olduğunu, en azından  $n > N$  için tek olduğunu görebiliriz. Eğer kendimizi  $n > N$  ile  $\lambda_n$  özdeğerleriyle sınırlandırırsak, bu kısmın kalan argümanları içinde geçerlidir. Bu nedenle, (2.27), (2.28a), (2.28b), (2.32), (2.33a) ve (2.33b) eşit olarak kompleks-değerli  $q$  içinde aynı uyumlulukta geçerlidirler.

#### 2.4. Bazı Hiperbolik Problemler

Bundan sonraki kısımlara bir hazırlık teşkil etmesi bakımından, (özellikle 2.5. ile 2.7. kısımlarda) iki-boyutlu lineer hiperbolik kısmi diferansiyel denklemini için bazı başlangıç değer problemleri üzerinde duracağız.

$$\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + a(x,t)W(x,t) = 0,$$

burada  $a$  katsayısı  $a(x,t) = p(t) - q(x)$  özel formuna sahiptir. Bilindiği üzere karakteristiklerin yöntemi başlangıç değer problemlerini, sürekli fonksiyonların uzayında incelenebilen ikinci tür Volterra integral denklemlerine indirger. Bu yaklaşım doğal olarak düzgün olmayan katsayılar ve sınır dataları için çözümlere imkan verir. Üç teoremlerle sonuçları özetleyeceğiz. Her birinde ilk olarak düzgün katsayılar için, daha sonra ise düzgün olmayan katsayılar durumuna ait sonuçları formüle edeceğiz. Şunu belirtelim ki amacımız, çözüm kavramını zayıf çözüm kavramına indirmek değildir ama daha ziyade 2.5. ile 2.7. kısımlarda yalnızca ihtiyaç duyulacak derecede varsayımları hafifletmektir. Her ne kadar problemlerin çoğu -en azından düzgün veri için- kısmi diferansiyel denklemlerine ilişkin temel derslerin konusu olsa da, okuyucuya ikna olsun diye tam kanıtları da dahil ediyoruz.

Teoremlerin ifadeleriyle başlamadan evvel, bazı fonksiyon uzamlarını hatırlıyoruz:

$$C_0[0,1] := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\},$$

$$C_0^j[0,1] := C^j[0,1] \cap C_0[0,1], j = 1,2,$$

$$H^1(0,1) := \{f \in C[0,1] : f(x) = \alpha + \int_0^x g(t)dt, \alpha \in \mathbb{R}, g \in L^2(0,1)\},$$

$$H_0^1(0,1) := H^1(0,1) \cap C_0[0,1]$$

ve onları kanonik normlarla donatıyoruz.

$$\|f\|_{\infty} := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \quad C_0[0,1]$$

$$\|f\|_{C^j} := \max_{l=1, \dots, j} \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(l)}(x)| \quad C_0^j[0,1],$$

$$\|f\|_{H^1} := \sqrt{\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2} \quad H^1(0,1) \quad \text{ve} \quad H_0^1(0,1)$$

Ayrıca,  $\Delta_0 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < x < 1\}$ ,

(2.34a)

$$\Delta := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : |t| < x < 1\} \quad (2.34b)$$

kullanarak  $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^2$  ve  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  üçgen bölgelerini tanımlıyoruz.

Şimdi Goursat problemi olarak da isimlendirilen başlangıç değer problemiyle başlıyoruz.

**Teorem 2.15.**

(a)  $p, q \in C[0,1]$  ve  $f(0) = 0$  ile  $f \in C^2[0,1]$  olsun. Daha sonra aşağıdaki hiperbolik başlangıç değer probleminin  $W \in C^2(\bar{\Delta}_0)$  tek çözümü vardır.

$$\Delta_0 \text{ içinde } \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + (p(t) - q(t))W(x,t) = 0 \text{ denklemi,} \quad (2.35a)$$

$$W(x, x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.35b)$$

$$W(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.35c)$$

koşullarını sağlasın.

(b)  $(p, q, f) \mapsto W$  çözüm operatörünün,  $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times C_0[0,1]$  den  $C(\bar{\Delta}_0)$  içine sınırlı bir operatör genişlemesi söz konusudur.

(c)  $(p, q, f) \mapsto (W(1, \cdot), W_x(1, \cdot))$  operatör,  $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$ 'den  $H^1(0,1) \times L^2(0,1)$ 'ye sınırlı bir operatör genişlemesi söz konusudur. Burada  $W_x$  ile,  $x$ 'e bağlı kısmi türevi gösteriyoruz.

## İspat:

İlk olarak, problemi daha geniş bir bölgeye aktarıp orada inceliyoruz.

$$\Delta \text{ içinde } \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + a(x,t)W(x,t) = 0 \text{ denklemi,} \quad (2.36a)$$

$$W(x, x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.36b)$$

$$W(x, -x) = -f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.36c)$$

koşullarını sağlasın.

$(x, t) \in \Delta$  için  $a(x, t) := p(|t|) - q(x)$  olsun.

(2.36a)-(2.36c) problemin çözümü için, değişken değişimi yapalım.

$$x = \xi + \eta,$$

$$t = \xi - \eta,$$

Bu dönüşüm ile  $(x, t) \in \Delta$  den  $(\xi, \eta) \in D$  ye aktarılır.

Burada

$$D := \{(\xi, \eta) \in (0,1) \times (0,1) : \eta + \xi < 1\} \quad \text{dir.} \quad (2.37)$$

$(\xi, \eta) \in D$  için  $w(\xi, \eta) := W(\xi + \eta, \xi - \eta)$  dir. Şayet  $w$  aşağıdaki hiperbolik problemi çözerse (2.36a)-(2.36c) problemini de çözer.

$$\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \underbrace{-a(\xi + \eta, \xi - \eta)}_{=\tilde{a}(\xi, \eta)} w(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in D, \quad (2.38a)$$

$$w(\xi, 0) = f(\xi) \quad \xi \in [0,1] \quad \text{için} \quad (2.38b)$$

$$w(0, \eta) = -f(\eta) \quad \eta \in [0,1] \quad \text{için} \quad (2.38c)$$

Şimdi  $w$  (2.38a)-(2.38c)'nin bir çözümü olsun. Diferansiyel denklemi iki kez integre edip başlangıç koşullarını kullanırız. Daha sonra  $(\xi, \eta) \in D$  için,  $w$



$$w(\xi, \eta) = \int_0^\eta \int_0^\xi \tilde{a}(\xi', \eta') w(\xi', \eta') d\xi' d\eta' - f(\eta) + f(\xi), \quad (2.39)$$

integral denklemini elde ederiz. Bu iki boyutlu bir Volterra integral denklemdir.  $C(\overline{D})$ 'de ardışık iterasyon kullanmak bu denklemi çözenin standart bir metodudur. A, (2.39)'un sağ tarafı olarak tanımlanmış bir Volterra integral operatörü olsun.  $n \in \mathbb{N}$  ile ilgili bir tümevarım ile, bu kolayca görülebilir.

$$|(A^n w)(\xi, \eta)| \leq \|w\|_\infty \|\tilde{a}\|_{L^2}^n \frac{1}{n!} (\xi\eta)^{n/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

bu durumda  $\|A^n w\|_\infty \leq \|w\|_\infty \|\tilde{a}\|_{L^2}^n \frac{1}{n!}$  dır.

Bundan dolayı, yeterince geniş  $n$  için  $\|A^n\|_\infty < 1$  ve Neumann serileri yakınsar.

Bu (2.39)'un  $w \in C(\overline{D})$  tek bir çözümünün var olduğunu ispatlar. Bu kanıtlardan hareketle, teklik aynı zamanda (2.36a)-(2.36c)'dan da elde edilir.

Şimdi  $w \in C^2(\overline{D})$  olduğunu ispatlayalım.  $\xi$ 'ye göre (2.39)'un diferansiyelini alalım.

$$\begin{aligned} w_\xi(\xi, \eta) &= \int_0^\eta [q(\xi + \eta') - p(|\xi - \eta'|)] w(\xi, \eta') d\eta' + f'(\xi) \\ &= \int_\xi^{\xi+\eta} q(y) w(\xi, y - \xi) dy - \int_{\xi-\eta}^\xi p(|y|) w(\xi, \xi - y) dy + f'(\xi) \end{aligned}$$

olur ve benzer tarzda  $w_\eta$  için de hesaplanabilir. Bu form tekrar diferansiyellenebilir. Böylece,  $w \in C^2(\overline{D})$  dir ve  $W$ 'nin (2.36a)-(2.36c)'nin tek çözümü olduğunu daha önce göstermiştik.

$a(x, \cdot)$  bir çift fonksiyon ve başlangıç değerleri  $t$ 'ye bağlı tek fonksiyonlar olduğu için, bu teklik sonucundan  $W(x, \cdot)$  çözümünün de tek olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Bu, bütün  $x \in [0, 1]$  için  $W(x, 0) = 0$  ifade eder ki  $W$ 'nin (2.35a)-(2.35c) problemini çözer ve böylece (a) şıkkının ispatı tamamlanmıştır.

(b) şıkkı doğrudan doğruya (2.39) integral denkleminde ortaya çıkar. Çünkü  $A : C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$  integral operatörü  $\tilde{a} \in L^2(D)$  çekirdeğine sürekli olarak bağlıdır.

(c) nin ispatı için aşağıdaki ifadeyi biliyoruz

$$W(1,2\xi - 1) = w(\xi, 1 - \xi) \quad \text{ve}$$

$$W_x(1,2\xi - 1) = \frac{1}{2} w_\xi(\xi, 1 - \xi) + \frac{1}{2} w_\eta(\xi, 1 - \xi).$$

Sonra operatörün sınırlılığı, yine (2.39) integral denkleminin diferansiyellenmesiyle ortaya çıkar.

### **Teorem 2.15.1: Genişleme Teoremi**

$\tilde{X}, \tilde{Y}$  Banach uzayları,  $X \subset \tilde{X}$  yoğun alt uzay ve  $A : X \rightarrow \tilde{Y}$  lineer ve sınırlı olsun.

$\tilde{A}$  operatörü  $\tilde{A} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  sınırlı lineer operatördür.

(i) Tüm  $x \in X$  için ,  $\tilde{A}x = Ax$   $\tilde{A}$ ,  $A$  'nın genişlemesidir.

(ii)  $\|\tilde{A}\| = \|A\|$  dir.

$\tilde{A}$  tek türlü vardır.

Yukarıdaki teoreme göre, bu operatörün  $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$  'den  $H^1(0,1) \times L^2(0,1)$  'ye sınırlı bir genişlemesi vardır. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer  $p, q \in L^2(0,1)$  ve  $f \in C_0[0,1]$  ise, çözüm

$$W(x,t) = w\left(\frac{1}{2}(x+t), \frac{1}{2}(x-t)\right) \quad \text{dir.}$$

$w \in C(\bar{\Delta})$  , (2.39) integral denkleminin çözümü, (2.35a)-(2.35c) Goursat probleminin zayıf bir çözümüdür. Her zayıf çözüm  $W$  için,  $f_n(0) = 0$  ile

$(p_n), (q_n) \subset C[0,1]$  ve  $(f_n) \subset C^2[0,1]$  ile birlikte

$\|p_n - p\|_{L^2} \rightarrow 0, \|q_n - q\|_{L^2} \rightarrow 0$  ve  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  şartlarıyla dizileri vardır.

$p_n, q_n$  ve  $f_n$  dizilerine karşılık gelen (2.35a)- (2.35c)'nin  $W_n \in C^2(\bar{\Delta}_0)$  çözümleri  $W$ 'ye düzgün olarak yakınsar.

$p = q = 0$  özel durumu için, (2.39) integral denklemi çok iyi bilinen aşağıdaki çözüm formülüne dönüşür.

$$W(x,t) = f\left(\frac{1}{2}(x+t)\right) - f\left(\frac{1}{2}(x-t)\right).$$

Bir sonraki teorem aynı hiperbolik diferansiyel denklem için Cauchy problemi incelenecektir.

### **Teorem 2.16.**

(a)  $f(0) = f''(0) = g(0) = 0$  ile  $f \in C^2[0,1]$ ,  $g \in C^1[0,1]$  ve  $p, q \in C[0,1]$  ve  $F \in C(\bar{\Delta}_0)$  olsun. Aşağıdaki Cauchy probleminin tek bir  $W \in C^2(\bar{\Delta}_0)$  çözümü vardır.

$$\Delta_0 \quad \text{içinde} \quad \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + (p(t) - q(x))W(x,t) = F(x,t)$$

(2.40a)

denklemini,

$$0 \leq t \leq 1 \quad \text{için} \quad W(1,t) = f(t), \quad (2.40b)$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad \text{için} \quad \frac{\partial}{\partial x} W(1,t) = g(t) \quad (2.40c)$$

şartlarını sağlamalıdır.

(b) Ayrıca,  $(p, q, F, f, g) \mapsto W$  çözüm operatörünü,  $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(\Delta_0) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$  den  $C(\bar{\Delta}_0)$ 'ye sınırlı operatörle genişletiyoruz.

### **İspat:**

2.15 Teoreminde olduğu gibi, biz  $(x,t) \in \Delta$  için  $a(x,t) := p(|t|) - q(x)$ 'yi alalım ve  $(x,t) \in \Delta_0$  için  $F(x,-t) = F(x,t)$  aracılığıyla  $\Delta$  üzerinde bir çift fonksiyon olarak genişletelim.

Aynı zamanda  $t \in [0,1]$  için  $g(-t) = -g(t)$  ve  $f(-t) = -f(t)$  ile  $[-1,1]$  de  $f$  ve  $g$  tek fonksiyonlara genişleteceğiz. Daha sonra  $F \in C(\bar{\Delta})$ ,  $f \in C^2[-1,1]$  ve  $g \in C^1[-1,1]$  dir. Ve tekrar  $D$  bölgesi, (2.37) tarafından verilen bölgedir.

$$(\xi, \eta) \in D \text{ için } w(\xi, \eta) = W(\xi + \eta, \xi - \eta)$$

$$x = \xi + \eta,$$

$$t = \xi - \eta,$$

değişken değişimini yapıyoruz. Sonra eğer  $\tilde{F}(\xi, \eta) = F(\xi + \eta, \xi - \eta)$  ve  $\tilde{a}(\xi, \eta) = -a(\xi + \eta, \xi - \eta)$  olmak üzere  $w$

$$\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \tilde{a}(\xi, \eta)w(\xi, \eta) + \tilde{F}(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in D,$$

denklemini çözerse,  $W$ ; (2.40a)-(2.40c)'yi çözecektir. (2.40b) ile (2.40c) Cauchy koşulları,  $0 \leq \xi \leq 1$  için,

$$w(\xi, 1 - \xi) = f(2\xi - 1) \text{ ve } w_\xi(\xi, 1 - \xi) + w_\eta(\xi, 1 - \xi) = 2g(2\xi - 1)$$

dönüşür. Birinci denklemin diferansiyellenmesi ve  $w_\xi$  ve  $w_\eta$  için çözülmesi,

$$0 \leq \xi \leq 1 \text{ için,}$$

$$w_\xi(\xi, 1 - \xi) = g(2\xi - 1) + f'(2\xi - 1) \text{ ve } w_\eta(\xi, 1 - \xi) = g(2\xi - 1) - f'(2\xi - 1)$$

eşitliğini verir.  $\xi$  e göre diferansiyel denklemin  $\xi$ 'den  $1 - \eta$ 'ye integrali aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial w(\xi, \eta)}{\partial \eta} = - \int_{\xi}^{1-\eta} [\tilde{a}(\xi', \eta)w(\xi', \eta) + \tilde{F}(\xi' + \eta)] d\xi' + g(1 - 2\eta) - f'(1 - 2\eta).$$

Şimdi bu denklemi  $(\xi, \eta) \in D$  için  $\eta$  ya göre  $\eta$ 'den  $1 - \xi$ 'ye integre edersek

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \int_{\eta}^{1-\xi} \int_{\xi}^{1-\eta'} [\tilde{a}(\xi', \eta')w(\xi', \eta') + \tilde{F}(\xi', \eta')] d\xi' d\eta' \\ &\quad - \int_{\eta}^{1-\xi} g(1 - 2\eta') d\eta' + \frac{1}{2} f(2\xi - 1) + \frac{1}{2} f(1 - 2\eta) \end{aligned} \quad (2.41)$$

ye ulaşırız. Bu yine iki değişkenli bir Volterra integral denklemdir.

$A$ , integral operatörünü belirtsin

$$Aw(\xi, \eta) = \int_{\eta}^{1-\xi} \int_{\xi}^{1-\eta'} \tilde{a}(\xi', \eta') w(\xi', \eta') d\xi' d\eta', \quad (\xi, \eta) \in D,$$

tümevarım aracılığıyla bütün  $(\xi, \eta) \in D$  ve  $n \in N$  için kolaylıkla görülebilir ki

$$|A^n w(\xi, \eta)| \leq \|w\|_{\infty} \|\tilde{a}\|_{L^2}^n \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} (1 - \xi - \eta)^n \quad \text{dir.}$$

$$\text{Ayrıca, bütün } n \in N \text{ için, } \|A^n w\|_{\infty} \leq \|w\|_{\infty} \|\tilde{a}\|_{L^2}^n \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} \quad \text{dır.}$$

Yeterince büyük  $n$  için  $\|A^n\|_{\infty} < 1$  sonucunu çıkarıyoruz ki bu, (2.41)'in

$C(\bar{D})$ 'deki tek çözüm olduğuna tekrar işaret eder.

$p = q = 0$  ve  $F = 0$  özel durumu için (2.41) integral denklemi, çok iyi bilinen D'Alambert formülüne indirgenir.

$$W(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{t-(1-x)}^{t+(1-x)} g(\tau) d\tau + \frac{1}{2} f(t + (1-x)) + \frac{1}{2} f(t - (1-x)).$$

Sonuç olarak, üçüncü teorem,  $(W, r)$  fonksiyon çiftinin belirlenmesi için çalışılacaktır. Yukarıdaki aynı metotlarla bu sistemi de inceleyebiliriz.

### **Teorem 2.17.**

(a)  $f \in C^2[0,1], g \in C^1[0,1]$  ve  $p, q \in C[0,1]$  ve  $F \in C(\bar{\Delta}_0)$  olsun.

$$f(0) = f''(0) = g(0) = 0 \quad \text{dir.}$$

Bu halde tek bir  $(W, r) \in C^2(\bar{\Delta}_0) \times C[0,1]$  fonksiyon çifti vardır ki

$$\Delta_0 \text{ içinde } \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} + (p(t) - q(x))W(x, t) = F(x, t)r(x), \quad (2.42a)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{için} \quad W(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x r(t) dt, \quad (2.42b)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{için} \quad W(x, 0) = 0, \quad \text{ve}$$

(2.42c)

tüm  $t \in [0,1]$  için  $W(1,t) = f(t)$  ve  $\frac{\partial}{\partial x}W(1,t) = g(t)$  sağlanır.

(2.42d)

(b) Ayrıca,  $(p, q, F, f, g) \mapsto (W, r)$  çözüm operatörünü,  $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times C(\bar{\Delta}_0) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$  den  $C(\bar{\Delta}_0) \times L^2(0,1)$ 'ye sınırlı operatörle genişletiyoruz.

### İspat:

Teorem 2.15 ile 2.16'nın ispatında olduğu gibi, aynı kanıtlara başvuruyoruz.  $a(x,t) = p(|t|) - q(x)$  olsun ve  $F(x, \cdot)$  çift fonksiyon ve  $f$  ve  $g$  tek fonksiyonlarına genişletilsin. Tekrar  $x = \xi + \eta$  ve  $t = \xi - \eta$  değişken değişimini yapalım ve  $\tilde{F}(\xi, \eta) = F(\xi + \eta, \xi - \eta)$  ve  $\tilde{a}(\xi, \eta) = -a(\xi + \eta, \xi - \eta)$  olsun. Teorem 2.16'da gösterdiğimiz (2.42a) ve (2.42d) Cauchy probleminin  $W$  çözümü  $w(\xi, \eta) = W(\xi + \eta, \xi - \eta)$  için (2.43a) integral denklemine denktir.

$$w(\xi, \eta) = \int_{\eta}^{1-\xi} \int_{\xi}^{1-\eta'} [\tilde{a}(\xi', \eta')w(\xi', \eta') + \tilde{F}(\xi', \eta')r(\xi' + \eta')] d\xi' d\eta' - \int_{\eta}^{1-\xi} g(1-2\eta') d\eta' + \frac{1}{2} f(2\xi - 1) + \frac{1}{2} f(1-2\eta) \quad (2.43a)$$

(Bkz. Denklem (2.41)). Bu ve (2.42b) başlangıç koşulundan bir ikinci integral denklem türetiyoruz. (2.43a)'ya  $\eta = 0$  koyup diferansiyelini alalım ve (2.42b)'de yerine koyalım. Bu, bir önceki değişkenlerin değişiminden sonra aşağıdaki Volterra denklemini verir:

$$\frac{1}{2} r(x) = - \int_x^1 [\tilde{a}(x, y-x)w(x, y-x) + r(y)\tilde{F}(x, y-x)] dy + g(2x-1) + f'(2x-1). \quad (2.43b)$$

(2.43a) ile (2.43b)'nin bir  $(w, r) \in C(\bar{D}) \times C[0,1]$  çözümünün var olduğunu kabul edelim.

O zaman  $w$  diferansiyellenebilir ve  $\frac{d}{dx}W(x,x) = \frac{d}{dx}w(x,0) = \frac{1}{2}r(x)$  dir.

Şimdi,  $a(x,.)$  ve  $F(x,.)$  çift;  $f$  ve  $g$  ise tek fonksiyonlar olduğu için,  $W(x,.)$ 'nin da aynı zamanda tek olduğu sonucunu çıkarırız. Özel olarak, tüm  $x \in [0,1]$  için  $W(x,0) = 0$  dır.

Bu  $W(0,0) = 0$ 'a ve ayrıca  $W(x,x) = \frac{1}{2} \int_0^x r(t)dt$ 'ye işaret eder. Bundan dolayı,

(2.43a) ve (2.43b) denklemlerinin her çözümünün, (2.42a) ve (2.42d)'nin de çözümünü karşıladığını göstermiştik. Bunun terside doğrudur.

Şimdi (2.43a) ile (2.43b) sisteminin  $(w,r) \in C(\bar{D}) \times L^2(0,1)$  için tek çözüm olduğu şeklindeki ispatı ana hatlarıyla açıklayacağız. Sistemi,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \in C(\bar{D}) \times L^2(0,1) \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{pmatrix} w \\ r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w \\ r \end{pmatrix} + R$$

formunda yazıyoruz . Sonra  $A ; C(\bar{D}) \times L^2(0,1)$ 'den kendisine iyi tanımlanmıştır ve sürekli olarak  $\tilde{a} \in L^2(\Delta)$  ve  $\tilde{F} \in C(\bar{D})$ 'e bağlıdır. Eğer  $w$ , sabit tutulursa, (2.43b),  $r$  için bir Volterra denklemidir.

$r$  çözümünü,  $\tilde{F}, \tilde{a}, f, g$  de sürekli olarak  $h$  fonksiyonu ve  $L$  operatörüne bağlı olarak aşağıdaki formda ifade edebiliriz

$$\begin{aligned} r(x) &= (A_{21}w + R_2)(x) + \int_x^1 \tilde{b}(x,y)(A_{21}w + R_2)(y)dy \\ &= Lw(x) + h(x) . \end{aligned}$$

$A_{21}w$ 'nin açık ifadesini kullanarak, aşağıdaki formu buluruz.

$$x \in [0,1] \quad \text{için} \quad |Lw(x)| \leq \tilde{c} \max \{|w(y, z - y)| : y \leq z \leq 1, x \leq y \leq 1\} .$$

Şimdi  $r = Lw + h$  yı (2.43a)'da yerine koyarsak verilen şartlarda sürekli olan  $\tilde{R}$  fonksiyonu için

$$w(\xi, \eta) = \int_{\eta}^{1-\xi} \int_{\xi}^{1-\eta'} [\tilde{a}(\xi', \eta')w(\xi', \eta') + \tilde{F}(\xi', \eta')Lw(\xi' + \eta')] d\xi' d\eta' + \tilde{R}(\xi, \eta)$$

verir.  $B$  sağ taraftaki integral operatörü ve  $c := \|\tilde{a}\|_{L^2} + \tilde{c}\|\tilde{F}\|_{L^2}$  olsun. Tümevarım vasıtasıyla,  $D$  de

$$|B^n w(\xi, \eta)| \leq \frac{c^n}{\sqrt{(2n)!}} \|w\|_{\infty} (1 - \xi - \eta)^n$$

gösterilebilir .

Bu tekrar,  $n$ 'nin sonsuza gittiğinde olduğu kadar,  $\|B^n\|_{\infty}$ 'nin sıfıra gittiğine işaret eder. Daralma dönüşümü teoremi,  $C(\bar{D}) \times L^2(0,1)$ 'deki integral denklemler sisteminin varlık ve tekliğini verir. Kısım (a) ile kısım (b)'deki genişletme için,  $w$  ile  $p$ 'nin regülaritesi, 2.15 Teoreminin kanıtındaki gibi benzer şekilde ispatlanırlar.

## 2.5. Ters Problem

Şimdi ters spektral problem üzerinde çalışabiliriz. Bu, Sturm-Liouville özdeğer probleminin  $\lambda_n$  özdeğerlerinin verilir,

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (2.44)$$

sınır değer probleminden  $q$  fonksiyonunun bulunmasıdır. Örnek 2.1'de,  $\{\lambda_n : n \in N\}$  spektrum bilgisinin genellikle  $q$ 'yü tek başına belirlemek için yeterli olmadığını görmüştük. Daha fazla bilgiye ihtiyacımız vardır. Örneğin,

$$-v''(x) + q(x)v(x) = \mu v(x), \quad v(0) = 0, \quad v'(1) + Hv(1) = 0, \quad (2.45)$$



formunun bir özdeğer probleminin bir ikinci  $\mu_n$  spektrumu ya da özdeğerler hakkında bazı ek bilgilere ihtiyacımız vardır.

Ters problemin teklik ispatında esas araç, *Gelfand-Levitan-Marchenko integral operatöründen* yararlanmaktır (Bkz.[14]). Bu integral operatörü  $-u'' + qu = \lambda u$  denkleminin başlangıç değer problemlerinin çözümlerini,  $-u'' + pu = \lambda u$  denkleminin çözümüne transfer eder ve daha da önemlisi  $\lambda$ 'ya bağımlı olmayışıdır. Bu operatörün çekirdeği önceki kısımda incelenen hiperbolik sınır değer probleminin çözümüdür.

**Teorem 2.18.**

$p, q \in L^2(0,1), \lambda \in C$  olsun ve  $u, v \in H^2(0,1)$  aşağıdaki denklemlerin çözümleri olsun.

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad (2.46a)$$

$$-v''(x) + p(x)v(x) = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \quad v(0) = 0, \quad (2.46b)$$

$u'(0) = v'(0)$  'dır.  $K \in C(\bar{\Delta}_0)$  ' de aşağıdaki Goursat probleminin zayıf çözümü olsun.

$$\Delta_0 \text{ 'da} \quad \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} + (p(t) - q(x))K(x,t) = 0 \quad (2.47a)$$

denklemini

$$K(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.47b)$$

$$K(x,x) = \frac{1}{2} \int_0^x (q(s) - p(s)) ds, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.47c)$$

koşullarıyla bulmaktır. Burada  $\Delta_0$  üçgen bölgesi, tekrar

$$\Delta_0 := \{(x,t) \in R^2 : 0 < t < x < 1\} \quad (2.48)$$

şeklinde tanımlanır. Bu şartlar altında aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$u(x) = v(x) + \int_0^x K(x,t)v(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(2.49)  $f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (q(s) - p(s))ds$  ile Teorem 2.15, zayıf anlamda bu Goursat

probleminin tek türlü çözümü olduğunu verir.

**İspat:**

Önce,  $p, q \in C^1[0,1]$  olsun. Sonra Teorem 2.15' den  $K \in C^2(\bar{\Delta}_0)$  dir.

(2.49)'un sağ kenarını  $w$  olarak tanımlayalım.

Yani,  $w(x) := v(x) + \int_0^x K(x,t)v(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1$  olsun.

Sonra  $w(0) = v(0) = 0 = u(0)$  ve  $w$

$$w'(x) = v'(x) + K(x,x)v(x) + \int_0^x K_x(x,t)v(t)dt, \quad 0 < x < 1$$

şeklinde diferansiyellenir.

$K_x, K_t$  kısmi türevlerdir.  $x = 0$  için,  $w'(0) = v'(0) = u'(0)$  dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} w''(x) &= v''(x) + v(x) \frac{d}{dx} K(x,x) + K(x,x)v'(x) \\ &\quad + K_x(x,x)v(x) + \int_0^x K_{xx}(x,t)v(t)dt, \\ &= \left[ p(x) - \lambda + \frac{d}{dx} K(x,x) + K_x(x,x) \right] v(x) + K(x,x)v'(x) \\ &\quad + \int_0^x [(q(x) - p(t))K(x,t)v(t) + K_{tt}(x,t)v(t)] dt. \end{aligned}$$

Kısmi entegrasyon

$$\begin{aligned} &\int_0^x K_{tt}(x,t)v(t)dt \\ &= \int_0^x K(x,t)v''(t)dt + [K_t(x,t)v(t) - K(x,t)v'(t)]_{t=0}^{t=x} \end{aligned}$$

$$= \int_0^x (p(t) - \lambda)K(x,t)v(t)dt + K_t(x,x)v(x) - K(x,x)v'(x)$$

ifadesini verir.

Bu nedenle,

$$w''(x) = \left[ p(x) - \lambda + \underbrace{\frac{d}{dx}K(x,x) + K_x(x,x) + K_t(x,x)}_{=2\frac{d}{dx}K(x,x)=q(x)-p(x)} \right] v(x) \\ + (q(x) - \lambda) \int_0^x K(x,t)v(t)dt \\ = (q(x) - \lambda) \left[ v(x) + \int_0^x K(x,t)v(t)dt \right] = (q(x) - \lambda)w(x)$$

elde ederiz.

Yani,  $w, u$  için olan aynı başlangıç değer problemini çözer. Başlangıç sınır değer problemleri için Picard-Lindelöf teklik teoremi  $w = u$  verir. Bunun yanında, düzgün  $p$  ve  $q$  fonksiyonları için teoremi ispatlarız.

Şimdi  $p, q \in L^2(0,1)$  olsun. Sonra, sırasıyla  $L^2(0,1)$ 'de  $p_n \rightarrow p$  ve  $q_n \rightarrow q$  ile  $(p_n), (q_n) \in C^1[0,1]$  fonksiyonlarını seçiyoruz.  $K_n, p_n$  ve  $q_n$  için, (2.47a)-(2.47c)'nin çözümü olsun. Daha önce gösterildiği gibi, bütün  $n \in \mathbb{N}$  'ler için,

$$u_n(x) = v_n(x) + \int_0^x K_n(x,t)v_n(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$u_n$  ile  $v_n$ , (2.46a) ile (2.46b)'yi çözer,  $u_n'(0) = v_n'(0) = u'(0) = v'(0)$  dir.

Teorem 2.6 ile 2.15 (b)'in sonuçlarına bağlı olarak  $u_n, v_n$  ve  $K_n$  fonksiyonları düzgün olarak sırasıyla  $u, v$  ve  $K$  'ya yakınsar. Bu, teoremin  $p, q \in L^2(0,1)$ , için olan iddiasını ispatlar.

Bir örnek olarak,  $p = 0$  ve  $v(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda}$  alıyoruz ve aşağıdaki sonuca varıyoruz.

**Örnek 2.19.**

$u$ ,

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

(2.50)

in bir çözümü olsun.

Sonra

$$u(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x K(x,t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.51)$$

olur.

Burada çekirdek  $K$  aşağıdaki Goursat probleminin çözümüdür.

$$\Delta_0 \text{ 'da} \quad K_{xx}(x,t) - K_{tt}(x,t) - q(x)K(x,t) = 0 \quad (2.52a)$$

$$K(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.52b)$$

$$K(x,x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.52c)$$

Bu örneği, kendi başına önemli uygulamaları yanında kısım 2.7'de de kullanacağız.

**Teorem 2.20.**

$\lambda_n$  (2.44) veya (2.45) özdeğer problemlerinden birinin özdeğeri olsun. Sonra  $\{\sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot) : n \in N\}$  fonksiyonlar kümesi  $L^2(0,1)$ 'de tamdır. Bu, bütün

$n \in N$  'ler için  $\int_0^1 h(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0$  'in doğru olması halinde  $h = 0$  olduğunu ifade etmesi demektir.

**İspat:**  $T : L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$  , çekirdeği  $K$  olan ikinci çeşit Volterra integral operatörü olsun. Yani

$$Tv(x) := v(x) + \int_0^x K(x,t)v(t)dt, \quad x \in (0,1), \quad v \in L^2(0,1) \text{ dir.}$$

$K$  , (2.52a)-(2.52c) Goursat problemini çözer.

Daha sonra biliriz ki,  $T$  ,  $L^2(0,1)$  'den kendisine bir izomorfizmdir.

$x \in [0,1]$ ,  $n \in N$  için  $v_n(x) := \sin \sqrt{\lambda_n} x$  tanımlayalım.  $u_n$  ,

$$-u_n'' + qu_n = \lambda_n u_n \quad (0,1)'de \quad u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümü olsun.

$u_n$  ,  $\lambda_n$  'e karşılık gelen özdeğerlerdir ve bundan önceki örneğe göre

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} Tv_n \quad \text{veya} \quad v_n = \sqrt{\lambda_n} T^{-1} u_n \text{ dir.}$$

Şimdi, eğer bütün  $n \in N$  'ler için  $\int_0^1 h(x)v_n(x)dx = 0$  ise, o zaman

$$0 = \int_0^1 h(x)T^{-1}u_n(x)dx = \int_0^1 u_n(x)(T^*)^{-1}h(x)dx$$

$T^*$  ;  $T$  'nin  $L^2$  -adjointini belirtir.

$\{u_n / \|u_n\|_{L^2} : n \in N\}$  ,  $L^2(0,1)$  'de Lemma 2.7 vasıtasıyla tam olduğundan,

$(T^*)^{-1}h = 0$  ve buradan  $h = 0$  sonucunu çıkarıyoruz.

Şimdi esas teklik teoremini ispatlayabiliriz.

### **Teorem 2.21.**

$H \in R$ ,  $p, q \in L^2(0,1)$  ve  $\lambda_n(p)$  ,  $\lambda_n(q)$  sırasıyla  $r = p$  ve  $r = q$  'ya karşılık gelen

$$(0,1)'de \quad -u'' + ru = \lambda u \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

özdeğer probleminin özdeğerleri olsunlar.

Ayrıca,  $\mu_n(p)$ ,  $\mu_n(q)$ , sırasıyla  $r = p$  ve  $r = q$ 'ya karşılık gelen

$(0,1)$ 'de  $-u'' + ru = \mu u$   $u(0) = 0$ ,  $u'(1) + Hu(1) = 0$  nin

özdeğerleri olsunlar.

Eğer, bütün  $n \in N$ 'ler için,  $\lambda_n(p) = \lambda_n(q)$  ve  $\mu_n(p) = \mu_n(q)$  ise,  $p = q$ 'dür.

**İspat:**

Özdeğerlerin asimptotik davranışları

$$\lambda_n(p) = n^2 \pi^2 + \int_0^1 p(t) dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\lambda_n(q) = n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t) dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad \text{dır.}$$

Ve ayrıca

$$\int_0^1 (p(t) - q(t)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n(p) - \lambda_n(q)) = 0 \quad (2.53)$$

sonucuna ulaşıyoruz.

Şimdi  $K$ , (2.47a)-(2.47c) Goursat probleminin bir çözümü olsun. Sonra,  $K$  yalnızca  $p$  ve  $q$ 'ye bağlıdır ve de  $\lambda_n := \lambda_n(p) = \lambda_n(q)$  ile  $\mu_n := \mu_n(p) = \mu_n(q)$  özdeğerlerinden bağımsızdır. Bundan başka, (2.53)'ten,  $K(1,1) = 0$ 'dır sonucunu çıkarıyoruz.

Şimdi  $u_n, v_n$ ; sırasıyla,  $\lambda_n(q)$  ve  $\lambda_n(p)$ 'ye karşılık gelen özfonksiyonlar olsunlar; yani,  $0 < x < 1$  için, her iki uçta homejen Dirichlet sınır koşullarla,

$$-u_n''(x) + q(x)u_n(x) = \lambda_n u_n(x), \quad -v_n''(x) + p(x)v_n(x) = \lambda_n v_n(x)$$

diferansiyel denklemlerinin çözümleri olsun.

Ayrıca, onların  $u_n'(0) = v_n'(0) = 1$  şartlarıyla normalleştirildiklerini varsayıyoruz.

Sonra, Teorem 2.18 uygulanabilir ve her  $n \in N$  için

$$u_n(x) = v_n(x) + \int_0^x K(x,t)v_n(t)dt \quad x \in [0,1] \quad (2.54)$$

ilişkisini verir.

$x = 1$  için, sınır koşulları bütün  $n \in N$  'ler için

$$0 = \int_0^1 K(1,t)v_n(t)dt$$

(2.55)

verir.

Şimdi  $\{v_n / \|v_n\|_{L^2} : n \in N\}$ , kümesinin  $L^2(0,1)$ 'de bir tam ortonormal sistem oluşturduğu gerçeğini kullanırız. Bundan, tüm  $t \in [0,1]$  için  $K(1,t) = 0$  ortaya çıkar.

Şimdi  $\tilde{u}_n$  ve  $\tilde{v}_n$ ;  $\tilde{u}_n'(0) = \tilde{v}_n'(0) = 1$  normalleştirmesiyle, sırasıyla  $\mu_n$ ,  $q$  ve  $p$ 'ye karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. Tekrar Teorem 2.18 uygulanabilir ve sırasıyla  $u_n$  ile  $v_n$ 'nin ilişkisini vermek yerine;  $\tilde{u}_n$  ve  $\tilde{v}_n$ 'nin (2.54)'le ilişkisini verir. Bu denklemi diferansiyelleyerek aşağıdaki sonuca ulaşıyoruz.

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{u}_n'(1) - \tilde{v}_n'(1) + H[\tilde{u}_n(1) - \tilde{v}_n(1)] \\ &= \underbrace{K(1,1)}_{=0} \tilde{v}_n(1) + \int_0^1 \left( \underbrace{K_x(1,t)}_{=0} + H \underbrace{K(1,t)}_{=0} \right) \tilde{v}_n(t) dt \end{aligned}$$

ve bütün  $n \in N$  'ler için  $\int_0^1 K_x(1,t)\tilde{v}_n(t)dt = 0$  dır.

Bundan, bütün  $t \in (0,1)$  için  $K_x(1,t) = 0$  ortaya çıkar.

Çünkü  $\{\tilde{v}_n / \|\tilde{v}_n\|_{L^2}\}$ , bir tam ortonormal sitem oluşturur.

Şimdi,  $K$ 'nin özdeş bir biçimde sifıra eşitlenmesi gerektiği sonucunu veren Teorem 2.16'ya başvuruyoruz. Tüm  $x \in (0,1)$  için

$$0 = K(x,x) = \frac{1}{2} \int_0^x (p(s) - q(s))ds$$

denkleminin diferansiyelini almak,  $p = q$  sonucunu verir.

Sturm-Liouville diferansiyel denkleminin bir (tek) spektrum bilgisinin  $q$  fonksiyonunu yeniden bulmak için tek başına yeterli olmadığını Örnek 2.1’de görmüştük. İkinci sınır koşul için, spektrumunu bilmek yerine, aşağıdaki teoremlerin gösterdiği gibi, diğer bilgileri kullanabiliriz.

**Teorem 2.22.**

$\lambda_n(p)$ ,  $\lambda_n(q)$  özdeğerler ile  $p, q \in L^2(0,1)$  olsun ve  $u_n$  ve  $v_n$  sırasıyla,  $u(0) = 0, u(1) = 0$  Dirichlet sınır koşullarına karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. Yani, özdeğerler, bütün  $n \in \mathbb{N}$ ’ler için  $\lambda_n(p) = \lambda_n(q)$  çakışsın. Aşağıdaki varsayımlardan biri de doğrulasın.

(a)  $p$  ve  $q$ ;  $1/2$  ile ilgili çift fonksiyonlar olsun, yani, tüm  $x \in [0,1]$  için

$$p(1-x) = p(x) \text{ ve } q(1-x) = q(x).$$

(b) Neumann sınırlı koşulları çakışsın, yani, tüm  $n \in \mathbb{N}$ ’ler için

$$\frac{u'_n(1)}{u'_n(0)} = \frac{v'_n(1)}{v'_n(0)} \quad \text{dir.} \quad (2.56)$$

Buna göre  $p = q$  dir.

**İspat:**

(a) Özfonksiyonlar aynı zamanda çift fonksiyonlardır. Bu özdeğerlerin basit olduğu;  $u$  ile  $\tilde{u}(x) := u(1-x)$  aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olduğu gerçeğinden doğar. Bu yüzden, her  $u$  özfonksiyonu için,  $u'(1) = -u'(0)$  yani  $u'(1)/u'(0) = -1$  dir. Bu kısım (a)’nın teklik sorununu kısım (b)’ye indirger.

(b) Şimdi de  $u'_n(0) = v'_n(0) = 1$  şeklindeki özfonksiyonları normalleştiriyoruz. Teorem 2.21’in kanıtının birinci kısmını izleriz. (2.55)’ten, biz tekrar bütün  $t \in (0,1)$  için  $K(1,t)$ ’nin sifıra eşit olduğu sonucunu çıkarırız. Ek varsayım bize



((2.56))  $u'_n(1) = v'_n(1)$  verir. (2.54)'ün diferansiyelini alalım,  $x = 1$  koyarız ve bütün  $n \in N$  'ler için  $\int_0^1 K_x(1,t)v_n(t)dt = 0$  sonucuna varırız. Yine, bu,  $K_x(1,.) = 0$  ifade eder ve ispat, Teorem 2.21'in ispatı gibi aynı çizgileri izler.

## 2.6. Parametre Belirleme Problemi

Bu kısım ve gelecek bölümler, kısmi diferansiyel denklemler için önemli parametre belirleme problemlerine ayrılmıştır. Aşağıdaki parabolik başlangıç sınır değer probleminde ters Sturm-Liouville özdeğer probleminin bir uygulaması üzerinde duracağız. İlk olarak, direkt problemi formüle (ifade) ederiz.

$T > 0$  ve  $\Omega_T := (0,1) \times (0,T) \subset R^2$ ,  $q \in C[0,1]$  ve  $f \in C^2[0,T]$  verilmiş olsun.  $x \in [0,1]$  için,  $f(0) = 0$  ve  $q(x) \geq 0$  olsun. İki kez sürekli olarak  $x$ 'e göre diferansiyellenebilir ve  $\Omega_T$ 'de  $t$ 'ye göre sürekli olarak diferansiyellenebilir.  $U \in C(\overline{\Omega_T})$  'yi belileyeceğiz.

$\partial U / \partial x \in C(\overline{\Omega_T})$  olsun ve

$$\Omega_T \text{ 'de} \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - q(x)U(x,t) = 0 \quad (2.57a)$$

$$U(x,0) = 0, \quad x \in [0,1] \quad (2.57b)$$

$$U(0,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} U(1,t) = f(t), \quad t \in (0,T) \quad (2.57c)$$

şartları ile verilsin.

Parabolik başlangıç sınır değer problemleri teorisinden, bu problemin tek bir çözümü olduğu bilinmektedir. Tekliği kanıtlayacağız ve varlık sorunu için [5] ya da (2.59)'a başvuracağız.

**Teorem 2.23.**

$f = 0$  olsun.  $\Omega_T$ 'deki (2.57a)-(2.57c)'nin tek çözümü  $U = 0$  dır.

**İspat:**

(2.57a) diferansiyel denklemini  $U(x,t)$  ile çarparak  $x$ 'e göre integralini alırsak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 U(x,t)^2 dx = \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} U(x,t) - q(x)U(x,t)^2 \right] dx$$

ifadesi oluşur.

Kısmi integrasyon ile integrali alıp homojen sınır koşullarını kullanarak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 U(x,t)^2 dx = - \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right)^2 + q(x)U(x,t)^2 \right] dx \leq 0 \quad \text{elde ederiz.}$$

Bundan dolayı  $t \mapsto \int_0^1 U(x,t)^2 dx$  negatif olmayan ve monoton artan değildir.

$\int_0^1 U(x,0)^2 dx = 0$  'dan, bütün  $t$ 'ler için  $\int_0^1 U(x,t)^2 dx = 0$  sonucu çıkar, yani,

$U = 0$  dır.

Şimdi ters probleme dönüyoruz.  $f$  bilinsin ve buna ilaveten, bütün  $0 < t \leq T$  için,  $U(1,t)$  olsun. Ters problem,  $q$  katsayısını saptamaktadır.

Bu kısımda, eğer ilkesel olarak  $q$ 'yü tek başına yeniden bulmak amacıyla yeterli bilgi sağlanırsa, ters problemin teklik sorununu inceleyeceğiz. Amacımız, aşağıdaki teoremi ispatlamaktır.

**Teorem 2.24.**

$U_1, U_2$ ; sırasıyla  $q = q_1 \geq 0$  ve  $q = q_2 \geq 0$ 'a karşılık gelen (2.57a)-(2.57c)'nin çözümleri ve  $f$  aynı olsun. Bütün  $t \in (0, T)$  için,  $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$  ve  $U_1(1, t) = U_2(1, t)$  olsun. Sonra,  $[0, 1]$  üzerinde  $q_1 = q_2$ .

### İspat:

Sırasıyla  $q_1$  ya da  $q_2$  ve  $U_1$  ya da  $U_2$ ,  $q$  ve  $U$  olsun.  $\lambda_n$  ve  $g_n$ ,  $n \in N$ ;  $H = 0$  için (2.45) Sturm-Liouville özdeğer probleminin sırasıyla özdeğer ve özfonksiyonları olsun. Yani,

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u'(1) = 0 \text{ dir.}$$

Özfonksiyonların, bütün  $n \in N$  için  $\|g_n\|_{L^2} = 1$  ile normalleştirildiklerini kabul ediyoruz. Ayrıca, kabul edelim ki, bütün  $n \in N$  için  $g_n(1) > 0$ .  $\{g_n : n \in N\}$ ,  $L^2(0, 1)$ 'de bir tam ortonormal sistem oluşturduğunu biliyoruz. Teorem 2.14, asimptotik formu

$$\lambda_n = (n + 1/2)^2 + \hat{q} + \tilde{\lambda}_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_n^2 < \infty \text{ ile,} \quad (2.58a)$$

$$g_n(x) = \sqrt{2} \sin(n + 1/2)\pi x + O(1/n) \quad (2.58b)$$

olarak belirler.

Burada  $\hat{q} = \int_0^1 q(x) dx$  dir. İlk aşamada, (2.57a)-(2.57c) başlangıç sınır değer

probleminin  $U$  çözümü için, bir seri açılımı bulalım.  $\{g_n : n \in N\}$

tamlığından,

her  $t \in (0, T)$  için yakınsamanın  $L^2(0, 1)$  anlamında olduğu

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) g_n(x) \quad a_n(t) = \int_0^1 U(x, t) g_n(x) dx \quad n \in N$$

Fourier açılımına sahibiz. Bunu diferansiyel denklem, başlangıç ve sınır değer koşullarla yerleştirelim. Bu formel süreçten dolayı toplam ile diferansiyellenmenin değişimi gerekçelendirilmediği için, farklı bir yöntemle  $a_n$ 'yi oluşturacağız. (2.57a) kısmi diferansiyel denklemini kullanırız ve  $a_n$ 'yi diferansiyelleyerek aşağıdaki ifadeleri buluruz.

$$\begin{aligned}
 a_n'(t) &= \int_0^1 \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} g_n(x) dx = \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - q(x)U(x,t) \right] g_n(x) dx \\
 &= \left[ g_n(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} - U(x,t) g_n'(x) \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &\quad + \int_0^1 U(x,t) \left[ \underbrace{g_n''(x) - q(x)g_n(x)}_{=-\lambda_n g_n(x)} \right] dx \\
 &= f(t)g_n(1) - \lambda_n a_n(t)
 \end{aligned}$$

$a_n(0) = 0$  başlangıç koşuluyla, çözüm

$$a_n(t) = g_n(1) \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau$$

tarafından verilir. Yani, (2.57a)-(2.57c)'nin  $U$  çözümü şu şekli alır.

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(1) g_n(x) \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \quad (2.59)$$

Kısmi integralden,

$$\int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{\lambda_n} f(t) - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t f'(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \quad \text{dır ve bu } \frac{1}{\lambda_n} \text{ ile azalır.}$$

Bunu ve asimptotik (2.58a) ve (2.58b)'yi kullanmak suretiyle, (2.59) serileri  $\overline{\Omega}_T$  düzgün yakınsarlar.

$x = 1$  için, (2.59),

$$\begin{aligned}
 U(1,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(1)^2 \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \\
 &= \int_0^t f(\tau) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} g_n(1)^2 e^{-\lambda_n(t-\tau)}}_{=:A(t-\tau)} d\tau \quad , t \in [0, T]
 \end{aligned}$$

ifadesine indirgenir.

İntegral ve toplamanın sırasının değişimi Lebesgue'nin sınırlandırılmış yakınlaşma teoremiyle gerekçelendirilebilir. Bu (aşağıdaki) ifadeden

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(1)^2 e^{-\lambda_n s} \leq c \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 s} \leq c \int_0^{\infty} e^{-s^2 \pi^2 s} ds = \frac{c}{2\sqrt{\pi s}}$$

ve fonksiyon  $s \mapsto 1/\sqrt{s}$ 'nin integrallenebileceği olgusundan görülebilir.

Böyle bir temsil, sırasıyla  $q_1$  ve  $q_2$ 'ye karşılık gelen  $U_1(1,.)$  ve  $U_2(1,.)$  içinde vardır. (1) ve (2) üst işaretlerin  $q_1$  ve  $q_2$ 'ye olan bağlılığını belirtmek üzere  $U_1(1,.) = U_2(1,.)$ 'den,

$$0 = \int_0^t f(\tau)[A^{(1)}(t-\tau) - A^{(2)}(t-\tau)]d\tau = \int_0^t f(t-\tau)[A^{(1)}(\tau) - A^{(2)}(\tau)]d\tau$$

sonucunu çıkarırız. Yani,  $w := A^{(1)} - A^{(2)}$  fonksiyon,  $f(t-\tau)$  çekirdeği ile birinci çeşit homojen Volterra integral denklemini çözer. Bu denklemi iki kez diferansiyelleyip  $f(0) = 0$  ve  $f'(0) \neq 0$  kullanıyoruz. Bu,  $w$  için ikinci tür bir Volterra denklemini verir.

$$f'(0)w(t) + \int_0^t f''(t-s)w(s)ds = 0, \quad t \in [0, T]$$

İkinci tür Volterra denklemleri tek türlü çözüme sahip oldukları için bu, bütün  $t$ 'ler için  $w(t) = 0$  verir. Yani,

$$\text{tüm } t \in (0, T) \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} [g_n^{(1)}(1)]^2 e^{-\lambda_n^{(1)} t} = \sum_{n=1}^{\infty} [g_n^{(2)}(1)]^2 e^{-\lambda_n^{(2)} t}$$

olur.

Normalleştirme ile bütün  $j = 1, 2$  için  $g_n^{(j)}(1) > 0$  dir. Şimdi Dirichlet serileri teorisinden (Bkz. Lemma 2.25) çıkan sonuçlara başvurabilir ve söz konusu sonucu çıkarabiliriz. Bütün  $n \in \mathbb{N}$  için  $\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)}$  ve  $g_n^{(1)}(1) = g_n^{(2)}(1)$  dir.  $u(0) = 0$  ve  $u'(1) = 0$  sınır koşulları için, Teorem 2.22 kısım (b), teklik sonucuna başvurduktan sonra,  $q_1 = q_2$  sonucunu çıkarıyoruz.

Geriye aşağıdaki lemmayı ispatlamak kalıyor.

**Lemma 2.25.**

$\lambda_n$  ve  $\mu_n$ ; sonsuza giden kesin artan diziler olsunlar.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n t} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\mu_n t} \quad \text{serileri}$$

her  $t \in (0, T]$  de yakınsak ve aynı şekilde bir  $[\delta, T]$  aralığında düzgün yakınsak olsunlar. Limitleri akışsınlar, yani,

$$\text{tüm } t \in (0, T] \text{ için} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\mu_n t} \quad \text{olsunlar.}$$

Aynı zamanda, bütün  $n \in N$  için  $\alpha_n \neq 0$  ve  $\beta_n \neq 0$  olduğunu kabul edersek, o zaman bütün  $n \in N$  için  $\alpha_n = \beta_n$  ve  $\lambda_n = \mu_n$  dir.

**İspat:**

Kabul edelim ki,  $\lambda_1 \neq \mu_1$  ya da  $\alpha_1 \neq \beta_1$  olsun. Genelliği kaybetmeksizin,  $\mu_2 > \lambda_1$  olduğunu kabul edelim. (Aksi takdirde,  $\mu_1 < \mu_2 \leq \lambda_1 < \lambda_2$  dir ve  $\lambda_n$  ve  $\mu_n$ 'nin rolleri değiştirilebilir.)

$$C_n(t) := \alpha_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1)t} - \beta_n e^{-(\mu_n - \lambda_1)t} \quad t \geq \delta \text{ için tanımını yazalım.}$$

Analitik devam ile, bütün  $t \geq \delta$  için  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) = 0$  olduğu sonucuna varırız ve seri  $[\delta, \infty)$  da düzgün yakınsadığı sonucunu çıkarabiliriz.

$$C_1(t) = \alpha_1 - \beta_1 e^{-(\mu_1 - \lambda_1)t}$$

olduğu için, bütün  $t \geq t_1$  için  $|C_1(t)| \geq \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  ve  $t_1 > \delta$  sayıları vardır.

Bütün  $t \geq t_1$  için  $\left| \sum_{n=1}^{n_0} C_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde  $n_0 \in N$  seçelim.

Sonra , aşağıdaki sonucu çıkarırız.

Bütün  $t \geq t_1$  için,

$$\left| \sum_{n=2}^{n_0} C_n(t) \right| = \left| C_1(t) - \sum_{n=1}^{n_0} C_n(t) \right| \geq |C_1(t)| - \left| \sum_{n=1}^{n_0} C_n(t) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{buluruz.}$$

Şimdi  $t$  sonsuzluğa yaklaşsın. Birinci sonlu toplam, sifıra yaklaşır ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden,  $\lambda_1 = \mu_1$  ve  $\alpha_1 = \beta_1$  olur. Şimdi  $n = 2$  ve benzerleri için aynı kanıtı tekrar edelim. Bu, lemmayı ispatlar.

## 2.7. Sayısal Çözüm Teknikleri

Bu kısımda, W.Rundell, P.Sacks ve diğerleri tarafından ileri sürülen sayısal algoritmaları tartışacağız. [6,8,9] makalelerini yakından izliyoruz.

Bundan sonra, (2.44) veya (2.45) Sturm-Liouville özdeğer problemlerinin  $\lambda_n$  ve  $\mu_n$ ,  $n \in N$  özdeğerlerini bildiğimizi varsayalım. Amacımız, bilinmeyen  $q$  fonksiyonunu belirtmektir. Genellikle, özdeğerlerin sadece sonlu sayısı bilinir. O halde  $q$  fonksiyonun tamamının yeniden bulunması beklenemez. Fakat yalnızca  $q$ 'nun yaklaşık hesaplanması yapılacaktır.

Tartışacağımız ilk algoritma, karakteristik fonksiyon kavramını kullanır. Basitlik için, yalnızca  $q$ 'nün çift fonksiyon, yani,  $q(1-x) = q(x)$  olarak bilindiği durum için metodu açıklayacağız. Bu halde, yalnızca bir spektrumun  $q$ 'yu yeniden bulmaya yettiğini biliyoruz (Bkz. Teorem 2.22).

Problem (2.44) için  $f(\lambda) = u_2(1, \lambda, q)$  karakteristik fonksiyonunu yeniden göz önüne alalım. Ters problem  $q$  için,

$$u_2(1, \lambda_n, q) = 0 \quad \text{tüm } n \in N \quad \text{için} \quad (2.60)$$

denklemelerini çözen problem olarak yazılabilir.

Yalnızca sonlu sayıda bilinen özdeğerler,  $n = 1, \dots, N$  için  $\lambda_n$ , ve  $q$ , aşağıdaki şekilde ifade edilsin.

$$q(x; a) = \sum_{n=1}^N a_n q_n(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2.61)$$

$a = (a_1, \dots, a_N) \in R^N$  katsayıları ve lineer bağımsız  $q_n$  çift fonksiyonları cinsinden yazabiliriz.  $q$  düzgün ve periyodik ise,

$$q_n(x) = \cos(2\pi(n-1)x), n = 1, \dots, N \text{ seçmek uygundur.}$$

Denklem (2.60),  $F : R^N \rightarrow R^N$ 'i

$$F_n(a) := u_2(1, \lambda_n, q(\cdot; a)) \quad a \in R^N \text{ ve } n = 1, \dots, N \text{ için}$$

$F(a) = 0$  sonlu lineer olmayan sisteme indirgenir.

Bu nedenden ötürü, lineer olmayan denklemlerin çözüm sistemleri için çok iyi geliştirilmiş metotların hepsi kullanılabilir. Örneğin, eğer  $F'(a)^{-1}$  tekil değilse ikinci derecede yaklaşan Newton metodu kullanılabilir

$$a^{(k+1)} = a^{(k)} - F'(a^{(k)})^{-1} F(a^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

Kısım 2.2, Teorem 2.6'dan bildiğimiz üzere,  $F$  transformasyonu, her  $a \in R^N$  için sürekli olarak Fréchet diferansiyellenebilir. Türevin hesaplanması genelde zordur ve şayet  $F'(a)^{-1}$  tekil değilse  $F'(a)^{-1}$ 'nin yerine  $a = 0$  alınır.

Basitleştirilmiş Newton Metodu

$$a^{(k+1)} = a^{(k)} - F'(0)^{-1} F(a^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

olarak hesaplanır.



İkinci bir algoritmayı açıklamadan evvel, özdeğerlerin (2.27) asimptotik davranışlarından hareketle,  $\hat{q} = \int_0^1 q(x)dx$  değerini tahmin ederiz.

Diferansiyel denklemi

$$-u_n''(x) + (q(x) - \hat{q})u_n(x) = (\lambda_n - \hat{q})u_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

şekilde yazarsak, genelliği kaybetmeksizin  $\int_0^1 q(x)dx = 0$  'a varsayabileceğimizi gözlemleriz.

Şimdi 2.21 teklik Teoremine dayanan bir algoritmayı verebiliriz. Söz konusu algoritma iki adımdan ibarettir. Birincisi, iki özdeğer kümesinden  $f = K(1,.)$  ve  $g = K_x(1,.)$  Cauchy verilerini buluyoruz. Daha sonra bu Cauchy verilerinden  $q$  'yu hesaplamak amacıyla Newton-tipli yöntemleri öneriyoruz.

Hareket noktası,  $p = 0$  durumu için Teorem 2.18'dir. Bu özel durumu zaten daha önce Örnek 2.19'da ifade etmiştik. Bu nedenle,  $(\lambda_n, u_n)$ ;  $u_n'(0) = 1$  normleştirilmiş (2.44) özdeğer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları olsun.  $\lambda_n$  özdeğerleri bilinmektedir. Örnek 2.19'dan

$$u_n(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x}{\sqrt{\lambda_n}} + \int_0^x K(x,t) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.62)$$

yazarız.

Burada  $K$ ,  $K(1,1) = \frac{1}{2} \int_0^1 q(t)dt = 0$  ile (2.52a) - (2.52c) Goursat probleminin çözümüdür.  $x = 1$  için (2.62)'den  $K(1,t)$  hesaplayabiliriz. Çünkü Teorem 2.20 ile  $v_n(t) = \sin \sqrt{\lambda_n} t$  özdeğerler,  $L^2(0,1)$ 'de bir tam sistem oluşturur. Özdeğerlerin sadece ve sadece bir  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  sonlu sayısını bildiğimiz de,  $K(1,.)$  ifadesini

$$K(1, t) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi t)$$

şeklinin sonlu bir toplamı olarak belirleriz.

Bunu kullanarak

$$\sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 \sin(k\pi t) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = -\sin \sqrt{\lambda_n} \quad n = 1, \dots, N \quad (2.63)$$

elde ederiz.

Aynı argümanlar,  $u'(1) + Hu(1) = 0$  ikinci sınır koşulu için de bir denklemler sistemi verir.

$$\sqrt{\mu_n} \cos \sqrt{\mu_n} + H \sin \sqrt{\mu_n} + \int_0^1 (K_x(1, t) + HK(1, t)) \sin \sqrt{\mu_n} t dt = 0$$

şimdi buradaki  $\mu_n$ , bilinen özdeğerlere karşılık gelmektedir.

$$K_x(1, t) + HK(1, t) = \sum_{k=1}^N b_k \sin(k\pi t) \quad \text{şeklindeki temsilimiz}$$

$n = 1, \dots, N$  için

$$\sum_{k=1}^N b_k \int_0^1 \sin(k\pi t) \sin \sqrt{\mu_n} t dt = -\sqrt{\mu_n} \cos \sqrt{\mu_n} - H \sin \sqrt{\mu_n} \quad (2.64)$$

sistemini oluşturur.

(2.63) ve (2.64) denklemleri aynı formdadırlar. Biz sadece (2.63)'ün incelemesini

yapalım. Asimptotik olarak,  $A_{kn} = \int_0^1 \sin(k\pi t) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt$  tarafından tanımlanan

$A \in R^{N \times N}$  matrisi, sadece  $\frac{1}{2} I$ 'dir. Daha açık bir deyişle, Parseval özdeşliğinden

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \psi(t) \sin(k\pi t) dt \right|^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 |\psi(t)|^2 dt$$

aşağıdaki sonucu çıkarıyoruz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \sin(k\pi t) [\sin \sqrt{\lambda_n} t - \sin(n\pi t)] dt \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 |\sin \sqrt{\lambda_n} t - \sin(n\pi t)|^2 dt .$$

$$(2.29), \quad |\lambda_n - n^2 \pi^2| \leq \tilde{c} \|q\|_\infty \quad \text{ve} \quad |\sqrt{\lambda_n} - n\pi| \leq \frac{c}{n} \|q\|_\infty \quad \text{ifadelerini verir.}$$

Burada  $c$ ,  $q$  ve  $n$ 'den bağımsızdır. Bundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \sin(k\pi t) [\sin \sqrt{\lambda_n} t - \sin(n\pi t)] dt \right|^2 \leq \frac{1}{2} |\sqrt{\lambda_n} - n\pi|^2 \leq \frac{c^2}{2n^2} \|q\|_\infty^2$$

sonucunu çıkarırız.

Matris  $A$ , baskın köşegenlidir ve bu nedenle yeterince küçük  $\|q\|_\infty$  için inversi alınabilir. Sayısal deneyler, (2.64)'ün  $q$  sayısal çözümünün “büyük” değerleri açısından da herhangi bir probleme neden olmadığını göstermiştir.

Şimdi aşağıdaki ters problemle karşılaşıyoruz:  $f = K(1, \cdot) \in H_0^1(0,1)$  ve  $g = K_x(1, \cdot) \in L^2(0,1)$  Cauchy verilerinin yaklaşık değerleri verildikten sonra,  $q \in L^2(0,1)$ 'yi nasıl bulunur?  $p = 0$  için (2.40a)-(2.40c) Cauchy probleminin çözümü,  $x \in [0,1]$  için  $K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt$  sınır verilerini sağlar.

Ters problemi ifade (formüle) etmenin bir başka yoluda (2.52a)-(2.52c) Goursat problemi ile başlamaktır.  $q \in L^2(0,1)$  hesaplamak için (2.52a)-(2.52c) başlangıç değer problemini  $t \in [0,1]$  için  $f(t) = K(1, t)$  ve  $g(t) = K_x(1, t)$  Cauchy verilerine göre çözmektir.

Bu,  $K$  ve  $q$  çiftini Teorem 2.17'de incelemiştik. Burada,  $p = 0$  ve  $F = 0$  durumu için ona başvuruyoruz.  $(K, r)$  çifti aşağıdaki sistemin çözümüdür.

$$\Delta_0 \text{ 'da} \quad \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} - q(x)K(x, t) = 0$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x r(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{için}$$

$$K(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{için}$$

ve tüm  $t \in [0,1]$  için  $K(1, t) = f(t)$  ve  $\frac{\partial}{\partial x} K(1, t) = g(t)$  dir.

Eğer  $w(\xi, \eta) = K(\xi + \eta, \xi - \eta)$  ise,  $r$  (2.43a) ve (2.43b) integral denklemler sistemini çözer.  $p$  ve  $F$  'in bu özel seçimi için, (2.43b)

$$\frac{1}{2} r(x) = - \int_x^1 q(y) K(y, 2x - y) dy + g(2x - 1) + f'(2x - 1) \quad (2.65)$$

formuna indirgenir.

Biz  $f$  ve  $g$  'yi,  $[-1,1]$ 'e çift fonksiyon olarak genişletmiştik.  $T(q)$  ile (2.65)'in sağ tarafını gösterelim.  $T(q)$  'nün hesabı için,  $p = 0$  için (2.40a)- (2.40c) Cauchy problemi çözülmelidir.

$K$ ,  $T$  integral operatörünün  $K(y, 2x - y)$  çekirdeğinin aynı zamanda  $q$  'ya bağımlı olduğuna dikkat edelim.  $T$  operatörü, bu yüzden nonlineerdir!

$r = q$  alınırsa,  $L^2(0,1)$  'deki  $q = 2T(q)$  sabit nokta denklemini elde ederiz. [8]'de,  $T$  'nin  $q \in L^\infty(0,1)$  bir sabit noktasının tek olduğu gösterilmiştir. Daha da ötesi, Rundell ve Sacks,  $P_M T$  izdüşümlü operatörün, bazı ölçülmüş  $L^\infty$  -kurallarına göre,  $B_M := \{q \in L^\infty(0,1) : \|q\|_\infty \leq M\}$  yuvarı üzerinde bir daralma operatörü olduğunu kanıtlamışlardır. Burada  $P_M$ ,  $B_M$  üzerindeki izdüşüm operatörü

$$P_M q(x) = \begin{cases} q(x), & |q(x)| \leq M, \\ M \operatorname{sign} q(x), & |q(x)| > M. \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

$q^{(k+1)} = 2T(q^{(k)})$  iterasyon yönteminde,  $q^{(0)} = 0$  için  $q^{(1)}$  birinci iterasyon, basit olarak  $q^{(1)}(x) = 2g(2x - 1) + 2f'(2x - 1)$ ,  $x \in [0,1]$  'dir. Daha fazla detay için [8]'i referans gösteriyoruz.

Bir başka yöntemde

$S(q) = (K(1, \cdot), K_x(1, \cdot)) \in L^2(0,1) \times L^2(0,1)$  'den  $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$  'ye  $S$  opertörü tanımlamak,  $K$  çekirdek fonksiyon esasına dayalı alternatif bir sayısal yöntemdir. Burada  $K$ , (2.52a)-(2.52c) Goursat probleminin çözümüdür. Bu operatör, 2.15. Teoremin (c) kısmı tarafından iyi tanımlanmış ve sınırlıdır. Eğer  $f \in H_0^1(0,1)$  ve  $g \in L^2(0,1)$ , sırasıyla, verilen  $K(1, \cdot)$  ve  $K_x(1, \cdot)$  Cauchy değerleriyse, o zaman  $S(q) = (f, g)$  lineer olmayan denklemi çözmek zorundayız. Newton metodu, iterasyon yöntemiyle bunu yapar.

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} - S'(q^{(k)})^{-1}[S(q^{(k)}) - (f, g)], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.66)$$

$S$  'nin Fréchet türevinin hesaplanması gerekir. Teorem 2.15'in kanıtında türeyen (2.39) Volterra denklemi kullanılırsa,  $S$  'nin Fréchet diferansiyellenebilir olduğunu ispatlamak zor değildir ve  $S'(q)r = (W(1, \cdot), W_x(1, \cdot))$  dir. Burada  $W$  homojen olmayan Goursat probleminin çözümüdür.

$$\Delta_0 \text{ 'da} \quad W_{xx}(x, t) - W_{tt}(x, t) - q(x)W(x, t) = K(x, t)r(x) \quad (2.67a)$$

$$W(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.67b)$$

$$W(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x r(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.67c)$$

Teorem 2.17'de  $S'(q)$  'nun bir izomorfizm olduğunu ifade etmiştik. Bu sonucu yeniden formüle edersek.

**Teorem 2.26.**

$q \in L^2(0,1)$  ve  $K$ , (2.52a)-(2.52c)'nin çözümü olsun. Her  $f \in H_0^1(0,1)$  ve  $g \in L^2(0,1)$  için, bir tek  $r \in L^2(0,1)$  ve  $W(1,.) = f$  ve  $W_x(1,.) = g$ 'li (2.67a) (2.67c)'nin bir  $W$  çözümü vardır, yani,  $S'(q)$  bir izomorfizmdir.

Newton metodu'nun iterasyonları oldukça uğraştırıcıdır. Çünkü her adımda (2.67a)-(2.67c) formunun bir çift sisteminin çözülmesi lazımdır. Rundell ve Sacks, basitleştirilmiş Newton metodunu önermişlerdir.

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} - S'(0)^{-1}[S(q^{(k)}) - (f, g)], \quad k = 0, 1, \dots,$$

$S(0) = 0$  dolayısıyla,  $S'(0)$  lineer operatörünü analitik olarak inversi alınabilir. Özellikle, elimizde  $S'(0)r = (W(1,.), W_x(1,.) )$  vardır. Burada  $W$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_0 \text{ da} \quad W_{xx}(x,t) - W_{tt}(x,t) &= 0 \\ W(x,0) &= 0, \quad \text{ve} \quad W(x,x) = \frac{1}{2} \int_0^x r(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

çözer.

$K = 0$  çözümü için Cauchy probleminin  $W$  çözümü

$$\begin{aligned} \Delta_0 \text{ da} \quad W_{xx}(x,t) - W_{tt}(x,t) &= 0 \\ W(1,t) &= f(t), \quad \text{ve} \quad W_x(1,t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ W(x,t) &= -\frac{1}{2} \int_{t-(1-x)}^{t+(1-x)} g(\tau) d\tau + \frac{1}{2} f(t+(1-x)) + \frac{1}{2} f(t-(1-x)). \end{aligned}$$

ile verilir.

Burada  $f$  ve  $g$ 'yi tek fonksiyonlar olarak genişletmiştik.

$S'(0)r = (f, g)$ 'nin  $r$  çözümü bu nedenle

$$r(x) = 2 \frac{d}{dx} W(x,x) = 2f'(2x-1) + 2g(2x-1)$$

tarafından verilir.

Bu bölümde, yalnızca bir özel ters özdeğer problemini inceledik. Benzer teorik sonuç ve algoritmalar diğer ters spektral problemler için edinilebilir ( Bkz.

[15,16] ). Mükemmel bir inceleme için, W. Rundell'ın bir sonraki makalesine [13] atıfta bulunuyoruz.

## BÖLÜM 3. SONUÇLAR

### 3.1. Klasik Ters Sturm-Liouville Probleminin Çözümü

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

$$y'(1) + Hy(1) = 0$$

Probleminin Spectral datasının bilinmesi halinde  $q(x)$  fonksiyonunu bulmak istiyoruz. Spectral data çok çeşitli verilebileceğinden dolayı bu bir ters problem ailesi oluşturur.

$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$  tüm Spectrum bilinse bu  $q(x)$  in belirlenmesinde yetmemektedir. Yeni bilgilere ihtiyacımız olacaktır. Bunlardan en önemli metot olarak biz iki Spectrum verilmesi halinde  $q(x)$  in bulunmasını inceleyeceğiz.

$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$  ye ilaveten  $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$   $H$  yerine  $H \neq \tilde{H}$  olarak alınıp, elde edilen Spectrum olsun. Bu ikisini kullanarak Borg [17]  $q(x)$  fonksiyonunu tek türlü bulacağımızı gösterdi.

Levinson [18] de  $q(x)$  ile beraber  $h$   $H$  ve  $\tilde{H}$  bulunmasını da içerecek şekilde (yani sınır koşullarını bulma) çözümü genişletti.

$q(x) = q(1-x)$  ise  $\{\lambda_j\}$  ler tek ve  $q(x)$  bulunabileceğini görmüştük.

$$h = \infty \quad H = \infty \quad \tilde{H} = 0$$

için 2 spectrum  $\{\mu_j\}$  belli olsun.

Dirichlet ve Dirichlet-Neumann özdeğerlerinin asimptotik davranışları

$$\lambda_j = j^2 \pi^2 + \int_0^1 q(s) ds + a_j$$

$$\mu_j = (j \mp \frac{1}{2})^2 \pi^2 + \int_0^1 q(s) ds + b_j \quad \{a_i\}, \{b_j\} \in L_2 \text{ dir.}$$

Gelfand ve Levitan [14] a göre  $q \in L^2[0,1]$  ise  $K(x,t) = K(x,t;q)$   $0 \leq |t| \leq x \leq 1$  üçgeninde aşağıdaki koşullarda çözülebilmektedir.

Eğer  $\phi$

$$\phi'' + (\lambda - q(x))\phi = 0$$

$$\phi(0, \lambda) = 0 \quad \phi'(0, \lambda) = 1 \quad \text{ise}$$

$$\phi(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x K(x,t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt \quad \text{dir. ( Örnek$$

2.19 )

Burada  $K(x,t)$   $\lambda$  dan bağımsızdır ve  $K(x,t)$

$$K_{tt} - K_{xx} + q(x)K = 0 \quad 0 \leq |t| \leq x \leq 1$$

$$K(x, \mp x) = \pm \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds \quad 0 \leq x \leq 1$$

karakteristik sınır değer probleminin çözümüdür.

$K(x,0) = 0$  ile  $t = -x$  deki değeri yerine alınabilir. Fakat  $-x < t < x$  olmak formülasyon açısından daha uygundur.

$K$ 'dan Couchy datalarının bulunması,  $x=1$  için  $K(1,t), K_x(1,t)$   $-1 \leq t \leq 1$  fonksiyonlarının bulunmasıdır.



Her ikisi de  $t$ 'ye göre tek fonksiyon olduğundan  $0 \leq t \leq 1$  aralığı ile yetinebiliriz.

$x = 1$  ve  $\lambda = \lambda_j$  için

$$\int_0^1 K(1, t) \sin \sqrt{\lambda_j} t dt = -\sin \sqrt{\lambda_j} \quad \text{dir.}$$

$x$ 'e göre türevi olarak  $\lambda = \mu_j$  ile

$$\int_0^1 K_x(1, t) \sin \sqrt{\mu_j} t dt = -\sqrt{\mu_j} \cos \sqrt{\mu_j} - \frac{1}{2} \sin \sqrt{\mu_j} \int_0^1 q(s) ds$$

$$\int_0^1 q(s) ds \quad \text{spectral ifadesinden hesaplanır.}$$

$K$  dan Couchy datalarının bulunması  $\{\sin \sqrt{\lambda_j} t\}$  ve  $\{\sin \sqrt{\mu_j} t\}$  kümelerinin  $L^2(0,1)$  de tam olmasından elde edilir.

Homojen olmayan dalga denkleminin D'alambert çözümünden

$x = 1$  de  $\{K(1, t), K_x(1, t)\}$  Couchy datalarıyla

$$K(x, x) = \frac{1}{2} [K[1, 2x-1] + K(1, 1)] + \frac{1}{2} \int_1^{2x-1} K_x(1, s) ds$$

$$- \frac{1}{2} \int_x^{2x-y} \int_y q(y) K(y, s) ds dy$$

bulunur.  $x$ 'e göre türevini alarak

$$q(x) = 2[K_t(1, 2x-1) + K_x(1, 2x-1)] - 2 \int_x^{2x-y} q(y) K(y, 2x-y) dy$$

bulunur.

$K = K(x, t; q)$  olduğundan

$$G_1(t) = K_t(1, t; q) \quad G_2(t) = K_x(1, t; q) \quad \text{dersek}$$

$$G(x) = 2[G_1(2x-1) + G_2(2x-1)] \quad \text{olacağından}$$

$$q(x) = G(x) - 2 \int_x^1 q(y)K(y, 2x - y)dy \quad \text{olur.}$$

### 3.2. Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi

$q(x)$  verildiğinde

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{xx} + q(x)U &= 0 & 0 \leq |t| \leq x \leq 1 \\ K(1, t) = U(1, t) & \quad K_x(1, t) = U_x(1, t) & -1 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

çözümü  $u = u(x, t; q)$  olsun

$q_0$  başlangıç seçimi ile

$$q_{n+1}(x) = 2 \frac{d}{dx} U(x, x; q_n) \quad \text{ya da daha açık bir ifade ile}$$

$$q_{n+1}(x) = G(x) - 2 \int_x^1 q_n(y)u(y, 2x - y; q_n)dy$$

ardışık yaklaşım ifadesini buluruz.

$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \rightarrow q$  aranan fonksiyondur.

$$q_0 = 0 \quad , \quad q_1 = G(x) \quad \text{dir.}$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N < (N+1)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(s)ds \quad \text{dir.}$$

$$\bar{q} = \int_0^1 q(s)ds \quad \text{diyelim}$$

$$\bar{q} = \lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda_j - j^2 \pi^2) \quad \text{dir.}$$

$$\begin{bmatrix} \text{spectral} \\ \text{data} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \text{hesapla} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} K(1,t), K_x(1,t) \\ \text{hesapla} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} q(x) \\ \text{hesapla} \end{bmatrix}$$

$\bar{q} = \lambda_N - N^2 \pi^2$   $N$  yeterince büyük alınabilir.

### 3.2.1. Algoritma

$$t_i = \left\{ 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1 = x_i \right\}$$

$$\text{do for } 1 \leq j, k \leq N \quad A_{ji} = \int_0^1 \sin k \pi t \sin \sqrt{\lambda_j} t dt$$

$$B_{jk} = \int_0^1 \sin k \pi t \sin \sqrt{\mu_j} t dt$$

do for  $1 \leq j \leq N$

$$c_j = -\sin \sqrt{\lambda_j}$$

$$d_j = -\cos \sqrt{\mu_j} \sqrt{\mu_j} - \frac{1}{2} \sin \sqrt{\mu_j} \int_0^1 q(s) ds$$

$\bar{q}$  önceden belli

$$\text{solve } A_{jk} a_k = c_j$$

$$\text{solve } B_{jk} b_k = d_j$$

$$\text{do for } 0 \leq j \leq \mu \quad \left\{ K(1, t_i) = \sum_{i=1}^n a_k \sin k \pi t_i \right.$$

$$K_x(1, t_i) = \sum b_k \sin k \pi t_i$$

set  $q_0 = 0$

do for  $0 \leq n \leq Max$  iteration

$$G(x) = 2 \underbrace{G_1(2x-1)}_{K_t(1,t)} + \underbrace{G_2(2x-1)}_{K_x(1,t)}$$

$$q_{n+1}(x) = G(x) - 2 \int_x^1 q_n(y) u(y, 2x-y; q_n) dy$$

### 3.3. Uygulamalar

#### 3.3.1. Seri çözümleri kullanmak

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} K^n S$$

1)  $u_2 = (x, \lambda, q) \cong S + KS + \dots$

2)  $u_2 = (x, \lambda, q) \cong S + KS + K^2S + \dots$

1)  $u_2(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \right) dt + \dots$

$$q(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos 2\pi(n-1)t \quad a_n \text{ bilinmeyen katsayılar.}$$

$$u_2(x; \lambda, q) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x-t)}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n=1}^N a_n \cos 2\pi(n-1)t \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \right) dt$$

$$u_2(1; \lambda, q) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1-t)}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n=1}^N a_n \cos 2\pi(n-1)t \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \right) dt = 0$$

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{n=1}^N \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi(n-1)t \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] a_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^N \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi(n-1)t \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] a_n = -\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] a_1 \\ & + \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi t dt \right] a_2 + \dots + [ ] a_k + \dots \\ & + \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \cos 2\pi(N-1)t dt \right] a_N = -\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

$$\lambda = \lambda_1$$

$$\left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda_1}(1-t)}{\lambda_1} \sin \sqrt{\lambda_1} t dt \right] a_1 + \dots + \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda_1}(1-t)}{\lambda_1} \sin \sqrt{\lambda_1} \cos 2\pi(N-1)t dt \right] a_N = -\frac{\sin \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\lambda = \lambda_2$$

$$\left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda_2}(1-t)}{\lambda_2} \sin \sqrt{\lambda_2} t dt \right] a_1 + \dots + \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda_2}(1-t)}{\lambda_2} \sin \sqrt{\lambda_2} \cos 2\pi(N-1)t dt \right] a_N = -\frac{\sin \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}$$

.....

$$\lambda = \lambda_N$$

$$\left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda_N}(1-t)}{\lambda_N} \sin \sqrt{\lambda_N} t dt \right] a_1 + \dots + \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda_N}(1-t)}{\lambda_N} \sin \sqrt{\lambda_N} \cos 2\pi(N-1)t dt \right] a_N = -\frac{\sin \sqrt{\lambda_N}}{\sqrt{\lambda_N}}$$

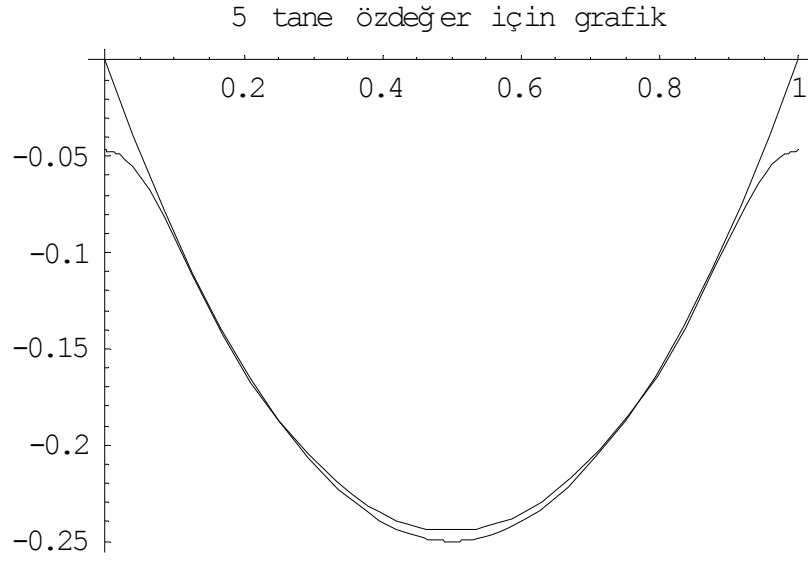
$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}(1-t)\sin\sqrt{\lambda_1}t}{\lambda_1} \cdot 1 \cdot dt & \dots & \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}(1-t)\sin\sqrt{\lambda_1}t}{\lambda_1} \cos 2\pi(N-1)t dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\lambda_N}(1-t)\sin\sqrt{\lambda_N}t}{\lambda_N} \cdot 1 \cdot dt & \dots & \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\lambda_N}(1-t)\sin\sqrt{\lambda_N}t}{\lambda_N} \cos 2\pi(N-1)t dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} \\ -\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} \\ \vdots \\ -\frac{\sin\sqrt{\lambda_N}}{\sqrt{\lambda_N}} \end{bmatrix}$$

$$q(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos 2\pi(n-1)t$$

$$N = 10 \quad \left[ A_{ij} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{10} \end{bmatrix}$$

$$q(t) = a_1 + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 4\pi t + \dots + a_{10} \cos 18\pi t$$

### Örnek 3.3.2.



Şekil 3.1.1.1. 5 özdeğer için  $q(x) = x(x - 1)$  fonksiyonunun grafiği

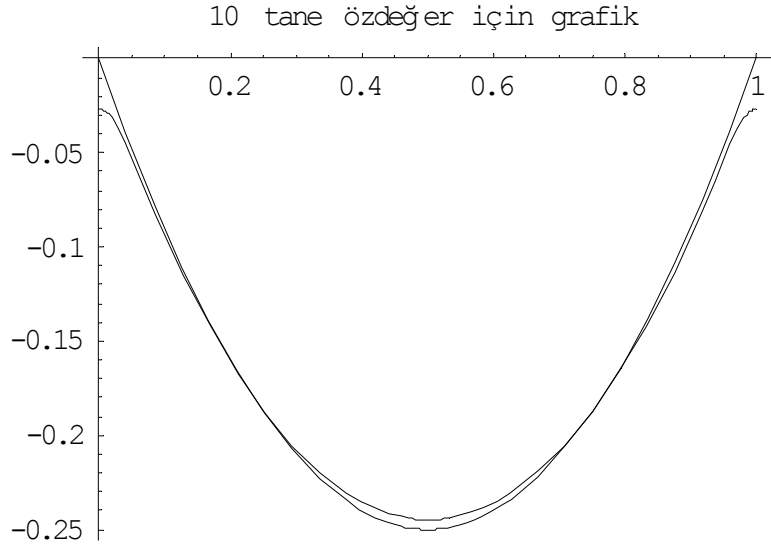
$q(x) = x(x - 1)$  potansiyeli için ilk 5  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  özdeğerleri asimptotik

formülle hesaplandı ve bunlar kullanılarak  $q(x) \approx \sum_{n=1}^5 a_n \cos 2\pi(n-1)t$

olarak yaklaşıldı.

Ve  $q(t)$  aşağıdaki gibi bulundu.

$$q(t) = -0.168655 + 0.0916215 \cos[2\pi t] + 0.0207516 \cos[4\pi t] + 0.00706619 \cos[6\pi t] + 0.00224076 \cos[8\pi t]$$



Şekil 3.1.2. 10 özdeğer için  $q(x) = x(x - 1)$  fonksiyonunun grafiği

$q(x) = x(x - 1)$  potansiyeli için ilk 10  $\lambda_1, \dots, \lambda_{10}$  özdeğerleri asimptotik

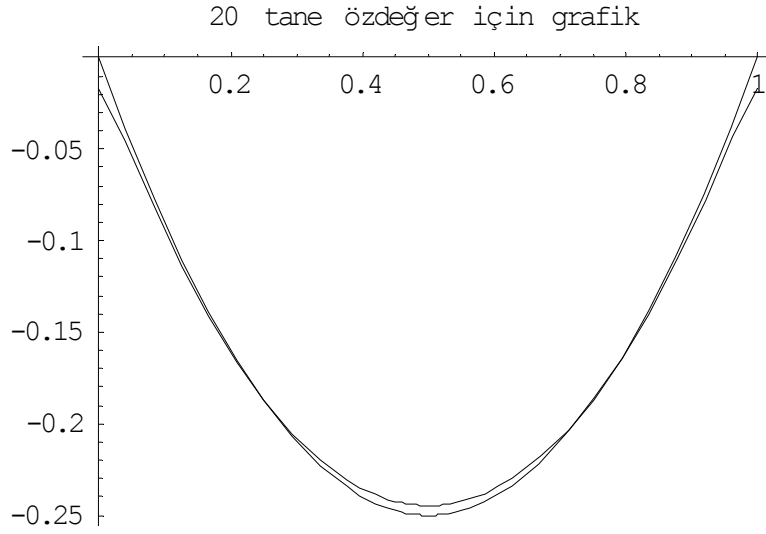
formülle hesaplandı ve bunlar kullanılarak  $q(x) \approx \sum_{n=1}^{10} a_n \cos 2\pi(n-1)t$

olarak yaklaşıldı.

Ve  $q(t)$  aşağıdaki gibi bulundu.

$$q(t) = -0.167165 + 0.0946119 \cos[2\pi t] + 0.0237405 \cos[4\pi t] + 0.0100552 \cos[6\pi t] + 0.00523043 \cos[8\pi t] + 0.00299139 \cos[10\pi t] + 0.00177359 \cos[12\pi t] + 0.00103875 \cos[14\pi t] + 0.000561572 \cos[16\pi t] + 0.000234275 \cos[18\pi t]$$





Şekil 3.1.3. 20 özdeğer için  $q(x) = x(x - 1)$  fonksiyonunun grafiği

$q(x) = x(x - 1)$  potansiyeli için ilk 20  $\lambda_1, \dots, \lambda_{20}$  özdeğerleri asimptotik

formülle hesaplandı ve bunlar kullanılarak  $q(x) \approx \sum_{n=1}^{20} a_n \cos 2\pi(n - 1)t$

olarak yaklaşıldı.

Ve  $q(t)$  aşağıdaki gibi bulundu.

$$\begin{aligned}
 q(t) = & -0.166791 + 0.0953605 \cos[2 \pi t] + 0.0244889 \cos[4 \pi t] \\
 & + 0.0108035 \cos[6 \pi t] + 0.0059788 \cos[8 \pi t] + 0.00373978 \cos[10 \pi t] \\
 & + 0.002522 \cos[12 \pi t] + 0.0017872 \cos[14 \pi t] + 0.00131009 \cos[16 \pi t] \\
 & + 0.000982885 \cos[18 \pi t] + 0.000748792 \cos[20 \pi t] + 0.000575564 \\
 & \cos[22 \pi t] + 0.000443795 \cos[24 \pi t] + 0.000341239 \cos[26 \pi t] \\
 & + 0.000259857 \cos[28 \pi t] + 0.000194198 \cos[30 \pi t] + 0.000140457 \\
 & \cos[32 \pi t] + 0.0000959145 \cos[34 \pi t] + 0.0000585839 \cos[36 \pi t] \\
 & + 0.0000269863 \cos[38 \pi t]
 \end{aligned}$$

### 3.3.3. Lineer olmayan çözümler

$$u_2 = (x, \lambda, q) \cong S + KS + K^2S + ..$$

serisinden ilk üç terim alınarak

$$q(t) = a_1 + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 4\pi t$$

formunda teklif edilerek lineer olmayan  $a_1, a_2, a_3$  cinsinden denklem takımı çözüldü.

$$u_2(x; \lambda, q) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-s)}{\sqrt{\lambda}} q(s) \frac{\sin \sqrt{\lambda} s}{\sqrt{\lambda}} ds \right] dt$$

$$u_2(1; \lambda, q) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-s)}{\sqrt{\lambda}} q(s) \frac{\sin \sqrt{\lambda} s}{\sqrt{\lambda}} ds \right] dt = 0$$

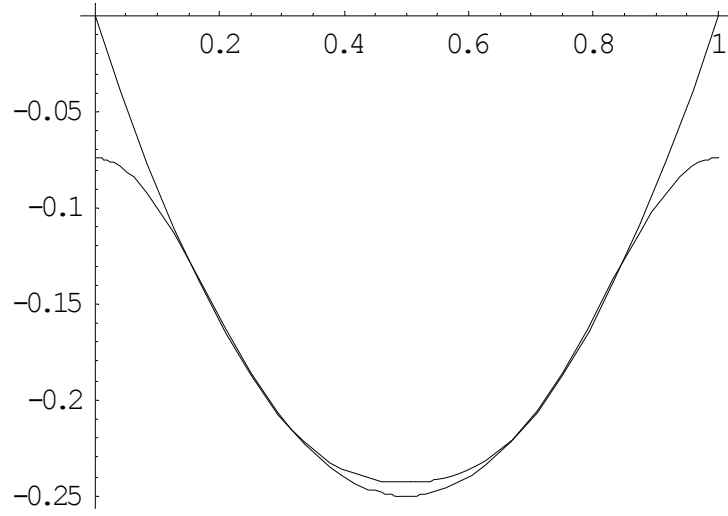
$$\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1-t)}{\sqrt{\lambda}} [a_1 + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 4\pi t] \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1-t)}{\sqrt{\lambda}} [a_1 + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 4\pi t]$$

$$\left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-s)}{\sqrt{\lambda}} [a_1 + a_2 \cos 2\pi s + a_3 \cos 4\pi s] \frac{\sin \sqrt{\lambda} s}{\sqrt{\lambda}} ds \right] dt = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + a_1 \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] \\
& + a_2 \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi t dt \right] \\
& + a_3 \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \cos 4\pi t dt \right] \\
& + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} [a_1 + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 4\pi t] \left\{ \begin{aligned} & a_1 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} ds \right] + \\ & a_2 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi s ds \right] + \\ & a_3 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} ds \cos 4\pi s \right] \end{aligned} \right\} dt = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\
& + a_1 \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] \\
& + a_2 \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi t \right] \\
& + a_3 \left[ \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \cos 4\pi t \right] \\
& + a_1 \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \left\{ a_1 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} ds \right] + \right. \\
& \left. a_2 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi t ds \right] + \right. \\
& \left. a_3 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} ds \cos 4\pi t ds \right] \right\} dt \\
& + a_2 \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi t \left\{ a_1 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} ds \right] + \right. \\
& \left. a_2 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi t ds \right] + \right. \\
& \left. a_3 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} ds \cos 4\pi t ds \right] \right\} dt \\
& + a_3 \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \cos 4\pi t \left\{ a_1 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} ds \right] + \right. \\
& \left. a_2 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} \cos 2\pi t ds \right] + \right. \\
& \left. a_3 \left[ \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} ds \cos 4\pi t ds \right] \right\} dt = 0
\end{aligned}$$

### Örnek 3.3.4.



Şekil 3.2.1.  $q(x) = x(x - 1)$  fonksiyonunun lineer çözümünün grafiği

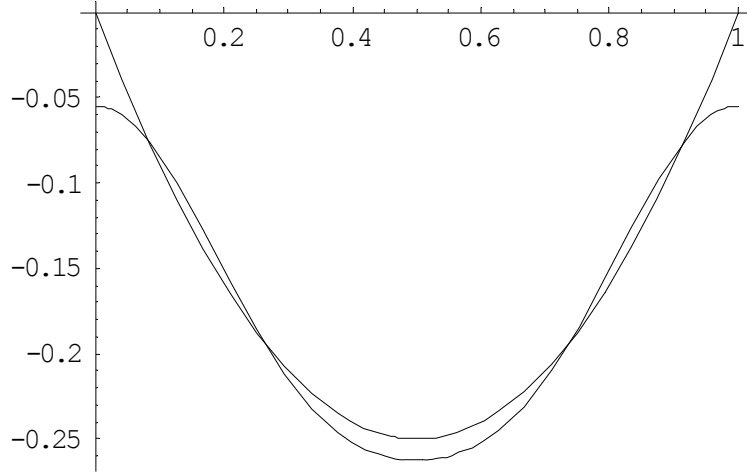
$q(x) = x(x - 1)$  potansiyeli  $\lambda_1 = 9.65228$ ,  $\lambda_2 = 39.2991$ ,  
 $\lambda_3 = 88.6541$  özdeğerleri kullanılarak seri çözümden ilk iki terim  
alınarak  $q(x) \approx a_1 + a_2 \cos 2\pi + a_3 \cos 4\pi$  formülüyle yaklaşılmış ve  
buradan

Şekil 3.2.1. için  $a_1 = -0.172166+0.i$

$$a_2 = 0.0845586+0.i$$

$$a_3 = 0.0136924+0.i$$

lineer kısımdan yaklaşık katsayılar hesaplanarak gerçek potansiyel ile  
kıyaslanmıştır.



Şekil 3.2.2.  $q(x) = x(x - 1)$  fonksiyonunun lineer olmayan çözümünün grafiği

$q(x) = x(x - 1)$  potansiyeli  $\lambda_1 = 9.65228$ ,  $\lambda_2 = 39.2991$ ,  
 $\lambda_3 = 88.6541$  özdeğerleri kullanılarak seri çözümden ilk üç terim  
 alınarak  $q(x) \approx a_1 + a_2 \cos 2\pi + a_3 \cos 4\pi$  formülüyle yaklaşılmış ve  
 buradan

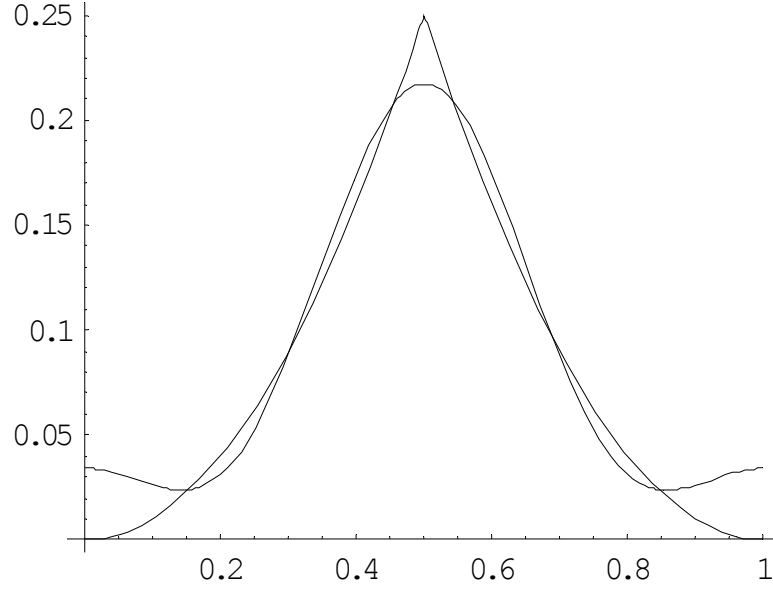
Şekil 3.2.2. için  $a_1 = -0.17229$

$$a_2 = 0.103749$$

$$a_3 = 0.0135809$$

olarak lineer olmayan sistemin çözümüyle elde edilmiş ve gerçek çözüm  
 ile beraber çizdirilmiştir.

### Örnek 3.3.5.



Şekil 3.3.1.  $q(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (x-1)^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$  lineer çözümünün grafiği

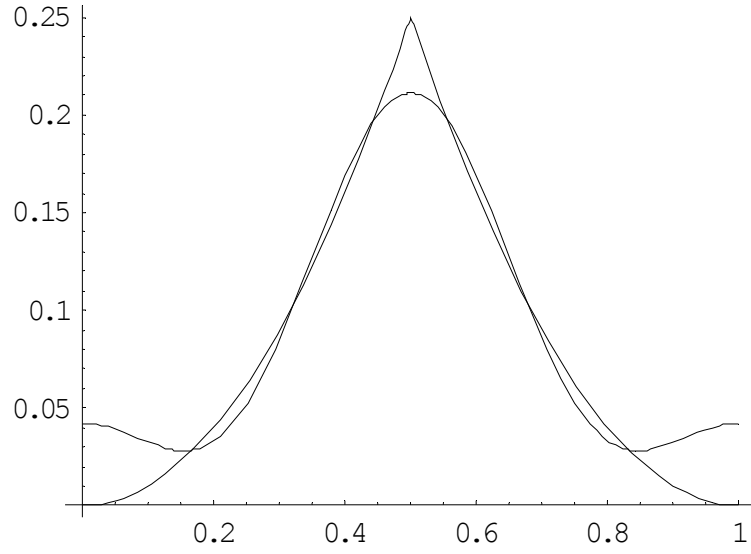
$$p(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (x-1)^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

potansiyeli alınarak aynı program çalıştırılmış. Yine  $\lambda_1 = 10.0036$ ,  $\lambda_2 = 39.5491$ ,  $\lambda_3 = 88.9154$  özdeğerleri asimptotik formülle bulundu. Seri çözümünün ilk iki terimi ile  $a_1 + a_2 \cos 2\pi + a_3 \cos 4\pi$  formunda yaklaşılmış ve elde edilen lineer denklem sistemi çözülerek aynı grafik üzerinde grafiklenmiştir.

Şekil 3.3.1 için.  $a_1 = 0.0890112 + 0.i$

$$a_2 = -0.0916159 + 0.i$$

$$a_3 = 0.0366636 + 0.i$$



Şekil 3.3.2.  $q(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (x-1)^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$  lineer olmayan çözümünün grafiği

$$p(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (x-1)^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

potansiyeli alınarak aynı program çalıştırılmış. Yine  $\lambda_1 = 10.0036$ ,  $\lambda_2 = 39.5491$ ,  $\lambda_3 = 88.9154$  özdeğerleri asimptotik formülle bulundu. Seri çözümünün ilk üç terimi ile  $a_1 + a_2 \cos 2\pi + a_3 \cos 4\pi$  formunda yaklaşılmış ve elde edilen lineer olmayan denklem sistemleri çözülerek aynı grafik üzerinde grafiklenmiştir.

Şekil 3.3.2. için  $a_1 = 0.0893741$   
 $a_2 = -0.0844467$   
 $a_3 = 0.0373673$



## BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ters özdeğer problemi Sturm-Liouville özdeğer problemi kanonik formda çalışılmıştır.

Özdeğerlerin verilmesi halinde potansiyel fonksiyonu  $q(x)$  in bulunması yapılmıştır. Bunun için temel çözüm oluşturulmuş  $q(x) = 0$  halinde bu çözümler  $q(x) \neq 0$  halindeki değerleriyle  $\lambda \rightarrow \infty$  için asimptot olurlar.

Temel çözüm iki başlangıç değer problemi integral denkleme çevrilir ve buradan çözülür. Bu seri formda (2.12a) (2.12b) çözümleridir. Bu çözümlerden faydalanılarak  $q(x)$  potansiyeli uygun formda bilinen özdeğerler kullanılarak tespit edilmiştir.

İkinci bir yol olarak hiperbolik bir problemin çözümü kullanılmış ve sınır koşullarından faydalanılarak sabit nokta bulma problemi olarak  $q(x)$  potansiyeli belirlenmiştir.

İleri bulunmalar için tekil özdeğer problemleri ve ters problemleri ilgi çekicidir. Burada bölgemiz  $0 < x < 1$  ile sınırlı idi. Bunun sınırsız olması durumunda bir çok önemli problem bilhassa quantum mekaniğinde önemli bir yer tutmaktadır ve araştırılmaktadır.

## KAYNAKLAR

[1] GORENFLO, R. and VESSELLA, S., "Abel Integral Equations, Analysis and Applications", Lecture Notes in Mathematics, volume 1461, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[2] KAC, M., "Can one hear the shape of the drum?", *Am.Math.Mon.*,73:1-23,1996.

[3] KIRSCH, A., "An inverse scattering problem for periodic structures", In: *Inverse Scattering and Potential Problems in Mathematical Physics* (R.E.Kleinman, R. Kress, and E. Martensen, editors). Peter Lang, Frankfurt, pages 75-93,1995.

[4] KRAVARIS, C., and SEINFELD, J.H., "Identifiability of spatially-varying conductivity from point observation as an inverse Sturm-Liouville problem. *SIAM J. Control Optim.*,24:522-542,1986.

[5] LADYZENSKAJA, O.A., SOLONNIKOV, V.A., and URALCEVA, N.N., "Linear and Quasi-linear Equations of parabolic Type." American Mathematical Society, Providence, Rhode Island,1986.

[6] LOWE, B.D., PILANT, M., and RUNDELL, W., "The recovery of potentials from finite spectral data." *SIAM J.Math.Anal.*,23:482-504,1992.

[7] LOWE, B.D., and RUNDELL, W., "The determination of a coefficient in a parabolic equation from input." *IMA J. of Appl. Math.*,52:31-50,1994.

[8] RUNDELL, W., and SACKS, P.E., "The reconstruction of Sturm-Liouville operators." *Inverse Problems*,8:457-482,1992.

- [9] RUNDELL, W., and SACKS, P.E., "Reconstruction techniques for classical Sturm-Liouville problems." *Math. Comput.*,58:161-183,1992.
- [10] SUZUKI, T., and MUAYAMA, R., "A uniqueness theorem in an identification problem for coefficients of parabolic equations." *Proc. Jpn. Acad. Ser. A*, 56:259-263,1980.
- [11] POSCHEL, J., and TRUBOWITZ, E., "Inverse Spectral Theory." Academic Pres, London, 1987.
- [12] YOSIDA, T., "Lectures on Differential and Integral Equations." Wiley Interscience, New York, 1960.
- [13] RUNDELL, W., "Sturm-Liouville Problems." Lecture notes,University of Oulu, Oulu,1996.
- [14] GEL'FAND, I.M., and LEVINTAN, B.M., "On the determination of a differential operator from its spectral function." *Am. Math. Soc. Trans.*,1:253-304,1951.
- [15] ANDERSSON, L.E., "Algorithms for solving inverse eigenvalue problems for Sturm -Liouville equations." In: *Inverse Methods in Action* (P.C. Sabtier, editor). Springer-Verlag,Berlin,1990.
- [16] BACKUS, G., and GILBERT, F., "The resolving power of gross earth data." *Geophys. J.R. Astron. Soc.*,16:169-205, 1968.
- [17] BORG, G., "Eine Umkehrung der Sturm-Liouville Eigenwertaufgabe", *Acta Math.* 76 (1946), 1-96.
- [18] LEVINSON, N., "The inverse Sturm-Liouville problem", *Math.Tidsskr. B* 25 (1949), 25-30.

[19] KIRSCH, A., “An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems”, Applied Mathematical Sciences 120. Springer-Verlag New York, 1996.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Hülya GÖZÜTOK SARAL, 1982 yılında Sakarya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adapazarı’nda tamamladı. 1998 yılında Marmara Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne başlayıp 2002 yılında mezun oldu. Ekim 2002 de Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Programına başladı. Eylül 2002 den bu yana Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

