

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BERTRAND EĞRİLERİNİN KARAKTERİSTİK
ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mücahit ÖZÇINAR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Murat TOSUN

Eylül 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERTRAND EĞRİLERİNİN KARAKTERİSTİK
ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mücahit ÖZÇINAR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11/09/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.



Doç.Dr. Murat TOSUN
Jüri Başkanı



Yrd.Doç.Dr. İbrahim ÖZGÜR
Üye



Doç.Dr. İbrahim OKUR
Üye

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi hazırlamamda en büyük paya sahip olan değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Murat TOSUN'a, Matematik Bölümü'nün tüm değerli hocalarına saygılarımı ve Őükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım süresince benden hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen eşime, neşe kaynağım olan oğluma ve babama da ayrıca teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

| | |
|--------------------------------------|-----|
| TEŞEKKÜR..... | ii |
| İÇİNDEKİLER | iii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ..... | v |
| ÖZET..... | vi |
| SUMMARY..... | vii |

BÖLÜM 1.

| | |
|-------------------------------------|---|
| ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR..... | 1 |
| 1.1. Afın Uzay..... | 1 |
| 1.2. Öklid Uzayı..... | 1 |
| 1.3. Uzaklık..... | 2 |
| 1.4. Öklid Metriği..... | 2 |

BÖLÜM 2.

| | |
|--|----|
| E^n , n-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTAND EĞRİLERİ..... | 4 |
| 2.1. Bertrand Eğri Çifti..... | 4 |
| 2.2. Manhiem'in Teoremi..... | 10 |
| 3.3. Eğilim Ekseni..... | 11 |

BÖLÜM 3.

| | |
|---|----|
| E^3 ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ..... | 18 |
| 3.1. Bertrand Eğrilerinin Binormal Hareketi. Yüzeyler Üzerindeki Geodezik Bertrand Eğrileri..... | 25 |
| 3.2. Temel Denklemler..... | 26 |
| 3.3. Dual Razzaboni Yüzeyleri..... | 32 |
| 3.4. Bir Lineer Gösterim ve Backlund Dönüşümü..... | 36 |
| 3.5. Razzaboni'nin Teoremlerinin İspatı. Yeni Sonuçlar..... | 40 |
| 3.5.1 Eğrilik ve burulma..... | 40 |

| | |
|---|----|
| 3.5.2. Geodezik koordinatlar..... | 42 |
| 3.5.3. Razzaboni sisteminin değişmezliği..... | 45 |
| 3.5.4. Skaler invaryant..... | 46 |
| 3.6. Sym-Tafel Formülünün Uygulanması..... | 52 |
| KAYNAKLAR..... | 57 |
| ÖZGEÇMİŞ..... | 59 |

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|--------------------|-------------------------|
| \square | : Reel sayılar cümlesi |
| V | : Vektör uzayı |
| \langle, \rangle | : İç çarpım |
| \times | : Vektörel çarpım |
| (I, α) | : Koordinat komşuluğu |
| $\ \cdot \ $ | : Norm |
| E^n | : n boyutlu Öklid uzayı |
| κ | : Eğrilik |
| τ | : Burulma |
| \forall | : Her |
| Σ | : Yüzey |

ÖZET

Anahtar kelimeler: Bertrand eğrileri, Razzaboni yüzeyleri

Bu çalışmada Bertrand Eğrileri ve Razzaboni Yüzeyleri E^3 Öklid uzayında araştırılmış ve pek çok karakteristik özellikleri verilmiştir.

Birinci bölümde afin uzay, öklid uzayı, uzaklık, açı, öklid metriği, öklid çatısı, satandart öklid çatısı gibi temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, n boyutlu E^n Öklid uzayında Bertrand eğri çifti, eğrilikler, eğrilik merkezi ve eğilim eksenini gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde ise E^3 Öklid uzayında Bertrand eğri çifti, Bertrand eğirlerinin offset özelliği, Razzaboni yüzeyleri, Dual Razzaboni yüzeyleri, Bertrand eğrilerinin Razzaboni yüzeyleri ile ilişkisi ve Backlund dönüşümünün Bertrand eğrileri ve Razzaboni yüzeyleriyle olan ilişkileri açıklanmıştır.

CHARACTERISTIC PROPERTIES OF BERTRAND CURVES

SUMMARY

Keywords: Bertrand curves, Razzaboni surfaces

In this study, Bertrand curves and Razzaboni surfaces are searched in E^3 Euclidean space and many characteristic properties of them are given.

In the first part, some basic notions such as afin space, Euclidean space, distance, angle, Euclidean metric, Euclidean framed, standard Euclidean framed are given.

In the second part, Bertrand curve couple, curvatures, tendency axis, curvature center are explained in n-dimensional Euclidean space.

In the final part, Bertrand curve couple, offset property of Bertrand curves, Razzaboni surfaces, Dual Razzaboni surfaces, relation of Bertrand curves with Razzaboni surfaces and relation of Backlund transformation with Bertrand curves and Razzaboni surfaces ara explained in E^3 Euclidean space.

BÖLÜM 1. ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1 (Afin Uzay)

Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A 'ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$(A1). \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A2). \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. [1]

Tanım 1.2. (Öklid Uzayı)

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

tanımlanırsa A 'ya bir Öklid Uzayı adı verilir. Eğer $A = \mathbb{R}^n$ ve $V = \mathbb{R}^n$ alınırsa $A = \mathbb{R}^n$ Öklid Uzayı, Standart Öklid Uzayı olarak isimlendirilir.

Tanım 1.3. (Uzaklık)

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \left\| \vec{xy} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid Uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x,y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir.

Teorem 1.1.

E^n 'de uzaklık fonksiyonu bir metriktir [1].

Tanım 1.4. (Öklid Metriği)

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \left\| \vec{xy} \right\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n 'de Öklid Metriği denir.

Tanım 1.5. (Açı)

$\forall x, y, z \in E^n$ için \widehat{xyz} açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{xy}, \vec{yz} \rangle}{\left\| \vec{xy} \right\| \left\| \vec{yz} \right\|}$$

den hesaplanan θ reel sayısıdır.

Tanım 1.6. (Öklid Çatısı)

E^n 'de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ -lisine \square^n 'de karşılık gelen $\{\vec{P}_0P_1, \vec{P}_0P_2, \dots, \vec{P}_0P_n\}$ vektör n -lisi \square^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n 'in bir dik çatısı veya Öklid Çatısı denir.

Tanım 1.7.

$I \subseteq \square$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\alpha : I \longrightarrow E^n,$$

diferansiyellenebilen fonksiyona E^n 'de bir eğri adı verilir. Burada $I \subseteq \square$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

BÖLÜM 2. E^n , n BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ

Tanım 2.1.

E^n 'de M, S eğrileri, sırasıyla (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in M, \beta(s) \in S$ noktalarında M ve S 'nin $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ Frenet r - ayaklıları verildiğinde $\{V_1(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M, S) eğri çiftine bir Bertrand eğri çifti adı verilir [1].

Tanım 2.2.

E^n 'de yay uzunluklu bir eğri M ve bu eğrinin Frenet r -ayaklı alanı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{dV_i}{ds} = \sum_{j=1}^n k_{ij} V_j, \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$k_{ij} = \left\langle \frac{dV_i}{ds}, V_j(s) \right\rangle \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara M eğrisinin yüksek mertebeden eğrilikleri adı verilir [2].

Teorem 2.1.

M , E^n 'de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olsun. M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r - ayaklı alanı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olmak üzere

- i) $V_1'(s) = k_{12}(s)V_2(s)$
- ii) $V_i'(s) = k_{i(i-1)}V_{(i-1)} + k_{i(i+1)}(s)V_{r+1}(s)$
- iii) $V_r'(s) = \varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}k_{r(r-1)}(s)V_{r-1}(s)$

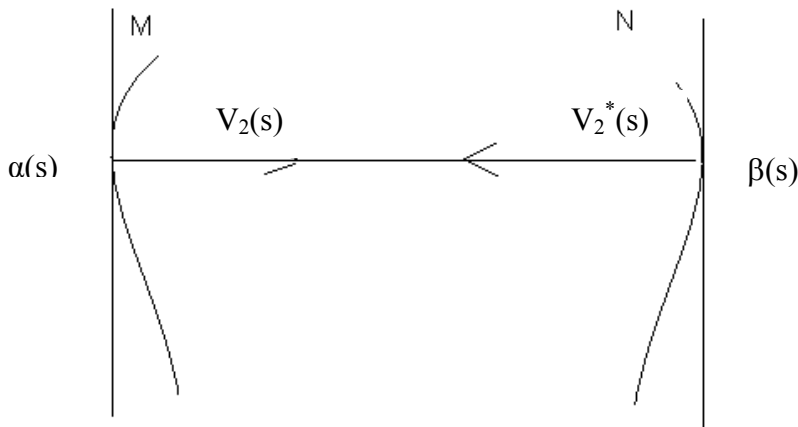
dir [2].

Teorem 2.2.

E^n 'de (M, S) Bertrand eğri çifti verilsin. M ve S sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşuluğu ile verilmek üzere $\forall s \in I$ için

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \text{sabit}$$

tir [2].

İspat:

Şekil 3.1. M ve S eğrilerinin $\alpha(s)$, $\beta(s)$ noktalarındaki bileşenleri

şekil 3.1. den dolayı

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s) \quad (2.4)$$

yazılabilir. M ve S eğrilerinin $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarındaki Frenet r- ayaklıları, sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ dir. Böylece M'nin yay parametresi s, S'nin yay parametresi s* olmak üzere

$$\frac{ds^*}{ds} V_1^*(s) = [1 - \lambda(s)k_{21}(s)] V_1(s) + \lambda'(s)V_2(s) + \lambda(s)k_{23}(s)V_3(s)$$

dir. O halde,

$$\langle V_1^*(s), V_2(s) \rangle = 0$$

olduğundan

$$\lambda(s) = \text{sabit}$$

$\forall s \in I$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(\alpha(s), \beta(s)) &= \|\beta(s) - \alpha(s)\| \\ &= \|\lambda V_2(s)\| \\ &= |\lambda|, \quad \forall s \in I \\ &= \text{sabit} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.3.

M ve S sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilmiş Bertrand eğrileri olmak üzere bu eğrilerin vektör alanları arasındaki açının ölçümü sabittir [2].

İspat:

M ve S'nin Frenet r-ayaklı alanları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ olsunlar. Bertand eğri çifti tanımı gereğince $V_1^* \perp V_2$ dir.

Böylece

$$V_1^* \in \text{Sp}\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

dir. O halde

$$V_1^* = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq 2)}}^n a_k V_k; \quad \langle V_1^*, V_1 \rangle = a_1$$

dir. Buradan

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \sum_{\substack{k=1 \\ (i \neq 2)}}^n \left(\frac{da_k}{ds} V_i + a_k \frac{dV_i}{ds} \right) \quad (2.5)$$

yazılabilir. Eğer Tanım 2.2 ve teorem 2.1. göz önüne alınırsa, sırasıyla

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \sum_{j=1}^n k_{kj} V_j \quad (2.6)$$

ve

$$\frac{dV_1^*}{ds} = k_{12}^* V_2^* \quad (2.7)$$

yazılabilir. Bu takdirde

$$\frac{dV_1^*}{ds} // V_2^* \quad \text{ve} \quad \frac{dV_1^*}{ds} // V_2 \quad (2.8)$$

elde edilir. Teorem 2.1. ve (2.5) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{dV_1^*}{ds} &= \sum_{\substack{k=1 \\ (i \neq 2)}}^n \left(\frac{da_k}{ds} V_i + a_k (k_{12} V_2) + a_3 (k_{32} V_2 - k_{34} V_4) + \dots + a_n k_{n(n-1)} V_{(n-1)} \right) \\ &= \frac{da_1}{ds} V_1 + (a_1 k_{12} + a_3 k_{32}) V_2 + \dots\end{aligned}$$

bulunur. (2.7) ve (2.8) denklemleri ele alınırsa

$$\frac{da_1}{ds} = 0$$

bulunur. Bu ifade eder ki $a_1 = \text{sabittir}$. Eğer V_1 ve V_1^* arasındaki açının ölçüsü θ ise

$$\cos \theta = \frac{\langle V_1, V_1^* \rangle}{\|V_1\| \cdot \|V_1^*\|} = \frac{a_1}{1.1} = a_1, \quad (\text{sabit})$$

tir. Şimdi $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ 'nin sırasıyla eğrilik fonksiyonları k_{12}, k_{23} ve k_{12}^*, k_{23}^* arasındaki bağıntıyı bulalım. (2.4) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda k_{21}) V_1 + \left(\frac{d\lambda}{ds} + \lambda k_{22} \right) V_2 + \lambda \sum_{j=3}^n k_{2j} x_j$$

yazılabilir.

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0 \text{ ve } k_{22} = 0$$

olduğundan

$$V_1^* = \frac{ds}{ds^*} (1 + \lambda k_{21}) V_1 + \frac{ds}{ds^*} \lambda k_{23} V_3$$

olur.

$$V_1^* = a_1 V_1 + a_3 V_3 + \dots + a_n V_n$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$a_1 = (1 + \lambda k_{21}) \frac{ds}{ds^*} \quad (2.9)$$

$$a_3 = \lambda k_{23} \frac{ds}{ds^*} \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu son iki denklem oranlanırsa

$$\frac{1 + \lambda k_{21}}{\lambda k_{23}} = \frac{a_1}{a_3} \quad (2.11)$$

bulunur. (2.9) ve (2.10) denklemlerinde λ yerine $-\lambda$ yazılırsa, $\beta(s^*)$ için aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$a_1 = (1 - \lambda k_{21}) \frac{ds^*}{ds} \quad (2.12)$$

$$a_3 = -\lambda k_{23} \frac{ds^*}{ds} \quad (2.13)$$

Eğer (2.12) ve (2.13) denklemleri oranlanırsa

$$\frac{1 - \lambda k_{21}^*}{-\lambda k_{23}} = \frac{a_1}{a_3} \quad (2.14)$$

bulunur. Böylece (2.11) ve (2.13) bağıntıları iki eğrinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şartlardır.

Teorem 2.4. (Manhiem'in Teoremi)

M ve S, E^n 'de iki Bertrand eğri çifti olsunlar. P ve P^* noktaları (M,S)'nin karşılıklı iki noktası olmak üzere A_0 ve A_0^* bu noktaların eğrilik merkezi ise

$$\frac{\|P^*A_0\|}{\|PA_0\|} \div \frac{\|P^*A_0^*\|}{\|PA_0^*\|}$$

oranı sabittir [3].

İspat:

Eğer (2.9) ve (2.12) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$(1 + \lambda k_{21})(1 - \lambda k_{21}^*) = a_1^2 \quad (\text{sabit}) \quad (2.15)$$

tir. g ve g^* eğrilik yarıçapları olmak üzere aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$\|P^*A_0\| = -\lambda + g = -\lambda + \frac{1}{k_{12}} = \frac{-\lambda k_{12} + 1}{k_{12}}, \quad \|PA_0\| = g = \frac{1}{k_{12}},$$

$$\|P^*A_0^*\| = g^* = \frac{1}{k_{12}^*} \quad \text{ve} \quad \|PA_0^*\| = \lambda + g^* = \lambda + \frac{1}{k_{12}^*} = \frac{\lambda k_{12}^* + 1}{k_{12}^*}$$

Böylece çift oran

$$\frac{\|P^*A_o\|}{\|PA_o\|} \div \frac{\|P^*A_o^*\|}{\|PA_o^*\|} = \frac{\|P^*A_o\|}{\|PA_o\|} \cdot \frac{\|PA_o^*\|}{\|P^*A_o^*\|} = \frac{-\lambda k_{12} + 1}{k_{12}} \cdot \frac{\lambda k_{12}^* + 1}{k_{12}^*}$$

$$\frac{\|P^*A_o\|}{\|PA_o\|} \div \frac{\|P^*A_o^*\|}{\|PA_o^*\|} = (-\lambda k_{12} + 1) \cdot (\lambda k_{12}^* + 1)$$

dir.

$$k_{12} = -k_{21} \quad \text{ve} \quad k_{12}^* = -k_{21}^*$$

olduğundan

$$\frac{\|P^*A_o\|}{\|PA_o\|} \div \frac{\|P^*A_o^*\|}{\|PA_o^*\|} = (1 + \lambda k_{21})(1 - \lambda k_{21}^*)$$

yazılır. Bu son denklemle birlikte (2.15) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{\|P^*A_o\|}{\|PA_o\|} \div \frac{\|P^*A_o^*\|}{\|PA_o^*\|} = a_1^2 \quad (\text{sabit})$$

bulunur. Bu yüzden yukarıda bahsedilen çift oran süreklidir.

Tanım 2.3.

M, E^n 'de bir eğri ve bu eğrinin birim teğet vektör alanı V_1 olsun. $x \in x(E^n)$ bir sabit birim vektör alanı olmak üzere $p \in M$ için

$$\langle V_1, x \rangle \Big|_p = \cos \varphi = \text{sbt}, \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

ise M eğrisine E^n 'de bir eğilim çizgisi, φ açısına M nin eğilim açısı ve $Sp\{x\}$ uzayına da M nin eğilim eksenini denir [1].

Teorem 2.5.

E^n de M ve S , sırasıyla (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilen Bertrand eğri çiftleri olsunlar. Öyle λ, μ sabitleri için

$$\mu(k_{23} + k_{23}^*) + \lambda(k_{12} + k_{12}^*) = 0$$

dır. Burada k_{12}, k_{23} ve k_{12}^*, k_{23}^* sırasıyla α ve β 'nin eğrilikleridir [2].

İspat:

(2.11) ve (2.14) denklemlerinde

$$\frac{a_1}{a_3} \lambda = \mu$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\mu k_{23} - \lambda k_{21} = 1 \tag{2.16}$$

$$\mu k_{23} + \lambda k_{12} = 1$$

ve

$$1 - \lambda k_{21}^* = -\mu k_{23}^* \tag{2.17}$$

$$-\mu k_{23}^* - \lambda k_{12}^* = 1$$

dir. Son iki denklemden aşağıdaki lineer bağıntı bulunur.

$$\mu(k_{23} + k_{23}^*) + \lambda(k_{12} + k_{12}^*) = 0$$

Teorem 2.6.

M , E^n 'de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve bu eğri için $k_{23} \neq 0$, $k_{34} = 0$ olsun. M 'nin bir Bertrand eşleniği vardır.

$$\lambda k_2 + \mu k_3 = 1$$

dir. Burada λ, μ sabitlerdir [3].

İspat:

(\Rightarrow): Kabul edelim ki M 'nin Bertrand eşleniği S olsun. Öyle ki S eğrisi (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu takdirde bir λ sabiti vardır. Öyle ki

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$$

dir. Her iki tarafın da diferansiyeli alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds} = V_1 + \lambda(k_{21}V_1 + k_{23} + V_3) \quad (2.18)$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{d\beta}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda k_{21})V_1 + \lambda k_{23}V_3$$

$$V_1^* = \frac{ds}{ds^*} \cdot [(1 + \lambda k_{21}) V_1 + \lambda k_{23} V_3]$$

bulunur. Ayrıca

$$\langle V_1, V_1^* \rangle = a_1, \quad \langle V_3, V_1^* \rangle = a_3$$

olduğundan

$$\langle V_1, V_1^* \rangle = (1 + \lambda k_{21}) \frac{ds}{ds^*} = a_1$$

$$\langle V_3, V_1^* \rangle = \lambda k_{23} \frac{ds}{ds^*} = a_3$$

elde edilir. Hipotezden dolayı $k_{23} \neq 0$ olduğundan

$$\frac{1 + \lambda k_{21}}{\lambda k_{23}} = \frac{a_1}{a_3}$$

$$\frac{a_1}{a_3} \lambda k_{23} - \lambda k_{21} = 1$$

$$\mu k_{23} + \lambda k_{12} = 1$$

elde edilir.

(\Leftarrow): Şimdi kabul edelim ki $k_{34} = 0$ ve λ, μ sabitleri için

$$\lambda k_{12} + \mu k_{23} = 1$$

olsun.

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$$

yazılabildiğini biliyoruz. Böylece (2.18) denkleminde

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \lambda \frac{dV_2}{ds} = V_1 + \lambda(k_{21}V_1 + k_{23}V_3)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = (1 + \lambda k_{21})V_1 + \lambda k_{23}V_3 = (1 - \lambda k_{12})V_1 + \lambda k_{23}V_3$$

dir.

$$1 - \lambda k_{12} = \mu k_{23}$$

den dolayı,

$$\frac{d\beta}{ds} = \mu k_{23}V_1 + \lambda k_{23}V_3 = k_{23}(\mu V_1 + \lambda V_3)$$

$$V_1^* = \frac{k_{23}}{|k_{23}| \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \cdot (\mu V_1 + \lambda V_3)$$

olur. Eğer

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} = \wp$$

olarak seçilirse

$$V_1^* = \mp \wp (\mu V_1 + \lambda V_3)$$

ve

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \mp \wp \left(\mu \frac{dV_1}{ds} + \lambda \frac{dV_3}{ds} \right)$$

olur. Burada

$$\frac{dV_1}{ds} = k_{12} V_2 \quad \text{ve} \quad \frac{dV_3}{ds} = k_{32} V_2 + k_{34} V_4$$

yerlerine yazılırsa

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \frac{dV_1^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \mp \wp \left[\mu k_{12} V_2 + \lambda (k_{32} V_2 + k_{34} V_4) \right]$$

elde edilir. Eğer $k_{34} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$k_{12}^* V_2^* = \mp \frac{ds}{ds^*} \wp (\mu k_{12} + \lambda k_{32}) V_2 \quad (2.19)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{d\beta}{ds^*} = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{ds^*}$$

$$V_1^* = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{ds^*}$$

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\left| \frac{d\beta}{ds} \right|} = \frac{\wp}{|k_{23}|}$$

elde edilir. (2.19) denkleminde dolayı

$$V_2^* = \mp \frac{1}{k_{12}^*} \frac{1}{|k_{23}|} \wp^2 (\mu k_{12} + \lambda k_{32}) V_2$$

$$V_2^* = \mp \frac{(\mu k_{12} + \lambda k_{32}) \phi^2}{k_{12}^* |k_{23}|} V_2$$

yazılır. Bu yüzden V_2 ve V_2^* lineer bağımlıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

BÖLÜM 3. E^3 ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde E^3 Öklid uzayında eğriler ve yüzeylerle ilgileneceğiz. Eğer bir M eğrisi $r = r(s)$ yay uzunluğu boyunca parametrelenmişse, Serret-Frenet formüllerine göre $t = r(s)$ birim teğet vektörü, n asli normali ve b binormali içeren (t, n, b) ortonormal üçlüsü M eğrisi boyunca değişir [4], öyle ki

$$\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

dir. Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulmasını ifade eder. Asli normal boyunca bir S offset eğrisi,

$$r^* = r + \lambda n \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada λ , s 'ye bağlı bir fonksiyondur. Eğer esas eğri M ve onun offset eğrisi S 'nin eşit bir mesafede oluşturulması istenirse, M ve S eğrilerinin asli normalleri çakışık olmalıdır, yani,

$$n^* = n \quad (3.3)$$

dir. Bu durum esas eğri ve λ uzaklık fonksiyonu üzerindeki kısıtlamaları etkiler. Bu yüzden (3.2)'nin diferansiyeli,

$$r^* = r + \lambda n \text{ ve } n_s = -\kappa t + \tau b$$

$$\frac{dr^*}{ds} = \frac{dr}{ds} + \lambda \frac{dn}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} n$$

$$r_s^* = r_s + \lambda n_s + \lambda_s n$$

$$r_s^* = t + \lambda(-\kappa t + \tau b) + \lambda_s n$$

$$r_s^* = (1 - \lambda\kappa)t + \lambda\tau b + \lambda_s n \quad (3.4)$$

dir. $\langle r_s^*, n^* \rangle = 0$ olduğundan dolayı, offset eğrisinin esas eğriden sabit bir λ uzaklığında olması önemli bir anlama sahiptir, yani $\lambda_s = 0$ 'dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \langle r_s^*, n^* \rangle &= \langle (1 - \lambda\kappa)t + \lambda\tau b + \lambda_s n, n^* \rangle \\ &= (1 - \lambda\kappa)t \langle t, n^* \rangle + \lambda\tau \langle b, n^* \rangle + \lambda_s \langle n, n^* \rangle \end{aligned}$$

$$\langle r_s^*, n^* \rangle = \lambda_s$$

$$\lambda_s = 0$$

dir. Birim teğet vektör t^* ,

$$t^* = \frac{r_s^*}{\|r_s^*\|} = \frac{(1 - \lambda\kappa)t + \lambda\tau b}{\sqrt{(1 - \lambda\kappa)^2 + (\lambda\tau)^2}} = \frac{(1 - \lambda\kappa)t + \lambda\tau b}{D}, \quad (3.5)$$

$$D = \sqrt{(1 - \lambda\kappa)^2 + (\lambda\tau)^2}$$

dir. Ayrıca diferansiyeli,

$$\frac{dt^*}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right) t + \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right) \frac{dt}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right) b + \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right) \frac{db}{ds}$$

$$t_s^* = \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right)_s t + \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right) t_s + \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right)_s b + \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right) b_s$$

$$t_s^* = \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right)_s t + \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right) (\kappa n) + \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right)_s b + \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right) (-\tau n)$$

$$t_s^* = \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right)_s t + \left(\frac{(1-\lambda\kappa)\kappa - \lambda\tau^2}{D} \right) n + \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right)_s b \quad (3.6)$$

dir. $t_s^* \square n^*$ olduğundan t ve b bileşenleri sıfır olur. Bu ifade eder ki, eğrilik ve burulma bağıntısı için,

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1 \quad (3.7)$$

dir. Gerçekten de $t_s^* = \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right)_s t + \left(\frac{(1-\lambda\kappa)\kappa - \lambda\tau^2}{D} \right) n + \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right)_s b$ ve $t_s^* \square n^*$

olduğundan $\int \left(\frac{1-\lambda\kappa}{D} \right)_s = \int 0$ ve $\int \left(\frac{\lambda\tau}{D} \right)_s = \int 0$ olmalıdır. Buradan

$$\frac{1-\lambda\kappa}{D} = \mu_1 \Rightarrow \frac{1-\lambda\kappa}{\mu_1} = D, \quad \frac{\lambda\tau}{D} = \mu_2 \Rightarrow \frac{\lambda\tau}{\mu_2} = D$$

$$\frac{1-\lambda\kappa}{\mu_1} = \frac{\lambda\tau}{\mu_2}$$

$$1-\lambda\kappa = \frac{\mu_1\lambda}{\mu_2} \tau$$

$$1-\lambda\kappa = \mu\tau$$

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1$$

bulunur. Burada μ integrasyon sabitidir. (3.7)'yi sağlayan λ ve μ sabitlerinin var olduğu eğriler Bertrand eğrileri olarak bilinirler[2,3]. Bundan dolayı aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 3.1. (Bertrand Eğrilerinin Offset Özelliği)

M bir eğri olsun. M'nin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter koşul, S ile asli normalerinin çakışık olmasıdır. Yani

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1 \quad (3.8)$$

dir. S offset eğrisi ve onun (t^*, n^*, b^*) üçlüsü,

$$r^* = r + \lambda n$$

$$t^* = \frac{\mu t + \lambda b}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \quad n^* = n, \quad b^* = \frac{\mu b - \lambda t}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \quad (3.9)$$

denklemleri ile birlikte M ile bağıntılıdır. Offset eğrinin eğriliği, burulması ve yay uzunluğu sırasıyla,

$$\kappa^* = \frac{\mu\kappa - \lambda\tau}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau}, \quad \tau^* = \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau}, \quad ds^* = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\tau ds \quad (3.10)$$

ile verilir. Ayrıca,

$$\lambda^*\kappa^* + \mu^*\tau^* = 1, \quad \lambda^* = -\lambda, \quad \mu^* = \mu \quad (3.11)$$

bağıntıları offset eğrisinin başka bir Bertrand eğrisi ihtiva ettiğini ifade eder [7].

İspat:

(3.9) denklemini göz önüne alınırsa

$$t^* = \frac{(1-\lambda\kappa)t + \lambda\tau b}{\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2 + (\lambda\tau)^2}} = \frac{\left(\frac{1-\lambda\kappa}{\tau}\right)t + \lambda b}{\sqrt{\left(\frac{1-\lambda\kappa}{\tau}\right)^2 + \lambda^2}} = \frac{\mu t + \lambda b}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$$

$$b^* = t^* \times n^* = \frac{(\mu t + \lambda b) \times n}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\mu(t \times n) + \lambda(b \times n)}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\mu b - \lambda t}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$$

yazılabilir. (3.10)'da verilen offset eğrinin eğrilik ve burulması $\left|\frac{ds^*}{ds}\right| = |r_s^*|$ ile

$\langle t_s^*, n^* \rangle = \kappa^*$ ve $\langle b_s^*, n^* \rangle = -\tau^*$ bağıntıları yardımıyla bulunur. Böylece offset eğrinin yay uzunluğu için,

$$r^* = r + \lambda n \Rightarrow \frac{dr^*}{ds} = \frac{dr^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{dr}{ds} + \lambda \frac{dn}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} n$$

$$t^* \frac{ds^*}{ds} = t + \lambda n_s + \lambda_s n \Rightarrow t^* \frac{ds^*}{ds} = t + \lambda(-\kappa t + \tau b)$$

dir. Son denklemini t^* ile iç çarparsak,

$$\langle t^*, t^* \rangle \frac{ds^*}{ds} = \langle t, t^* \rangle - \lambda \kappa \langle t, t^* \rangle + \lambda \tau \langle b, t^* \rangle$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1-\lambda\kappa}{D} - \frac{\lambda\kappa(1-\lambda\kappa)}{D} + \frac{\lambda\tau(\lambda\tau)}{D}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1-2\lambda\kappa+\lambda^2\kappa^2}{D} + \frac{\lambda^2\tau^2}{D}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{(1-\lambda\kappa)^2}{D} + \frac{\lambda^2\tau^2}{D}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{(1-\lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2}{\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2}} = \sqrt{(1-\lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\tau^2 \left(\left(\frac{1-\lambda\kappa}{\tau^2} \right)^2 + \lambda^2 \right)} \Rightarrow \frac{ds^*}{ds} = \tau \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$ds^* = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \tau ds$$

bulunur. Ofset eğrinin eğriliği:

$$\kappa^* = \left\langle \frac{dt^*}{ds^*}, n^* \right\rangle$$

$$\frac{dt^*}{ds} = \frac{dt^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{dt}{ds} + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{db}{ds}$$

$$\frac{dt^*}{ds^*} \left(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \tau \right) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \kappa n + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} (-\tau n)$$

$$\frac{dt^*}{ds^*} = \frac{\mu\kappa n}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau} - \frac{\lambda\tau n}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau}$$

$$\kappa^* = \left\langle \frac{\mu\kappa n}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau} - \frac{\lambda\tau n}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau}, n \right\rangle = \frac{\mu\kappa}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau} \langle n, n \rangle - \frac{\lambda\tau}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau} \langle n, n \rangle$$

$$\kappa^* = \frac{\mu\kappa - \lambda\tau}{(\lambda^2 + \mu^2)\tau}$$

dir. Son olarak offset eğrisinin burulması,

$$\tau^* = -\left\langle \frac{db^*}{ds^*}, n^* \right\rangle$$

$$\frac{db^*}{ds} = \frac{db^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{db}{ds} - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{db^*}{ds^*} \left(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \tau \right) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} (-\tau n) - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \kappa n$$

$$\frac{db^*}{ds^*} = -\frac{\mu \tau n}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} - \frac{\lambda \kappa n}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau}$$

$$\tau^* = -\left\langle -\frac{\mu \tau n}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} - \frac{\lambda \kappa n}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau}, n \right\rangle$$

$$\tau^* = \frac{\mu \tau}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} \langle n, n \rangle + \frac{\lambda \kappa}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} \langle n, n \rangle$$

$$\tau^* = \frac{\mu \tau + \lambda \kappa}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} \Rightarrow \tau^* = \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} -\lambda \kappa^* + \mu \tau^* &= -\lambda \left(\frac{\mu \kappa - \lambda \tau}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} \right) + \mu \left(\frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} \right) = \frac{-\lambda \mu \kappa + \lambda^2 \tau + \mu}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} \\ &= \frac{\mu(1 - \lambda \kappa) + \lambda^2 \tau}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} = \frac{\mu^2 \tau + \lambda^2 \tau}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} = 1 \end{aligned}$$

dir. $-\lambda \kappa^* + \mu \tau^* = 1$ bağıntısında $\lambda^* = -\lambda$, $\mu^* = \mu$ alınırsa,

$$\lambda^* \kappa^* + \mu^* \tau^* = 1$$

$$\lambda^* = -\lambda$$

$$\mu^* = \mu$$

bağıntısı, offset eğrisinin başka bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir.

Özetle, bir Bertrand eğrisi sabit bir λ uzaklığında asli normal boyunca bir offset eğrisini kabul eder. Bir Bertrand eğrisinin offset eğrisi bazen eşlenik eğrisi ya da Bertrand eşi olarak isimlendirilir. Bu gerçekten dolayı bir Bertrand eğrisi kendi offset eğrisinden λ uzaklığında bir offset eğrisidir. Bir Bertrand eğrisi ve onun eşi birbiriyle dual olarak dikkate alınabilir. En basit Bertrand eğrileri ve onların dualleri helislerle verilir.

3.1. Bertrand Eğrilerinin Binormal Hareketi. Yüzeyler Üzerindeki Geodezik Bertrand Eğrileri

Bir M eğrisinin bir Σ yüzeyi üzerinde geodezik oluşturması için gerek ve yeter koşul, eğrinin asli normalinin yüzeyin N normaline (zıt-) paralel olmasıdır[4]. Aynı λ, μ parametreleri ile $M(b)$ geodezik Bertrand eğrilerinin bir parametrelili ailesi tarafından bir Σ yüzeyi gerilirse, aynı şekilde geodezik olan bir $S(b)$ Bertrand eşlerinin paralel bir Σ^* yüzeyi oluşturacağını gösterir.

Tanım 3.1. (Razzaboni yüzeyleri)

Bir Σ yüzeyi λ ve μ sabitleri ile ilgili geodezik Bertrand eğrilerinin bir parametrelili ailesi tarafından gerilirse, Razzaboni yüzeyi adını alır[7].

Teorem 3.2. (Dual Razzaboni yüzeyleri)

r yer vektörlü herhangi bir Σ Razzaboni yüzeyi

$$(\mathfrak{R})r^* = r + \alpha n \quad (3.12)$$

yer vektörlü bir Σ^* Razzaboni yüzeyini paralel (dual) kabul eder. Eğer $\lambda = 0$ ise iki Razzaboni yüzeyi çakışıktır [7].

Aslında bir Σ yüzeyi üzerindeki bir parametrelili geodeziklerin ailesi $N^* = N$ ile $\Sigma^* : r^* = r + fn$ offset yüzeyindeki geodeziklere dönüştürülürse, Σ ve Σ^* yüzeyleri mutlaka paralel olur ve geodezikler Bertrand eğrilerini oluşturur. Buna göre Bertrand eğrileri ile Razzaboni yüzeyleri arasında tam bir benzerlik vardır.

Üzerinde sabit burulmalı geodeziklerin bir parametrelili ailesinin bulunduğu yüzeylere $\lambda = 0$ durumu karşılık gelir. Böyle yüzeyler indirgenmiş Maxwell-Bloch denklemlerinin [8] bir çeşidini oluşturan bir integrallenebilir genişletilmiş Sine-Gordon sistemi tarafından idare edilirler [9]. Üzerinde sabit eğrilikli bir parametrelili geodeziklerin ailesi olan yüzeyler aynı şekilde integrallenebilirler [9]. Gaus-Mainardi-Codazzi denklemlerinin temelinde yatan şey, çarpmaya göre tersi olan bir invaryantı içine alan genişletilmiş bir Dym denkleminin bir kısaltmasını göstermektedir. Aslında bu (3.10) bağıntısını ortaya çıkarır. Bu bağıntı Bertrand eğrisi ve onun eşleniğinin yay uzunlukları arasında bağlantı kurar ve tüm Razzaboni yüzeylerinin Gaus-Mainardi-Codazzi denklemleri için çarpmaya göre tersi olan dönüşümün “uzaysal kısmını” gösterir. Genişletilmiş Dym denklemleri için çarpmaya göre tersi olan dönüşüm $\mu = 0$ özel durumunda yeniden elde edilir.

3.2 Temel Denklemler

Bir parametrelili geodeziklerin ailesini ve onların ortogonal yörüngelerini bir Σ yüzeyi üzerindeki koordinat doğruları olarak seçersek, s ve b geodezik koordinatlarına göre yüzeyin birinci temel formu [4],

$$dr^2 = ds^2 + g^2 db^2 \quad (3.13)$$

olur. Burada b 'nin sabit olduğu doğrular yay uzunluğu parametrelili geodezikler ve s 'nin sabit olduğu doğrular ortogonal paralelleri oluştururlar. $\langle r_s, r_b \rangle = 0$ ve geodeziklerin asli normalini yüzeye ortogonal olduğundan dolayı koordinat doğrularına teğet vektör,

$$r_s = t, \quad r_b = g b \quad (3.14)$$

ile verilir, burada b geodeziklerin binormalini gösterir. Σ yüzeyi g hızında, binormal yönünde hareket eden bir genişletilemez eğrinin hareketi tarafından üretilmiş olarak düşünülebilir. b koordinatı “zaman” ile tanımlanır. Özellikle bir Bertrand eğrisinin binormal hareketi tarafından üretilen bir Razzaboni yüzeyi λ ve μ sabitlerini değiştirmez. Bu da binormal hareketlerin sadece genişletilemez eğriler için mümkün olduğunu ifade eder. Binormal hareketler otomatik olarak yay uzunluğunu korur.

(t, n, b) ortonormal üçlüsünün s yönündeki değişimi (3.1) Serret-Frenet denklemleri tarafından verilir. b bağımlısının genel formu,

$$\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ -u & 0 & v \\ -w & -v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

dır. $r_{sb} = r_{bs}$ durumu (3.14)'e uygulandığında,

$$r_{sb} = \frac{dt}{db} = u n + w b$$

$$r_{bs} = \frac{dg}{ds} b + g \frac{db}{ds} \Rightarrow r_{bs} = g_s b - \tau g n$$

$$r_{sb} = r_{bs} \Rightarrow u n + w b = g_s b - \tau g n \quad (3.16)$$

denklemini verir. b -açılımı, $u = -\tau g$, $w = g_s$ olacağından

$$\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} 0 & -\tau g & g_s \\ \tau g & 0 & v \\ -g_s & -v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

dır. Sonuncu denklemin (3.1) Serret-Frenet denklemleriyle uyumlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul κ, τ, g ve v ile belirlenen sistemin bir çözümünü oluşturmasıdır. Yani,

$$\kappa_b = -2\tau g_s - \tau_s g, \quad \tau_b = v_s + \kappa g_s, \quad g_{ss} = \tau^2 g + \kappa v \quad (3.18)$$

dir. Gerçekten κ_b eğriliği,

$$\kappa_b = \left\langle \frac{dt_b}{ds}, n \right\rangle, \quad \tau_b = -\left\langle \frac{db_b}{ds}, n \right\rangle, \quad g_{ss} = \tau^2 g + \kappa v$$

$$\begin{aligned} t_b = -\tau g n + g_s b \Rightarrow \frac{dt_b}{ds} &= -\tau_s g n + g_s \tau n + g_{ss} \frac{db}{ds} - \tau g \frac{dn}{ds} \\ &= (-2\tau g_s - \tau_s g)n + \kappa \tau g t + (g_{ss} - \tau^2 g)b \end{aligned}$$

$$\kappa_b = \langle t_{bs}, n \rangle = (-2\tau g_s - \tau_s g) \langle n, n \rangle + \kappa \tau g \langle t, n \rangle + (g_{ss} - \tau^2 g) \langle b, n \rangle$$

$$\kappa_b = -2\tau g_s - \tau_s g$$

dir. τ_b burulması,

$$\tau_b = -\langle b_{bs}, n \rangle = -\left[(-g_s \kappa - v_s) \langle n, n \rangle + (\kappa v - g_{ss}) \langle t, n \rangle + \tau \langle b, n \rangle \right]$$

$$= -(-g_s \kappa - v_s)$$

$$\tau_b = g_s \kappa + v_s$$

dır. Ayrıca,

$$g_{ss} = \tau^2 g + \kappa v$$

dır. Yukarıdaki sistem geodezik koordinatlara göre parametrize edilmiş yüzeyler için Gaus-Mainardi-Codazzi denklemleri olarak dikkate alınabilir. Bu sistemin verilen bir çözümü için, (3.1), (3.14) ve (3.12) lineer sistemi uygundur ve uzayda onun yer vektörünün üzerinde bir yüzey belirler. İlave olarak, eğer,

$$\lambda \kappa + \mu \tau = 1 \quad (3.19)$$

sınırlaması koyulursa, sistem iyi tanımlanır ve Σ yüzeyinin Razzaboni yüzeyi olması garanti edilir. $\lambda = 0$ durumu, sabit eğrilikli geodeziklere karşılık gelir. Genelliği bozmaksızın $\mu = \tau = 1$ alınırsa

$$\kappa_b = -2g_s, \quad v_s + \kappa g_s = 0, \quad g_{ss} = g + \kappa v \quad (3.20)$$

elde edilir. Bu integrallenebilir sistem klasik Sine-Gordon denkleminin bir genişlemesi olarak dikkate alınabilir[5]. Bu sistem

$$\omega_{sb} = \sin \omega \quad (3.21)$$

ve aynı zamanda indirgenmiş Maxwell-Block denklemlerinin[4] bir başka şeklini oluşturur. $\kappa = \theta_s$, $g = \frac{-\theta_b}{2}$ parametrizasyonu yardımıyla bir tek denklem elde edilir.

Yani, (3.20) denkleminde,

$$g_{ss} = g + \kappa v \Rightarrow v = \frac{g_{ss} - g}{\kappa} \Rightarrow v_s = \frac{\kappa(g_{sss} - g_s) - \kappa_s(g_{ss} - g)}{\kappa^2}$$

eşitliği bulunur. Buradan da,

$$v_s + \kappa g_s = 0 \Rightarrow \frac{\kappa(g_{sss} - g_s) - \kappa_s(g_{ss} - g)}{\kappa^2} + \kappa g_s = 0$$

$$\frac{\theta_s \left(-\frac{\theta_{bsss}}{2} + \frac{\theta_{bs}}{2} \right) - \theta_{ss} \left(-\frac{\theta_{bss}}{2} + \frac{\theta_b}{2} \right)}{\theta_s^2} - \theta_s \frac{\theta_{bs}}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_s (\theta_{bsss} - \theta_{bs}) - \theta_{ss} (\theta_{bss} - \theta_b)}{\theta_s^2} + \theta_s \theta_{bs} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\theta_{bss} - \theta_b}{\theta_s} \right)_s + \theta_s \theta_{bs} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\theta_{bss} - \theta_b}{\theta_s} \right)_s + \theta_s \theta_{bs} = 0$$

elde edilir. Eğer $\beta = 0$ ise, sabit eğrilikli geodeziğe karşılık gelir, bu takdirde genelliği bozmadan $\alpha = \kappa = 1$ alınabilir ve $g = \tau^{\frac{1}{2}}$ bulunabilir. Temel sistem integrallenebilir denkleme indirgenir[9]. Böylece

$$\tau_b = \left(\left(\frac{1}{\tau^2} \right)_{ss} - \tau^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\tau^2} \right)_s \quad (3.23)$$

dir. Gerçekten,

$$\kappa_b = -2\tau g_s - \tau_s g, \quad \tau_b = v_s + \kappa g_s, \quad g_{ss} = \tau^2 g + \kappa v$$

denklemlerinden,

$$-2\tau g_s - \tau_s g = 0 \Rightarrow \tau_s = -\frac{2\tau g_s}{g}$$

bulunur. Buradan

$$g_{ss} = \tau^2 g + v \Rightarrow g_{sss} = 2\tau \tau_s g + \tau^2 g_s + v_s \Rightarrow v_s = g_{sss} - 2\tau \tau_s g - \tau^2 g_s$$

$$\tau_b = v_s + g_s \Rightarrow \tau_b = g_{sss} - 2\tau \tau_s g - \tau^2 g_s + g_s$$

$$\tau_b = g_{sss} + \frac{4\tau^2 g_s g}{g} - \tau^2 g_s + g_s$$

$$\tau_b = g_{sss} + 3\tau^2 g_s + g_s$$

$$\tau_b = g_{sss} + 3\tau^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \tau^{\frac{3}{2}} \tau_s + g_s$$

$$\tau_b = \left(\left(\left(\frac{1}{\tau^2} \right)_{ss} - \tau^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\tau^2} \right)_s \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\tau_b = \left(\frac{1}{\tau^2} \right)_{sss} \quad (3.24)$$

dır. Bu son denklem iyi bilinen Dym denkleminin bir genişlemesini gösterir. Dikkat edilirse genişletilmiş Dym denklemi $\tau^{\frac{1}{2}}$ hızında hareket eden bir genişletilemez eğrinin binormal hareketi sayesinde elde edilir.

3.3. Dual Razzaboni Yüzeyleri.

Razzaboni yüzeylerinden duallerine geçişin (3.18) ve (3.19) temel denklemlerinin bir değişmezine neden olacağı açıktır. Σ üzerindeki (s, b) geodezik koordinatlarının çarpmaya göre tersi olan bir dönüşüm tarafından Σ^* üzerindeki ilgili (s^*, b^*) geodezik koordinatları tarafından ilişkilendirileceği meydana çıkar. Böylece teorem 3.1.'in ikinci kısmının bir genişlemesini oluşturan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.3.

(3.18) ve (3.19) sistemleri çarpmaya göre ters bir dönüşüm altında değişmezdir.

Yani,

$$ds^* = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \tau ds + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} (\lambda v + \mu \tau g + g) db \quad db^* = db,$$

$$\kappa^* = \frac{\mu \kappa - \lambda \tau}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau}, \quad \tau^* = \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau},$$

$$\lambda^* = -\lambda, \quad \mu^* = \mu,$$

$$g^* = \frac{\mu(\lambda v + g) - \lambda^2 \tau g}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}},$$

$$v^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \left(\mu v - \lambda \tau g - \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} (\lambda v + \mu \tau g + g) \right) \quad (3.25)$$

dir[7].

İspat:

Kolayca gösterilebilir ki, (3.25) tarafından tanımlanmış ds^* ve db^* diferansiyelleri (3.18) ve (3.19) 'un modulüdür. Bu s^* ve b^* koordinatlarının varlığını garanti eder ve dolayısıyla karşılık gelen türevler,

$$\partial_{s^*} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 \tau}} \partial_s,$$

$$\partial_{b^*} = \partial_b - \frac{\alpha}{(\lambda^2 + \mu^2) \tau} (\lambda v + \mu \tau g + g) \partial_s \quad (3.26)$$

dir. Dual yer vektörü (3.12) 'nin diferansiyeli alınırsa,

$$r^* = r + \lambda n \Rightarrow \frac{dr^*}{ds^*} = \frac{dr}{ds^*} + \frac{d\lambda}{ds^*} n + \frac{dn}{ds^*} \lambda$$

$$r_s^* = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{ds^*} + \frac{d\lambda}{ds} \frac{ds}{ds^*} n + \frac{dn}{ds} \frac{ds}{ds^*} \lambda$$

$$r_s^* = t \frac{ds}{ds^*} + \lambda_s \frac{ds}{ds^*} n + \lambda (-\kappa t + \tau b) \frac{ds}{ds^*}$$

$$r_s^* = (1 - \lambda \kappa) t \frac{ds}{ds^*} + \lambda \tau b \frac{ds}{ds^*}$$

$$r_s^* = \frac{(1 - \lambda \kappa) t + \lambda \tau b}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 \tau}} = t^*$$

ve

$$\frac{dr^*}{db^*} = \frac{dr}{db^*} + \frac{d\lambda}{db^*} n + \frac{dn}{db^*} \lambda$$

$$r_{b^*}^* = \frac{dr}{db} \frac{db}{db^*} + \frac{d\lambda}{db} \frac{db}{db^*} n + \frac{dn}{db} \frac{db}{db^*} \lambda$$

$$r_{b^*}^* = g b \frac{db}{db^*} + \lambda_b \frac{db}{db^*} n + \lambda (\tau g t + v b) \frac{db}{db^*}$$

$$r_{b^*}^* = g b + \lambda \tau g t + \lambda v b = g^* b^*$$

$$r_s^* = t^*, \quad r_{b^*}^* = g^* b^* \quad (3.27)$$

elde edilir. Burada (3.9) tarafından verilen t^* ve b^* , Σ^* üzerindeki Bertrand eğrilerinin birim teğet ve binormalini oluşturur. Buna göre s^* , Σ^* üzerindeki Bertrand eğrilerinin yay uzunluğunu gösterir ve b^* 'da onların ortogonal yörüngelerini parametrize eder. Kalan değer $v^* = \langle n_{b^*}^*, b^* \rangle$ kolayca (3.25) olarak hesaplanabilir.

$\mu \neq 0$ durumunda, yukarıdaki $** = id$ de yeniden kodlandırılmış invaryantın tersinin karakteri kısa bağıntılar tarafından aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} g^* \\ h^* \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}, \quad S^* S = 1 \quad (3.28)$$

Buradaki S sabit matrisi,

$$S = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \\ \frac{\lambda}{\mu^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

ve

$$h = v - \frac{\lambda}{\mu} \left(\tau - \frac{1}{\mu} \right) g \quad (3.30)$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{pmatrix} g^* \\ h^* \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \\ \frac{\lambda}{\mu^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

$$g^* = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\mu} g + \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\mu} \frac{\lambda \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} h$$

$$\frac{\mu(\lambda v + g) - \lambda^2 \tau g}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\mu} g + \frac{\lambda \mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} h$$

$$\frac{\mu \lambda v + \mu g - \lambda^2 \tau g}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} - \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\mu} g = \frac{\lambda \mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} h$$

$$\frac{\mu^2 \lambda v + \mu^2 g - \lambda^2 \mu \tau g - \lambda^2 g - \mu^2 g}{\mu \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\lambda \mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} h$$

$$\frac{\mu^2 \lambda v + \mu^2 g - \lambda^2 \mu \tau g - \lambda^2 g - \mu^2 g}{\lambda \mu^2} = h$$

$$v - \frac{\lambda \tau g}{\mu} - \frac{\lambda g}{\mu^2} = h$$

$$h = v - \frac{\lambda g}{\mu} \left(\tau - \frac{1}{\mu} \right)$$

$$h = v - \frac{\lambda}{\mu} \left(\tau - \frac{1}{\mu} \right) g$$

elde edilir. Aynı zamanda, yüzeylerin bir parametrelili geodezik ailesi “genelleştirilmiş helisler” $\left(\lambda, \mu \rightarrow \infty, \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit} \right)$ tarafından gerilmesi durumunda, yukarıdaki terslenebilir dönüşümün benzeri birleştirilmiş Gaus-Mainardi-Codazzi denklemlerini doğrusallaştırır.

3.4. Bir Linear Gösterim ve Backlund Dönüşümü

Razzaboni yüzeyleri için bir Backlund dönüşümünün türevinde[10], Razzaboni [11]'deki makalesinin sonuçlarını kullandı ki bu sonuçlar [12]'de Domartes'in Bertrand eğrileri için Backlund dönüşümünün bir genelleştirmesidir. Burada, ilk olarak Razzaboni tarafından bulunan teoremler ve dual Razzaboni yüzeyleri ile ilgili özellikler verildi. Burada Razzaboni'nin notasyonu benimsenerek Bertrand eğrilerinin eğriliği ve burulması arasındaki bağıntı,

$$\kappa \sin \sigma + \tau \cos \sigma = \frac{1}{a}, \quad a > 0 \quad (3.31)$$

$$\lambda = a \sin \sigma, \quad \mu = a \cos \sigma \quad (3.32)$$

olarak verildi [7].

Teorem 3.4. (Bertrand eğrileri için Backlund dönüşümü[11]).

$M: r = r(s)$, s yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Bertrand eğrisi olsun. O zaman $M'(k)$ Bertrand eğrilerinin başka bir parametrelili ailesinin yer vektörü,

$$(B) r' = r + a \cos k (\cos \sigma \sin \phi t + \cos \phi n + \sin \sigma \sin \phi b) \quad (3.33)$$

ile verilir. Burada $a' = a$, $\sigma' = \sigma$ ile ϕ fonksiyonu birinci dereceden bir diferansiyel denklemin çözümüdür. Yani

$$\phi_s = \kappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma + \frac{\sin \sigma - \cos k \cos \phi}{a(\cos \sigma + \sin k)} \quad (3.34)$$

dır. Backlund dönüşümü sabit uzaklık özelliğini sağlar. $\square r - r' \square$ uzaklığı,

$$r' - r = a \cos k (\cos \sigma \sin \phi t + \cos \phi n + \sin \phi \sin \sigma b)$$

$$\square r' - r \square = a \cos k \cos \sigma \sin \phi t + a \cos k \cos \phi n + a \cos k \sin \phi \sin \sigma b$$

$$\square r' - r \square = \sqrt{a^2 \cos^2 k \cos^2 \sigma \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 k \cos^2 \phi + a^2 \cos^2 k \sin^2 \phi \sin^2 \sigma}$$

$$\square r' - r \square = |a \cos k| \sqrt{\cos^2 \sigma \sin^2 \phi + \cos^2 \phi + \sin^2 \sigma \sin^2 \phi}$$

$$\square r' - r \square = |a \cos k| \sqrt{\sin^2 \phi (\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma) + \cos^2 \phi}$$

$$\square r' - r \square = |a \cos k| \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi}$$

$$\square r' - r \square = a |\cos k|$$

dır. $\square r' - r \square = a |\cos k|$ sadece Backlund parametresi k 'ya bağlı $M'(k)$ ve M üzerindeki karşılıklı noktalar arasındaki uzaklıktır [7].

Yukarıdaki Backlund dönüşümü $k = -\frac{\pi}{2} \pm \sigma$ için tanımlanamaz. Bununla birlikte, orijinal Bertrand eğrisi ile duali arasındaki uzaklık $\square r' - r \square = a |\sin \sigma| = |\lambda|$ dır.

Teorem 3.5.(Razzaboni yüzeyleri için Backlund dönüşümü[10]).

$\Sigma : r = r(s, b)$, s ve b geodezik koordinatları tarafından parametrelenmiş bir Razzaboni yüzeyi olsun. Bu takdirde, $\Sigma'(k)$ Razzaboni yüzeyinin başka bir-parametrelili ailesinin yer vektörü (3.33) tarafından verilir. Burada ϕ fonksiyonu (3.34) Frobenius sisteminin bir çözümüdür ve

$$\begin{aligned} \phi_b = & -\frac{\sin k \sin \sigma + \cos k \cos \sigma \cos \phi}{\sin k} v - \frac{\sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi}{\sin k} \tau g \\ & - \cot k \sin \phi g_s - \frac{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi}{a \sin k (\cos \sigma + \sin k)} g \end{aligned} \quad (3.35)$$

dir[7]. Kolayca gösterilebilir ki, r' yer vektörü ve (3.34), (3.35) Frobenius sistemleri $(k, \phi) \rightarrow (\pi - k, \phi + \pi)$ altında değişmezler. Buna göre bu değişmezliğin dengi, Razzaboni yüzeyleri için Backlund dönüşümü $k = \sigma - \frac{\pi}{2}$ 'de singülerliği gösterir. Aynı şekilde $\square r' - r \square = a$ 'ya karşılık gelen $k = 0$ için tanımsızdır.

(3.34), (3.35) Frobenius sistemlerinin bir formu

$$\phi_s = f_1 \cos \phi + f_2, \quad \phi_b = g_1 \cos \phi + g_2 + g_3 \sin \phi \quad (3.36)$$

dir. Gerçekten ϕ_s ,

$$\phi_s = \kappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma + \frac{\sin \sigma - \cos k \cos \phi}{a (\cos \sigma + \sin k)}$$

$$\phi_s = \kappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma + \frac{\sin \sigma}{a (\cos \sigma + \sin k)} - \frac{\cos k}{a (\cos \sigma + \sin k)} \cos \phi$$

$$\phi_s = f_2 + f_1 \cos \phi$$

dir. Ayrıca ϕ_b ,

$$\phi_b = -\frac{\sin k \sin \sigma + \cos k \cos \sigma \cos \phi}{\sin k} v - \frac{\sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi}{\sin k} \tau g$$

$$- \cot k \sin \phi g_s - \frac{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi}{a \sin k (\cos \sigma + \sin k)} g$$

$$\phi_b = -\frac{\sin k \sin \sigma}{\sin k} v - \frac{\cos k \cos \sigma}{\sin k} v \cos \phi - \frac{\sin k \cos \sigma}{\sin k} \tau g + \frac{\cos k \sin \sigma}{\sin k} \tau g \cos \phi$$

$$- \cot k \sin \phi g_s - \frac{1 + \sin k \cos \sigma}{a \sin k (\cos \sigma + \sin k)} g + \frac{\cos k \sin \sigma}{a \sin k (\cos \sigma + \sin k)} g \cos \phi$$

$$\phi_b = \left(\frac{\cos k \cos \sigma}{\sin k} v + \frac{\cos k \sin \sigma}{\sin k} \tau g + \frac{\cos k \sin \sigma}{a \sin k (\cos \sigma + \sin k)} g \right) \cos \phi$$

$$- \cot k g_s \sin \phi - \frac{\sin k \cos \sigma}{\sin k} \tau g - \frac{\sin k \sin \sigma}{\sin k} v - \frac{1 + \sin k \cos \sigma}{a \sin k (\cos \sigma + \sin k)} g$$

$$\phi_b = g_1 \cos \phi + g_2 + g_3 \sin \phi$$

dir. Böylece uygun Riccati denklemlerinin bir çiftine eşittir. Bu gösterir ki, sırasıyla, bu lineerleşebilir. Gerçekten genel çözümü,

$$\phi = 2 \arctan \frac{\phi^1}{\phi^2} \quad (3.37)$$

ile verilir. Burada $\Phi = (\phi^1, \phi^2)^T$,

$$\Phi_s = (f_1 X_1 + f_2 X_2) \Phi, \quad \Phi_b = (g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3) \Phi \quad (3.38)$$

lineer sistemi, $sl(2)$ Lie cebirinin üreteçleri ile

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

sağlanır.

3.5. Razzaboni'nin Teoremlerinin Bir İspatı. Yeni Sonuçlar

Razzaboni yüzeylerinin ispatı için (3.33) ve (3.34) denklemlerinde verildiği gibi M' eğrisinin κ' ve τ' eğriliklerinin (3.31) formundaki lineer denklemle bağlantılı olduğunu göstermek gerekir. Bu eğriler Σ' yüzeyleri üzerinde geodezik formdadırlar. Sonraki koşul

$$\langle r'_b, n \rangle = 0, \quad (3.40)$$

Razzaboni tarafından gösterilen (3.35) denklemine eş bir denkleme götürür. Burada farklı bir yol seçilir ve b' sabiti tarafından verilen M' eğrileri gibi Σ' üzerinde bir (s', b') geodezik koordinat sistemini oluşturulur.

3.5.1. Eğrilik ve burulma

(3.33) ile verilen r' yer vektörünün diferansiyeli,

$$r' = f t', \quad f = \frac{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi}{\cos \sigma + \sin k}, \quad (3.41)$$

dir. Burada M' 'nin t' birim teğeti,

$$t' = \frac{\cos \sigma + \sin k - \cos k \cos \phi (\sin k \sin \sigma + \cos k \cos \sigma \cos \phi)}{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi} t$$

$$+ \frac{\cos k \sin \phi (\cos k \cos \phi - \sin \sigma)}{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi} n + \cos k \cos \phi b \quad (3.42)$$

dir. Ayrıca,

$$t'_s = f \kappa' n', \quad \kappa' = \frac{1}{a \sin \sigma} - \cot \sigma \frac{\tau}{f^2}, \quad (3.43)$$

diferansiyelleri elde edilir. Burada n' asli normali

$$n' = \frac{\cos k \sin \phi (\sin k \sin \sigma + \cos k \cos \sigma \cos \phi)}{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi} t + \frac{\cos k \cos \phi (\cos k \cos \phi - \sin \sigma) + \sin k (\cos \sigma + \sin k)}{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi} n - \cos k \sin \phi b \quad (3.44)$$

dir. $\sigma = 0$ durumunda, yani $\tau = \frac{1}{a}$ için κ' 'nin yukarıdaki gösterimi hala geçerlidir.

Bu durumda,

$$\kappa' = \kappa + 2 \frac{\sin k - 1}{a \cos \phi} \quad (\sigma = 0) \quad (3.45)$$

olarak sadeleştirilir. τ' burulmasını elde etmek için, $b' = t' \times n'$ kullanılarak,

$$b' = \frac{\cos k (\cos k \sin \sigma - \sin k \cos \sigma \cos \phi - \cos \phi)}{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi} t + \frac{\cos k \sin \phi (\cos \sigma + \sin k)}{1 + \sin k \cos \sigma - \cos k \sin \sigma \cos \phi} n + \sin k b \quad (3.46)$$

elde edilir. Böylece

$$b'_s = -f \tau' n', \quad \tau' = \frac{\tau}{f^2} \quad (3.47)$$

bulunur. (3.43) ve (3.47) denklemlerinden,

$$\kappa' \sin \sigma + \tau' \cos \sigma = \frac{1}{a} \quad (3.48)$$

elde edilir. Bundan dolayı, M' eğrileri, değişmeyen a ve σ ile bir Bertrand eğrilerinin ailesini oluşturur. Yarı-küresel yüzeylerin için klasik Backlund dönüşümü ile eşleştirilen iyi bilinen bir özelliğin benzeri olarak görülen önceki bir durumun önemli bir sonucu aşağıda verilmiştir[4,13].

Sonuç 3.1.

Bertrand eğrilerinin b ve b' binormalleri arasındaki açı ve onların Backlund dönüşümleri sabittir, yani,

$$\langle b', b \rangle = \sin k \quad (3.49)$$

dır[7].

3.5.2. Geodezik Koordinatlar

(3.41) bağıntısı,

$$s'_s = f = a \tau + a \sin \sigma \phi_s \quad (3.50)$$

denklemini sağlar ve burada s' , M' Bertrand eğrilerinin yay uzunluğunu ifade eder. Diğer taraftan (3.10) denkleminde

$$s_s^* = a \tau = 1 - a \sin \sigma \phi_s \Big|_{k=\pi/2} \quad (3.51)$$

bulunur. Böylece M' Backlund dönüşümünün ve M^* Bertrand çiftinin yay uzunlukları, M' 'nin s yay uzunluğu ve ϕ fonksiyonu yardımıyla açıklanabilir. Ayrıca, eğer s'^* , Σ' Razzaboni dönüşümünün Σ'^* çifti üzerindeki Bertrand eğrilerinin yay uzunluğunu gösterirse,

$$s'_s{}^* = s'_s{}^* s'_s = a \tau' f = \frac{a\tau}{f} = 1 - \frac{a \sin \sigma}{f} \phi_s = 1 - a \sin \sigma \phi_s^*, \quad (3.52)$$

dır. Burada ϕ^* fonksiyonu

$$\phi^* = \lim_{x \rightarrow \infty} \int \frac{1}{f} d\phi = 2 \arctan \left(\frac{1 + \sin(k + \sigma)}{\cos \sigma + \sin k} \tan \frac{\phi}{2} \right) \quad (3.53)$$

ile tanımlanır. Bundan dolayı, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6. (Razzaboni çiftleri ve Razzaboni dönüşümleri üzerinde geodezik koordinat sistemleri).

(3.53)'te verilen ϕ^* göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} s' &= s^* + a \sin \sigma \phi, & b' &= b, \\ s^* &= s - a \sin \phi \Big|_{k=\pi/2}, & b^* &= b, \\ s'^* &= s - a \sin \sigma \phi^*, & b'^* &= b, \end{aligned} \quad (3.54)$$

şeklinde tanımlanan (s', b') , (s^*, b^*) ve (s'^*, b'^*) çiftleri, sırasıyla, Σ' Razzaboni dönüşümünün, Σ^* Razzaboni çiftinin ve Σ' Razzaboni dönüşümünün Σ'^* çiftinin üzerindeki geodezik koordinatları oluşturur [7].

İspat:

Yukarıdaki teorem, teorem 3.4. ile birleştirildiğinde teorem 3.5. yi sağlayacağı direkt olarak ispatlanır. Dual Razzaboni yüzeyi olması durumunda, ds^* 'ın, (3.25)'teki gösterimle çakışacağı kolayca gösterilir. Ayrıca $r'_s = t'$ olduğu da gösterilmiştir. Bu durumda Σ' Razzaboni dönüşümünün bağıntısında bazı g' fonksiyonları için,

$$r'_{b'} = g'b' \quad (3.55)$$

olduğunu göstermek gerekir. Burada

$$g' = \frac{g}{\sin k} + a \cot k \cos \sigma (\sin \phi g_s + \cos \sigma \cos \phi h) \quad (3.56)$$

olduğundan $r'_{b'}$ ile b' 'nin paralel olduğu görülür. h fonksiyonu (3.30) ile tanımlanmıştır. $\sigma = \pi/2$ 'de h tekil olmasına rağmen g' büyüklüğü σ 'nın tüm değerleri için iyi tanımlıdır. Sonuç olarak, $r'_{b'^*}$ 'in b'^* 'a paralel olduğunu göstermek gerekir. Burada Σ'^* yüzeyinin yer vektörü,

$$r'^* = r' + a \sin \sigma n' \quad (3.57)$$

ile verilir ve (3.9)'daki çatı ile bağlantılı olarak

$$t'^* = \cos \sigma t' + \sin \sigma b', \quad b'^* = -\sin \sigma t' + \cos \sigma b', \quad n^* = n' \quad (3.58)$$

dır.

ϕ^* , Σ^* Razzaboni çiftiyle eşleştirilen (3.34) ve (3.35) Frebenius sistemlerinin bir çözümüdür. Teorem 3.6.'nın Σ^* yüzeyine uygulanmasıyla

$$s'^* = s^{**} + a \sin \sigma^* \phi^* = s - a \sin \sigma \phi^* = s'^* \quad (3.59)$$

elde edilir. Gerçekten, kısa bir hesaplama sonucu,

$$\mathbf{r}^{*'} = \mathbf{r}^* + a \cos k \left(\cos \sigma \sin \phi^* \mathbf{t}^* + \cos \phi^* \mathbf{n}^* - \sin \sigma \sin \phi^* \mathbf{b}^* \right) \quad (3.60)$$

ile tanımlanan $\Sigma^{*'}$ ve Σ^* yüzeyleri çakışıktır.

Teorem 3.7. (Değişme özelliği)

B ve \mathfrak{R} operatörleri yer değiştirebilir, yani,

$$B \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \circ B \quad (3.61)$$

dir. Bu ifade (3.53) ile bağlantılı olan ϕ ve ϕ^* birleştirilmiş fonksiyonları tarafından sağlanır [7].

3.5.3. Razzaboni sisteminin değişmezliği.

Razzaboni'nin B dönüşümü, (3.18) ve (3.19) Razzaboni sisteminin bir değişmezine neden olmaktadır. κ, τ, g ve s, b değişkenlerinin üzerinde B'nin nasıl rol oynadığı tespit edildi. Esas olarak v' niceliği $v' = \langle \mathbf{n}'_b, \mathbf{b}' \rangle$ ile hesaplanabilir. Buna rağmen, elde edilen sonuç $\sigma = 0$ olması dışında oldukça karmaşık bir durumdur, öyle ki,

$$v' = \left(\sin^2 \phi + \frac{\cos^2 \phi}{\sin k} \right) v + \frac{\cot k}{a} \cos \phi g + \left(\frac{1}{\sin k} - 1 \right) \sin \phi \cos \phi g_s \quad (3.62)$$

dır. Değişmelilik teoremi kullanılarak v' türevi alternatif bir yolla hesaplanabilir. Böylece g', h' ve $g^{*'}, h^{*'}$ değişkenleri arasındaki ilişki (3.28) ve (3.29)'un yıldızlı versiyonları tarafından verilir. Özellikle

$$g^{*'} = \frac{g'}{\cos \sigma} + a \sin \sigma \cos \sigma h \quad (3.63)$$

elde edilir. (3.30)'un işaretli versiyonu tarafından verilen h' ,

$$h' = v' - \tan \sigma \left(\tau' + \frac{1}{\cos \sigma} \right) g' \quad (3.64)$$

dür. Bu yüzden, (3.56) ve onun yıldızlı benzeri tarafından verilen g' ve g^{*}

$$v' = \frac{g^{*}}{a \sin \sigma \cos \sigma} + \left(\tan \sigma \tau' - \frac{1}{a \sin \sigma} \right) g' \quad (3.65)$$

sonucunu verir. v' için yukarıdaki gösterim, aynı zamanda $\sigma = \frac{\pi}{2}$ için de geçerlidir.

Sonuç 3.2. (Razzaboni sisteminin değişmezliği).

(3.18) ve (3.19) Razzaboni sistemi $(\kappa, \tau, g, v, s, b) \rightarrow (\kappa', \tau', g', v', s', b')$ dönüşümü altında invaryanttır. Burada işaretli değişkenler $a' = a, \sigma' = \sigma$ ile (3.43), (3.47), (3.54) ve (3.65)(yada(3.62)) tarafından verilir [7].

3.5.4. Skaler invaryant

Sıfırdan farklı λ ve μ için Gaus-Mainardi-Codazzi denklemleri,

$$d\theta = \mu \sqrt{\tau} ds + \lambda \sqrt{\tau} g db \quad (3.66)$$

ile tanımlanan bir potansiyel θ için bir tek denklem olarak yazılabilir ve

$$\left(\mu \sqrt{\tau} \right)_b = \left(\lambda \sqrt{\tau} g \right)_s \quad (3.67)$$

bağıntısı ile ilişkilidir. Gerçektende (3.18)'deki v' 'nin bir tanımını göz önüne alınırsa, (3.67) bağıntısı θ yerine τ ve g nin ifade edilmesi için kullanılır. (3.18)

denkleminde, θ için 4. dereceden denklem oluşturulur. $\mu = 0$ 'a karşılık gelen genişletilmiş Dym denklemi olması durumunda, yukarıdaki 1-formun benzeri

$$d\theta = \sqrt{\tau} ds + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right)_{ss} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right)_s^2 - \frac{3}{2} \tau + \frac{1}{2\tau} \right) db \quad (3.68)$$

dir. Böylece genişletilmiş Dym denklemi

$$\{\theta; s\} = \frac{\theta_{sss}}{\theta_s} - \frac{3}{2} \left(\frac{\theta_{ss}}{\theta_s} \right)^2 \quad (3.69)$$

Schwarzian türevi ile

$$\theta_b = -\frac{\{\theta; s\}}{2\theta_s^2} - \frac{3}{4} \theta_s^2 + \frac{1}{4\theta_s^2} \quad (3.70)$$

formunu alır. [5]'te, eğer θ ve $t = -\frac{b}{2}$ bağımsız değişkenler olarak alınırsa; s ,

$$ds = e^q d\theta + \left[e^q \left(q_{\theta\theta} - \frac{1}{2} q_\theta^2 \right) - \frac{3}{2} e^{-q} + \frac{1}{2} e^{3q} \right] dt \quad (3.71)$$

bağıntısını sağlar. Burada $\tau = e^{-2q}$ ve birleştirilmiş uygunluk koşulları “modified Korteweg-de Vries “(m²KdV)”

$$q_t = q_{\theta\theta\theta} - \frac{1}{2} q_\theta^3 + 3q_\theta \cosh 2q \quad (3.72)$$

denklemini verir[14,15]. Üstelik θ ve t koordinatlarının, B Razzaboni dönüşümü ve \mathfrak{R} ters dönüşümüyle, korunduğu gösterilir. Böylece, geodezik koordinatlar s ve b 'nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan θ , bu dönüşümlerin bir invariantıdır.

Teorem 3.8.

θ potansiyeli ki bu, (3.66) 1-formu ile tanımlandı, B ve \mathfrak{R} dönüşümleri tarafından korunur[7].

Yukarıdaki teorem, ilerideki bölümlerde elde edilen dönüşümler için kullanılan gösterimler kullanılarak direkt olarak ispatlanabilir. \mathfrak{R} dualite dönüşümü olması durumunda,

$$d\theta^* = \mu^* \sqrt{\tau^*} ds^* + \lambda^* \sqrt{\tau^*} g^* db^* = d\theta \quad (3.73)$$

gösterilmesi gerekir. Razzaboni'nin B dönüşümüyle ilişkisinde,

$$d\theta' = \mu \sqrt{\tau} ds' + \lambda \sqrt{\tau} g' db' = d\theta \quad (3.74)$$

tanımını veren

$$g' = s'_s \quad g - \cot \sigma s'_b \quad (3.75)$$

bağıntısını vermek uygundur. θ invariantının herhangi bir öneme sahip olup olmadığı halen araştırılmaktadır.

Özel Durumlar

1. $k = \sigma - \frac{\pi}{2}$ ve $k = 0$ ise:

Razzaboni'nin B Backlund dönüşümü $k = \sigma - \frac{\pi}{2}$ ve $k = 0$ için tanımlı değildir.

Çünkü (3.34) ve (3.35) Frobenius sistemleri bu noktalarda tekildir. Üstelik, eğer

genel limitler alınırsa, \mathfrak{R} dualite dönüşümü $k = \sigma - \frac{\pi}{2}$ durumunda B 'den yeniden

elde edilebilir ve Razzaboni yüzeyleri için yeni bir Backlund dönüşümü, b ve b'

ortogonal binormallerine karşılık gelen $k=0$ durumunda açık bir şekilde tanımlanabilir. İkinci dönüşümün geçerliliği limite başvurmadan direkt gösterilebilir.

2. $k = \sigma - \frac{\pi}{2}$ ise:

(3.34) dikkatle incelendiğinde, $k = \sigma - \frac{\pi}{2}$ durumu için,

$$k = \sigma - \frac{1}{2}\pi + \varepsilon^2 \quad (3.76)$$

oluşturmanın uygun olduğu görülür. $\phi(\varepsilon)$ ile ε üzerinde ϕ 'nin bağımlılığı gösterilir ve

$$\phi_0 = \phi(0), \quad \phi_1 = \phi_\varepsilon(0) \quad (3.77)$$

notasyonunu kullanılarak, genel limit $\varepsilon \rightarrow 0$, (3.34) ifadesi

$$0 = \frac{\phi_1^2}{2a} - \frac{\tau}{\sin \sigma} \quad (3.78)$$

olarak sadeleştirilir ve

$$\phi_0 = 0 \quad (3.79)$$

bulunur. ϕ_0 ve ϕ_1 üzerindeki bu koşullar (3.35) eş denklemleriyle tutarlı olur. Üstelik $\varepsilon \rightarrow 0$ iken, (3.33),(3.42),(3.44) ve (3.46) dönüşümleri

$$r' = r^*, \quad t' = t^*, \quad n' = -n^*, \quad b' = -b^* \quad (3.80)$$

olur. (3.78) kullanıldığında, eğrilik ve burulma,

$$\kappa' = -\kappa^*, \quad \tau' = \tau^* \quad (3.81)$$

şeklinde basitleşir. Böylece, $\lambda' = \lambda = -\lambda^*$ 'a karşılık gelen asli normal ve binormalin yönü değişikçe, \mathfrak{R} dualite dönüşümü yeniden düzenlenir.

3. $k = 0$ ise:

Sonuç 3.1.'e göre, b binormali ve onun b' Backlund dönüşümü arasındaki açı sabittir. $\langle b', b \rangle = \sin k$ olduğundan, Bertrand eğrileri olması durumunda binormalleri ortogonal olabilir. Fakat Razzaboni yüzeyleri için Backlund dönüşümü $k = 0$ durumunda önceden tanımlanmamıştır. Eğer,

$$k = \varepsilon \quad (3.82)$$

alınır ve bundan önceki gibi aynı notasyon kullanılırsa, genel limitin varlığı için gerekli koşul, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken (3.35)'in sağ tarafındaki numaratorün kaybolmasıdır. Bu

$$a \cos \sigma g_s \sin \phi_0 + a \cos^2 \sigma h \cos \phi_0 + g = 0 \quad (3.83)$$

denklemini sağlar. Burada, bir önceki bölümde yer alan $\sigma = \pm \frac{\pi}{2}$ durumunu dikkate almayalım. Yukarıdaki durum, ancak,

$$a^2 \cos^2 \sigma g_s^2 + a^2 \cos^4 \sigma h^2 - g^2 = c^2 \geq 0 \quad (3.84)$$

ise sağlanabilir. Bu durumun çözümü

$$\sin \phi_0 = -\frac{a \cos \sigma (c \cos \sigma h + g g_s)}{c^2 + g^2},$$

$$\cos \phi_0 = \frac{a \cos \sigma (c g_s - \cos \sigma g h)}{c^2 + g^2} \quad (3.85)$$

ile verilir. s 'ye göre diferansiyel, (3.84)'ün,

$$c = c(b) \quad (3.86)$$

ile (3.18) ve (3.19) Razzaboni sistemlerinin birinci integralini oluşturduğunu gösterir ve dikkat edilirse, $\varepsilon = 0$ için (3.34) s-açılımının özel bir çözümü (3.85) ile tanımlanan ϕ_0 'dır. $\varepsilon \rightarrow 0$ genel limitinde, (3.25) b-açılımının, g' için (3.56) ifadesi

$$g' = c \phi_1 \quad (3.87)$$

olurken,

$$\phi_{0b} = -\frac{c \phi_1}{a \cos \sigma} - \frac{\tau g}{\cos \sigma} - \frac{c \tan \sigma g g_s + c^2 \sin \sigma h}{c^2 + g^2} \quad (3.88)$$

şeklinde sadeleşeceği kolayca görülür. Böylece direkt olarak

$$r'_{b'} = g' b' \quad (3.89)$$

sağlanır. Burada r', b' $\varepsilon = 0$ ve $\phi = \phi_0$ 'da hesaplanır. O halde aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.9. ($\langle b', b \rangle = 0$ özellikli Backlund dönüşümü).

Eğer Σ , (3.84) birinci integrali ile ilişkilendirilen bir Razzaboni yüzeyi oluşturursa, diğer bir Σ' Razzaboni yüzeyinin yer vektörü,

$$r' = r + a(\cos \sigma \sin \phi_0 t + \cos \phi_0 n + \sin \sigma \sin \phi_0 b) \quad (3.90)$$

dir, burada ϕ_0 , (3.85) ile tanımlanır. Karşılıklı noktalarda b ve b' binormalleri ortogondur. Σ' üzerindeki metrik, (3.87)'de tanımlanan ϕ_1 değeri ile

$$dr'^2 = ds^2 + c^2 \phi_1^2 db'^2 \quad (3.91)$$

şeklini alır[7].

(3.20) genelleştirilmiş Sine-Gordon sistemi ile ilişkilendirilmiş $\sigma = 0$ özel durumunda, yukarıdaki teorem daha önce [8]'de formülize edilmişti. Yarı-küresel yüzeyin normalleri arasındaki açı ve onun klasik Backlund dönüşümünün [4,13] sabit ve keyfi bir şekilde seçilebileceği görülür. Ortogonal normaller durumunda, Bianchi'nin klasik dönüşümü yeniden elde edilir[16]. Fakat, Bianchi'nin dönüşümü açıkça verilmez ve integrasyon sabitine bağlı olmaz.

3.6. Sym-Tafel Formülünün Uygulanması.

(3.31)'de, Razzaboni'nin (3.34) ve (3.35) Frobenius sisteminin (3.38) lineer denkleminde eşdeğer olduğu gösterildi. Şimdi ikincinin orijinini bir yana bırakabilir ve aynı formun lineer sistemleri düşünülebilir. Fakat Φ

$$\Phi_s = F(k) \Phi = (f_1 X_1 + f_2 X_2) \Phi,$$

$$\Phi_b = G(k) \Phi = (g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3) \Phi \quad (3.92)$$

öz fonksiyonlarını sağlayan bir kompleks değerli matris olarak göz önüne alınabilir. Burada,

$$f_1 = -\frac{\cos k}{a(\cos \sigma + \sin k)},$$

$$f_2 = \kappa \cos k - \tau \sin \sigma + \frac{\sin \sigma}{a(\cos \sigma + \sin k)},$$

$$g_1 = \cot k \left(-\cos \sigma + \sin \sigma \tau g + \frac{\sin \sigma}{a(\cos \sigma + \sin k)} g \right),$$

$$g_2 = -\sin \sigma v - \cos \sigma \tau g - \frac{1 + \sin k \cos \sigma}{a \sin k (\cos \sigma + \sin k)} g,$$

$$g_3 = -\cot k g_s \quad (3.93)$$

katsayılar ve

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

SL(2) matrisleridir. Burada $F = F(k)$ ve $G = G(k)$ ile k kompleks parametresine bağımlılığı gösterildi. Burada

$$k = 2 \arctan(i a \lambda) - \frac{1}{2} \pi \quad (3.95)$$

koşulu göz önüne alınırsa, λ bir reel parametre, f_2, g_2 reel katsayılar ve f_1, g_1, g_3 imajiner katsayılarıdır. Böylece,

$$F^\dagger = -F, \quad G^\dagger = -G \quad (3.96)$$

için su(2) Lie cebirinin elemanları F ve G matrisleridir ve Φ

$$\Phi^\dagger \Phi = 1, \quad \det \Phi = 1 \quad (3.97)$$

ifadesini sağlayan SU(2) Lie gurubuyla birleştirilmiş olarak alınabilir. $\lambda = \frac{1}{a}$, yani

$k \rightarrow i \infty$ için Lax çifti,

$$\Phi_s = (-\tau \hat{e}_1 - \kappa \hat{e}_3) \Phi, \quad \Phi_b = (-v \hat{e}_1 + g_s \hat{e}_2 + \tau g \hat{e}_3) \Phi \quad (3.98)$$

ifadelerine indirgenir. Burada \hat{e}_i matrisleri,

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \cos \sigma e_1 - \sin \sigma e_2, & \hat{e}_2 &= -e_3, \\ \hat{e}_3 &= \sin \sigma e_1 + \cos \sigma e_2\end{aligned}\quad (3.99)$$

ile verilir. $Su(2)$ nin standart üreteçleri,

$$e_1 = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\quad (3.100)$$

dir. e_i ve \hat{e}_i matrislerinin her iki cümlesi $so(3)$ komütatör bağıntılarını

$$[e_i, e_k] = \varepsilon_{ik}^l e_l\quad (3.101)$$

sağlar. Üstelik, (3.1) ve (3.17) Gaus-Weingarten denklemleri, $\Phi \rightarrow (t, n, b)^T$ ve $\hat{e}_i \rightarrow l_i$ yerine kullanarak (3.98) formuna dönüşebilir. Burada $so(3)$ Lie cebirinin l_i üreteçleri

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (3.102)$$

ile tanımlanır ve (3.101) komütatör bağıntısını sağlar. Böylece $\Phi \in Su(2)$ olduğundan, $\Phi^{-1} \Phi_\lambda$ değeri $su(2)$ 'nin bir elemanını gösterir ve bu yüzden

$$R = \Phi^{-1} \Phi_\lambda = \langle r, e \rangle, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}\quad (3.103)$$

ifadelerine göre ayrıştırılabilir. Böylece matris değerli fonksiyon R , (3.103) ile tanımlanan $r \in \mathbb{R}^3$ vektör değerli fonksiyon ile ilişkilendirilir ya da eşdeğer olarak,

$$r = m(R, e), \quad (3.104)$$

dir. Burada $su(2)$ nin Killing-Cartan metriği,

$$m(p, q) = -2\text{Tr}(pq), \quad p, q \in su(2), \quad (3.105)$$

ile verilir. $\{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, m ye göre $su(2)$ 'nin ortonormal bazını oluşturur. Yani,

$$m(e_i, e_k) = \delta_{ik} \quad (3.106)$$

dir. $R = \Phi^{-1} \Phi_\lambda$ bağıntısına genellikle “Sym-Tafel formülü” olarak başvurulur ve süreklilik ve discrete integrallenebilir sistemlerin [17,18,19] her ikisinin geometrik çalışmaları ile bağlantılı olarak kullanılır. Burada ana fikir, \mathbb{R}^3 ile $su(2)$ Lie cebirini tanımlamak ve herhangi sabit bir λ için bir $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin r yer vektörünü dikkate almaktır.

Herhangi bir keyfi λ için, Sym-Tafel formülü ile tanımlanan Σ yüzeyi hiçbir şekilde Razzaboni yüzeyi oluşturmaz. Bununla birlikte, $\lambda = \frac{1}{a}$ için Razzaboni yüzeyleri yeniden elde edilir. Σ üzerindeki koordinat doğrularının teğet vektörleri

$$R_s = \Phi^{-1} F_\lambda \Phi, \quad R_b = \Phi^{-1} G_\lambda \Phi \quad (3.107)$$

genel bağıntılarından bulunur. Bu, ilgili temel formların öz fonksiyon Φ den bağımsız olduğunu gösterir ve F ve G matrisleri tarafından parametrize edilir. Teğet vektörlerin $su(2)$ benzerleri

$$R_s = \Phi^{-1} \hat{e}_1 \Phi, \quad R_b = g \Phi^{-1} \hat{e}_3 \Phi \quad (3.108)$$

ile verilir. Böylece

$$T = \Phi^{-1} \hat{e}_1 \Phi, \quad N = \Phi^{-1} \hat{e}_2 \Phi, \quad B = \Phi^{-1} \hat{e}_3 \Phi \quad (3.109)$$

değerleri m metriğine göre bir sağ ortonormal üçlüsü oluşturur. Ortaya çıkan bu üçlü, b sabit eğrileriyle ilişkili (t, n, b) çatısının $su(2)$ benzerinden başka bir şey değildir ve

$$dr^2 = ds^2 + g^2 db^2 \quad (3.110)$$

dir. Üstelik, T ve B 'nin diferansiyeli alınırsa,

$$T_s = \kappa N, \quad B_s = -\tau N \quad (3.111)$$

denklemleri elde edilir.

Böylece önemli bir sonuç olarak, herhangi bir Σ Razzaboni yüzeyinin yer vektörü yeniden elde edilebilir ve aslında, $\lambda = \frac{1}{a}$ 'da hesaplanmış (3.103) Sym-Tafel formülü yardımıyla ϕ özfonksiyonu bulunur.

KAYNAKLAR

- [1] HACISALİHOĞLU, H.H., Diferansiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1993.
- [2] TANRIÖVER, N., SABUNCUOĞLU, A., On Bertrand Curves in n-Dimensional Euclidian Space. . Journal of Karadeniz University Faculty of Arts and Sciences series of Mathematics –Physics. Vol:(IX),1-9.
- [3] TANRIÖVER, N., Bertrand n-Dimensional Euclidian Space. Journal of Karadeniz University Faculty of Arts and Sciences series of Mathematics –Physics. Vol:(IX),58-64,1986.
- [4] EİSENHART, L.P., A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Dover, New York, 1960.
- [5] WEATHERBURN, C.E., Differential Geometry of Three Dimensions, Vol. I, Cambridge University Pres, Cambridge, 1927.
- [6] NUTBOURNE A.W., MARTİN R.R., Differential Geometry Applied to the Design of Curves and Surfaces, Ellis Horwood, Chichester, UK, 1988.
- [7] SCHİEF, W.K., On the Integrability of Bertrand Curves and Razzaboni Surfaces, Journal of Geometry and Physics 45, 130-150,2003.
- [8] SCHİEF, W.K., ROGERS, C., Binormal motions of curves of constant curvature and torsion, Generation of soliton surfaces, Proc. Roy. Soc. Lond. A 455, 3163-3188,1999.
- [9] CAUDREY, P.J., EİLBECK, J.C., GİBBON, J.D., Exact multisoliton solition of the reduced Maxwell-Bloch equations of non-linear optics, J.Inst. Math. Appl. 14, 375-386, 1974.
- [10] RAZZABONİ, A., Delle superficie nelle quali un sistema di geodetiche sono curve del Bertrand, Bologna, Tipografia Ganberini e Parmeggiani, 1898.
- [11] RAZZABONİ, A., Un teorema del signor Demartes generalizzato, Ven. Ist. Atti. 60, 757-768,1901.

- [12] DEMARTES, C., Sur les surfaces a generatrice circulaire, Ann. de l'Ec. Norm II 123-182,1885.
- [13] BACKLUND, A.V., Om ytor med konstant negativ krökning, Lunds Universitets Arsskrift 19, 1-48,1883.
- [14] CALOGERO F., DEGASPERIS A., A modified Korteweg-de Vries equation, Inv. Problems I ,57-66,1985.
- [15] FOKAS A., A symmetry approach to exactly solvable evolution equations, J. Math. Phys. 21, 1318-1325, 1980.
- [16] BIANCHI L., Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi, Tesi di agabeylitazione, Annali di Scuola Normale Superiore Pisa 1 2 (1), 285-304, 1879.
- [17] SCHIEF, W.K., ROGERS, C., Backlund and Darboux Transformations, Geometry and Modern Applications in Soliton Theory,Cambridge University Pres, Cambridge, 2002.
- [18] SYM, A., Solition Surfaces and Their Applications, in: MARTINI, R.(Ed.), Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems, Springer, Berlin, 1985.
- [19] BOBENKO A.I., SEILER R(Eds.), Discrete Integrable Geometry and Physics, Clarendon Press, Oxford, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Geyve’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Geyve’de tamamladı. 1997 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2001’de tamamladı ve aynı yıl Sakarya Özel Mefkûre Dershanelerinde öğretmen olarak göreve başladı. 2002 yılında Gümüşhane ve 2003 yılında Sakarya illerinde öğretmen olarak görev yaptı. Halen Sakarya Anadolu Teknik-Teknik Lise ve Endüstri Meslek Lisesi’nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir erkek çocuğu sahibidir.

