T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL SAYILARIN ÇEŞİTLİ ALGORİTMALAR YARDIMIYLA GÖSTERİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep AKYÜZ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI**

Haziran 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL SAYILARIN ÇEŞİTLİ ALGORİTMALAR YARDIMIYLA GÖSTERİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep AKYÜZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 05 / 06 /2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr.Serpil HALICI	**Prof.Dr.Metin BAŞARIR**	**Doç.Dr.İbrahim OKUR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, $a_0 \in Z$ ve $a_1, a_2, \ldots \in Z^+$ olmak üzere $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ basit sürekli kesir açılımı bilindiğinde a,b,c,d $\in Z$ ve determinantı 0'dan farklı olan $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi yardımıyla $\beta = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ sayısının sürekli kesir açılımının nasıl bulunabileceği anlatıldı. Kullanılan matrislerin satır ve sütunları arasındaki bulunması gereken bağıntılar, yapılacak işlemleri zorlaştırmaktadır. Bunun için matrislerin bulunması ile ilgili örnekler verilmiştir.

Ayrıca sürekli kesir biçiminde yazılmış reel sayıların bazı özel tanımlanmış matrislerle kodlanması yöntemleri açıklandı.

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI'ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmayı hazırladığım zaman zarfında bana olan desteğinden dolayı değerli eşim Kürşat AKYÜZ'e, ayrıca tezin yazımında bilgisayar ve İngilizce konusunda bana yardımcı olan okulumdaki öğretmen arkadaşlarıma ve fikirlerinden istifade ettiğim Matematik bölümündeki hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeler Komisyonu tarafından 2006.50.01.091 no'lu proje ile desteklenmiştir.

Zeynep AKYÜZ

2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

A_k	:	Sürekli Kesrin k. Payı
A(G)	:	G Grafının Komşuluk Matrisi
B_k	:	Sürekli Kesrin k. Paydası
C_k	:	Sürekli Kesrin k. Yakınsaklığı
$(C,B)_n$	:	n Determinantlı Sütun Dengeli Matrislerin Kümesi
D_n	:	n Determinantlı 2x2 Matrislerinin Kümesi
$(D,B)_n$	:	n Determinantlı Çifte Dengeli Matrislerin Kümesi
G(V,E)	:	V Düğümlü, E Kenarlı Graf
INT	:	(L,R) Kelimelerinde L ve R nin Yerini Değiştiren Dönüşüm
K_n	:	n Düğümlü Tam Graf
L	:	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Biçimindeki Matris
$\{L,R\}^*$	:	Bütün (L,R) Kelimelerinin Kümesi
N	:	Doğal Sayılar Kümesi
Ra(W)	:	Raney Sayısı
R	:	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ biçimindeki matris
$(R,B)_n$	:	n Determinantlı Satır Dengeli Matrislerin Kümesi
REV	:	(L,R) Kelimelerini Tersine Çeviren Dönüşüm
S	:	(L,R) dizisi
SB	:	Stern-Brocot Sayısı
Z	:	Tamsayılar Kümesi
τ	:	Dönüştürücü
W	:	(L,R) kelimesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sürekli Kesirler, Satır Dengeli Matris, Sütun Dengeli Matris, Çifte Dengeli Matris, Dönüştürücü, Graf, Ağaç, Raney Ağacı, Stern-Brocot Ağacı

Bu çalışmada ilk olarak bir rasyonel sayının Öklid algoritması yardımıyla sürekli kesir açılımının bulunması ve bu açılımın bazı özellikleri anlatıldı.

İkinci kısımda R ve L matrisleri tanıtıldı. Bu matrisler determinantları 1 olan $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ biçimindeki matrislerdir. Bu matrislerin zincirleme çarpımlarından söz edildi.

Ayrıca $a_0 \in Z$ ve $a_1, a_2, \ldots \in Z^+$ olmak üzere $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ basit sürekli kesir açılımı bilindiğinde $a,b,c,d \in Z$ ve determinantı 0 (sıfır) dan farklı olan $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi yardımıyla $\beta = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ sayısının sürekli kesir açılımının nasıl bulunabileceği anlatıldı. Burada yine R ve L matrisleri kullanıldı.

Son bölümde graflar, ağaçlar ve ağaçların matrislerle ilişkisi anlatıldı. Bir sürekli kesrin R ve L matrislerinin zincirleme çarpımı ile temsil edilmesi ve bu çarpımın aynı zamanda bir grafikle gösterilmesi verildi. Bu bağlamda Raney ve Stern-Brocot ağaçlarından ve bu ağaçlarda bir düğüm olan Raney ve Stern-Brocot sayılarından bahsedildi.

THE REPRESENTATION OF THE REAL NUMBERS BY VARIOUS ALGORITHM

SUMMARY

Key words : Continued Fraction, Row Balanced Matrices, Column Balanced Matrices, Doubly Balanced Matrices, Transducers, Graph, Tree, Raney Tree, Stern-Brocot Tree

Firstly in this thesis , we mention about; finding a continued fraction expansion of a rational number by using Euclid algorithm and some properties of this expansion.
In second part R and L matrices are constructed. This matrices whose determinant's are equal to 1 and shown as $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ and $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Than mention about catenation multiplication of these matrices.

Moreover, while $a_0 \in Z$ and $a_1, a_2, \ldots \in Z^+$, if $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ simple continued rational expansion is known $a,b,c,d \in Z$ and by using $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrices whose determinant is different than 0(zero), we explain how to find $\beta = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ continued fraction expansion. Here we also used R and L matrices.

In last part,we mention about graphs,trees,and the relationship between trees and matrices.We explained a continued fraction number which can be implemented by using catenation multiplication. R and L matrices.Also this multiplication is shown in graph. Also we mention about; Raney and Stern-Brocot trees,and the Raney and Stern-Brocot numbers who are node of these trees.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Bir Reel Sayının Sürekli Kesri

Tanım 1.1.1. p ve q birer tamsayı ve $q = q_0$ olsun. p'nin q_0 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanlar düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
p &= a_0 q_0 + q_1 \qquad &&; \; 0 < q_1 < q_0 \\
q_0 &= a_1 q_1 + q_2 \qquad &&; \; 0 < q_2 < q_1 \\
q_1 &= a_2 q_2 + q_3 \qquad &&; \; 0 < q_3 < q_2 \\
&\vdots \\
q_{i-1} &= a_i q_i + q_{i+1} \qquad &&; \; 0 < q_{i+1} < q_i
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliklere Öklid algoritmasının adımları denir. $q_1, q_2, q_3 \ldots$ ler kalanlar olup pozitif tamsayılardır, gittikçe azalır ve sonunda "sıfır" olur ve böylece algoritma biter. $q_{N-1} = a_N q_N$, $q_{N+1} = 0$ olduğunda q_N sayısı p ve q'nun en büyük ortak bölenidir. Burada 1. adımda $q_0 = q$ alınıp her terim q'ya bölünürse

$p = a_0 q_0 + q_1 \Rightarrow \dfrac{p}{q} = a_0 + \dfrac{q_1}{q}$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse;

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{q_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{q_2}{q_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{q_1}{q_2}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{q_3}{q_2}}} = \cdots$$

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_N}}}}$$

elde edilir. Burada $a_0 \in Z$ olup; $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sayıları pozitif tamsayılardır ve $a_N > 1$dir.

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_N}}}} \qquad (1.1.1)$$

biçimindeki ifadeye basit sürekli kesir denir.

Eğer alınan sayı rasyonel sayı değilse, $q_{N+1} = 0$ asla olamaz ve sürekli kesir sonsuza kadar devam eder.

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_N}}}}$$

sürekli kesri,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\ \frac{1}{a_2 +}\ \frac{1}{a_3 + \ldots} \cdots \frac{1}{+ a_N}$$

biçiminde de yazılabilir.

Ayrıca (1.1.1) sürekli kesri $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ veya $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ şeklinde gösterilebilir. Eğer, sayı irrasyonel ise $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ gösterimi kullanılır.

Örnek 1.1.1. $\dfrac{23}{4} = 5 + \dfrac{3}{4} = 5 + \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = 5 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}$ sürekli kesir açılımına sahip rasyonel sayı ; $\dfrac{23}{4}$ = [5; 1,3] biçiminde yazılabilir.

Örnek 1.1.2. $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}} = \cdots = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\vdots}}}}$$

Buradan,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\vdots}}}}}$$

biçiminde yazılır. Bu ifade kısaca $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ şeklinde ifade edilir. Basit sürekli kesrin yakınsaklıkları aşağıdaki gibi açıklanabilir:

$$C_0 = a_0, \quad C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

$$C_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

$$\vdots$$

biçimindeki yazılışlara (1.1.1) sürekli kesrinin yakınsaklıkları denir. Genel ifadesi

$$C_k = \frac{A_k}{B_k}$$

biçimindedir. Buradaki C_k ya (1.1.1) sürekli kesrinin k. yakınsaklığı denir. A_k ve B_k da sırasıyla k. pay ve k. paydadır.

O halde;

$$C_0 = a_0 = \frac{A_0}{B_0} \quad ; \quad A_0 = a_0 \quad , \quad B_0 = 1$$

alınır.

$$C_1 = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{A_1}{B_1} \quad ; \quad A_1 = a_0 a_1 + 1 \ , \quad B_1 = a_1$$

olur.

Örnek 1.1.3. $\sqrt{2} = [1;2,2,2,\ldots]$ biçiminde yazılabilen sürekli kesrin yakınsaklıkları bulunabilir:

$$\sqrt{2} = [1;2,2,2,\ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$

olduğundan;

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$C_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$C_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{15} = 1{,}41666...$$

Benzer biçimde, $C_4 = \frac{41}{29} = 1{,}41379\ldots$ bulunur. Yakınsaklıkların gittikçe irrasyonel sayının gerçek değerine yaklaştığı kolayca görülür.

Önerme 1.1.1. $\{A_k\}_{k\geq -1}$ ve $\{B_k\}_{k\geq -1}$ dizileri, terimleri a_k sayılarından oluşan iki dizi olsun.

$$A_{-1} = 1,\ B_{-1} = 0$$

$$A_0 = a_0\ ,\ B_0 = 1$$

başlangıç koşulları olmak üzere;

$$A_{k+1} = a_{k+1}A_k + A_{k-1}$$

$$B_{k+1} = a_{k+1}B_k + B_{k-1} \qquad ,\ 0 \leq k \leq n-1.$$

tekrarlı bağıntıları sağlanır. Bu bağıntıları tümevarımla göstermek kolaydır; k=1 için doğru olduğu gösterilir. k = n-1 için doğru olduğu kabul edilir.

$$\frac{A_n}{B_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad \text{ise,}$$

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right]$$

şeklinde alınır ve $a_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ alınırsa, ispat tamamlanır [1].

Önerme 1.1.2. $k \geq 0$ için , $A_k B_{k-1} - A_{k-1}B_k = (-1)^{k-1}$ dır .

İspat: Tümevarımla bu eşitliğin doğruluğu gösterilebilir. k = 1 için

$$A_1B_0 - A_0B_1 = (-1)^0 = 1$$

olmalıdır. $(a_0a_1+1).1-a_0a_1 = a_0a_1+1-a_0a_1 = 1$ olduğundan eşitlik sağlanır. $k = n$ için eşitlik doğru olsun.

$$A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n = (-1)^{n-1}$$

olur. İspatın tamamlanması için k = n+1 için eşitliğin sağlandığı, yani

$$A_{n+1}B_n - A_nB_{n+1} = (-1)^n$$

olduğu gösterilmelidir; bu durumda,

$$\begin{aligned} A_{n+1}B_n - A_nB_{n+1} &= (a_{n+1}A_n + A_{n-1})B_n - A_n(a_{n+1}B_n + B_{n-1}) \\ &= a_{n+1}A_nB_n + A_{n-1}B_n - a_{n+1}A_nB_n - A_nB_{n-1} \\ &= A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1} \\ &= -(A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 1.1.3. $n \geq 1$ için,

$$C_{n-1} - C_n = \frac{(-1)^n}{B_nB_{n-1}}$$

olur.

İspat: $C_{n-1} = \dfrac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ ve $C_n = \dfrac{A_n}{B_n}$ yazılabilir. Buradan,

$$C_{n-1}-C_n=\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}-\frac{A_n}{B_n}=\frac{A_{n-1}B_n-A_nB_{n-1}}{B_nB_{n-1}}=\frac{-(A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n)}{B_nB_{n-1}}$$

$$C_{n-1}-C_n=\frac{-(-1)^{n-1}}{B_nB_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{B_nB_{n-1}}$$

bulunur. O halde;

$$C_{n-1}-C_n=\frac{(-1)^n}{B_nB_{n-1}}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 1.1.1. $C_0<C_2<C_4<\ldots$ ve $C_1>C_3>C_5>\ldots$
eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

$$C_{k+2}-C_k=(C_{k+2}-C_{k+1})+(C_{k+1}-C_k)$$

$$=\left(\frac{A_{k+2}}{B_{k+2}}-\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}\right)+\left(\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}-\frac{A_k}{B_k}\right)$$

$$=\frac{A_{k+2}B_{k+1}-A_{k+1}B_{k+2}}{B_{k+1}B_{k+2}}+\frac{A_{k+1}B_k-A_kB_{k+1}}{B_kB_{k+1}}$$

$$C_{k+2}-C_k=\frac{(-1)^{k+1}}{B_{k+1}B_{k+2}}+\frac{(-1)^k}{B_kB_{k+1}}=\frac{(-1)^k(B_{k+2}-B_k)}{B_kB_{k+1}B_{k+2}}$$

bulunur. Şimdi bulunan bu ifadenin pozitif ve negatifliği incelenecek olursa;
$\forall\ i\ \geq\ 0$ için $B_i>0$ olup, bir sürekli kesirde, $B_0<B_1<B_2<\ldots$ eşitsizliği daima vardır. O halde,

$B_{k+2} - B_k > 0$ dır. k=2m alınırsa $(-1)^{2m}(B_{2m+2} - B_{2m}) > 0$ olacağından $C_{k+2} - C_k > 0$ olur. Buradan $C_{k+2} > C_k$ olduğu sonucuna varılır. Böylece;

$$C_0 < C_2 < C_4 < ......$$

bulunur. k=2m+1alınırsa, $C_{2k+1} - C_{2k-1} < 0$ olur ve $C_{2k+1} < C_{2k-1}$ yazılabilir. Böylece;

$$C_1 > C_3 > C_5 > \ldots$$

sonucu bulunur[1].

BÖLÜM 2. MATRİS YARDIMI İLE SÜREKLİ KESİRLER

2.1. (L,R)-Dizi Açılımı

Tanım 2.1.1. M boş olmayan bir küme ve $\circ$, M üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. $(M,\circ)$ yapısı M üzerinde $\circ$ işlemine göre birleşme özelliğine sahip ise yarı-grup tur. Yani, içinde asosyatif bir ikili işlem tanımlanmış olan tek işlemli bir cebirsel yapıya bir yarı grup denir[2].

Birimli bir yarı-gruba monoid denir. Monoid aksiyomları aşağıdaki gibidir;

1- $\forall a, b \in M$ için $a \circ b \in M$

2- $\forall a, b, c \in M$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

3- $\exists\ e \in M \ni \forall a \in M$ için $e \circ a = a \circ e = a$

Tanım 2.1.2. A, sembollerden oluşan boş olmayan bir küme olsun. Böyle bir kümeye alfabe denir. Örneğin;

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \sigma, \pi\} \text{ veya } A = \{a, b, c, d, x, y, z\}$$

gibi. Bir A alfabesi verilmişse, bu alfabeden sonlu, sıralı semboller dizisi tanımlanabilir ve buna kelime denir. Kelimenin uzunluğu, içerdiği sembol sayısı kadardır. O halde A üzerindeki tüm kelimelerin kümesi A^* ile gösterilsin ve A^* kümesindeki tüm elemanlar üzerinde bir birleştirme (ekleme) işlemi tanımlansın. x ve y, A^* kümesinin iki elemanı ise x ve y'nin birleştirme işlemi $x * y$ şeklinde gösterilir ve x ile y kelimelerinin yan yana yazılmaları ile elde edilir. Örneğin;

$$abd * cabc = abdcabc$$

$$baaa * ccbabb = baaaccbabb \text{ gibi.}$$

Verilen bir A alfabesi için A^* üzerindeki birleştirme işlemi bir ikili işlemdir ve tanımdan açıkça anlaşılacağı gibi bu işlem birleşme özelliğine sahiptir. Bu nedenle, $\left(A^*,*\right)$ yapısı bir yarı-gruptur[2].

Tanım 2.1.3. ξ_1 ve ξ_2 sıfırdan farklı ve negatif olmayan reel sayılar olmak üzere, $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ vektörlerinin kümesi ζ_2 ile gösterilsin.

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad,\qquad R=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

biçiminde L ve R matrisleri verilsin. $x\in\zeta_2$ ve $x'\in\zeta_2$ için eğer, $\xi_1\le\xi_2$ ise $x=Lx'$ ve eğer $\xi_1\ge\xi_2$ ise $x=Rx'$ olur. L ve R matrislerine dikkat etmeye devam edilirse bu matrisler, bir $\{L,R\}$alfabesinin elemanları olarak düşünülebilir.

$\{L,R\}$ alfabesi kelime ve dizilerden oluşur. Bir (L,R) kelimesi ile $k\ge 0$ için $S_1S_2\cdots S_k$ sonlu dizisi anlaşılır. Burada $1\le j\le k$ için, S_j ya L ya da R dir ve eğer k=0 ise dizilim boştur. $\{L,R\}^*$ ile bütün (L,R) kelimelerinin kümesi tanımlanır.

Kelimelerin zincirleme (birleştirme) işlemi altında $\{L,R\}^*$ bir serbest monoiddir; bu monoidin birim elemanı boş kelime olup Λ ile gösterilir.

$S=S_1\cdots S_k\cdots$ bir sonsuz dizi iken her durumda S_i elemanı ya L yada R dir. Bu yüzden (L,R) dizisi olarak söylenir. Eğer $V=S_1S_2\cdots S_j$ kelimesi S'nin bir başlangıç kısmı ise $S_{j+1}S_{j+2}\cdots$ dizisini tanımlamak için S/V yazılır ki sonuçlar S'nin başlangıcında bir V parçasındadır.

Eğer $W^{(1)},\ldots,W^{(k)},\ldots$ boştan farklı (L,R) kelimelerinin sonsuz bir dizisi ise bu özel mertebeden sonuçları olan (L,R) dizisini gösterir.Zincirleme çarpımın anlatımında ve matris çarpımların tanımlanmasında üstel gösterimler kullanılır. Böylece bir

$R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots L^{a_k}$ açılımı (burada $k, a_0, a_1, \cdots a_k$ negatif olmayan tamsayılardır) belli durumlarda (L,R) kelimesi anlamına gelir ve özel bir matrisin yerini alır [3].

Tanım 2.1.4. $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \zeta_2$ biçimindeki vektör ile bir (L,R) dizisi anlaşılır.

S=$S_1 \cdots S_k \cdots$ olmak üzere ($x \approx S_1 \cdots S_k \cdots$ veya $\xi_1/\xi_2 \approx S_1 \cdots S_k \cdots$ dır.) eğer her $i \geq 0$ için $x_0 = x$ olacak şekilde ζ_2 deki vektörlerin bir $x_0, x_1, \cdots x_k, \cdots$ dizisi varsa $x_i = S_{i+1}x_{i+1}$ yazılabilir. Bu en az bir (L,R) dizisinde her $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \zeta_2$ vektörüne bakılarak kolayca anlaşılır ve ξ_1/ξ_2 oranında x ile bağlı (L,R) dizisi anlaşılır. Her $W \in \{L, R\}^*$ kelimesi için matris çarpımı PROD(W) ile gösterilir. Örneğin;

$$\mathrm{PROD}(L^h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{PROD}(R^h) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{PROD}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alınır.

Tanım 2.1.5. p ve q pozitif tamsayılar ve en büyük ortak bölenleri g olsun. Aşağıdaki eşitlikten,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (\mathrm{PROD}(W))\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}$$

olacak biçimde bir tek $W \in \{L, R\}^*$ kelimesinin olduğu görülür. Bu kelimeye $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ için "üretici kelime" denir.

Teorem 2.1.1. $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \zeta_2$ olsun. Bu durumda;

i) Eğer ; ξ_1/ξ_2 irrasyonel ve $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ sürekli kesir açılımına sahip ise x ile $R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \ldots$ olan (L,R) dizisi anlaşılır.

ii) Eğer ; $\xi_1/\xi_2 = u/v$ (u ve v pozitif tamsayılar) ise, buradan x, WLR^{∞} ve WRL^{∞} olmak üzere iki (L,R) dizisinden biridir.

iii) Eğer ; $\xi_1 = 0$ ise, buradan x, L^{∞}, (L,R) dizisi anlaşılır.

iv) Eğer ; $\xi_2 = 0$ ise, buradan x, R^{∞}, (L,R) dizisi anlaşılır.

Gerçekte (L,R) dizisi, ξ_1/ξ_2 için sürekli kesir bulmak için ihtiyaç duyulan bölme adımlarını oluşturmada hesaplama adımlarının hepsini kaydeder; fakat (L,R) dizi açılımı sürekli kesir açılımı üzerinde avantaja sahiptir. Bu avantaj aşağıdaki bölümlerde önemli rol oynar[3].

2.2. Satır Dengeli, Sütun Dengeli ve Çifte Dengeli Matrisler

a, b, c, d negatif olmayan tamsayılar ve $\det M = ad - bc = n$ olacak şekilde n pozitif bir tamsayı ve bütün $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrislerinin kümesi D_n olsun. $M \in D_n$ alınsın. Eğer $a \geq c$ ve $b \geq d$ ise M'nin birinci satırı dominant yani üstündür denir. Eğer $c \geq a$ ve $d \geq b$ ise M'nin ikinci satırı dominant yani üstündür denir. Eğer M'nin satırlarından hiçbiri dominant değilse M'ye satır dengeli matris denir. Eğer M'nin sütunlarından hiçbiri dominant değilse M'ye sütun dengeli matris denir.

a < c ve d < b yada a < b ve d < c durumları olamaz, çünkü bu şartlar altında $\det M \leq 0$ olur. Böylece; M satır dengeli matristir ancak ve ancak $a > c$ ve $d > b$ dir. M sütun dengeli matristir ancak ve ancak $a > b$ ve $d > c$ dir.

Satır dengeli matrislerin kümesi $(R,B)_n$ ile sütun dengeli matrislerin kümesi $(C,B)_n$ ile gösterilir. $M \in D_n$ matrisi için M hem satır dengeli hem de sütun dengeli ise çifte dengeli matris denir. D_n kümesinde çifte dengeli matrislerin kümesi $(D,B)_n$ ile gösterilir.

Aşağıdaki , (2.1)-(2.12) arasındaki kavramları kolayca görülebilir[3].

(2.1) Her n için $(R,B)_n$ ve $(C,B)_n$ sonlu kümelerdir.

(2.2) $(R,B)_1 = (C,B)_1 = \{I\}$

(2.3) $M \in D_n$ için M'nin ilk satırı dominanttır ancak ve ancak M, R gibi bir sol çarpana sahip ve $M \in R.D_n$ dir. $M \in D_n$ için M'nin ikinci satırı dominanttır ancak ve ancak M, L gibi bir sol çarpana sahip ve $M \in L.D_n$ dir.

Örnek 2.3.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in D_1$ olsun. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$R.\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in D_1$ bulunur.

(2.4) $R.D_n$, $L.D_n$ ve $(R,B)_n$ kümeleri ayrık olup birleşimleri D_n dir.

(2.5) $M \in D_n$ için M'nin birinci kolonu dominanttır ancak ve ancak M'nin bir L sağ çarpanı vardır ve $M \in D_n.L$ dir. $M \in D_n$ için M'nin ikinci kolonu dominanttır ancak ve ancak M'nin bir R sağ çarpanı vardır ve $M \in D_n.R$ dir.

(2.6) $D_n.L$, $D_n.R$ ve $(C,B)_n$ kümeleri ayrık olup birleşimleri D_n dir.

(2.7) $\forall$ $M \in D_1$ matrisi için tam olarak bir $W \in \{L,R\}^*$ kelimesi vardır öyleki $M = PROD(W)$ dir.

(2.8) PROD dönüşümü $\{L, R\}^*$ serbest monoidinden D_1 yarı grubu üzerine bir izomorfizmdir

(2.9) $\forall M \in D_n$ matrisi için $P \in D_1$ ve $Q \in (R, B)_n$ olmak üzere bir M=PQ çarpımı bir tek şekilde ifade edilebilir.

Örnek 2.9.1. $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in D_1$ ve $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in (R, B)_4$ olmak üzere

P.Q=$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \in D_4$ bulunur.

(2.10) $\forall M \in D_n$ matrisi için $Q \in (C, B)_n$ ve $P \in D_1$ olmak üzere bir M=QP çarpımı bir tek şekilde ifade edilebilir.

(2.11) $M \in (C, B)_n$ ve M=PQ, $P \in D_1$, $Q \in (R, B)_n$ ise o zaman $Q \in (D, B)_n$ dir.

(2.12) $M \in (R, B)_n$ ve M=QP, $Q \in (C, B)_n$, $P \in D_1$ ise o zaman $Q \in (D, B)_n$ dir.

2.3. $(R,B)_n$, $(C,B)_n$ veya $(D,B)_n$ Kümelerine Ait Olan Bütün Matrisleri Bulmak İçin Etkili bir Yöntem

$M \in D_n$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun. p = d-b ve q = a-c olmak üzere $r(M) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-b \\ a-c \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlıdır. Eğer $M \in (R, B)_n$ ise hem p hem de q pozitiftir. Bu durumda $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ için üreteç kelimeyi gösteren W_M kullanılır. Aşağıdaki gerçekleri göstermek kolaydır[3].

(2.3.1) $\forall M \in D_n$ için

$$r(ML) = L^{-1}.r(M)$$

$$r(MR) = R^{-1}.r(M) \qquad \text{dir.}$$

Örnek 2.3.1.1: $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in D_n$ alınsın.

$$ML=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad r(ML)=\begin{pmatrix} d-b \\ a+b-c-d \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$$L^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ r(M)=\begin{pmatrix} d-b \\ a-c \end{pmatrix} \text{ ise } L^{-1}r(M)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d-b \\ a-c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d-b \\ a+b-c-d \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Böylece $r(ML)=L^{-1}.r(M)$ bulunur.

(2.3.2) $\forall M \in D_n$ ve $\forall W \in \{L,R\}^*$ için

$$r(M.PROD(W))=(PROD(W))^{-1}r(M)$$

dir.

(2.3.3) $M \in D_n$ için $r(M)=\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}$ dir ancak ve ancak

$$M=\begin{pmatrix} s'+g & s \\ s' & s+g \end{pmatrix}$$

dir. Burada (g,s,s') üçlüsü $g(s+s'+g)=n$ eşitliğini sağlar.

Tanım 2.3.1. Eğer $g(s+s'+g)=n$ ise negative olmayan tamsayıların (g,s,s') üçlüsüne bir $*$ üçlüsü denir. $M \in D_n$ için eğer,

$$M.PROD(W)=\begin{pmatrix} s'+g & s \\ s' & s+g \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir $W \in \{L,R\}^*$ kelimesi varsa, (g,s,s') $*$ üçlüsüne “M ile bağlantılıdır” denir.

Teorem 2.3.1. $\forall M \in (R,B)_n$ için M ile bağlantılı tam olarak bir $*$ üçlüsü vardır. Bu üçlü için,

$$M.PROD(W_M) = \begin{pmatrix} s^{'} + g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}$$

eşitliği sağlanır[4].

İspat: $M \in (R,B)_n$ olsun. Buradan $r(M) = (PROD(W_M))\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}$ yazılır ve g, $r(M)$ 'nin elemanlarının en büyük ortak bölenidir. (2.3.2) kullanılarak

$$r(M.PROD(W_M)) = (PROD(W)^{-1}.r(M) = \begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}$$

yazılır. Böylece (2.3.3) de kullanılarak,

$$M.PROD(W_M) = \begin{pmatrix} s^{'} + g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}$$

yazılır ve $(g, s, s^{'})$ $*$ üçlüsünün, M ile bağlantılı olduğu görülür. Şimdi bu $*$ üçlüsünün tek olduğu gösterilsin:

$(g_1, s_1, s_1^{'})$ üçlüsü M ile bağlantılı olsun. $W_1 \in \{L,R\}^*$ vardır ve

$$M.PROD(W_1) = \begin{pmatrix} s_1^{'} + g_1 & s_1 \\ s_1^{'} & s_1 + g_1 \end{pmatrix}$$

olur. (2.3.2) kullanılarak

$$(PROD(W_1))^{-1} r(M) = r(M.PROD(W_1)) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$$

$$(PROD(W_1))\begin{pmatrix} g_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = r(M) = (PROD(W_M)\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan,

$$W_1 = W_M \text{ ve } g_1 = g \ , s_1 = s \ , s_1^{'} = s^{'}$$

bulunur. Bundan dolayı $(g,s,s^{'})$, M ile bağlantılı tek $*$ üçlüsüdür.

Teorem 2.3.2. $\forall\,(g,s,s^{'})*$ üçlüsü için tam olarak bir tane $Q \in (D,B)_n$ matrisi vardır ki bu matrisin bağlantılı $*$ üçlüsü $(g,s,s^{'})$ dir. Bağlantılı $*$ üçlüsü olarak $(g,s,s^{'})$ üçlüsüne sahip olan $M \in (R,B)_n$ matrisi, U, W_Q 'nun başlangıç parçası olmak üzere, $M = Q.PROD(U)$ formundadır. Üstelik bu durumda, $W_Q = UW_M$ yazılır.

İspat: $(g,s,s^{'})$ bir $*$ üçlüsü olsun. $\begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix} \in (R,B)_n$ olduğundan (2.10) ve (2.12) kullanılarak,

$$\begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix} = QP \ , \ Q \in (D,B)_n \, ,$$

$P \in D_1$ yazılabilir. (2.7)' den $P = PROD(W)$, $W \in \{L,R\}^*$ olur. Teorem 2.3.1 den

$$Q.PROD(W_Q) = \begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}$$

dır. Böylece, $W = W_Q$ olur.

$M \in (R,B)_n$ bağlantılı $*$ üçlüsü olarak $(g,s,s^{'})$ ' e sahip olsun.

$$M.PROD(W_M) = \begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}$$

ve böylece $M.PROD(W_M) = Q.PROD(W_Q)$ olur. (2.10) ,(2.12), (2.7) kullanılarak $M = Q_1.PROD(U)$ yazılabilir. $U \in \{L,R\}^*$ ve $Q_1 \in (D,B)_n$ dir. Böylece,

$$Q.PROD(W_Q) = Q_1.PROD(UW_M)\, ,$$

olur. $Q = Q_1, W_Q = UW_M$ ve $M \in (D,B)_n$ dır.(2.10) dan M=Q bulunur. Buradan Q, bağlantılı * üçlüsü $(g,s,s^{'})$ olan $(D,B)_n$ ’deki tek matristir.

Sonuç 2.3.1. $M \in (R,B)_n$ ve $V \in \{L,R\}^*$ ise

$M.PROD(V) \in (R,B)_n \Leftrightarrow V, W_M$ ’nin bir başlangıç parçasıdır.

İspat: $Q \in (D,B)_n$ matrisi M ile aynı bağlantılı * üçlüsüne sahip olsun. Teorem 2.3.2 yardımıyla,

$M = QPROD(U)$, $W_Q = UW_M$

dir. V , W_M ’nin bir başlangıç parçasıdır $\Leftrightarrow$ UV , W_Q ’ nun bir başlangıç parçasıdır.

Teorem 2.2.2 den, $Q.PROD(UV) \in (R,B)_n \Leftrightarrow UV, W_Q$ ’nun bir başlangıç parçasıdır.

Çünkü , $M.PROD(V) \in (R,B)_n$ olduğundan

$M.PROD(V) = Q.PROD(UV) \Leftrightarrow V, W_M$ ’ nin bir başlangıç parçasıdır.

Sonuç 2.3.2. p asal sayı ise $(D,B)_p$ ’nin p tane elemanı vardır.

İspat: n= p için * üçlüsü $g(s+s^{'}+g) = p$ ’yi sağlamadır.

Eğer p asal ise g=1 ve $s+s^{'}+g = p$ olur ve buradan $s+s^{'} = p-1$ dır. Buradan tam olarak p tane * üçlüsü vardır. Çifte dengeli matrisler * üçlüleriyle (1-1) eşlenmiş olduğundan $(D,B)_p$ tam olarak p tane elamana sahiptir.

Örnek 2.3.2.1. p=5 olsun. $M = \begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir M matrisi alınsın. Buna göre $M \in (D,B)_5$ olmalıdır. Yani, $g(s+s^{'}+g) = 5$ sağlanmalıdır. Bu çarpımda g=1 ve $(s+s^{'}+g) = 5$ alınırsa $s+s^{'}$=4 olur. Buradan s=0 için $s^{'}$=4, s=4 için $s^{'}$=0,s=2 için $s^{'}$=2, s=1 için $s^{'}$=3, s=3 için $s^{'}$=1 bulunur. Böylece bu değerler kullanılarak;

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

satır dengeli matrisleri bulunur. Bu matrislerin transpozları alınarak

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sütun dengeli matrisleri bulunur. Yukarıda bulunan matrislerden $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisi çifte dengelidir. Diğerlerini bulmak için

$$Q = \begin{pmatrix} a+x & a \\ a & a+y \end{pmatrix} \in (D,B)_5$$

olsun. Buradan $(a+x)(a+y)-a^2$ =5 bulunur. a= 0 alınırsa x.y=5 olur ve x=1 ve y=5 alınır. a=1 alınırsa x+y+x.y=5 olur ve x=1, y=2 ve x=2, y=1 alınır. Böylece bulunan bu değerlerle aşağıdaki çifte dengeli matrisler yazılır:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Yukarıda bulunan $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisi ile birlikte 5 tane çifte dengeli matris bulunmuş olur.

Sonuç 2.3.3. n asal olmayan bir sayı ise $(D,B)_n$, n elemandan fazla elemana sahiptir. Örneğin $(D,B)_4$, $(D,B)_6$ ve $(D,B)_8$ sırasıyla 5, 8 ve 11 matris bulundurur.

İspat: $(D,B)_n$ ’nin elemanlarını bulmak için n için tüm * üçlülerini listeleyerek başlanılabilir. Her * üçlüsü için aşağıdaki formda $\begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}$ matrisi yazılabilir; $Q.PROD(W_Q)$ (Q çifte dengeli matrisi ve $(g,s,s^{'})$ ye eşlenmiş). Bu yöntem eşlenmiş W_Q kelimeleriyle birlikte tüm $Q\in(D,B)_n$ matrislerinin bir listesini sağlar. W_Q ’nun başlangıç alt kelimelerinin her biriyle Q çarpılarak $(R,B)_n$ ’deki matrislerinin bir listesi elde edilir. $(C,B)_n$ ’deki matrisler $(R,B)_n$ ’deki matrislerin transpozudurlar.

Örnek 2.3.3.1. $(D,B)_4$ ün elemanları aşağıdaki gibi bulunur: n= 4 alındığında $g(s+s^{'}+g)=4$ demektir. Burada g=1 ve $(s+s^{'}+g)=4$ veya g=2 ve $(s+s^{'}+g)=2$ alınır. Böylece s ve $s^{'}$ değerleri 5 farklı biçimde bulunur. Dolayısıyla 5 tane çifte dengeli matris bulunur. Benzer biçimde $(D,B)_6$’ nın da 8 ve $(D,B)_8$’ nın 11 matrisi bulunur.

Buradan şöyle bir sonuç çıkarılabilir: n =2k olmak üzere determinantı n olan çifte dengeli matrislerin sayısı 3k-1 tanedir.

2.4. Satır Dengeli Matrisler İçin Geçişler

Bu kısımda verilen teorem, P_1 ve P_2 , L ve R ’lerin boş olmayan matris çarpımı olup M_1 ve M_2 satır dengeli ya da çifte dengeli matrisler olmak üzere $M_1.P_1=P_2.M_2$ biçiminde denklemler yazılmasına yardım eder. Bu denklemlerden daha sonra dönüştürücüler için geçiş tabloları elde edilir. (L,R) dizileri için bir taban demekle şu kastedilir; (L,R) kelimelerinin sonlu bir B kümesi olup, her (L,R) dizisi bir başlangıç parçası olarak B’deki kelimelerden tam olarak birine sahiptir.

$S=S_1S_2\ldots S_k\ldots$ bir (L,R) dizisi ise ve B, (L,R) dizileri için bir taban ise H(S,B) , B tabanına ait S’nin başlangıç parçası olarak tanımlanır.

Bir $W \in \{L,R\}^*$ kelimesinin bir ara dalı demek aşağıdaki şartları sağlayan bir $V \in \{L,R\}^*$ kelimesi demektir:

i) V,W’nin başlangıç parçası değildir.

ii) Eğer U, V’nin herhangi has başlangıç parçası ise o zaman U, W’nin bir başlangıç parçasıdır.

Tanım 2.4.1. Her $M \in (R,B)_n$ matrisi için W_M kelimesinin tüm ara dallarının kümesi, B_M olarak tanımlanır. Bu durumda B_M, (L,R) dizileri için tabandır.

Teorem 2.4.1. $M_1 \in (R,B)_n$ olsun. Her $V_1 \in B_M$ için $M_1.PROD(V_1) \in L.(C,B)_n$ ya da $M_1.PROD(V_1) \in R.(C,B)_n$ dir. L veya R, V_1’in son harfidir. Üstelik boş olmayan bir $V_2 \in \{L,R\}^*$ kelimesi ve bir $M_1.PROD(V_1) = PROD(V_2).M_2$ olacak şekilde $M_2 \in (D,B)_n$ matrisi vardır.

İspat: Burada incelenmesi gereken 4 durum ortaya çıkar:

1.durum : $V_1 = W_{M_1}L$ durumu.

Bu durumda,

$$M_1.PROD(V_1) = M_1 PROD(W_{M_1}).L = \begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}.L = \begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s^{'}+g+s & s \\ s^{'}+s+g & s+g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^{'}+g+s & s \\ 0 & g \end{pmatrix} \in L.(C,B)_n$$

2.durum : $V_1 = W_{M_1}R$ durumu.

Bu durumda,

$$M_1.PROD(V_1) = M_1 PROD(W_{M_1}).R = \begin{pmatrix} s^{'}+g & s \\ s^{'} & s+g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} s^{'}+g & s^{'}+g+s \\ s^{'} & s^{'}+s+g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ s^{'} & s^{'}+s+g \end{pmatrix} \in R.(C,B)_n$$

3.durum: $W_{M_1} = URZ$; ($U, Z \in \{L, R\}^*$ ve $V_1 = UL$ için) durumu.

Bu durumda,

$$PROD(Z) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{olsun. } PROD(Z) \in D_1 \text{ olduğundan } (PROD(Z))^{-1} = \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$$

dir.

$$M_1.PROD(U) = M_1 PROD(W_{M_1}).(PROD(Z))^{-1}.R^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} s' + g & s \\ s' & s+g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s'w + gw - sz & -s'w - s'y - gw - gy + sz + sx \\ s'w - sz - gz & -s'w - s'y + sz + sx + gz + gx \end{pmatrix}$$

olur. $M_1 PROD(U)$ 'nun elemanları pozitif olduğundan $s'w - sz - gz \geq 0$ ve bundan dolayı $s'w + gw - sz > 0$ dır. (w, z negatif değil)

Bu gerçeği kullanarak;

$$M_1.PROD(V_1) = M_1 PROD(U).L$$

$$= \begin{pmatrix} -s'y - gy + sx & -s'w - s'y - gw - gy + sz + sx \\ -s'y + sx + gx & -s'w - s'y + sz + sx + gz + gx \end{pmatrix}$$

$$= L . \begin{pmatrix} -s'y - gy + sx & -s'w - s'y - gw - gy + sz + sx \\ g(x+y) & g(z+x+w+y) \end{pmatrix} \in L.(C,B)_n$$

dir.

4.durum: $W_{M_1} = ULZ$, ($U, Z \in \{L, R\}^*$ ve $V_1 = UR$ için) durumu.

Bu durumda,

$$PROD(Z) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \quad \text{olsun.}$$

$$M_1.PROD(U) = M_1 PROD(W_{M_1}).(PROD(Z))^{-1}.L^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} s'w + s'y + gw + gy - sz - sx & -s'y - gy + sx \\ s'w + s'y - sz - sx - gz - gx & -s'y + sx + gx \end{pmatrix}$$

dir. Bu matris pozitif elemanlıdır. Bundan dolayı $-s'y - gy + sx \geq 0$ olur ve bu nedenle $-s'y + sx + gx > 0$ dır.

Bu gerçeği kullanarak;

$$\mathrm{M}_1.\mathrm{PROD}(\mathrm{V}_1) = \mathrm{M}_1\mathrm{PROD}(\mathrm{U}).\mathrm{R}$$

$$= \mathrm{R}\begin{pmatrix} g(w+y+z+x) & g(w+z) \\ s'w+s'y-sz-sx-gz-gx & s'w-sz-gz \end{pmatrix}$$

ise buradan

$$\mathrm{M}_1.\mathrm{PROD}(\mathrm{V}_1) \in \mathrm{R}.(\mathrm{C},\mathrm{B})_n$$

dir. (2.9) ve (2.11) kullanılarak $(\mathrm{C},\mathrm{B})_n \subseteq \mathrm{D}_1(\mathrm{D},\mathrm{B})_n$ ve bundan dolayı $\mathrm{L}.(\mathrm{C},\mathrm{B})_n$ ve $\mathrm{R}.(\mathrm{C},\mathrm{B})_n$, $(\mathrm{D}_1 - \{\mathrm{I}\}).(\mathrm{D},\mathrm{B})_n$ kümesinde kalırlar.

(2.7) kullanılarak $(\mathrm{D} - \{\mathrm{I}\})$’deki her matris $\{\mathrm{L},\mathrm{R}\}^*$’daki boş kümeden farklı olan bir kelimeye PROD işlemi uygulanarak elde edilir. Bundan dolayı her bir dört durumda da boş olmayan bir $\mathrm{V}_2 \in \{\mathrm{L},\mathrm{R}\}^*$ kelimesi ve $\mathrm{M}_1.\mathrm{PROD}(\mathrm{V}_1) = \mathrm{PROD}(\mathrm{V}_2).\mathrm{M}_2$ olacak şekilde bir $\mathrm{M}_2 \in (\mathrm{D},\mathrm{B})_n$ matrisi vardır.

Sonuç 2.4.1. Sonuç 2.3.1 den görülür ki, $\mathrm{B}_{\mathrm{M}_1}$ tabanının elemanları minimaldir (her $\mathrm{V}_1 \in \mathrm{B}_{\mathrm{M}_1}$ anlamında). Eğer V,V_1 in herhangi has bir başlangıç parçası ise, o zaman $\mathrm{M}_1.\mathrm{PROD}(\mathrm{V})$ ne L’ye ne de R’ye bir sol çarpan olarak sahip değildir[4].

2.5. $\tau_{n,v}$ Dönüştürücüleri ve (LR) Dizi Dönüşümleri

Tanım 2.5.1. Bir (L,R) dizisinin $\tau = (\mathrm{A},\upsilon)$ dönüştürücüsü (τ’nun durumlarının kümesi A) demekle $(\mathrm{M}_1,\mathrm{V}_1;\mathrm{V}_2,\mathrm{M}_2)$ dörtlüsünün sonlu bir υ kümesiyle birlikte boş olmayan sonlu bir A kümesi anlaşılır. $(\mathrm{M}_1,\mathrm{V}_1;\mathrm{V}_2,\mathrm{M}_2)$ dörtlüsüne τ’nun geçişlerinin sonlu kümesi denir. Bu küme aşağıda sıralanan şartları sağlar. $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2 \in \mathrm{A}$ olsun ve $\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2$ boş olmayan (L,R) kelimeleri ve sırasıyla giriş kelimesi ve çıkış kelimesi olsunlar. Buna göre aşağıdaki iki koşul sağlanır:

i) $(M_1, V_1; V_2^{'}, M_2^{'}) \in \upsilon$

$(M_1, V_1; V_2^{''}, M_2^{''}) \in \upsilon$ ise $V_2^{'} = V_2^{''}$ ve $M_2^{'} = M_2^{''}$ dir.

ii) $\forall M_1 \in A$ ve (L,R) kelimelerinin kümesi olan V_1 için $(M_1, V_1; V_2, M_2) \in \upsilon$, (L,R) dizileri için bir taban olacak şekilde V_2, M_2 vardır.

Tanım 2.5.2. $B^{\tau}_{M_1}$ tanımlansın; (L,R) kelimelerinin kümesi olan V_1 için $(M_1, V_1; V_2, M_2) \in \upsilon$ olacak şekilde V_2, M_2 var olsun.

$M_1 \in A$ ve $V_1 \in B^{\tau}_{M_1}$ için $\delta(M_1, V_1)$ ve $\sigma(M_1, V_1)$ sırasıyla υ'deki geçişin 3. ve 4. bileşenini göstersin υ'nin 1. ve 2. bileşenleri M_1 ve V_1 dir.

Tanım 2.5.3. $\tau = (A, \upsilon)$ bir (L,R) dizi dönüştürücüsü olsun. τ'nun herhangi bir M durumu ile (L,R) dizilerinin kümesinden kendisine aşağıdaki gibi bir $\Psi_M (= \Psi_{M,\tau})$ fonksiyonu tanımlanabilir. S, herhangi bir (L,R) dizisi olsun. Tümevarımsal olarak $S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots,$ $M^{(0)}, M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots,$ $V^{(0)}, V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots$ ve $S^{(0)} = S, M^{(0)} = M$ yazılarak $\forall$ i =0,1,2,3,…için $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots,$

$$V^{(i)} = H(S^{(i)}, B_{M^{(i)}})$$

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} / V^{(i)}$$

$$M^{(i+1)} = \sigma(M^{(i)}, V^{(i)})$$

$$W^{(i+1)} = \delta(M^{(i)}, V^{(i)})$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\Psi_M(S)$, (L,R) dizisi $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots$ olarak alınır.

Lemma 2.5.1. $x \in \zeta_2$ olsun. $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots, W^{(k)}, \ldots$ boş olmayan (L,R) kelimelerinin bir sonsuz dizisi olsun. Eğer $\forall k \geq 1$ için $x = PROD(W^{(1)}.W^{(2)} \cdots W^{(k)})x^{(k)}$ olacak şekilde bir $x^{(k)} \in \zeta_2$ vektörü varsa o zaman x, $W^{(1)}.W^{(2)} \cdots W^{(k)} \cdots$ (L,R) dizisini kabul eder.

Tanım 2.5.4. Karesi n'nin bir böleni olan her pozitif ϑ tamsayısı için $\tau_{n,\vartheta} = (A_{n,\vartheta}, \upsilon_{n,\vartheta})$ olsun. Burada $A_{n,\vartheta}$, M'nin elemanlarının en büyük ortak böleni ϑ olacak şekilde tüm $M \in (D,B)_n$ matrislerinin kümesidir. Ayrıca $\upsilon_{n,\vartheta}$, $M_1, M_2 \in A_{n,\vartheta}$, $V_1, V_2 \in \{L,R\}^*$, $V_1 \in B_{M_1}$ ve $M_1.PROD(V_1) = PROD(V_2).M_2$ olacak şekilde $(M_1, V_1; V_2, M_2)$ dörtlülerinin kümesidir.

Teorem 2.5.1. $\tau_{n,\vartheta}$ bir (L,R) dizi dönüştürücüsüdür. $\forall M \in A_{n,\vartheta}$ için birleştirilmiş (L,R) dönüşümü olan Ψ_M aşağıdaki özelliğe sahiptir. Eğer S bir (L,R) dizisi ise ve $x \in \zeta_2$ vektörü S yi kabul ederse bu durumda Mx vektörü $\Psi_M S$, (L,R) dizisini kabul eder. Gösterim olarak; $x \approx S$ ise $Mx \approx \Psi_M S$ dir.

İspat: Her $M_1 \in A_{n,\vartheta}$ için her $V_1 \in B_{M_1}$ kelimeleri boş küme değildir. Böylece bunun W_{M_1} in mevcut bir dalı olduğu söylenebilir. (2.10) ve (2.8) kullanılarak V_2 ve M_2, V_1 ve M_1 ile tek olarak belirlidir ve teorem 2.4.1 yardımıyla V_2'nin boş küme olmadığı görülür. Böylece $\tau_{n,\vartheta}$, tanım 2.5.4 in bütün şartlarının sağlar. $\tau = \tau_{n,\vartheta}$ ve her $M_1 \in A_{n,\vartheta}$ için $B^{\tau}_{M_1} = B_{M_1}$ olduğu doğrudan görülebilir.

Şimdi $x \in \zeta_2$ alınsın, S bir (L,R) dizisidir, $x \approx S$ ve $M \in A_{n,\vartheta}$ dir. Buradan $S^{(0)} = S, M^{(0)} = M, V^{(0)} = H(S^{(0)}, B_{M^{(0)}}) = H(S, B_M)$ yazılır. Ayrıca, $S^{(0)} = V^{(0)} S^{(1)}$ yazılır.

$V^{(0)}$'ın uzunluğu k_0 olsun. Ayrıca $k_0 \geq 1$ dir. $S = S_1 \ldots S_k \ldots$ alınsın. Buradan $x \approx S$ dır, her $k \geq 0$ için ve $x_0 = x$ olacak şekilde ζ_2'deki vektörlerin bir $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ dizisi vardır ve $x = (PROD(S_1 \ldots S_{k_0}))x_{k_0} = (PROD(V^{(0)}))x_{k_0}$ olur. $x^{(1)} = x_{k_0}$ alınsın. Buradan

$$Mx = (M.PROD(V^{(0)}))x^{(1)} = (PROD(\delta(M^{(0)}, V^{(0)})).\sigma(M^{(0)}, V^{(0)}))x^{(1)}$$
$$= (PROD(W^{(1)}).M^{(1)})x^{(1)}$$

olur. Burada $M^{(1)} \in A_{n,\vartheta}$, $x^{(1)} \in \zeta_2$ ve $x^{(1)} \approx S^{(1)}$ dir. Şimdi eğer $Mx = (PROD(W^{(1)} \ldots W^{(k)}).M^{(k)}).x^{(k)}$ ise, burada $M^{(k)} \in A_{n,\vartheta}$, $x^{(k)} \in \zeta_2$ ve $x^{(k)} \approx S^{(k)}$ dır, burada bir argüman olarak sadece $M^{(k)}x^{(k)} = (PROD(W^{(k+1)}).M^{(k+1)}).x^{(k+1)}$ gösterimi verilmiştir ve $M^{(k+1)} \in A_{n,\vartheta}$, $x^{(k+1)} \in \zeta_2$ ve $x^{(k+1)} \approx S^{(k+1)}$ dir. Sonraki tümevarım ile her $k \geq 1$ için $Mx = (PROD(W^{(1)} \ldots W^{(k)}).M^{(k)}).x^{(k)} = (PROD(W^{(1)} \ldots W^{(k)})).M^{(k)}.x^{(k)}$ olacak şekilde bir $M^{(k)} \in A_{n,\vartheta}$ matrisi ve $x^{(k)} \in \zeta_2$ vektörü vardır. Buradan $M^{(k)}x^{(k)} \in \zeta_2$ dir, şimdi Lemma 2.5.1 ve Tanım 2.5.4 uygulanarak $Mx \approx W^{(1)} \ldots W^{(k)} \ldots = \Psi_M(S)$ sonucu elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Örnek 2.5.1. $\alpha = [2;2,2,1,6,2,\ldots]$ olsun.

$\beta = \dfrac{2\alpha+1}{\alpha+2}$ için sürekli kesir açılımı bulalım.

Çözüm: Bu problemin çözülebilmesi için $\alpha = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$ ve $\beta = \dfrac{\eta_1}{\eta_2}$ alınır, yani $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ sütun vektörleri alınır. Teorem 2.1.1 kullanılarak $x \approx R^2L^2R^2L^1R^6L^2 \ldots$ yazılır. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in A_{3,1}$ dir. $\tau_{3,1} = (A_{3,1}, \upsilon_{3,1})$ dönüştürücüsü tanımlanır. $A_{3,1}$ durumlarının kümesi;

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrislerinden oluşur.

$\upsilon_{3,1}$ dönüşümlerinin kümesi aşağıdaki dörtlülerden oluşur:

$$(A,R;R^3,A),(A,LR;R,B),(A,L^2R;RL^2,A'),(A,L^3;L,A),(B,L;LR,A),$$
$$(B,R;RL,A'),(A',L;L^3,A'),(A',R^2L;LR^2,A),(A',RL;L,B),(A',R^3;R,A')$$

$\tau_{3,1}$'in simetrikleri Tablo 2.5.1 de verildi. Burada, dönüşümler tabloda ayrıca durum grafiği şeklinde gösterilir.

$R^2L^2R^2L^1R^6L^2\cdots$ (L,R) dizisi S olarak alındığında $x \approx S$ ve $y = Bx \approx \Psi_B(S)$ dir.

$\Psi_B(S)$ 'nin hesaplamaları aşağıdaki gibi devam eder;

dizinin girişleri ; $S = R^2L^2R^2L^1R^6L^2\ldots$

giriş kelimeleri ; $(R)(RL)(L)(R)(R)(LR)(R)(R^3)(RL)(L)\ldots$

durumlar ; $BA'BAAABA'A'BA\ldots$

çıkış kelimeleri ; $(RL)(L)(LR)(R^3)(R^3)(R)(RL)(R)(L)(LR)\ldots$

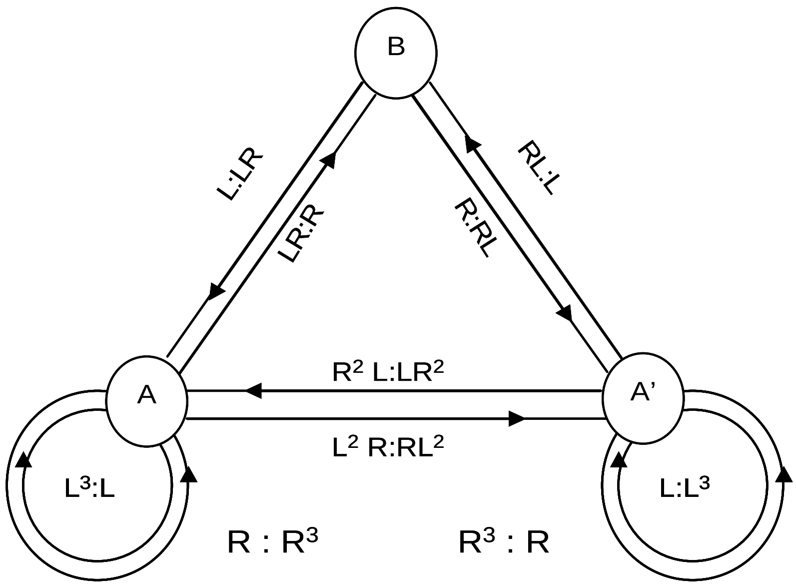
çıkış dizisi ; $\Psi_B(S) = RL^3R^9LRL^2R\ldots$

$y \approx R^1L^3R^9L^1R^1L^2R^1\cdots$ ise buradan β 'nın sürekli kesir açılımı ;

$\beta = [1;3,9,1,1,2,1,\ldots]$ olur.

Tablo 2.5.1. ($\tau_{3,1}$ için geçiş tablosu)

	A	B	A'
A	$R\ ;R^3 \big/ L^3;L$	LR;R	$L^2R;RL^2$
B	L;LR		R;RL
A'	$R^2L;LR^2$	RL;L	$R^3;R \big/ L;L^3$



Şekil 2.5.1. ($\tau_{3,1}$ için durum grafiği)

Örnek 2.5.2. $\alpha=\sqrt{2}=[1;2,2,2,2,2,\ldots]$ olsun.

$\beta=\dfrac{2\alpha+1}{\alpha+2}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}$ sayısının sürekli kesir açılımını bulalım:

Çözüm: $x\approx R^1L^2R^2L^2R^2L^2\ldots$ yazılır. $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\in A_{3,1}$ dir. $\tau_{3,1}=(A_{3,1},\upsilon_{3,1})$

dönüştürücüsü tanımlanır. $A_{3,1}$ durumlarının kümesi;

$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ ve $A'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ matrislerinden oluşur. $\upsilon_{3,1}$

dönüşümlerinin kümesi aşağıdaki dörtlülerden oluşur:

$(A,R;R^3,A),(A,LR;R,B),(A,L^2R;RL^2,A'),(A,L^3;L,A),(B,L;LR,A),$

$(B,R;RL,A'),(A',L;L^3,A'),(A',R^2L;LR^2,A),(A',RL;L,B),(A',R^3;R,A')$

$R^1L^2R^2L^2R^2L^2\cdots$ (L,R) dizisi S olarak alındığında $x\approx S$ ve $y=Bx\approx\Psi_B(S)$ dir.

$\Psi_B(S)$ 'nin hesaplamaları aşağıdaki gibi devam eder;

dizinin girişleri; $S = R^1L^2R^2L^2R^2L^2\ldots$

giriş kelimeler; $(R)(L)(L)(R^2L)(LR)(R)(L)\ldots$

durumlar; $BA'A'A'ABA'A'A'A\ldots$

çıkış kelimeleri; $(RL)(L^3)(L^3)(LR^2)(R')(R'L)(L^3)(L^3)(LR^2)\ldots$

çıkış dizisi; $\Psi_B(S) = RL^8R^4L^8R^4L^8R^4\ldots$

$y \approx R^1L^8R^4L^8R^4L^8R^4\cdots$ ise buradan β'nın sürekli kesir açılımı ;

$\beta = [1;8,4,8,4,8,4,\ldots]$ olur.

2.6. $\{L,R\}^*$ Kümesinin ve D_1 Kümesinin Otomorfizmi ve Anti-otomorfizmi $\tau_{n,\vartheta}$' nin Simetrikleri

INT dönüşümü $\{LR\}^*$ kümesinden $\{LR\}^*$ kümesi içine dönüşüm olsun. Bu dönüşüm, L ve R' yi değiştirir. Böylece;

$$\mathrm{INT}(R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}\ldots L^{a_k}) = L^{a_0}R^{a_1}L^{a_2}\ldots R^{a_k}$$

yazılır. REV dönüşümü, $\{L.R\}^*$ dan $\{L,R\}^*$ içine dönüşüm olsun. Bu dönüşüm, kelimeleri tersine çevirir. Böylece;

$$\mathrm{REV}(S_1S_2\ldots S_k) = S_k\ldots S_2S_1$$

yazılır. $\{L.R\}^*$ serbest monoidi, sadece iki tane otomorfizme sahiptir; bunlar; INT dönüşümü ve özdeşlik dönüşümleridir. Ayrıca sadece iki anti-otomorfizme sahiptir, bunlar; REV dönüşümü ve INT.REV (=REV.INT) dönüşümüdür. Matris çarpımlar $M \to M'$ dönüşümü ile korunur. Burada; a,b,c,d $\in Z$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ keyfi matristir ve M''nin içinedir. D_1 yarı grubuna bu dönüşümün sıralanışı, $L' = R$ ve $R' = L$ altında bir otomorfizmdir.

$M \to M^T$ dönüşümü alalım. Bu dönüşüm her $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini $M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ transpozunu içine götürür. D_1 yarı grubuna, bu dönüşümün sıralanışı $L^T = R$ ve $R^T = L$ altında bir anti-otomorfizmdir. Sonuçlardan önce aşağıdaki teorem vermek uygun olur.

Teorem 2.6.1. $M \in D_1$ olsun. $k, a_0, a_1, \ldots, a_k$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots L^{a_k}$$

dır. Bu durumda;

$$M' = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = L^{a_0} R^{a_1} L^{a_2} \ldots R^{a_k},$$

$$M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = R^{a_k} \ldots R^{a_1} L^{a_0}$$

$$(M')^T = (M^T)' = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = L^{a_k} \ldots L^{a_1} R^{a_0}$$

olur.

Teorem 2.6.2. $M \in (R,B)_n$ ve $V \in \{L,R\}^*$ olsun. Eğer $V \in B_M$ ise bu durumda $INT(V) \in B_{M'}$ olur.

İspat : $V \in B_M$ olsun. Sonuç 2.3.1 yardımıyla $M.PROD(V) \notin (RB)_n$ olduğu görülür ve U, V'nin herhangi bir has başlangıç parçası ise o zaman $M.PROD(U) \in (RB)_n$ olur. Teorem 2.6.1 ve $A \in (RB)_n$ iken $A' \in (R,B)_n$ olmasını kullanarak, $M' PROD(INT(V)) = (M.PROD(V))' \notin (RB)_n$ olduğu görülür. Eğer U, V'nin herhangi başlangıç parçası ise o zaman,
$M' PROD(INT(U)) = (M.PROD(U))' \in (RB)_n$ olur. Sonuç 2.3.1 kullanılarak $INT(V) \in B_{M'}$ sonucuna varılır.

Teorem 2.6.3. $M \in A_{n,\vartheta}$ ise $M' \in A_{n,\vartheta}$, $M^T \in A_{n,\vartheta}$ ve $(M')^T = (M^T)' \in A_{n,\vartheta}$ dir.

$(M_1, V_1; V_2, M_2) \in \nu_{n,\vartheta}$ ise

$$(M_1^{'}, INT(V_1); INT(V_2), M_2^{'}) \in \nu_{n,\vartheta}$$

$$(M_2^T, REV \circ INT(V_2); REV \circ INT(V_2), M_1^T) \in \nu_{n,\vartheta}$$

$$((M_2^{'})^T, REV(V_2); REV(V_1), (M_1^{'})^T) \in \nu_{n,\vartheta}$$

olur.

İspat: Tanım 2.4.4 yardımıyla $M^{'}, M^T, (M^{'})^T \in A_{n,\vartheta}$ olması $M \in A_{n,\vartheta}$ ile aynıdır. Eğer, $(M_1, V_1; V_2, M_2) \in \nu_{n,\vartheta}$ ise bu durumda,

$V_1 \in B_{M_1}$ ve $M_1 PROD(V_1) = PROD(V_2) M_2$

dir. Teorem 2.6.2 den, $INT(V) \in B_{M_1}$ olur. Tanım 2.4.1 den

$M_1^{'} PROD(INT(V_1)) = PROD(INT(V_2)) M_2^{'}$

$M_2^T.PROD(REV \circ INT(V_2) = PROD(REV \circ INT(V_1)).(M_1^{'})^T$ ve

$(M_2^{'})^T.PROD(REV(V_2)) = PROD(REV(V_1)).(M_1^{'})^T$

olur. $REV \circ INT(V_2) \in B_{M_2^T}$ olduğunu görmek için, görülür ki $V_1 = U_1 X$ dir, burada U_1, W_{M_1} in bir başlangıç parçasıdır ve X, L ya da R dir. Teorem 2.3.1 kullanılarak görülür ki $M_1.PROD(V_1) = PROD(V_2) M_2 \in X.(CB)_n \cap D_n.X$ olur. Transpoz olarak

$M_2^T.PROD(REV \circ INT(V_2))$ $,(RB)_n.X^T \cap X^T.D_n$ olduğu görülür. Böylece,

$M_2^T.PROD(REV \circ INT(V_2)) \notin (RB)_n$

olur. Fakat eğer $V_2, REV \circ INT(V_2)$’nin herhangi bir başlangıç parçası ise bu durumda $M_2^T.PROD(V_2) \in (RB)_n$ olur.

Sonuç 2.3.1 den $REV \circ INT(V_2) \in B_{M_2^T}$ olur. Teorem 2.6.2 yardımıyla, $REV(V_2) = INT(INT \circ REV(V_2)) = INT(REV \circ INT(V_2) \in B_{(M_2^T)^{'}} = B_{(M_2^{'})^T}$ olur.

2.7. $\tau_{n,\vartheta}$ Dönüştürücüsünün Kuvvetli Bağlantılılığı

Teorem 2.7.1. ϑ^2 böler n olsun. Bu durumda $\tau_{n,\vartheta}, \tau_{n\vartheta^{-2},1}$ dönüştürücüsüyle izomorftur.

İspat: $z_\vartheta : \tau_{n\vartheta^{-2},1} \to \tau_{n,\vartheta}$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to z_\vartheta(M) = \begin{pmatrix} a\vartheta & b\vartheta \\ c\vartheta & d\vartheta \end{pmatrix}$$

(1-1) dönüşümü olup $(M_1, V_1; V_2, M_2) \in \tau_{n\vartheta^{-2},1}$ ise o zaman $(z_\vartheta(M_1), V_1; V_2, z_\vartheta(M_2)) \in \tau_{n,\vartheta}$ olur.

Tanım 2.7.1. $\forall M_1, M_2 \in A$ için $i = 1,2,...,k-1$ için
$M_1 = M_1^{(1)}, M_2^{(i)} = M_1^{(i+1)}$ ve $M_1^{(k)} = M_2$
olacak şekilde υ'ye ait geçişlerin sonlu bir dizi,

$$(M_1^{(1)}, V_1^{(1)}; V_2^{(1)}, M_2^{(1)}), (M_1^{(2)}, V_1^{(2)}; V_2^{(2)}, M_2^{(2)}),..., (M_1^{(k)}, V_1^{(k)}; V_2^{(k)}, M_2^{(k)})$$

varsa, $\tau = (A, \upsilon)$ dönüştürücüsüne kuvvetli bağlantılı denir.

Teorem 2.7.2 . ϑ^2 böler n olsun. O zaman $\tau_{n,\vartheta}$ dönüştürücüsü kuvvetli bağlantılıdır.

İspat: Teorem 2.7.1 kullanılarak $\vartheta = 1$ kabul edilsin.
Önce şu gösterilmelidir; $\forall M \in A_{n,1}$ için i=1,2,…,k olmak üzere $(M_1^{(i)}, V_1^{(i)}; V_2^{(i)}, M_2^{(i)})$ geçişlerinin sonlu bir dizisinin var olduğunu ki bunun M durumundan $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ durumuna sebep olan $\tau_{n,1}$dönüştürücüsü olduğudur.

$M_1^{(1)} = M$ ve $M_1^{(1)}$ ile bağlantılı * üçlüsü $(g_1, s_1, s_1^{'})$ olsun.
$s_1 = h_1 g_1 + r_1$; $h_1 \in Z^+, 0 \le r_1 < g_1$ yazılsın. $j_1 = g_1 + s_1 + s_1^{'}$ olsun.

$V_1^{(1)} = W_{M_1}(1).L$, $V_2^{(1)} = L.R^{h_1}$, $M_2^{(1)} = \begin{pmatrix} j_1 & r_1 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman teorem 2.4.1'in 1.durumu gereği, $M_1^{(1)}PROD\left(V_1^{(1)}\right) = PROD\left(V_2^{(1)}\right)M_2^{(1)}$ dir. Çünkü, $PROD\left(V_1^{(1)}\right)$ ve $PROD\left(V_2^{(1)}\right)$ D_1'in elemanı olur ve $M_2^{(1)} \in A_{n,1}$ dir.

Böylece,

$(M_1^{(1)}, V_1^{(1)}; V_2^{(1)}, M_2^{(1)}) \in \upsilon_{1,1}$ dir.

i) $r_1 = 0$ ise $j_1 g_1 = n$ olduğundan $M_2^{(1)} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olur ve geçişlerin dizisi k=1 olmak üzere tamdır.

ii) $r_1 \neq 0$ ise $M_1^{(2)} = M_2^{(1)}$ yazılsın ve $M_2^{(1)}$ ile bağlantılı * üçlüsü $(g_2, s_2, s_2^{'})$ olsun. Burada g_2, $r(M_1^{(2)})$'nin elemanlarının en büyük ortak bölenidir ve g_2 böler $g_1 - r_1$ olduğundan $g_2 < g_1$ dir.

Yapılan tartışma yardımıyla $M_1^{(2)}$'den $M_2^{(2)} = \begin{pmatrix} j_2 & r_2 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$ matrisine bir $(M_1^{(2)}, V_1^{(2)}; V_2^{(2)}, M_2^{(2)})$ geçişi vardır.

i) $r_2 = 0$ ise o zaman $M_2^{(2)} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olup, geçiş dizisi, k=2 ile tamdır.

ii) $r_2 \neq 0$ ise $M_1^{(3)} = M_2^{(2)}$ yazılır. $M_1^{(3)}$ ile bağlantılı * üçlüsü $(g_3, s_3, s_3^{'})$ alınarak $g_3 < g_2$ bulunur.

Bu tip adımların sonlu sayısında;

$$M_2^{(k)} = \begin{pmatrix} j_k & r_k \\ 0 & g_k \end{pmatrix}$$

matrisine ulaşılır ki $r_k = 0$ dır. O zaman, $M_2^{(k)} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve geçiş dizisi tamdır.

Şimdi, varsayalım ki $M_1, M_2 \in A_{n,1}$ olsun. i=1,2, …, k olmak üzere, sonlu bir $(M_1^{(i)}, V_1^{(i)}; V_2^{(i)}, M_2^{(i)})$ geçiş dizisi vardır; Bu M_1 den $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$'e $\tau_{n,1}$ dönüşümüne yol açar. Bu diziye $(\text{Dizi})_1$ denilsin.Benzer şekilde j=1,2,…,m için sonlu bir

$(\overline{M}_1^{(j)},\overline{V}_1^{(j)};\overline{V}_2^{(j)},\overline{M}_2^{(j)})$ geçiş dizisi vardır ki bu M_2^T den $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$'e $\tau_{n,1}$ dönüşümüne yol açar. Teorem 2.6.3 uygulanarak görülür ki j=m,…,1 olmak üzere $((\overline{M}_2^{(j)})^T, REV \circ INT(\overline{V}_2^{(j)}); REV \circ INT(\overline{V}_1^{(j)}), (\overline{M}_1^{(j)})^T)$ dizisi $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den M_2'ye $\tau_{n,1}$ dönüşümüne sebep olur. Bu diziye $(\text{Dizi})_2$ denilsin. Açıkça görülür ki; $(\text{Dizi})_1$ ve $(\text{Dizi})_2$'nin zincirlemesi geçişlerin sonlu bir dizisi M_1 den M_2 ye $\tau_{n,1}$ dönüşümüne yol açar. $\tau_{2,1}$ dönüştürücüsü için durumlar, denklemler ve geçiş tablosu ile durum grafiği aşağıdaki gibidir:

<u>Durumlar</u> : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

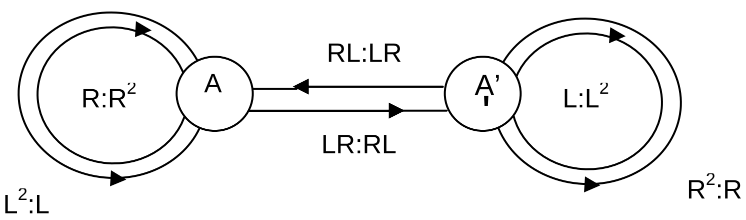
<u>Denklemler (geçişler)</u> : $AR = R^2A$ $\quad ALR = RLA'$

$AL^2 = LA$ $\quad A'R^2 = RA'$

$A'RL = LRA$ $\quad A'L = L^2A'$

Tablo 2.7.1. ($\tau_{2,1}$ için geçiş tablosu)

	A	A'
A	$R:R^2 / L^2:L$	$LR:RL$
A'	RL:LR	$R^2:R / L:L^2$



Şekil 2.7.1. ($\tau_{2,1}$ için durum grafiği)

$\tau_{5,1}$ dönüştürücüsü için durumlar, denklemler ve geçiş tablosu ile durum grafiği aşağıdaki gibidir:

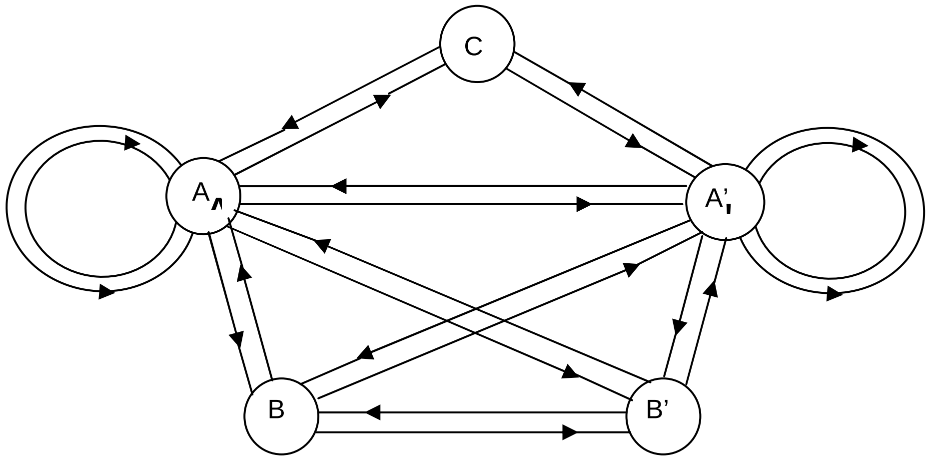
Durumlar : $A=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$, $B^{'}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$, $A^{'}=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$

Denklemler :

$AR=R^5A$	$CL=LR^2A$	$A^{'}R^5=RA^{'}$
$AL^5=LA$	$CR=RL^2A^{'}$	$A^{'}L=L^5A^{'}$
$ALR=R^2B$	$B^{'}RL=LR^3A$	
$AL^2R=RC$	$B^{'}L=LB$	
$AL^3R=RLB^{'}$	$B^{'}R^2=RLA^{'}$	
$AL^4R=RL^4A^{'}$	$A^{'}R^4L=LR^4A$	
$BL^2=LRA$	$A^{'}R^3L=LRB$	
$BR=RB^{'}$	$A^{'}R^2L=LC$	
$BLR=RL^3A^{'}$	$A^{'}RL=L^2B^{'}$	

Tablo 2.7.2. ($\tau_{5,1}$ için geçiş tablosu)

	A	B	C	$B^{'}$	$A^{'}$
A	$R:R^5$ / $L^5:L$	$LR:R^2$	$L^2R:R$	$L^3R:RL$	$L^4R:RL^4$
B	$L^2:LR$			R:R	$LR:RL^3$
C	$L:LR^2$				$R:RL^2$
$B^{'}$	$RL:LR^3$	L:L			$R^2:RL$
$A^{'}$	$R^4L:LR^4$	$R^3L:LR$	$R^2L:L$	$RL:L^2$	$R^5:R$ / $L:L^5$



Şekil 2.7.2. ($\tau_{5,1}$ için durum grafiği)

$\tau_{7,1}$ dönüştürücüsü için durumlar, denklemler ve geçiş tablosu ile durum grafiği aşağıdaki gibidir:

Durumlar : $A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C'=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

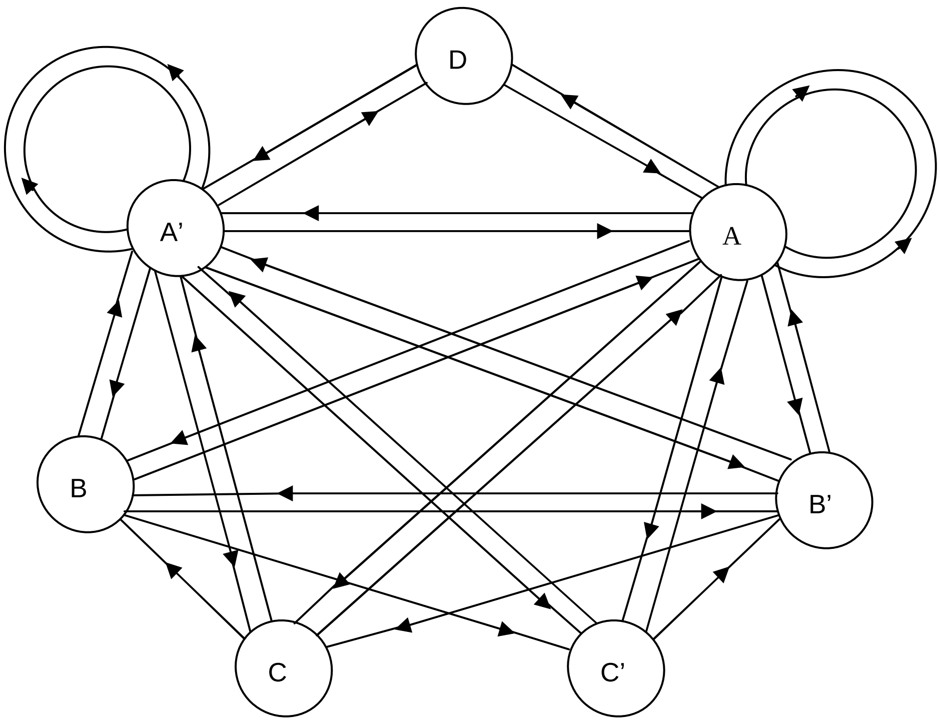
$B'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$

Denklemler :

$AR = R^7A$	$CRL = LR^4A$	$A'R^5L = LR^2B$
$AL^7 = LA$	$CL = LB$	$A'L = L^7A'$
$ALR = R^3B$	$CR^2 = RL^2A'$	$A'R^6L = LR^6A$
$AL^2R = R^2C$	$B'RL = LRB$	$A'R^7 = RA'$
$AL^3R = RD$	$B'R^2L = LR^5A$	$A'R^4L = LRC$
$AL^4R = RLC'$	$B'L = LC$	$A'R^3L = LD$
$AL^5R = RL^2B'$	$BL^3 = LRA$	$A'R^2L = L^2C'$
$AL^6R = RL^6A'$	$BR = RC'$	$A'RL = L^3B'$
$BLR = RLB'$	$C'L^2 = LR^2A$	
$BL^2R = RL^5A'$	$C'R = RB'$	
$DL = LR^3A$	$C'LR = RL^4A'$	
$DR = RL^3A'$		

Tablo 2.7.3. ($\tau_{7,1}$ için geçiş tablosu)

	A	B	C	D	C'	B'	A'
A	$R:R^7$ / L^7 :L	$LR:R^3$	L^2 $R:R^2$	$L^3 R:R$	L^4 R:RL	$L^5 R:RL^2$	$L^6 R:RL^6$
B	L^3:LR				R:R	LR:RL	L^2 $R:RL^5$
C'	L^2 $:LR^2$					R:R	$LR:RL^4$
D	$L:LR^3$						$R:RL^3$
C	$RL:LR^4$	L:L					R^2 $:RL^2$
B'	R^2 $L:LR^5$	RL:LR	L:L				R^3:RL
A'	$R^6 L:LR^6$	R^5L:LR 2	R^4 L:LR	R^3L:L	R^2 $L:L^2$	$RL:L^3$	R^7 :R / L: L^7



Şekil 2.7.3. ($\tau_{7,1}$ için durum grafiği)

Sonuç 2.7.1. $M_1, M_2 \in D_n$ olsun. $M_1.P_1 = P_2.M_2$ olacak şekilde $P_1, P_2 \in D_1$ matrisleri vardır ancak ve ancak M_1'in elemanlarının en büyük ortak bölenleri, M_2'nin elemanlarının en büyük ortak bölenleri ile aynıdır.

İspat: Sonuç (2.9), (2.10) ve Teorem 2.4.1 ve sütun dengeli matrisler için teorem 2.4.1' in yardımıyla ispat görülebilir.

2.8. Genel Problemin Çifte Dengeli Duruma İndirgenmesi

$a, b, c, d \in Z$, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun.

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

$$\beta = [b_0, b_1, b_2, \ldots] \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

olsun.

(M, α, β) problemi denilince α'nın sürekli kesrinin β'nın sürekli kesrine dönüştürülmesi anlaşılır.

(M, α, β) genel problemini, M çifte dengeli duruma indirgemek için aşağıda tanımlanan adımlar takip edilir. Her bir adımda (M, α, β) problemi $(\overline{M}, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ problemiyle değiştirilir ki buradaki $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ için sürekli kesirler (ya da (L,R) dizileri) basit bir yolla α ve β'nın sürekli kesirleriyle bağlantılıdır.

(b) adımı hariç:

$$\det(M) = \det(\overline{M})$$

dir.

(a) adımı: $a_0 < 0$ ise

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} a & b + aa_0 \\ c & d + ca_0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha} = \alpha - a_0, \quad \overline{\beta} = \beta$$

dır. Aksi takdirde $(\overline{M}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (M, \alpha, \beta)$ dır. Burada ilk durumda $\overline{\alpha} = [0; a_1, a_2, \ldots]$

$$\overline{\beta} = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \frac{a\overline{\alpha} + (b + aa_0)}{c\overline{\alpha} + (d + ca_0)}$$

olur. Bundan sonra $a_0 \geq 0$ kabul edilecektir.

(b) adımı: $\det(M) < 0$ ise,

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}, \ \overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \ \overline{\beta} = \beta$$

dır. Aksi takdirde $(\overline{M}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (M, \alpha, \beta)$ yazılır. Buradaki ilk durumda $\left|\overline{M}\right| = -|M|$ dir ve eğer S, $\alpha \approx S$ olacak şekilde bir (L,R) dizisi ise o zaman $\overline{\alpha} \approx \mathrm{INT}(S)$ olur, bundan sonra $|M| > 0$ kabul edilir.

(c) adımı: $\alpha < 1$ ise ya $ab < 0$ ya da $cd < 0$ dır.

$$\overline{M} = ML = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \overline{\beta} = \beta$$

yazılır.

$\alpha \geq 1$ ise ya $ab < 0$ ya da $cd < 0$ dır.

$$\overline{M} = MR = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{\alpha} = \alpha - 1, \quad \overline{\beta} = \beta$$

yazılır.Aksi takdirde $(\overline{M}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (M, \alpha, \beta)$ dır. Buradaki ilk durumda $a_1 > 0$ olmak üzere

$\alpha \approx L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \ldots$ dır ve $\overline{\alpha} \approx L^{a_1 - 1} R^{a_2} L^{a_3} \ldots$ alınır.

İkinci durumda

$\alpha \approx R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots$ $a_0 > 0$ dır ve $\overline{\alpha} \approx R^{a_0 - 1} L^{a_1} R^{a_2} \ldots$ alınır. Herhangi bir durumda

$\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$ yazılır, $\overline{ab} \geq ab$ ve $\overline{cd} \geq cd$ olur.

İlk eşitsizlik ab<0 ise, zor olur ve ikinci eşitsizlik cd<0 ise, zor olur. Sonlu defa (c) uygulanarak (M, α, β) problemine varılır ki, $ab \geq 0$, $cd \geq 0$ kabul edilir.

(d) adımı: $c < 0$ ya da $d < 0$ ise;

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha} = \alpha, \quad \overline{\beta} = \beta$$

alınır. Aksi takdirde $(\overline{M}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (M, \alpha, \beta)$ alınır.

Burada ilk durumda $\beta = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \dfrac{(-a)\overline{\alpha} + (-b)}{(-c)\overline{\alpha} + (-d)}$ dır. Bundan böyle $c \geq 0, d \geq 0$ alınır.

(e) adımı: $a < 0$ ya da $b < 0$ ise

$$\overline{M} = R^m M = \begin{pmatrix} a + mc & b + md \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha} = \alpha, \quad \overline{\beta} = \beta + m$$

alınır. Burada m, $a + mc \geq 0$ ve $b + md \geq 0$ olan en küçük tamsayıdır.
Aksi takdirde $(\overline{M}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (M, \alpha, \beta)$ alınır. Burada ilk durumda $\beta = [\overline{b}_0; \overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots]$ olup $\overline{\beta} = [\overline{b}_0 - m; \overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots]$ dır. Bundan böyle $a \geq 0$ $, b \geq 0$ alınır. Böylece bundan sonra $M \in D_n$ $, |M| = n$ olur.

(f) adımı: $M \notin (R, B)_n$ durumunda, $P \in D_1 - I$ ve $Q \in (R, B)_n$ olmak üzere $M = P.Q$ olur.

Bu durumda eğer $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ ise ;

$$\overline{M} = Q \quad , \quad \overline{\alpha} = \alpha \quad , \overline{\beta} = \frac{w\beta - y}{-z\beta + x}$$

yazılır. Aksi takdirde $(\overline{M}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (M, \alpha, \beta)$ alınır.

Buradaki ilk durumda, $\beta = \dfrac{x\overline{\beta} + y}{z\overline{\beta} + w}$ olur. Böylece P=PROD(V) ve $\overline{\beta} \approx \overline{S}$ ise, o zaman $\beta \approx V\overline{S}$ olur. Bundan böyle, $M \in (R, B)_n$ kabul edilir.

(g) adımı: $M \notin (D,B)_n$ durumunda, $\alpha \approx S$ ise $V_1 = H(S,B_M)$ olsun. Teorem 2.4.1 göz önüne alınarak $M.PROD(V_1) = PROD(V_2).Q$ yazılır; burada V_2, $\{L,R\}$ de boştan farklı bir kelime ve $Q \in (D,B)_n$ dir.

Bu durumda eğer $PROD(V_1) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ ise ve $PROD(V_2) = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$ ise

$$\overline{M} = Q$$

$$\overline{\alpha} = \frac{w_1\alpha - y_1}{-z_1\alpha + x_1}$$

$$\overline{\beta} = \frac{w_2\beta - y_2}{-z_2\beta + x_2}$$

yazılır. Aksi takdirde $(\overline{M},\overline{\alpha},\overline{\beta}) = (M,\alpha,\beta)$ alınır. Buradaki ilk durumda

$\alpha = \dfrac{x_1\overline{\alpha} + y_1}{z_1\overline{\alpha} + w_1}$ dir ve bundan dolayı $\overline{\alpha} \approx \dfrac{S}{V_1}$ dir. Hem de $\overline{\beta} \approx \overline{S}$ ve $\beta \approx V_2\overline{S}$ olur.

g adımı tamamlanarak genel problem, çifte dengeli duruma indirgenmiş olur.

Örnek 2.8.1. $\alpha = [-1;5,1,1,1,2,\ldots]$ ve $\beta = \dfrac{-97\alpha - 39}{62\alpha + 25}$ olsun. β için sürekli kesir bulunmak isteniyor. $M = \begin{pmatrix} -97 & 58 \\ 62 & 25 \end{pmatrix}$ dir. Yukarıdaki (a) ve (g) adımlarını izlerken aşağıda tanımlanan (M_i, α_i, β_i) ardıl problemlerine ulaşılır.

(a) adım sonra : $M_1 = \begin{pmatrix} -97 & 58 \\ 62 & -37 \end{pmatrix}$ $, \alpha_1 \approx L^5R^1L^1R^1L^2\ldots,\ \beta_1 = \beta$

(b)adım sonra : $M_2 = \begin{pmatrix} 58 & -97 \\ -37 & 62 \end{pmatrix}$ $,\ \alpha_2 \approx R^5L^1R^1L^1R^2\ldots,\ \beta_2 = \beta$

(c) adım sonra : $M_3 = \begin{pmatrix} 58 & 19 \\ -37 & -12 \end{pmatrix}$ $,\ \alpha_3 \approx R^3L^1R^1L^1R^2\ldots,\ \beta_3 = \beta$

(d) adım sonra : $M_4 = \begin{pmatrix} -58 & -19 \\ 37 & 12 \end{pmatrix}$ $,\ \alpha_4 \approx R^3L^1R^1L^1R^2\ldots,\ \beta_4 = \beta$

(e) adım sonra : $M_5 = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 37 & 12 \end{pmatrix}$, $\alpha_5 \approx R^3L^1R^1L^1R^2\ldots$, $\beta_5 = \beta + 2$

(f) adım sonra : $M_6 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_6 \approx R^3L^1R^1L^1R^2\ldots$, $\beta_6 = \dfrac{\beta_5}{L^2R^2}$

(g) adım sonra : $M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_7 \approx R^2L^1R^1L^1R^2\ldots$, $\beta_7 = \dfrac{\beta_6}{RL^5}$

(Buradaki β_6 ve β_7 için denklemler (L,R) dizileri anlamında anlaşılır.)
$M_7 \in (D,B)_7$ olduğundan indirgeme tamamlanmıştır. α_7 için $\tau_{7,1}$ dönüştürücüsünü, (L,R)dizisine başlangıç durumu olarak $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ olarak uygulanır. 6. kısımdaki benzer hesaplama $\beta_7 \approx L^2RLRL^2\ldots$ olduğunu verir. Bundan şu sonuca varılır:

$$\beta_5 \approx L^2R^2.RL^5.L^2RLRL^2\ldots = L^2R^3L^7R^1L^1R^1L^2\ldots$$

olur.

Böylece β_5, [0;2,3,7,1,1,1,2,…] sürekli kesrine sahip olur. Bundan dolayı β için sürekli kesi; [-2 ; 2,3,7,1,1,1,2,…] olur.

2.9. Sürekli Kesirler ve Matris Çarpımları

Burada, sürekli kesirlerin yakınsaklıklarının dizisi ve bu dizinin matris çarpımları ile aralarındaki ilişkiden bahsedilecektir.
$[c_0, c_1, c_2, \ldots]$ sürekli kesrinin, h=0,1,2,… için h. yaklaşımı p_h/q_h ile gösterilir ve $\dfrac{p_h}{q_h} = [c_0, c_1, c_2, \ldots, c_h]$ olduğu bilinir. Buna göre aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 2.9.1.

$$\frac{p_h}{q_h} = [c_0, c_1, c_2, \ldots, c_h] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir.

Bu bağıntı, matris çarpımı yardımıyla $\frac{p_h}{q_h}$ yakınsaklıklarını belirler. c_n , n. kısmi bölümünün h+1 üzerinden tümevarım yapılarak, önermenin doğruluğu görülür. Bahsedilen bu temel bağıntı, aslında tam olarak tekrarlı bağıntılara karşılık gelir.

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \qquad \begin{pmatrix} p_{-1} & p_{-2} \\ q_{-1} & q_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \quad ,$$

Tersine, tekrarlı bu bağıntılar yakınsaklıklarının dizisini verir. Ayrıca, matris çarpımının transpozu alınırsa;

$$\begin{pmatrix} c_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow [c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0]$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle;

$$[c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

eşitliği de yazılabilir. Eğer $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kelimesi $\vec{w}$ ile gösterilirse $-c_n, -c_{n-1}, \ldots, -c_1$ kelimesi $-\overleftarrow{w}$ ile gösterilir. Böylece aşağıdaki önerme yazılabilir [4].

Önerme 2.9.2. $$\frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{xq_n^2} = \left[c_0, \vec{w}, x - \frac{q_{n-1}}{q_n}\right] = [c_0, \vec{w}, x, -\overleftarrow{w}]$$ dir

İspat:

$(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = (-1)^{n-1}$ olduğundan

$$\left[c_0, \vec{w}, x - \frac{q_{n-1}}{q_n}\right] \leftrightarrow \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \dfrac{q_{n-1}}{q_n} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xp_n - (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) & p_n \\ xq_n & q_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{xq_n^2} \quad \text{olup} \quad x - \frac{q_{n-1}}{q_n} = [x, -\overleftarrow{w}] \text{ olduğu}$$

görülür. Yani

$$\frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{xq_n^2} = [c_0, \vec{w}, x, -\overleftarrow{w}]$$

olur.

Bu gösterim, kısmi bölümler üzerine kısıtlamalar konulmazsa bir tek olmaz:

$$\begin{aligned} &x - q_{n-1}/q_n = x - 1 + (q_n - q_{n-1})/q_n \\ &q_n/(q_n - q_{n-1}) = 1 + q_{n-1}/(q_n - q_{n-1}) \\ &(q_n - q_{n-1})/q_{n-1} = -1 + q_n/q_{n-1} \\ &q_{n-1}/q_n = 0 + q_{n-1}/q_n \\ &q_n/q_{n-1} = \overleftarrow{w} \end{aligned}$$

eşitlikleri nedeniyle

$$\frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{xq_n^2} = [c_0, \vec{w}, x - 1, 1, -1, 0, \overleftarrow{w}]$$

yazılabilir. Bu formüller, nümerik örneklerde kolaylıklar sağlar. Aşağıdaki önermede verilen eşitlikler farklı olup, bunlar da örneklerde kolaylıklar sağlar:

Önerme 2.9.3. $[\ldots, a, 0, b, \ldots] = [\ldots, a + b, \ldots]$ ve

$-[a, b, c] = [0, -1, 1, -1, 0, a, b, c, \ldots] = [0, -1, 1, a - 1, b, c, \ldots]$ dir.

İspat:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden ilk eşitliğin doğruluğu görülür.

$$-y = 0 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y-1}}}$$

eşitliğine dikkat edilerek, 2. eşitliğin doğruluğu görülebilir. Yani,

$$-[a, b, c \ldots] = [,0,-1,1,-1,0, a, b, c, \ldots] = [0,-1,1, a-1, b, c, \ldots]$$

Bu sonuç, aşağıdaki formda da bilinir:

$$-[a, b, c \ldots] = [-a,0,-1,1,-1,0, b, c, \ldots] = [-a-1,1, b-1, c, \ldots].$$

Bu formüle örnek olarak Π sayısı yazılabilir:

$$-\Pi = -[3, 7, 15, 1, 292, 1, \ldots] = [-4, 1, 6, 15, 1, 292, 1, \ldots].$$

Dikkat edilirse, temel bağıntıda determinant olarak, yukarıda da kullanılan

$$(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = (-1)^{n+1}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = (-1)^{n-1}.\frac{1}{q_{n-1} q_n}$$

bağıntısı yazılarak, buradan n üzerinden tümevarımla aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\frac{p_n}{q_n} = c_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{1}{q_{n-1} q_n} .$$

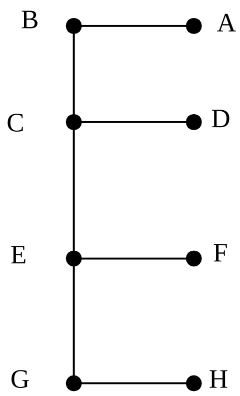
Bu nedenle (q_n) dizisi artan olup, (p_n / q_n) yakınsaklıklarının dizisi yakınsar. Burada iki çeşit sürekli kesirden söz edilir, biri düzgün sürekli kesirler, diğeri ise X^{-1}' e göre formal Laurent serisinin sürekli kesirleridir. İkinci durum söz konusu iken, yakınsaklıkların dizisi, X^{-1} değişkenine göre bir

$$\sum_{h=d}^{\infty} a_n X^{-h} \;\; , \; d \in Z$$

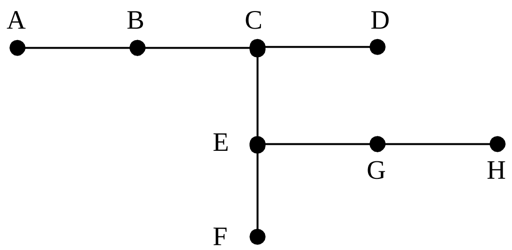
Laurent serisine yakınsar. Aslında bu son durumda $X^{-1} = p$ yazılarak, sürekli kesirleri p-adic rasyonel sayılara dönüştürmek mümkündür[4].

BÖLÜM 3. GRAFLAR

Bir graf, boş olmayan sonlu bir V kümesi ile, V kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin bir E kümesinden oluşur. Burada V kümesinin elemanlarını, köşeler ve E kümesinin elemanlarını da kenarlar oluşturmaktadır.

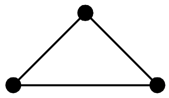


Şekil 3.1a. (Graf)

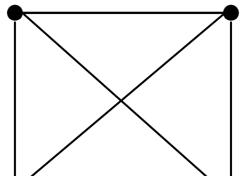


Şekil 3.1b. (Graf)

A,B,C,D,E,F,G,H düğüm ve {A,B}, {B,C}, {C,D}, {C,E}, {E,F}, {E,G}, {G,H} kenarlardır. Bir grafta, n tane düğümden hepsi diğer düğümlerle bağlı ise, bu grafa tam graftır denir ve K_n ile gösterilir[5].

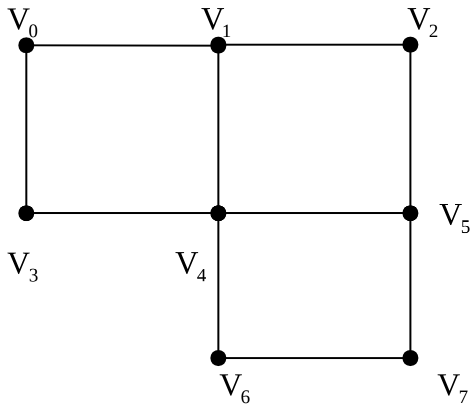

K_3

Şekil 3.2a. (Tam Graf)


Şekil 3.2b.(Tam Graf)

3.1. Grafların Matris Gösterimi

Grafı bilgisayarda temsil etmenin bir yolu, matris gösterimidir. Bir G grafının $V_1, V_2, \ldots, V_n$ düğümleri var olsun. Bu graf ile bir nxn kare matrisi gösterilmek istenirse, V_i düğümü ile V_j düğümü arasında bir kenar varsa, matrisin i,j elemanı 1, yoksa 0 olacaktır. Bu matrise, G' nin komşuluk matrisi denir ve A(G) ile gösterilir.



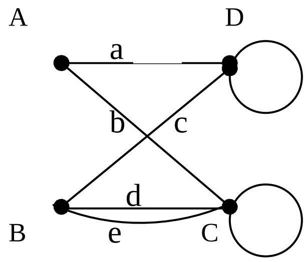
Şekil 3.1.1.(Graf)

Şekil 3.1.1' deki grafın matris gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$A(G) \quad = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2. Yollar ve Halkalar

Sonlu sayıda düğüm (V) ve kenar kümesi E den $\{\{u,v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ ye bir f fonksiyonundan oluşan G(V,E) grafına çoklu graf denir.Bir çoklu graf, sonlu sayıda düğüm ve kenarların kümesinden oluşur. Bir çoklu grafta, iki düğüm arasında birden fazla kenar olabildiği gibi, bir düğümden çıkıp tekrar kendisine dönen kenarlar da olabilir. Bu durumda graf, çoklu grafın bir özel durumu olup çoklu graf için yapılan tüm tanımlamalar, graf için de geçerli olacaktır.

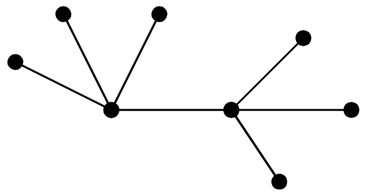


Şekil 3.2.1.(Çoklu Graf)

3.3. Ağaçlar

Grafların bir özel durumu olan ağaçlar, bilgisayar biliminde geniş bir alanda kullanılmaktadır. Günümüzde bilgisayar bilimlerinde veriyi organize etmek için çok yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bağlı ve döngü içermeyen bir grafa ağaç adı verilir (Şekil 3.3.1).



Şekil 3.3.1. (Ağaç)

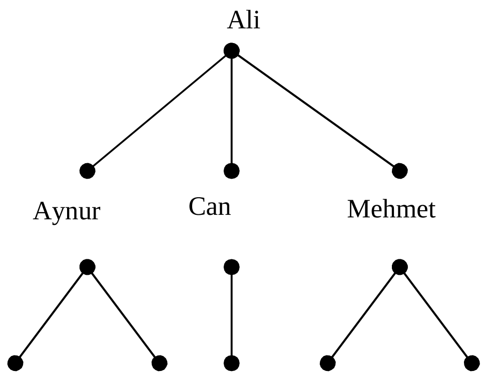
U ve V ağaca ait iki düğüm olsun. U ve V arasında sadece bir adet basit yol vardır.

3.3.1. Köklü Ağaçlar

Bir köklü ağaç, aşağıdaki iki özelliği sağlar.

1-Yönler göz önüne alındığı zaman, sonuçta elde edilen yönsüz graf bir ağaçtır.

2-Giriş derecesi sıfır olan bir tek kök düğümü vardır ve diğer tüm düğümlerin giriş dereceleri 1 dir (Giriş derecesi düğüme giren yol sayısıdır).



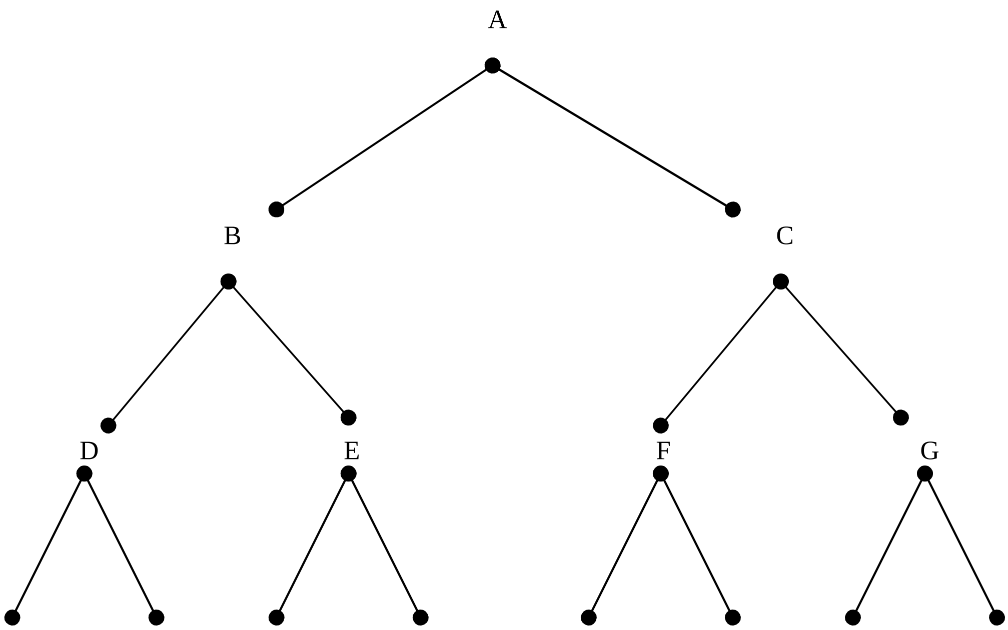
Şekil 3.3.1.1. (Köklü ağaç)

Bir köklü ağaçta,
a-Düğüm sayısı, yönlü kenar sayısından bir fazladır.
b-Ağaçta yönlü döngü yoktur.
c-Kökten diğer bütün düğümlere, sadece bir tek yönlü basit yol vardır.

Bir köklü ağaçta, bir U düğümünden V düğümüne doğru bir kenar var ise; U, V'nin ebeveyni ya da V, U'nun çocuğudur denir. Bir V düğümüne giden yönlü yolun üzerindeki diğer düğümlere V'nin ataları denir. Bir uç düğüm, çocuğu olmayan düğümdür. İç düğüm ise, çocukları olan düğümdür [5].

3.3.2. İkili ağaçlar

Köklü ağaçlarda bir ebeveynin çocukları arasında her hangi bir ayrım yapmak gerekli değildir. Ancak birçok durumda bir ayrım yapmak gerekebilir. Örneğin bir A-B gibi bir aritmetik ifadede, A ve B'nin sırası önemlidir. A-B bir köklü ağaç ile göstermek istenirse ve kök olarak (-) işlemi seçilirse A ve B operandları çocuklar olursa A ile B'nin sırası önemli olacaktır. Bir ikili ağaçta, her bir düğümün sadece sol çocuk ve sağ çocuk olmak üzere iki tane çocuğu vardır. Buna göre, bir ikili ağacın her düğümünün 0,1 ya da 2 çocuğu vardır.



Şekil 3.3.2.1. (İkili ağaç-sol çocuk B , sağ çocuk A vb.)

3.4. Matrisler ve Ağaçlar

Tanım 3.4.1. $D = \left\{ M : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in Z^+, ad - bc = 1 \right\}$ olup

D kümesi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleriyle üretilmiş bir monoidtir. A={L,R} iki harfli bir alfabe ve A^*da, A üzerinde serbest monoid olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $\alpha : A \rightarrow D$ dönüşümü

$$\alpha(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^* dan D üzerine bir izomorfizme genişletilebilir. (Boş kelimesi birim matrisle temsil edilir.) Bu durumda, her $W \in \{L, R\}^*$ kelimesi $\alpha(w)$ matrisine eşlenebilir. W kelimesine, $\alpha(w)$ matrisinin üretecidir, denir. Uygun bir $n \geq 0$ için $a_0, a_n \geq 0$ ve $i \in [1, n-1]$ için $a_i > 0$ olup, herhangi bir $W \in \{L, R\}^*$ kelimesi

$$W = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots L^{a_{n-1}} R^{a_n}$$

biçiminde yazılır. $\tilde{W}$ ile W' nın yansıyan görüntüsü gösterilir. $(\hat{W})$ gösterimi ile de R ve L'nin aralarında yer değiştirmesiyle, W'dan elde edilen kelime gösterilir. Ayrıca, $(\hat{W}) = (\tilde{W})$ durumunda , W' kelimesi kullanılır[6].

Önerme 3.4.1. $W \in \{L, R\}^{\bullet}$ ve $\alpha(W) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ olsun.

Bu durumda, aşağıdakiler yazılabilir:

$$\alpha(\tilde{W}) = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha(\hat{W}) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \alpha(W') = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Tanım 3.4.2. Bütün p/q kesirlerinin kümesi G ile gösterilsin. $p, q > 0$ ve p ve q aralarında asal olsun. p/q ve $r/s \in G$ alınsın. $M \neq I$, $M \in D$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir M matrisi varsa, p/q kesrinin r/s den türetilebileceği söylenir.

Tanım 3.4.3. Eğer herhangi, birbirinden farklı p/q , $r/s \in$ F çifti verildiğinde, p/q kesri r/s kesrinden türetilemez ise, G'nin elemanlarının F kümesine <u>bağımsız küme</u> denir.

Eğer $F \subset F' \subseteq G$ oluyorsa, F' kümesine G'de F kümesinin bir genişlemesi denir.

Tanım 3.4.4. $i \in [1, n-1]$ için $a_i > 0$, $n \geq 0$ ve çift tamsayı için $a_0, a_n \geq 0$ olmak üzere FC'nin $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ şeklindeki tüm sürekli kesirlerin kümesi FC ile gösterilirse, sürekli kesirler teorisi yardımıyla G’nin FC kümesinde uygun olarak gösterildiği bilinir.

$\| \; \| : G \longrightarrow N$ biçiminde bir fonksiyon tanımlansın. Eğer $p/q \in G$, $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ biçiminde yazılabiliyorsa, bu durumda

$$\|p/q\| = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

olur. İndirgenemez kesirlerin her F kümesi, aşağıdaki eşitlikle ilişkilendirilebilir.

$$\Pi(F) = \sum_{p/q \in F} 2^{-\|p/q\|}$$

Tanım 3.4.5. F bağımsız bir küme olsun. Eğer F’nin herhangi bir genişlemesi bağımsız bir küme değilse, F’ye tamdır denir. $i \in [1, n-1]$ için $a_i > 0$, $n \geq 0$ ve tamsayısı için $a_0, a_n \geq 0$ olmak üzere $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sayıları dikkate alınsın ve $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ ile $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1]$ biçimindeki sürekli kesirler gösterilsin. Bilindiği gibi bu sürekli kesir, aşağıdaki gibi de gösterilir:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + 1}}}}}$$

Sürekli kesirler için yukarıdaki gösterimin kullanımı, simetrik formüller yardımıyla sonuçları açıklamak için kullanışlıdır[7].

Önerme 3.4.2. Bağımsız kesirlerin bir F kümesinin tam olması için, gerek ve yeter şart $\Pi(F) = 1$ olmasıdır.

Tanım 3.4.6. G'nin indirgenemez p/q ve r/s kesirlerini ve bunların $p/q=\langle a_0,a_1,\dots,a_n\rangle$, $r/s=\langle b_0,b_1,\dots,b_m\rangle$ biçimindeki sürekli kesir açılımları dikkate alınsın. Burada m,n çift tamsayılar ve $a_0,b_0,a_n,b_m\geq 0$ dır. $i\in[1,n-1]$ için $a_i,b_j>0$ ve $j\in[1,m-1]$ için $a_i,b_j>0$ olmak üzere,

$$\sum_{j=\text{çift}} a_j=\sum_{j=\text{çift}} b_j \quad \text{ve} \quad \sum_{j=\text{tek}} a_j=\sum_{j=\text{tek}} b_j$$

oluyorsa, p/q kesri r/s kesrine denktir, denir ve $p/q\equiv r/s$ olarak yazılır. $p/q\equiv r/s$ ise, $\|p/q\|=\|r/s\|$ olduğu açıktır. İndirgenemeyen kesirlerin iki kümesi F ve H olsun. Her $p/q\in F$ için, $\delta(p/q)=p/q$ olacak şekilde, 1-1 ve örten bir

$$\delta:\ F\to H$$

dönüşümü varsa, F kümesi H'ye denktir, denir ve $F\equiv H$ biçiminde yazılır. Genellikle, $\Pi(H)=1$ şartını sağlayan, indirgenemez ve pozitif kesirlerin sonlu bir H kümesi, indirgenemez kesirlerin tam ve denk bir F kümesini içine almaz. Bu durum, aşağıdaki örnekte basitçe gösterildi.

Örnek 3.4.1.

$H=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{3}{1}\right\}$ kümesi alınsın. Burada,

$\frac{1}{2}=\langle 0,1,0\rangle$, $\frac{1}{3}=\langle 0,2,0\rangle$, $\frac{3}{1}=\langle 2\rangle$ olduğundan $\left\|\frac{1}{2}\right\|=1$, $\left\|\frac{1}{3}\right\|=\left\|\frac{3}{1}\right\|=2$ dir, ayrıca

$\Pi\ (H\ )\ =\ \sum_{p/q\in H} 2^{-\|p/q\|}=2^{-1}+2^{-2}+2^{-2}=1$ olduğundan $\Pi(H)=1$ dir.

H kümesi $\frac{1}{3}$ ün bir A matrisi yardımıyla $\frac{1}{2}$ den türetilmesinden dolayı yani $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ olduğunda bağımsız değildir. Sonuçta kolayca görülebilir ki H'ye denk indirgenemez kesirlerin kümesi sadece H'nin kendisidir.

Önerme 3.4.3. p ve q, pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir tek $W \in \{L,R\}^{\bullet}$ kelimesi vardır.

İspat: n =p+q tamsayısı üzerinden tümevarım yapılması uygundur. Eğer n=2 ise p= q = 1 ve W = I olur. $n > 1$ olsun. Eğer, sırasıyla, q>p veya q<p ise, bir tek şekilde

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} p \\ q-p \end{pmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} p-q \\ q \end{pmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. İkinci durum benzer biçimde gösterildiğinden, sadece ilk duruma dikkat etmek yeterli olur.
e.b.o.b (p,q-p)=1 ve p+(q-p)=q<n den tümevarımla,

$$\begin{pmatrix} p \\ q-q \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir tek $V \in \{L,R\}^{\bullet}$ vardır. Bu $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = LV\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ anlamına gelir. Her

$u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $p, q > 0$ vektörü $f(u) = \dfrac{p}{q}$ sayısı ile birleştirilir. Eğer $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \{L,R\}^{\bullet}$

ise,

$$f(W) = \frac{a+b}{c+d} = f\left(W\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

biçiminde tanımlanır[7].

3.5. Raney Ağacı

Önerme 3.5.1. Eğer $W = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots L^{a_{n-1}} R^{a_n}$ ise,

$$f(W) = [a_0, a_1, \ldots, a_n + 1] = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$$

dır. Bu kısımda, tüm ikili ağaçlar incelenecektir. Kökten düğüme kadar olan her yol bir $W \in \{L, R\}^{\bullet}$ kelimesi ile temsil edilir. $W = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots L^{a_{n-1}} R^{a_n}$ harfinin dizisi, soldan sağa okunur. Kökten başlayarak düğüme uzanmak için, sağ ve sol dizisinin hareketini verir. Her düğüm için kökten düğüme giden tek bir yol vardır, düğümler $W \in \{L, R\}^{\bullet}$ kelimesi ile aynen görünür. Aşağıda $\{L, R\}^{\bullet}$'ın ikili kelimeleri ile ağacın düğümlerinin aynı olduğu kanıtlanır [3].

Aşağıdaki yolda p/q indirgenemez bir kesir ile ağacın düğümü etiketlensin. p ve q pozitif tamsayılardır. Kök $1/1$ etiketine sahiptir. Eğer düğüm p/q etiketine sahipse "left son" ile etiketlenir;

$$p/p+q = f\left(L\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$$

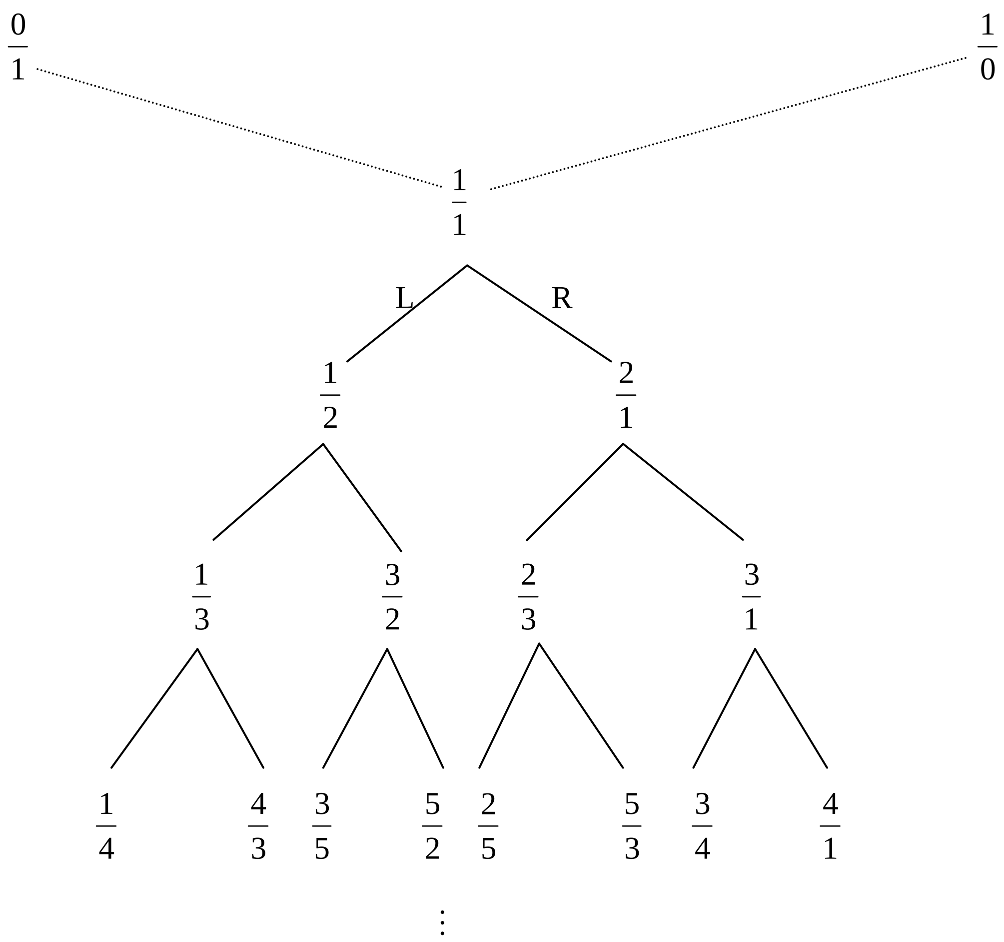
ve "right son" ile etiketlenir;

$$p+q/q = f\left(R\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) .$$

Etiketlenen bu iki ağaca "Raney ağacı" denir (Şekil 3.5.1).
Her W düğümünün etiketine, W'nin Raney sayıları denir ve Ra(W) ile gösterilir.

$$\mathrm{Ra}(W) = f\left(\tilde{W}\right) = \frac{p}{q} , \qquad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \tilde{W}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ile tanımlanır. Önerme 3.4.3'den bütün indirgenemeyen p/q (p>0,q >0) kesirleri Raney ağacı ile aynen gösterilebilir (Şekil 3.5.1).



Şekil 3.5.1 Raney Ağacı

3.6. Stern-Brocot Ağacı

Stern-Brocot ağacı aşağıdaki kurala uygun sadeleşmeyen kesirler ile etiketlenen ikili ağaçların tamamıdır. Bir düğümdeki p/q etiketi $(p^{'}+p^{''})/(q^{'}+q^{''})$ ile verilir. Buradaki $p^{'}/q^{'}$ en yakın soyun üstünde ve sola; $p^{''}/q^{''}$ en yakın soyun üstünde ve sağadır. ($1/0$ ve $0/1$ ile etiketlenen kök ikili ağaca eklenir)

Her W kökü için SB(W) ile uygun etiket tanımlanır;

SB(W) ye W'nin Stern-Brocot sayıları denir[14].

$$SB(W) = f(W) = p/q \ ,$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ile gösterilr.

Önerme 3.4.2' den bütün sadeleşmeyen p/q $(p>0, q>0)$ kesirleri Stern-Brocot ağacı ile aynen gösterilebilir (Şekil 3.6.1). Buradan ikili bir ağacın her W düğümü için sadeleşmeyen kesir ile etiketlenir;

Ra(W) : Raney sayıları

SB(W) : Stern-Brocot sayıları

$W = LRL^2R = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ düğümü incelenirse:

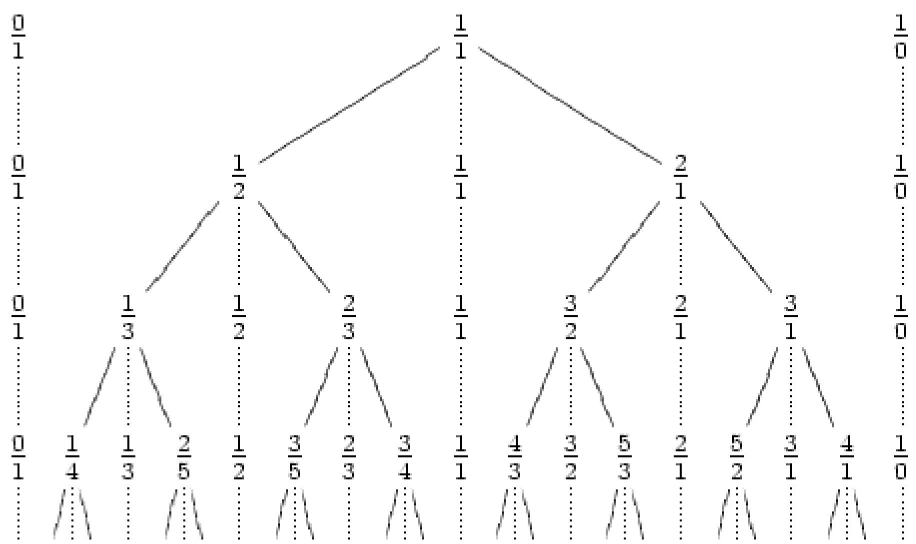
$\tilde{W} = RL^2RL = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$'ye sahip olduğu görülür.

Buradan,

$Ra(W) = f\left(\tilde{W}\right) = p/q\,, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \tilde{W}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve böylece $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ bulunur. Yani $Ra(W) = 11/8$ olur.

$SB(W) = f(W) = p/q\,,\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir.

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ buradan p=7, q=12 olduğu görülür.



Şekil 3.6.1 Stern – Brocot Ağacı

3.7. Stern-Brocot Ağacı Üzerinde Sürekli Kesirler

Stern-Brocot ağacı düğüm noktasından itibaren sırasıyla L ve R harfleri ile kodlanır. Bunlardan biri ağacın sağında, diğeri solunda işlem görür. Kullanımları arasındaki fark da önemlidir. Soldaki kodlama, Stern-Brocot ağacında bir kesrin yerlerini belirlemede kullanışlıdır. Sağdaki kodlama ise, kesrin olduğu yere direkt olarak ulaşır.Sağ taraf kodlaması, basit sürekli kesirlere göre doğal olarak yorumlanabilir [14].

Üstel gösterim kullanılarak kodlama zincirleri basitleştirilebilir. L matrislerinin dizisi için L^k ve R matrislerinin dizisi için R^k kullanılır. Örneğin böylece, LLRLLRRRL dizisi için $L^2RL^2R^3L$ ifadesi yazılabilir. Bunların kuvvet gösterimleri, matris cebirindeki standart kullanımla tutarlıdır. Mesela, $f(LRLL) = f(L^1R^1L^2) = \frac{4}{7}$ olup bu öklid algoritmasıyla karşılaştırıldığında;

7=**1**.4+3
4=**1**.3+1
3=**3**.1

ilk iki tane 1, $L^1R^1L^2$ deki üslü sayılarla aynı fakat son terim 1 farklıdır. Bir başka örnek ise, $L^3R^1L^{20} = \left[\frac{1}{4}, \frac{21}{83}\right]$ olup $f(L^3R^1L^{20}) = \frac{22}{87}$ dir. Diğer yandan

87=**3**.22+21
22=**1**.21+1
21=**21**.1

olur. $L^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ ve $R^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yardımıyla hesaplamalar gösterilebilir. Öklid algoritması, son terimi hariç diğer üstelleri verir.

$\frac{22}{87} = [3,1,21]$ olup $f(L^{a_1}R^{a_2}\ldots L^{a_k}) = [a_1, a_2, \ldots, a_k + 1]$ olur.

Ağacın sağındaki 1 den büyük olan kesirlerin kodlanması R ile başlar. Bu nedenle

$$f(R^{a_1}L^{a_2}\ldots L^{a_k}) = [a_1, a_2, \ldots, a_k + 1]$$

yazılır. Kodlamanın son harfinin önemi yoktur.

Ağaç üzerinde kesirlerin sürekli kesir gösterimi ve Stern-Brocot kodlaması arasındaki bağıntının güzel sonuçları vardır. Örneğin; ağacın aynı satırındaki $[a_1, a_2, \ldots, a_k + 1]$ kesirleri katsayılarla aynı toplama sahip olur : $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Bu toplam, satır sayısından bir fazladır.

$\frac{4}{7} = [1,1,3]$, 5-1=4. satırda bulunur. $\frac{22}{87} = [3,1,21]$ ve 25-1=24. satırındadır.

Stern-Brocot ağacında $\frac{1}{0}$ ve $\frac{0}{1}$ kesirleri hariç, her kesir, kendisinin hemen altında sağ ve sol elemanlara sahiptir. Düğüm noktasındaki kesrin sürekli kesrinin bilinmesi, bu sağ ve sol elemanların sürekli kesirlerinin bilinmesini kolaylaştırır. Bunun için, aşağıdaki eşitliğe dikkat edilmelidir:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k + 1] = [a_1, a_2, \ldots, a_k, 1].$$

Her sonlu sürekli kesir, iki gösterime sahiptir. Son terimi 1'den büyük olan sürekli kesir verilsin; $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$, $a_k > 1$. Bu kesir

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k] \text{ ve } [a_1, a_2, \ldots, a_k - 1, 1]$$

biçiminde yazılabilir. Her iki gösterimde, son terime 1 eklenirse

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k + 1] \qquad \text{ve} \qquad [a_1, a_2, \ldots, a_k - 1, 2]$$

olur. Bu kesirler $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ sürekli kesrinin ürünleridir. Örneğin;

$\frac{4}{7} = [1,1,3] = [1,1,2,1]$ kesrinin ürünleri; $\frac{5}{9} = [1,1,4]$ ve $\frac{7}{12} = [1,1,2,2]$ olur.

Stern-Brocot ağacındaki her kesrin iki elemanı vardır. Bu kesirler, meydanları verilen kesir olan kesirlerdir. Bu kesirler de bulunabilir. Bunlardan biri verilen kesrin üst kısmındaki satırda, diğeri biraz daha uzakta yerleşmiştir. Birincisinin gösterimi, kesrin son durumundan 1 çıkarılarak elde edilir. Diğeri ise, son katsayıyı ihmal ederek bulunur. Mesela,

$\frac{7}{12}=[1,1,2,2]$ kesri, $[1,1,2,1]=[1,1,3]=\frac{4}{7}$ ve $[1,1,2]=\frac{3}{5}$ kesirlerinin medyanıdır.

$\frac{5}{9}=[1,1,4]$ kesri, $[1,1,3]=\frac{4}{7}$ ve $[1,1,]=\frac{1}{2}$ nin medyanıdır.

Uzak olan kesir hakkında aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

$\frac{p}{q}=[a_1,a_2,\ldots,a_k]=[a_1,a_2,\ldots,a_k-1,1]$ var olsun. k ve k+1 yer değiştirsin ve $a_{k+1}=1$ yazılsın.

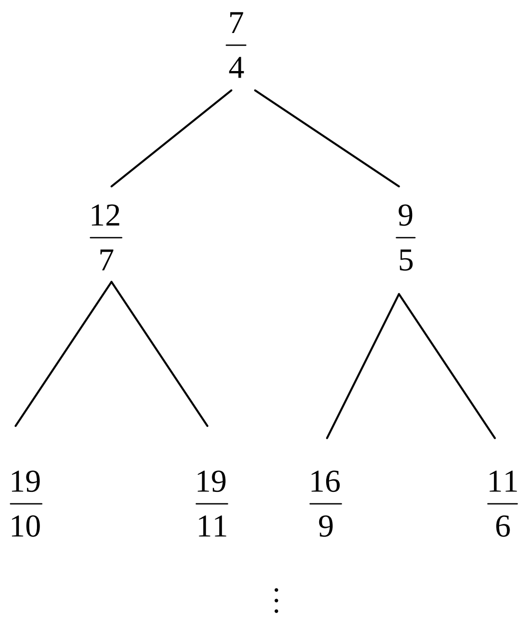
$$\frac{p}{q}=\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}$$

yazılabilir. Burada

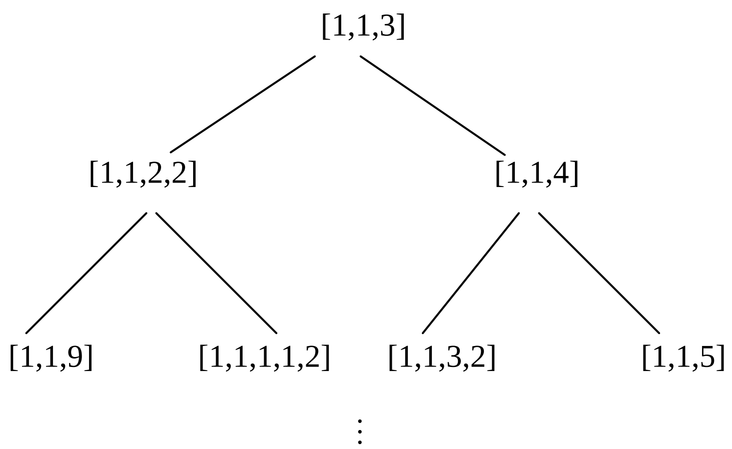
$$\frac{p_k}{q_k}=[a_1,a_2,\ldots,a_k-1] \text{ ve } \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=[a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}]$$

dır.

Aşağıdaki Stern-Brocot ağacı, sayıların farklı yazılışları kullanılarak gösterilmiştir



Şekil 3.7.1



Şekil 3.7.2

3.8. Raney Sayıları Ve Stern –Brocot Sayıları Arasındaki İlişki

Önerme 3.8.1. İkili ağaçtaki bir düğüm; $\frac{p}{q}$ Raney sayısına ve $\frac{r}{s}$ Stern-Brocot sayısına sahip olsun.

n çift , $a_0, a_n \geq 0$ ve $a_i > 0$ olmak üzere, $\frac{r}{s}$ sayısı

$$\frac{r}{s} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$$

sürekli kesir açılımına sahiptir ancak ve ancak

$$\frac{p}{q} = \langle a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \rangle$$

sürekli kesir açılımına sahiptir.

İspat: $W = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots L^{a_{n-1}} R^{a_n}$ bir düğüm olsun. Önerme 3.5.1 ile

$SB(W) = f(W) = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$

yazılır.

$\tilde{W} = R^{a_n} L^{a_{n-1}} \ldots L^{a_1} R^{a_0}$ den önerme 3.1.3 tekrar kullanılarak

$Ra(W) = f(\tilde{W}) = \langle a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \rangle$

yazılır.

$S(W) = \dfrac{7}{12} = \langle 0,1,1,2,1 \rangle$ ve $Ra(W) = \dfrac{11}{8} = \langle 1,2,1,1 \rangle$ örneğine dikkat edilmelidir.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

$R=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ve $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ olmak üzere $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\ldots]$ biçimindeki bir sürekli kesir açılımı $R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\ldots$ biçiminde R ve L matrislerinin zincirleme çarpımı biçiminde yazılır. $\alpha=[a_0,a_1,\ldots,a_n+1]$ biçiminde yazılmış sonlu bir sürekli kesir için $R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}\ldots L^{a_{n-1}}R^{a_n}$ çarpımı kullanılır. Örneğin;

$\alpha=\sqrt{2}$ $=[1,2,2,2,\ldots]=R^1L^2R^2L^2\ldots$

$\alpha=\dfrac{7}{4}=[1,1,3]=[1,1,2+1]=R^1L^1R^2$

biçiminde yazılır.

$\alpha=[a_0;a_1,a_2,\ldots]$ biçiminde sürekli kesir açılımı bilinen bir α irrasyonel sayısı için $\beta=\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ sayısının sürekli kesir açılımı bulunabilir. Ancak çözüm için $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan matrisin çifte dengeli olması gerekir. Ayrıca dönüştürücüler yardımıyla dönüşümler ve uygun durum matrisleri belirlenmelidir. Dönüşümler bulunurken $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ özel matrisleri kullanılır.

M matrisinin çifte dengeli olmadığı durumlarda da çözüm için genel problem, çifte dengeli duruma indirgenir. Bunun için adım adım özel işlemler yapılır.

Sürekli kesirleri L ve R matrislerinin zincirleme çarpımı biçiminde gösterilmesi, bir sürekli kesrin kodlanması olarak düşünülebilir. Bu da bilgisayar biliminde her karakterin 0 ve 1 sayılarıyla kodlanmasına karşılık gelir. Buna örnek olarak, hakkında bilgi sahibi olduğumuz bazı sayıların açılımları verilebilir:

$$\pi = [3;7,15,1,292,\ldots] = R^3L^7R^{15}L^1R^{292}\ldots$$

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,\cdots] = R^2L^1R^2L^1R^1L^4R^1L^1\ldots$$

$$\sqrt{2} = [1;2,2,2,2,2,\ldots] = R^1L^2R^2L^2R^2L^2\ldots$$

Bir sürekli kesrin açılımı ağaçlarla da gösterilebilir. $\frac{1}{1}$ olarak alınan kökten itibaren sağ dalda R matrisi, sol dalda da L matrisi kullanılarak, bir ağacın düğümlerini kesirlerle etiketlemek mümkündür. Raney ve Stern-Brocot ağaçları buna iyi birer örnektir.

Raney veya Stern-Brocot ağacından alınan kesir ağaç üzerindeki yollar takip edilerek R ve L matrisleri ile yazılabilir.

KAYNAKLAR

[1] BURTON, D.,M., LEE, H. , STEİN, W., “Elementary Number Theory”, Boston, 1989

[2] www.bilmuh.gyte.edu.tr

[3] RANEY, G.,N., 1973. “On Continued Fractions and Finite Automata”, Math. Ann.Vol. 206, 265-283

[4] VAN DER POORTEN, A.J. ,SHALLIT, J., “Folded Contınued Fractions" 1980 Mathematics subject classification (1985 revision)

[5] SELÇUK, F.,YURTAY, N.,YUMUŞAK, N., “Ayrık İşlemselYapılar”, Sakarya,2005

[6] BERSTEL, J.,DE LUCA, A., 1997. “Sturmian Words, Lyndon Words and Trees”, Theoretical Computer Science, Vol. 178, 171-203

[7] DE LUCA, A., “A Conjecture on Continued Fractions”,Theoretical Computer Science 204 (1998) 75-86

[8] BOWMAN, D., MC LAUGHLIN, J., “A Theorem On Divergence In The General Sense for Continued Fractions”, Journal of Computational and Applied Mathematics 172(2004) 363-373.available online at www.siencedirect.com

[9] LİARDET, P., and STAMBUL, P., “Algebraic Computations withContinued Fractions” Journal of Number Theory 73, 92-121 (1998)

[10] DONALD, E., K., “The Art Of Computer Programing” ,Volume 2, Seminumerical Algorithms, Third Edition, 1997

[11] ROCKETT, A., M., SZÜSZ, P., “Continued Fractions”, Two Edition, 1998

[12] POORTEN, A.,V., “An Introduction to Continued Fractions”, Diophante Analysis (Kensington, 1985), pp.99-138 Cambridge Uni. Press.1986

[13] SİLVERMAN, J., H., “Introduction to Number Theory” Diophantine Analysis,(Kensington,1985),pp.99-138

[14] SHALLIT, J., “Number Theory And Formal Languages”, Emerging Applications of Number Theory, Volume in Mathematics and Applications, vol.109 1999

[15] NIVEN, I., ZUCKERMAN, H.,S., “An Introduction to the Theory of Numbers”, Second Edition, Wiley, 1991

[16] NIQUI, M., “Exact arithmetic on the Stern –Braocot tree”, Journal of Discrete Algorithms, 6 March 2005, available online at www.siencedirect.com

[17] JONES, W.B., THRON,W.J., “Continued Fractions In Numerical Analysis”, Continued Fractions and Pade Approximants, 169-256, C. Brezinski,ed.

[18] KHINCHIN, A.,Y., “Continued Fractions”, Second Edition,The University of Chıcago Press, october 1949

[19] WALL, H., S., “Analytic Theory of Continued Fractions”, Chelsea Publıshıng Company, New York, 1973

[20] www.mes.surrey.ac.uk , “An Introduction to Continued Fraction”

[21] OLDS, C.,D. , “Continued Fraction” Yale University, 1963

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep AKYÜZ, 1980 yılında Gümüşhane'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 1997 yılında Kadıköy Kız Lisesinden mezun oldu. 1997 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2001 yılında mezun oldu. 2002 yılında Sakarya Merkez Atatürk İlköğretim okuluna matematik öğretmeni olarak atandı. Şu anda 2007 yılında atandığı Sakarya Ahmet Akkoç İlköğretim okulunda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.