T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİNİN YAKLAŞIK HESABI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yusuf Hakan BAŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 06 / 06 /2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Abdullah YILDIZ	**Yrd.Doç.Yılmaz GÜNEY**	**Yrd.Doç.Mehmet ÖZEN**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Günümüz dünyasında bilim ve teknoloji ilerledikçe matematiğe ve onun bulgularına olan ihtiyaç ta o ölçüde artmaktadır. Bunun en son örneklerinden birisi de özdeğerlerdir. Son teknoloji radar sistemlerindeki yüksek çözünürlüklü yön bulma, bilgisayarlardaki yapay zeka ve buna bağlı olarak yüzey tarama ve tanıma, şiddete, darbeye yada bunun gibi etkili yüklere maruz kalan yapılardaki kritik denge durumlarının belirlenmesi ve daha birçok alanda ilerlemeyi sağlayan çok önemli bir konudur. Burada yapılan araştırmalar daha çok farklı sistemlerin stabiliteleri, karakteristik titreşimleri ve bunların özdeğer problemleriyle olan ilişkisini anlatmaktadır.

Bu tezin hazırlanmasında çok büyük emeği olan sayın Prof. Dr. Abdullah YILDIZ' a (Sakarya Üniversitesi) ve ayrı ayrı sebeplerden dolayı Arş. Gör. Mustafa ERÖZ' e (Sakarya Üniversitesi), Arş. Gör. Murat GÜZELTEPE' ye (Sakarya Üniversitesi) ve bu çalışmamda beni hiç yalnız bırakmayan sevgili eşim Emine BAŞ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\forall$	: Her
$\in$	: Eleman
$\notin$	: Eleman değil
a^n	: n tane a nın çarpımı
inf A	: A nın en büyük alt sınırı, infimumu
min A	: A nın en küçük elemanı, minimumu
D_A	: A nın tanım kümesi
$\|A\|$	: A nın normu
$\neq$	: Eşit değil
$=$	: Eşit
$U\|_S$	: U nun S deki sınırlaması
$\|u\|$	: u nun Enerji Normu

ÖZET

Anahtar kelimeler: Özdeğer, özfonksiyon, simetrik operatör, asimptotik davranış.

Özdeğer problemleri bütün Matematik, Fizik, Mühendislik ve diğer disiplinlerde ortaya çıkan önemli bir problemdir.

Bazı problemlerde kritik kuvvet, bazı problemlerde potansiyel enerji, bazı problemlerde karakteristik frekans, v.b. tarzda önemli kavramları temsil etmektedir.

Bu önemine rağmen hesaplanması bazı özel yapıdaki problemler dışında oldukça zordur. Bu nedenle nümerik çözümleri yapma zorunluluğu ortaya çıkar.

Sonlu boyutlu problemlerde Matris özdeğer-özvektör problemi olarak ortaya çıkar ve simetrik olmayan matrisler için güçlükler kendini gösterir. Sonsuz boyutlu problemler için de aynı zorluklar görülür. Yaklaşık çözüm teknikleri de daha önemli olan en küçük özdeğerleri ve özvektörleri hesaplamada işe yarar. Ardışık özdeğerlerin hesabı stabil olmamakta ve hesaplamalar yanlış neticeler vermektedir.

Biz bu çalışmada Varyasyonel metodlar kullanacağız ve operatörümüz Diferansiyel operatörle sınırlı kalacaktır.

Örneklendirmeyi Ritz Metodu'nu ve Minimax Metodu'nu anlatarak yapacağız.

APPROXIMATE COMPUTATION OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL OPERATOR'S EIGENVALUES

SUMMARY

Key Words: Eigenvalue, eigenfunction, symmetric operator, asymptotic behaviour

Eigenvalue Problem is a key member and has a special role in Mathematics, Physics, Engineering and the other disciplines.

In many problems eigenvalue represents critical force, may be potantial energy and critical frequency, etc.

In spite of this importance, its rather than difficult to compute eigenvalues in some problems except in special structures . Therefore numerical solutions are revealed that made for obligation.

It can be seen in finite dimension problems like Matrixs eigenvalue-eigenvector and difficulties for asymmetric matrixes could prove one's worth. The same difficulties are seen in the problems of finite dimensions. On the other hand the techniques of approximation are useful in which estimate most important that smallest eigenvalue – eigenvectors. Calculation of consecutive eigenvalues are instabil and results in wrong way.

In this study, we will use variational methods and our operator will limit to differential operator.

We will make an illustrate with the telling about method of Ritz and method of Minimax.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konuyu ortaya koyarken bir örnekle işe başlamayı –anlaşılmasını kolaylaştıracağı gerekçesiyle– uygun buluyoruz.

Regular Sturm-liouville problemini ele alalım.

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu+\lambda\tau u=0 \quad (a<x<b) \qquad \textbf{(*)}$$

p, q ve τ fonksiyonları değişik değişik disiplinlerde, başka başka fiziksel kavramları temsil etmektedir. Bunların çözüme gerekli olan kadarıyla uygunluklarını isteyelim.

$$u=0 \quad \frac{du}{dx}=0 \quad \frac{du}{dx}=hu \quad u(-L)=u(+L) \quad \frac{du}{dx}(-L)=\frac{du}{dx}(+L)$$

$$|u(0)|<\infty \ , \ a_1u(a)+a_2u'(a)=0 \quad b_1u(b)+b_2\frac{du}{dx}(b)=0$$

gibi sınır koşullarıyla değişik problemler verebiliriz. Bu uygunluklar çerçevesinde

1) Bütün λ özdeğerleri reeldir.
2) $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<...$ şeklinde sonsuz tane özdeğer vardır. λ_1 en küçük özdeğerdir. $n\to\infty$ iken $\lambda_n\to\infty$ dır.
3) λ_n lere karşılık $\varphi_n(x)$ özfonksiyonları dik ve Tam küme oluştururlar.
4) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ şeklinde parçalı sürekli fonksiyonları seri açılımlarına imkan verirler.
5) (*) denklemi u ile iç çarpım yapılıp kısmi integrasyon ile

$$\lambda = \frac{-pu\,u'\big|_a^b + \int_a^b p(u'^2 - qu^2)dx}{\int_a^b u^2 w dx}$$

(w ağırlık fonksiyonu) Rayleigh oranını oluştururuz.

Denklemi çözmeden, bu oran vasıtasıyla özdeğerler hakkında bilgi elde ederiz ve nümerik hesaplamalar, varyasyonel yaklaşımlarla elde edilebilir.

Burada u fonksiyonları sadece sınır koşullarını sağlamak ve Rayleigh oranındaki gereksinimleri karşılamak durumundadır. İlk özdeğerler -sonlu tanesi- Rayleigh Ritz yöntemiyle yapılabilmektedir. $n \to \infty$ için bu yöntem yanlış cevaplar verir. Bunlar için yeni asimptotik formüllere ihtiyaç duyarız.

Bu çalışmada biz Diferansiyel operatörlerle ve bunlardan simetrik alttan sınırlı operatörlerle uğraşacağız. Verilen problemlerin Ayrık Spektruma sahip olduklarını ispatlayıp bu özdeğerleri nasıl bulacağımızı iki yöntemle ortaya koyacağız.

BÖLÜM 2. GENEL ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

2.1. Özdeğer Problemi – Karakteristik Titreşimler ve Sistemlerin Stabilitesi İle İlişkisi

A ve B iki lineer operatör ve λ bir skaler olmak üzere ;

$$Au - \lambda Bu = 0 \tag{1}$$

denklemi verilsin. Bu denklemde λ ne olursa olsun, lineer operatör özelliğinden dolayı $u \equiv 0$ bu denklemi sağlar. Buna trivial (adi) çözüm denir. Şimdi şu probleme bakalım: Acaba λ parametresi belirlenerek (1) denklemi sıfırdan farklı çözümlere sahip olur mu ?

Eğer böyle bir λ değeri varsa buna karakteristik değer veya özdeğer denir. Bu özdeğere karşılık gelen sıfırdan farklı çözümlere de özfonksiyon adı verilir. Yani ; λ_0 parametresi ve $u_0(x)$ fonksiyonu için ($u_0(x) \neq 0$) ;

$$A u_0 - \lambda_0 B u_0 = 0$$

ise o zaman λ_0' a özdeğer, $u_0(x)$' e de λ_0' a karşılık gelen özfonksiyon denir. Eğer B operatörü sadece özdeşlik operatörü ise yani ; Bu = u ise (1) denklemi şu hale gelir:

$$Au - \lambda u = 0 \tag{2}$$

Bu durumdaki özdeğerler ve özfonksiyonlara, A operatörünün özdeğer ve özfonksiyonları da denir. Bütün özdeğerlerin kümesine de spektrum adı verilir.

Örnek: $$Au=-\frac{d^2u}{dx^2} \quad 0<x<l \quad u(0) = u(l) = 0$$

sınır koşullarındaki problemi için;

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$$

özdeğer problemi olur. Bunun yanında;

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \ n=1,2,...$$

özdeğerler ve buna karşılık gelen özfonksiyonlar da şu şekildedir;

$$u_n(x)=C_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \ n=1,2,...$$

Eğer u(x), (1) denkleminin özfonksiyonları ise C $\neq$ 0 olmak üzere Cu(x)' de özfonksiyondur. Genel olarak; $u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x)$ (1) denkleminin özfonksiyonları ise bunların lineer birleşimi olan;

$$C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + ... + C_ku_k(x)$$

ifadesi aynı denklem için özfonksiyondur. Elbette ki özfonksiyonların lineer bağımsız olması gerekmektedir.

Verilen bir özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız fonksiyonların sayısı, özdeğerin rankı olarak bilinir. Özdeğerin rankı sonsuz bile olabilir.

Mekanik sistemlerdeki titreşimler bizi özdeğer ve özfonksiyonları aramaya iter. Mesela $0 \le x \le l$ olmak üzere l uzunluğundaki bir düzgün gerili telin denge ifadesi ve bunun enine titreşimleri:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad ; \qquad c = \sqrt{\left(\frac{T}{\rho}\right)}$$

Burada U(x,t)' ler telin yer değiştirmelerinin t anında ve x noktasındaki yer değiştirmeleridir. T, telin gerilmesi ρ ise birim uzunluktaki kütle miktarıdır. Ayrıca dışardan bir kuvvetin etki etmediği düşünülmektedir. Bu durumda titreşimler sadece başlangıç yer değiştirmesine ve başlangıç momentumuna bağlıdır. Eğer telin uç noktaları sabitse;

$$U(0,t) = U(l,t) = 0$$

ve U(x,t)' de;

$$U(x,t) = u(x)\cos \omega t \qquad , \ \omega = \text{sabit}$$

formunda alınırsa bu bizi;

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \qquad ; \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2 \rho}{T}$$

diferensiyel denklemine ve;

$$u(0) = u(l) = 0$$

sınır koşullarına götürür ki halihazırda bu problemin çözümü yukarıda yapılmıştı:

$$U_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{cn\pi t}{l}$$

Eğer tel uniform değilse, $\rho=\rho(x)$ x' in fonksiyonu olur. O zaman da problem;

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda\rho(x)u = 0 \qquad ; \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{T} \tag{3}$$

olur. Bu durumda $A=-\frac{d^2}{dx^2}$, B ise ρ(x) fonksiyonunun çarpımıdır. Bu iki operatör de uç noktalarda sıfır olan fonksiyonlar üzerinde uygulanmaktadır.

Aynı problemi zar titreşimleri problemlerinde de görürüz. Eğer dışardan bir kuvvet yoksa enine titreşimleri;

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

ile verilir. Zarın tanım kümesi Ω olsun. Bu küme bir S sınırı ile çevrilsin ve U fonksiyonu S' de sıfır olsun.

$$U\big|_s = 0$$

Karakteristik titreşimler yine şu formda aransın;

$$U(x,y,t) = u(x,y)\cos\omega t$$

o zaman denklem;

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2}$$

olur. Ω bölgesinde sınırda ise;

$$u\big|_s = 0$$

sınır koşuluyla özdeğer ve özfonksiyon problemi olarak karşımıza çıkar. Burada A operatörü $-\nabla^2$ dir. Bu problem tel probleminden çok daha zordur. Ancak bölgenin dikdörtgen yada çember olması halinde analitik çözümleri mevcuttur.

Mekanik sistemlerin stabil problemlerinde de özdeğer ve özfonksiyonlar ortaya çıkar. Bu problem için örnek vererek bir başka özdeğer-özfonksiyon problemini daha ortaya koyalım:

İnce bir düzlem tabakanın esnemesi-yer değiştirmesi problemine bakalım. Düzlem üzerine bir λ parametresi ile orantılı kuvvetler uygulansın. Bu kuvvetler λT_x , λT_{xy} , λT_y gerilimleriyle çakışsınlar ve burada normal bir yük yüklenmesin. Düzlem tabakanın sınırlarından hareketsiz olacak şekilde kenetlenmesi durumunda yer değiştirmeleri:

$$\nabla^4\omega - \frac{\lambda h}{D}\left[T_x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 2T_{xy}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} + T_y\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right] = 0$$

ile verilir. Bu denklem için sınır koşulları;

$$\omega\big|_L = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_L = 0$$

şeklindedir. Eğer λ yeterince küçükse;

$$|\lambda| < \frac{CD}{2Nh}$$

dir. Burada N, T_x, T_{xy}, T_y gerilimlerinin maksimumundan büyük bir sayıdır. λ parametresindeki küçük değişimlerde sistem stabil kalır. λ kritik değere ulaşınca trivial olmayan çözümler çıkar ve stabilite durumu bozulur. Bu anlamda kritik değerlerin belirlenmesi büyük önem kazanmaktadır. Bu problem de özdeğer probleminin bulunmasına dönüşür.

Genel olarak verilen lineer olmayan problemler için de olsa lineerleştirilmiş denklemlere indirgenerek stabilite problemleri analiz edilir ve bunlar artık özdeğer problemleridirler.

2.2. Simetrik Operatörlerin Özdeğer ve Özfonksiyonları

Simetrik operatörlerin özdeğerleri ve bunların teorik analizi oldukça önemlidir. Bunlarla ilgili önemli teoremleri verelim ama daha önce simetrik operatörün tanımını yapmalıyız.

Tanım 2.2.1. A lineer bir operatör olsun. Tanım kümesindeki herhangi iki u ve v fonksiyonları için;

$$\langle Au,v\rangle = \langle u,Av\rangle \qquad \forall u,v \in D_A$$

eşitliği doğru ise bu operatöre simetrik operatör denir. Mesela $Au=-\dfrac{d^2u}{dx^2}$ 0<x<1 operatörü simetrik bir operatördür.

D_A tanım kümesi, ikinci türevi de sürekli olan ve uç noktalarda sıfır olan fonksiyonlar kümesidir. Böyle tanımlanan A operatörü de simetrik. Gerçekten;

$$(Au,v)-(u,Av) = -\int_0^1 \left(v\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2v}{dx^2} \right) dx$$

burada $v\dfrac{d^2u}{dx^2} - u\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(vu' - uv'\right)$ yazılsın. Böylece;

$$(Au,v)-(u,Av) = -\left[\left(vu'-uv'\right)\right]\Big|_0^1 \ ; \qquad u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$$

ise A operatörü simetrik olur.

Simetrik operatörlerin toplamı da çarpımı da simetrik olur. A ve B operatörleri için AB = BA ise A, B simetriktir. Ayrıca simetrik operatörlerin tersi de simetriktir.

Teorem 2.2.1. Simetrik operatörlerin özdeğerleri reel sayılardır.

İspat: A operatörü için λ_0 özdeğer ve buna karşılık gelen özfonksiyon da $\varphi_0(x)$ olsun.

$$A\varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$$

Eğer φ_0 fonksiyonu reel ise, φ_0 ile iç çarpım yapılarak ve her iki tarafı φ_0' ın norm karesine bölerek;

$$\lambda_0 = \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2}$$

elde edilir ki burada λ_0' ın reel olduğu görülmektedir.

Eğer φ_0 kompleks bir fonksiyon ise yine ispat benzer şekilde yapılabilir.

Böylece pozitif tanımlı ve pozitif alttan sınırlı operatörlerin özdeğerleri pozitif olur. Eğer $(A\varphi, \varphi) > 0$, $\forall \varphi \neq 0$ ise o zaman A operatörüne pozitif tanımlı denir. Simetrik bir opreatör, c pozitif bir sabit olmak üzere $\forall u \in D_A$ için $(Au, u) \geq c^2 \|u\|^2$ eşitsizliğini sağlıyor ise pozitif alttan sınırlı adını alır.

Teorem 2.2.2. Simetrik operatörün özfonksiyonları farklı özdeğerler için birbirine diktir.

İspat : λ_1 ve λ_2 simetrik bir A operatörünün iki farklı özdeğeri olsun. Dolayısıyla $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$' e de bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar diyelim. Bu durumda;

$$A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 \qquad \text{ve} \qquad A\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2$$

dir. İlk denklemi φ_2 ile ikinci denklemi φ_1 ile çarpıp çıkartalım:

$$\left(A\varphi_1,\varphi_2\right)-\left(\varphi_1,A\varphi_2\right)=\left(\lambda_1\text{-}\lambda_2\right)\left(\varphi_1,\varphi_2\right)$$

A simetrik olduğundan sol taraf sıfırdır. $\lambda_1\text{-}\lambda_2\neq 0$ olduğundan $\left(\varphi_1,\varphi_2\right)=0$ dır.

Eğer verilen bir özdeğere birden farklı özfonksiyonlar karşılık geliyorsa, bunlar birbirine dik yapılabilir. Böylece simetrik bir operatörün bütün özfonksiyonları ortonormal bir sistem oluştururlar.

Teorem 2.2.3. Pozitif operatörün özfonksiyonlar sistemi enerji normuna da diktirler.

İspat : λ_1 ve φ_1 pozitif tanımlı A operatörünün özdeğeri ve özfonksiyonu olsunlar.

$$A\varphi_1=\lambda_1\varphi_1$$

φ_2 ise φ_1' den farklı bir özfonksiyon olsun. Yukarıda görüldü ki bunlar $\left(\varphi_1,\varphi_2\right)=0$ anlamında diktirler.
Eğer $A\varphi_1=\lambda_1\varphi_1$ denkleminin her iki tarafını da φ_2 ile iç çarparsak;

$$\left(A\varphi_1,\varphi_2\right)=0$$

buluruz ki böylece ispat tamamlanır. Not edelim ki bu özfonksiyonlar sistemi sadece dik değil, enerjide de tamdırlar.

Böylece Au = f gibi operatör denklemlerinin çözümünde ortogonal bir seri olarak kullanılırlar. Şunu da belirtelim ki pozitif alttan sınırlı A operatörünün özfonksiyonları enerjide tam oldukları gibi, ortonormaldirler.

$\varphi_n(x)$ n=1,2,… A operatörünün özfonksiyonları ve λ_n ler de bunlara karşılık gelen özdeğerler olsun.

$$\left(\varphi_n,\varphi_m\right)=\begin{cases}0 & , \quad n\neq m\\ 1 & , \quad n=m\end{cases} \qquad \left[\varphi_m,\varphi_n\right]=0 \quad , \qquad n\neq m$$

$$A\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$$

Eğer bu denklemi φ_n ile iç çarparsak şu eşitliğe ulaşırız:

$$\left(A\varphi_n,\varphi_n\right)=\|\varphi_n\|^2=\lambda_n$$

Bu denklem bize $\varphi_n(x)$' lerin enerjide normalize edilmediğini gösterir. Daha sonra da;

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_n)}}\varphi_n(x)$$

fonksiyonlar sistemini elde ederiz ki bunlar enerjide dik ve tamdırlar. O zaman;

$$u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f,\psi_n\right)\psi_n(x)$$

$Au=f$ denkleminin çözümüdür, $\psi_n(x)$ yerine $\varphi_n(x)$ koyarsak;

$$u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(f,\varphi_n\right)}{\lambda_n}\varphi_n(x)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.2. (Tamlık Kavramı) Eğer herhangi sonlu normlu bir fonksiyon, uygun bir yakınsamaya göre keyfi hassaslıkta (bir Ω bölgesinde) olacak şekilde $\varphi_n(x)$ $n = 1,2,..$ fonksiyonlarının (ortogonal olsun veya olmasın) sonlu sayıda lineer birleşimleriyle verilebiliyor ise o zaman bu sisteme tam sistem denir. Yani $\varphi_n(x)$, tam bir küme ise ve u(x)' de keyfi bir fonksiyon olmak üzere sonlu normlu olmak şartıyla $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir N tam sayısı ve $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_N$ sabitleri buluruz ki;

$$\left\| u - \left(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + ... + \alpha_N \varphi_N \right) \right\| = \left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

olur. Tamlık tanımını verilen bir sınıfa tahsis ederek de belirleyebiliriz. Bu halde u(x) verilen bu sınıfta olmalıdır.

2.3. Özdeğer Probleminde Enerji Teoremleri

Özdeğer problemi, bazı koşullar altında varyasyonel probleme indirgenebilir. A simetrik operatörü;

$$(Au,u) \geq k\|u\|^2$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada k pozitif reel bir sayıdır. Böyle operatörlere alttan sınırlı operatörler dendiğini biliyoruz. Eğer k = 0 ise pozitif operatör olur. Eğer A operatörü alttan sınırlıysa;

$$\frac{(Au,u)}{(u,u)} \geq k$$

olur. $\frac{(Au,u)}{(u,u)}$ ifadesi alttan sınırlı olup bir d infimumuna sahiptir. Burada $d \geq k$ dır.

Teorem 2.3.1. A simetrik alttan sınırlı bir operatör olsun. d' de $\frac{(Au,u)}{(u,u)}$ nun gerçek alt sınırı olsun. $u_0 \neq 0$ fonksiyonu için;

$$\frac{(Au_0,u_0)}{(u_0,u_0)} = d$$

ise d, A' nın en küçük özdeğeridir ve u_0 da buna karşılık gelen özfonksiyondur.

İspat : η, A' nın D_A bölgesinde keyfi bir fonksiyonu, t' de reel bir sayı olmak üzere $u_0+t\eta \in D_A$ olsun.

$$\varphi(t) = \frac{(A(u_0+t\eta),u_0+t\eta)}{(u_0+t\eta,u_0+t\eta)} = \frac{t^2(A\eta,\eta)+2t(Au_0,\eta)+(Au_0,u_0)}{t^2(\eta,\eta)+2t(u_0,\eta)+(u_0,u_0)}$$

şeklindeki $\varphi(t)$ fonksiyonu t = 0 da minimuma sahiptir ve $\varphi'(0)=0$ dır. $\varphi'(0)$'ı hesaplayarak;

$$(u_0,u_0)(Au_0,\eta)-(Au_0,u_0)(u_0,\eta)=0$$

denklemine ulaşırız. d nin değerini yerine koyarak $(Au_0-du_0,\eta)=0$ olduğu ve buradan da

$$Au_0-du_0=0$$

elde edilir. Burada A operatörü için d özdeğer, u_0 özfonksiyondur. Yani λ_1 ve u_1 herhangi bir özdeğer ve özfonksiyon ise;

$$\lambda_1=\frac{(Au_1,u_1)}{(u_1,u_1)}\geq \min\frac{(Au,u)}{(u,u)}=d$$

Böylece Teorem 2.3.1. bize bir yöntem geliştirmiş oldu. Alttan sınırlı simetrik bir operatörün en küçük özdeğerini bulmak için $\frac{(Au,u)}{(u,u)}$ fonksiyonelini minimum yapan fonksiyonu ararız. Bunu daha uygun hale koymak için;

$\psi=\frac{u}{\|u\|}$ olarak ve $\|\psi\|=1$ olmak üzere;

$$\frac{(Au,u)}{(u,u)}=(A\psi,\psi)$$

yazılsın. O halde tekrar ψ yerine u yazarsak varyasyonel problemimizi şu şekilde formüle edebiliriz: (u,u) = 1 koşulu altında (Au,u) fonksiyonelinin minimumunu bulmak.

Teorem 2.3.2. A operatörü simetrik ve alttan sınırlı olmak üzere $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n$ ilk n tane arka arkaya gelen özdeğerleri verilsin. $u_1, u_2, ..., u_n$ de bunlara karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar olsun. $u = u_{n+1} \ne 0$ fonksiyonu $\dfrac{(Au,u)}{(u,u)}$ fonksiyonelini $(u,u_1) = 0$, $(u,u_2) = 0$, ..., $(u,u_n) = 0$ yan koşulları altında minimize eder. Bu nedenle

$$\lambda_{n+1} = \frac{(Au_{n+1}, u_{n+1})}{(u_{n+1}, u_{n+1})}$$

özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon u_{n+1} dir.

İspat : r, A operatörünün tanım kümesinde keyfi bir fonksiyon olsun;

$$\eta = r - \sum_{k=1}^{n} (r,u_k)\, u_k$$

diyelim. Burada η, $(\eta,u_1) = 0$, $(\eta,u_2) = 0$, ..., $(\eta,u_n) = 0$ koşullarını sağlar.

$$(\eta,u_m) = (r,u_m) - \sum_{k=1}^{n} (r,u_k)(u_k,u_m) \qquad m = 1, 2, ..., n$$

denkleminde u_k ’ ların ortogonal olmasını kullanırsak ve normalize edilirse;

$$(u_k,u_m) = \begin{cases} 0 & k \ne m \\ 1 & k = m \end{cases}$$

neticede

$$(\eta,u_m) = (r,u_m) - (r,u_m) = 0$$

olur. η fonksiyonu gibi tη' de teoremdeki yan koşulları sağlar. Burada t keyfi bir reel sayıdır. Ayrıca $u_{n+1}+t\eta$ de yan koşulları sağladığı açıktır.

Şimdi t' ye bağlı fonksiyonu oluşturalım;

$$\frac{\left(A\left(u_{n+1}+t\eta\right),u_{n+1}+t\eta\right)}{\left(u_{n+1}+t\eta,u_{n+1}+t\eta\right)}$$

fonksiyonu t = 0 da minimumdadır. Bunun türevi alınarak t = 0 yazılırsa;

$$\left(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},\eta\right)=0$$

bulunur.

$$\left(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},r\right)$$

ifademizi önceki denklemlere sırasıyla uygularsak;

$$\left(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},r\right)=\left(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},\eta\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(u_k,r\right)\left(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},u_k\right)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\left(u_k,r\right)\left(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},u_k\right)$$

üstelik;

$$\left(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},u_k\right)=\left(Au_{n+1},u_k\right)-\lambda_{n+1}\left(u_{n+1},u_k\right)$$

Bu ifadenin sıfıra eşit olduğu açıktır. Buna göre ilk ifadenin;

$$\left(Au_{n+1},u_k\right)=\left(u_{n+1},Au_k\right)$$

eşitliği görülür. $Au_k\text{-}\lambda_k u_k=0$ ise;

$$\left(Au_{n+1}, u_k\right) = \lambda_k \left(u_{n+1}, u_k\right) = 0$$

Buradan da $\left(Au_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, r\right) = 0$ bulunur. r keyfi olduğundan ilk terimin sıfır olması gerekir.

$$Au_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1} = 0$$

olduğundan λ_{n+1} özdeğerdir, bu da teoremi ispatlar.

Bu teoremler özdeğerlerin ve özfonksiyonların varlığı halinde söz konusudur. Aşağıdaki teorem ise pozitif tanımlı alttan sınırlı operatörler için varlık teoremini garantilemektedir.Ancak bundan önce şu tanımı verelim.

Tanım 2.3.1. (Kompakt Fonksiyonlar Kümesi) Verilen bir yakınsama anlamında sonsuz bir fonksiyon kümesi kopmaktır deriz şayet, verilen her bir diziden yakınsak bir alt dizi oluşturabiliyor isek. Bu yakınsamalar; düzgün yakınsama, enerjide yakınsama, vs. olabilir.

Teorem 2.3.3. Pozitif alttan sınırlı bir operatör tanım kümesinde enerji normları sınırlı fonksiyonlar kümesi kompakt olsun. Buradaki yakınsama ortalama anlamındadır. O zaman;

a) Aşağıdaki şekilde, operatör sonsuz tane özdeğere sahiptir.

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \ldots \qquad ; \quad \lim \lambda_n = +\infty$$

b) Bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar hem enerjide hem de ortalama anlamdaki yakınsamada tam sistem oluştururlar.

İspat : 1) $\varphi(u) = \dfrac{\left(Au, u\right)}{\left(u, u\right)} = \dfrac{|u|^2}{\|u\|^2}$

ve λ_1 , $\varphi(u)$ fonksiyonelinin gerçek alt sınırı olsun. Açıkça $\lambda_1 \geq \gamma^2$ dir. (γ^2 alttan sınırlılık katsayısı). Bu ispatta $\varphi(u_1)=\lambda_1$ denklemini sağlayan bir u_1 fonksiyonu bulmamız gerekmektedir.

Gerçek alt sınır tanımından öyle bir $v_n \in D_A$ fonksiyonu bulabiliriz ki;

$$\lambda_1 \leq \varphi(v_n) \leq \lambda_1 + \frac{1}{n}$$

olacak şekilde pozitif n sayısı vardır.
Açıkça buradan;

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(v_n) = \lambda_1$$

dir. $\varphi(u)$ fonksiyoneli, u' yu sabitle çarparsak değişmez. v_n ' leri $\|v_n\|^{-1}$ ile çarpalım. $\|v_n\|=1$ olduğundan $\varphi(v_n) = |v_n|^2$ olur ve;

$$|v_n|^2 \to \lambda_1$$

dir. Şimdi η, D_A da keyfi bir fonksiyon ve t de keyfi bir reel sayı olmak üzere açıktır ki;

$$\frac{|v_n + t\eta|^2}{\|v_n + t\eta\|^2} \geq \lambda_1$$

Normun karesini iç çarpıma çevirerek ve $\|v_n\|=1$ kullanarak;

$$t^2\left\{|\eta|^2 - \lambda_1\|\eta\|^2\right\} + 2t\left\{ [v_n,\eta] - \lambda_1 (v_n,\eta) \right\} + \left\{|v_n|^2 - \lambda_1\right\} \geq 0$$

Bu ikinci dereceden ifade işaret değiştirmediği için diskriminantı pozitif olmamalıdır. Böylece;

$$\left|[v_n,\eta]-\lambda_1(v_n,\eta)\right| \le \sqrt{\left(|\eta|^2-\lambda_1\|\eta\|^2\right)}\sqrt{\left(|v_n|^2-\lambda_1\right)} \le |\eta|\sqrt{\left(|v_n|^2-\lambda_1\right)}$$

$|\eta|<C$ (C sabit) ve η keyfi olsun. Bu durumda (1) ve (2) den;

$$[v_n,\eta]\text{-}\lambda_1(u_n,\eta)\underset{n\to\infty}{\to}0$$

bulunur. $|v_n|^2\to\lambda_1$ iken $|v_n|<C$ yerine η=v_n-v_m alırsak ve;

$$|\eta|\le|v_n|+|v_m|<2C$$

ile birlikte (3) ifadesinden;

$$[v_n,v_n\text{-}v_m]-\lambda_1(v_n,v_n\text{-}v_m)\underset{n\to\infty}{\to}0$$

olur. m ve n nin yerini değiştirip toplarsak;

$$|v_n-v_m|^2-\lambda_1\|v_n-v_m\|^2\underset{n,m\to\infty}{\to}0$$

Burada $|v_n|<C$ eşitsizliği v_n n = 1,2,… nin enerji normunda sınırlı olması anlamındadır. Hipotezden dolayı bu dizi ortalama anlamda kompaktır. Bunun yanında ortalama yakınsak bir alt dizi de seçebiliriz. Yeni bir sembol kullanmadan bu diziyi de v_n ile gösterelim.

$v_n\overset{\text{ortalama}}{\to}u_1$ olsun. O zaman $\|v_n-v_m\|\underset{n,m\to\infty}{\to}0$ olur. (4) ten $|v_n-v_m|\underset{n,m\to\infty}{\to}0$ olur.

Yani v_n dizisi enerjide de yakınsak olur. $|v_n - u_1| \to 0$ olduğundan bu limit te u_1 e eşit olur.

$$\|u_1\| = \lim\|v_n\| = 1 \quad \text{ve} \quad |u_1| = \lim|v_n| = \lambda_1$$

olduğundan

$$\varphi(u_1) = \lambda_1$$

olur. Şimdi $Au_1 = \lambda_1 u_1$ olduğunu gösterelim. (3) te $n \to \infty$ iken;

$$[u,\eta] - \lambda_1 (u_1,\eta) = 0 \qquad \eta \in D_A$$

olur. Burada aşağıdaki fonksiyoneli minimize eden bir u fonksiyonu bulacağız.

$$[u,u] - 2(u,\lambda_1 u_1)$$

Biliyoruz ki böyle bir fonksiyon (genelleştirilmiş olabilir) , $Au_1 = \lambda_1 u_1$ denkleminin çözümüdür. (5) denkleminde η yerine u yazarak;

$$[u,u] - 2[u,v] = |u - u_1|^2 - |u|^2$$

olur. Açıktır ki u_1 fonksiyonu (6) fonksiyonelini minimize eder. Yukarıdaki gibi bu fonksiyon $Au_1 = \lambda_1 u_1$ denklemini sağlar. Böylece λ_1 ve u_1 in özdeğer ve özfonksiyon olduğu kısmı ispatlamış olduk. Şimdi teoremin diğer bölümünü ispatlayalım.

2) λ_2 nin $(u,u_1) = 0$ yan koşulu altında $\varphi(u)$ nun gerçek alt sınırı olduğunu gösterelim. Bu koşul fonksiyon sınıfını daraltır ve $\lambda_2 \geq \lambda_1$ olur. Yukarıdaki ispat aynen tekrarlanarak λ_2 nin A operatörünün ikinci özdeğeri olduğu bulunur. Bu ise

u_1 e dik olan u_2 nin normalize özfonksiyonuna karşılık gelir. Bu işleme devam ederek;

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \ldots \qquad (\text{pozitif})$$

artan özdeğer dizisini oluşturabiliriz. Bunlara karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar dizisi de;

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$$

özfonksiyonları olacaktır.

3) $\lambda_n \to \infty$ halini ispatlayalım.

Bunun tersini kabul edelim, yani $\lambda_n \leq C = \text{sbt}$ olsun. Buradan $|u_n| = \lambda_n \leq C$ yani özfonksiyonlar enerji normunda sınırlı olur.

Teoremin hipotezi gereği özfonksiyonlar dizisi kopmaktır. Buradan bir alt dizi olan u_{nk} k=1,2,… seçeriz. Yani;

$$\lim_{k,l \to \infty} \left\| u_{nk} - u_{nl} \right\|^2 = 0$$

Bu ise mümkün değildir. Çünkü özfonksiyonlar ortonormaldir.

$$\left\| u_{nk} \text{-} u_{nl} \right\|^2 = \left(u_{nk} \text{-} u_{nl}, u_{nk} \text{-} u_{nl} \right) = \left\| u_{nk} \right\|^2 - 2\left(u_{nk}, u_{nl} \right) + \left\| u_{nl} \right\|^2 = 2$$

4) u_n ler enerjide tamdırlar. Enerji normuna göre özfonksiyonlar diktirler. λ_n, $\varphi(u)$ nun gerçek alt sınırı olarak aşağıdaki şartlarla belirlenebilir.

$$[u, u_1] = 0 \quad , \quad [u, u_2] = 0 \quad ,\ldots, \quad [u, u_{n\text{-}1}] = 0$$

Eğer enerjide tam olmasaydı sıfır olmayan öyle bir fonksiyon olurdu ki bu enerjide bütün u_n lere dik olurdu. $\tilde{\lambda}$, $\varphi(u)$ nun gerçek alt sınırı olsun. $\tilde{\lambda}$ nin bütün λ_n lerden büyük bir özdeğer olduğunu bulmamız gerekirdi. Ancak $\lambda_n \to \infty$ olduğu için bu mümkün değildir.

5) Son olarak u_n özfonksiyonları ortalama anlamda da tamdırlar. Bunun için sonlu normlu bir fonksiyonu ortalama anlamda istenilen yakınlıkta sonlu enerjili bir fonksiyon bulunabileceğini kabul edelim.

Bu durum, pozitif alttan sınırlı operatörler için ispatlanmıştır. Sonlu normlu bir f(x) fonksiyonu verilsin ve sonlu enerjili bir g(x) fonksiyonu seçebiliriz ki;

$$\|f\text{-}g\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \varepsilon \text{ keyfi pozitif sayı}$$

olur. g(x) fonksiyonunun yaklaşımını ; $a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n$ toplamı olarak yazabiliriz öyle ki;

$$|g\text{-}(a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n)| < \frac{\gamma\varepsilon}{2} \qquad \gamma = \text{sbt}$$

şeklinde belirleyelim. Böylece;

$$\|f\text{-}(a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n)\| \le \|f\text{-}g\| + \left\|g\text{-}\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\right\| \le \|f\text{-}g\| + \frac{1}{\gamma}\left|g\text{-}\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\right| < \varepsilon$$

bulunur ki böylece ispat tamamlanır.

Not 1 : Teoremin (a) ve (b) şartlarını sağlayan bir operatör varsa bunun özdeğerlerine ayrık spektrum denir.

Not 2 : Pozitif alttan sınırlı operatörler için teoremin şartları ayrık spektrumların olması için gerekli ve yeterli koşuldur.

2.4. Özdeğer Problemleri İçin Ritz Metodu

A, $\left(Au,u\right) \geq k\left\|u\right\|^2$ şartını sağlayan alttan sınırlı bir operatör olsun. A nın özdeğerlerinin bulunması, pozitif alttan sınırlı operatörlerin özdeğerlerinin bulunmasına indirgenebilir. Gerçekten c , $\left|k\right|$ dan büyük bir sayı olsun. Au - λu = 0 denklemini $\tilde{A}u - \tilde{\lambda}u = 0$ şeklinde yazabiliriz. Burada $\tilde{A} = Au + cu$, $\tilde{\lambda} = \lambda + c$ dir. $\tilde{A}$ pozitif alttan sınırlı operatördür, çünkü;

$$(\tilde{A}, u) = \left(Au,u\right) + c\left(u,u\right) \geq \left(c+k\right)\left\|u\right\|^2 \quad \text{ve} \quad c+k > 0$$

dır. $\tilde{\lambda}$, $\tilde{A}$ nın ve $\lambda = \tilde{\lambda} - c$ de A nın özdeğeridir. Gerçek alt sınır için « inf » sembolünü kullanırsak;

$$d = \inf \frac{\left(Au,u\right)}{\left(u,u\right)} \tag{1}$$

d, A nın en küçük özdeğeridir ve u_0 fonksiyonu, eğer;

$$d = \frac{\left(Au_0,u_0\right)}{\left(u_0,u_0\right)}$$

varsa özfonksiyondur.

Kabul edelim ki bu fonksiyon mevcut olsun. A’ nın en küçük özdeğerini bulma problemi (1) fonksiyonelinin gerçek alt sınırını bulma problemine indirgenir. Yada (Au,u)’ nun gerçek alt sınırını (u,u) = 1 koşulu altında bulma problemine indirgenebilir.

Şimdi bu problemin Ritz Metoduyla çözülebildiğini gösterelim. Bunun için aşağıdaki üç koşulu sağlayan $\varphi_n(x)$ fonksiyon dizisini ele alalım.

1) $\varphi_n(x)$ fonksiyonları A operatörünün tanım kümesinde olsun.

2) Fonksiyonlar enerji normuna göre tam olsunlar.

3) Keyfi n sayısı için $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ fonksiyonları lineer bağımsız olsunlar.

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

alalım. Burada a_k' lar sabit katsayılardır. Bu katsayıları öyle belirleyeceğiz ki u_n' ler $(u_n, u_n) = 1$ şartını sağlayacak ve (Au_n, u_n) minimum olacak. Böylece n değişkenli;

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k a_m \tag{2}$$

denkleminin;

$$(u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k a_m = 1 \tag{3}$$

koşulu ile minimumunu bulmak istiyoruz. Bu problemi çözmek için Lagrange' ın belirsiz çarpanlar metodunu kullanacağız. Bunun için; $\Phi = (Au_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)$ fonksiyonunu göz önüne alırız. Burada λ bilinmeyen bir katsayıdır. Φ fonksiyonunun a_n katsayılarına göre kısmi türevlerini sıfırlayacağız. Bu bize;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m) \right] = 0 \qquad m=1,2,...,n \tag{4}$$

denklem sistemini verir. (4) denklem takımı a_k' lar cinsinden lineer ve homojendir ancak tamamı sıfır değildir. (4) sisteminin determinantı sıfır olmalıdır. Bu bize λ' lar cinsinden bir denklem verir:

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1,\varphi_1)-\lambda(\varphi_1,\varphi_1);(A\varphi_2,\varphi_1)-\lambda(\varphi_2,\varphi_1);...;(A\varphi_n,\varphi_1)-\lambda(\varphi_n,\varphi_1) \\ (A\varphi_1,\varphi_2)-\lambda(\varphi_1,\varphi_2);(A\varphi_2,\varphi_2)-\lambda(\varphi_2,\varphi_2);...;(A\varphi_n,\varphi_2)-\lambda(\varphi_n,\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A\varphi_1,\varphi_n)-\lambda(\varphi_1,\varphi_n);(A\varphi_2,\varphi_n)-\lambda(\varphi_2,\varphi_n);...;(A\varphi_n,\varphi_n)-\lambda(\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix}=0 \quad (5)$$

Eğer $\{\varphi_n\}$' ler ortonormal ise (5) denklemi;

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1,\varphi_1)-\lambda & (A\varphi_2,\varphi_1) & ...... & (A\varphi_n,\varphi_1) \\ (A\varphi_1,\varphi_2) & (A\varphi_2,\varphi_2)-\lambda & ...... & (A\varphi_n,\varphi_2) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (A\varphi_1,\varphi_n) & (A\varphi_2,\varphi_n) & ...... & (A\varphi_n,\varphi_n)-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad (6)$$

denklemi haline gelir. $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$ fonksiyonları her n için lineer bağımsız olduğundan (5) denklemi n. dereceden bir polinom olup n tane köke sahiptir.

λ_0' da bu köklerden biri olsun. Bu λ_0' ı (4)' e yerleştirirsek determinantı sıfır olur. Sistem trivial olmayan çözümlere sahip olur.

$a_k^{(0)}$ k = 1,2,…,n bir çözüm olsun. Bu durumda $ra_k^{(0)}$ lar da bir çözümdür. r keyfi sayısal çarpan. $ra_k^{(0)}$' ları (3)' e yerleştirerek r değerlerini bulabiliriz. Böylece bulunan bu grup (3) ve (4) denklemini sağlar. λ yerine λ_0, a_k yerine $a_k^{(0)}$ konursa;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}(A\varphi_k,\varphi_m)=\lambda_0\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}(\varphi_k,\varphi_m) \qquad m=1,2,...,n \qquad (7)$$

formunda yazılıp $a_m^{(0)}$ ile çarpılıp toplanırsa aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\sum_{k,m=1}^{n}(A\varphi_k,\varphi_m)a_k^{(0)}a_m^{(0)}=\lambda_0\sum_{k,m=1}^{n}(\varphi_k,\varphi_m)a_k^{(0)}a_m^{(0)}$$

Burada (3) denklemi dolayısıyla sağ taraf λ_0 dır ve sol taraf $\left(Au_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right)$ dır.

$$u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k \qquad \text{ve} \qquad \lambda = \left(Au_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right) \tag{8}$$

Eğer A operatörü simetrik ise (8) denklemi gösterir ki (5) in kökleri reeldir. Üstelik $u_n^{(0)}$ fonksiyonlarından birisi (2) denklemini minimize eder. (8) formülü böylece (5) in köklerinin en küçüğünün bu minimuma eşit olduğunu gösterir. Şimdi bu limitin d ye eşit olduğunu ispatlayalım. Bu, Ritz metodunun özdeğer problemlere uygulanmasının sağlaması olacaktır.

Enerji iç çarpımı ve enerji normunu yazalım;

$$[u,v] = (Au,v) \qquad ; \quad |u|^2 = (Au,v)$$

$\varepsilon > 0$ için gerçek alt sınır tanımından $u' \in D_A$ fonksiyonu $(u',u') = 1$ ve $d \le (Au',u') < d+\varepsilon$ şartıyla mevcuttur. Yani;

$$\sqrt{(d)} \le |u'| < \sqrt{(d+\varepsilon)}$$

dir. $\varphi_n(x)$ $n = 1,2,\ldots$enerjide tam olduğundan u'_N aşağıdaki şartla mevcuttur.

$$u'_N = \sum_{k=1}^{N} b_k \varphi_k \qquad b_k = \text{sbt}$$

öyleki;

$$|u'-u'_N| < \sqrt{\varepsilon}$$

böylece;

$$\left| u'_N \right| \leq \left| u' \right| + \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{(d+\varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon} \quad \text{yada} \quad (Au'_N, u'_N) < \left(\sqrt{(d+\varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon} \right)^2$$

olur. (1) denkleminden;

$$\left\| u'_N - u' \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \left| u'_N - u' \right| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$$

buradan;

$$\left\| u'_N \right\| \geq \left\| u' \right\| - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$$

olur. Sonuçta

$$d \leq \frac{(Au'_N, u'_N)}{(u'_N, u'_N)} = \frac{\left| u'_N \right|^2}{\left\| u'_N \right\|} < \frac{\left(\sqrt{(d+\varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon} \right)^2}{\left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} \right)^2} = d+\eta$$

ε ile η sıfıra gider. Üstelik $\lambda_N^{(0)}$ da

$$\frac{(Au_N, u_N)}{(u_N, u_N)}$$

ifadesinin minimumudur. $u_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k$ Böylece;

$$d \leq \lambda_N^{(0)} \leq \frac{(Au'_N, u'_N)}{(u'_N, u'_N)} < d+\eta$$

oluşur. n > N ise $\lambda_n^{(0)} < \lambda_N^{(0)}$ olur ve burada $d < \lambda_n^{(0)} < d+\eta$ dır. Son eşitsizlik;

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^{(0)} = d \tag{9}$$

olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi diğer özdeğerleri belirlemeye çalışalım. İkinci özdeğerin yaklaşık değerini bulmak için;

$$\left(u_n, u_n\right) = 1 \quad \text{ve} \quad \left(u_n^{(0)}, u_n\right) = \sum_{k,m=1}^{n} \left(\varphi_k, \varphi_m\right) a_k^{(0)} a_m \tag{10}$$

koşulları altında (2) iç çarpımının minimumunu ararız. Burada;

$$u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k$$

A operatörünün normalize edilmiş ilk özfonksiyonunun yaklaşık değeridir. Lagrange metodunu kullanarak;

$$\left(Au_n, u_n\right) - \lambda\left(u_n, u_n\right) - 2r\left(u_n, u_n^{(0)}\right)$$

ifadesinin a_k ya göre kısmi türevlerini sıfıra eşitleyelim.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\left[\left(A\varphi_k, \varphi_m\right) - \lambda\left(\varphi_k, \varphi_m\right)\right] - r\left(\varphi_k, \varphi_m\right) a_k^{(0)}\right\} = 0 \tag{11}$$

denklemi oluşur. Bu denklemin her iki tarafını $a_m^{(0)}$ ile çarpıp m üzerinden toplayalım

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m^{(0)}\left[\left(A\varphi_k, \varphi_m\right) - \lambda\left(\varphi_k, \varphi_m\right)\right] - r\sum_{k,m=1}^{n} a_k^{(0)} a_m^{(0)}\left(\varphi_k, \varphi_m\right) = 0 \tag{12}$$

ikinci toplama $\left(u_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right) = 1$ değerini verir. İlk toplamada m ve k indislerinin yerini değiştirip önce k sonra m üzerinden toplayalım.

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[\left(A\varphi_m, \varphi_k \right) - \lambda \left(\varphi_m, \varphi_k \right) \right] \tag{13}$$

Bu denklemdeki içteki toplam;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[\left(\varphi_k, A\varphi_m \right) - \lambda \left(\varphi_k, \varphi_m \right) \right]$$

veya A simetrik olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[\left(A\varphi_k, \varphi_m \right) - \lambda \left(\varphi_k, \varphi_m \right) \right]$$

ifadesine eşit olur. (4) denklemi gereğince $\lambda = \lambda_n^{(0)}$ için elde edilen $a_k^{(0)}$ sayıları ile;

$$\left(\lambda_n^{(0)} - \lambda \right) \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left(\varphi_k, \varphi_m \right) = \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda \right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k, \varphi_m \right) = \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda \right) \left(u_n^{(0)}, \varphi_m \right) = \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda \right) \left(\varphi_m, u_n^{(0)} \right)$$

Bunun yanında (13) ifadesi şu formda olsun;

$$\left(\lambda_n^{(0)} - \lambda \right) \sum_{m=1}^{n} a_m \left(\varphi_m, u_n^{(0)} \right) = \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda \right) \left(u_n, u_n^{(0)} \right)$$

ki bu ifade (10) dan dolayı sıfırdır. (12) den r = 0 olur ve (11) sistemi (4) ile aynı olur. Buradan aradığımız minimumun λ olduğunu görürüz. Bu ise (5) teki köktür. Böylece denklemin ikinci kökünü almamız gerektiği görülür. Benzer şekilde daha yüksek özdeğerlerin yaklaşık değerleri (5) in kökleri olur.

2.5. Ritz Metodunun Farklı Bir Formu (Temel Sınır Koşulları)

Pozitif alttan sınırlı ayrık spektrumlu operatörle başlayalım. Biliyoruz ki en küçük özdeğer λ_1;

$$\lambda_1 = \inf \frac{(Au,u)}{(u,u)}$$

Gerçek alt sınır A operatörünün tanım kümesindeki bütün fonksiyonların üzerinden alınmalıdır. Yani;

$$\lambda_1 = \inf_{u \in D_A} \frac{(Au,u)}{(u,u)} \tag{1}$$

ve bunu;

$$\lambda_1 = \inf_{u \in D_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \tag{2}$$

şeklinde yazabiliriz. (1) formülündeki oran A operatörünün tanım kümesinde anlamlıdır. Fakat (2) deki oran daha geniş bir sınıf olan sonlu enerjili fonksiyonlar sınıfı içinde geçerlidir. Şimdi genişletilmiş sınırda da bu alt oranın değişmediğini gösterelim. Eğer bu sonlu enerjili fonksiyonlar kümesini H_A ile gösterirsek;

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \tag{3}$$

olur. Fonksiyon sınıfının büyümesi gerçek alt sınırı küçültür. O halde;

$$\inf_{u \in H_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \le \lambda_1$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafını;

$$\delta = \inf_{u \in H_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2}$$

ile tanımlayalım ve $\delta < \lambda_1$ olsun. Gerçek alt sınır tanımından, her $\varepsilon > 0$ için $\tilde{u}(x) \in H_A$ olacak şekilde bir fonksiyon bulmak mümkündür. Öyle ki;

$$\delta \leq \frac{|\tilde{u}|^2}{\|\tilde{u}\|^2} < \delta + \varepsilon$$

sağlanır. $|\tilde{u}|^2 / \|\tilde{u}\|^2$ oranı eğer u bir sabitle çarpılsa da değişmez. Dolayısıyla $\|\tilde{u}\|^2 = 1$ kabul edebiliriz. Buna göre;

$$\delta \leq |u|^2 < \delta + \varepsilon$$

olur. Öte yandan sonlu enerjili fonksiyon tanımından öyle bir $u' \in D_A$ bulabiliriz ki ; $|u' - \tilde{u}| < \varepsilon$ ve sonuç olarak $\|u' - u\| < \frac{\varepsilon}{\gamma}$ $\gamma = \text{sbt}$

Şimdi $\frac{|u'|^2}{\|u'\|^2}$ oranının bir sınırlamasını yapalım. Üçgen eşitsizliğinden;

$$\frac{|u'|^2}{\|u'\|^2} \leq \left\{ \frac{|\tilde{u}| + |u' - \tilde{u}|}{\|\tilde{u}\| - \|u' - \tilde{u}\|} \right\}^2 < \left\{ \frac{\sqrt{(\delta + \varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{\left(\varepsilon / \gamma \right)}} \right\}^2 < \delta + \eta$$

Burada η , ε ile birlikte sıfıra gider. ε u öyle küçük seçebiliriz ki $\delta + \eta < \lambda_1$ olur ve bu durumda (2) formülüyle çelişiriz. O zaman $\delta < \lambda_1$ eşitsizliği mümkün değildir ve (3) denklemi ispatlanır. Açıktır ki (3) ün gerçek alt sınırı $u = u_1$ dir. u_1 burada λ_1 e karşılık gelen A nın özfonksiyonudur.

Ritz metodu $\frac{|u|^2}{\|u\|^2}$ $u \in H_A$ oranının minimumunu bulma olarak genişletilebilir. Bunun için $\varphi_n(x)$ koordinat fonksiyonları dizisi seçeriz. Burada 2) ve 3) koşulları sağlanmalı ve 1) koşulu yerine $\varphi_n(x)$ fonksiyonunun sonlu enerjili olma koşulunu koyarız. $u_n(x)$ i;

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

şeklinde tanımlarsak;

$$\|u_n\|^2 = \sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = 1 \quad \text{ve} \quad |u_n|^2 = \sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m [\varphi_k, \varphi_m]$$

minimum olmalı. Böylece aşağıdaki denkleme ulaşırız.

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1,\varphi_1]-\lambda(\varphi_1,\varphi_1);[\varphi_2,\varphi_1]-\lambda(\varphi_2,\varphi_1);\ldots;[\varphi_n,\varphi_1]-\lambda(\varphi_n,\varphi_1) \\ [\varphi_1,\varphi_2]-\lambda(\varphi_1,\varphi_2);[\varphi_2,\varphi_2]-\lambda(\varphi_2,\varphi_2);\ldots;[\varphi_n,\varphi_2]-\lambda(\varphi_n,\varphi_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\varphi_1,\varphi_n]-\lambda(\varphi_1,\varphi_n);[\varphi_2,\varphi_n]-\lambda(\varphi_2,\varphi_n);\ldots;[\varphi_n,\varphi_n]-\lambda(\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Eğer koordinat fonksiyonlarını A nın tanım kümesi D_A da tanımlarsak (4) denkleminin daha önceki determinant denklemine benzediğini görürüz. Önceki bölümden kolayca ispatlanabilir ki (4) ün kökleri A operatörünün özdeğerlerinin yaklaşık değerleridir ve $n \to \infty$ iken bu denklemin en küçük kökü , operatörün en küçük özdeğerini verir.

Özdeğerlerin yaklaşık değerleri için (4) formundaki denklem , şu durum için özel bir öneme sahiptir: Operatörün tanım kümesine giren fonksiyonların diğer koşulların yanı sıra doğal sınır koşullarını da sağlıyor olması.

Biliyoruz ki sonlu enerjiye sahip fonksiyonların bu şartı sağlaması gerekmez. Böylece pratik olarak önemli bir sonuç çıkar: (4) formunda verilen denklemde daha önceki determinant denklemine nazaran koordinat fonksiyonlarının doğal sınır koşullarını sağlaması gerekmez.

2.6. $Au - \lambda Bu = 0$ Formundaki Denklemler

Şu denklemi göz önüne alalım.

$$Au - \lambda Bu = 0 \qquad (1)$$

A ve B operatörlerinin ikisi de pozitif alttan sınırlı ve $D_A \subset D_B$ olsun. Burada enerji iki türlü, A yada B operatörlerine bağlı olarak tarif edilebilir ayrıca bu bölümde vereceğimiz özdeğer ve özfonksiyon teoremleri daha önce ispatladığımız teoremlerle benzerlik arz eder.

Teorem 2.6.1. (1) denkleminin özdeğerleri reeldir. Eğer λ_0 ve u_0 (1) in özdeğer ve özfonksiyonu ise;

$$\lambda_0 = \frac{(Au_0, u_0)}{(Bu_0, u_0)} = \frac{|u_0|_A^2}{|u_0|_B^2} \qquad (2)$$

Böylece (1) in özdeğerleri reel olduğu gibi aynı zamanda pozitiftirler.

Teorem 2.6.2. (1) in farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları B operatörünün enerjisine göre diktirler. Yani ; λ_1 ve λ_2 (1) in farklı özdeğerleri ve u_1 ve u_2 bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. O zaman;

$$(Bu_1, u_2) = [u_1, u_2]_B = 0 \qquad (3)$$

Böylece (1) in özfonksiyonlar kümesi B nin enerjisine göre ortonormaldirler.

Teorem 2.6.3. (1) in özfonksiyonlar sistemi A operatörünün enerjisine göre de diktirler.

Teorem 2.6.4. A ve B operatörleri için , A nın enerjisinin normuna göre sınırlı olanları B nin enerji normu anlamında kompaktır. O zaman;

a) (1) denklemi $0<\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \le ... \quad \lambda_n \to \infty \quad n \to \infty$ sonsuz özdeğere sahiptir.

b) Bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar hem A hem de B operatörlerinin enerjilerine göre tamdırlar.

Teorem 2.6.5.
$$\frac{(Au,u)}{(Bu,u)} \tag{4}$$

Fonksiyonelinin alt sınırı d olsun. Bu d yi veren u_0;

$$\frac{(Au_0,u_0)}{(Bu_0,u_0)}=d$$

varsa u_0 (1) in özfonksiyonu ve d ise buna karşılık gelen en küçük özdeğerdir.

Teorem 2.6.6. $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ artan sırayla (1) denkleminin ilk n tane özdeğeri olsun. Bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar da $u_1,u_2,...,u_n$ olsun. Kabul edelim ki u_{n+1} fonksiyonu (4) fonksiyonelini;

$$(Bu,u_1)=(Bu,u_2)=...=(Bu,u_n)=0 \tag{5}$$

şartı altında minimize etsin. Bu durumda u_{n+1}, (1) denkleminin;

$$\lambda_{n+1}=\frac{(Au_{n+1},u_{n+1})}{(Bu_{n+1},u_{n+1})} \tag{6}$$

özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. λ_{n+1} özdeğeri λ_n den sonraki ilk özdeğerdir. (Teorem 2.6.5.) ile (1) denkleminin en küçük özdeğerini bulma problemini;

$$\left(Bu,u\right)=1 \tag{7}$$

koşulu altında (Au,u) fonksiyonelinin minimumunu bulma varyasyonel problemine indirgeriz. Benzer şekilde (n+1). özdeğeri bulma prolemi de (7) ve (5) koşulları altında (Au,u) fonksiyonelinin minimumunu bulma problemine indirgenir.

Önceki bölümde koordinat fonksiyonları için koştuğumuz şartlardan 1. ve 3. aynı kalacak, 2. ise şu şekilde değişecek; koordinat fonksiyonları A operatörünün enerjisine göre tam olacak. (6) ve (7) denklemi buna göre aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left[\left(Au_k,u_m\right)\text{-}\lambda\left(Au_k,u_m\right)\right]=0 \qquad m=1,2,...,n \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} \left(Au_1,u_1\right)-\lambda\left(Bu_1,u_1\right);\left(Au_2,u_1\right)-\lambda\left(Bu_2,u_1\right);...;\left(Au_n,u_1\right)-\lambda\left(Bu_n,u_1\right) \\ \left(Au_1,u_2\right)-\lambda\left(Bu_1,u_2\right);\left(Au_2,u_2\right)-\lambda\left(Bu_2,u_2\right);...;\left(Au_n,u_2\right)-\lambda\left(Bu_n,u_2\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(Au_1,u_n\right)-\lambda\left(Bu_1,u_n\right);\left(Au_2,u_n\right)-\lambda\left(Bu_2,u_n\right);...;\left(Au_n,u_n\right)-\lambda\left(Bu_n,u_n\right) \end{vmatrix}=0 \quad (9)$$

2. koşul koordinat fonksiyonları A operatörünün enerjisine göre sonlu olması şartıyla genişletilebilir. İspatlanabilir ki böyle olan fonksiyonlar B operatörünün enerjisine göre sonludur. O zaman (8) ve (9) yerine;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left\{\left[u_k,u_m\right]_A-\lambda\left[u_k,u_m\right]_B\right\}=0 \qquad m=1,2,...,n \tag{8_1}$$

$$\begin{vmatrix} \left[u_1,u_1\right]_A-\lambda\left[u_1,u_1\right]_B;\left[u_2,u_1\right]_A-\lambda\left[u_2,u_1\right]_B;...;\left[u_n,u_1\right]_A-\lambda\left[u_n,u_1\right]_B \\ \left[u_1,u_2\right]_A-\lambda\left[u_1,u_2\right]_B;\left[u_2,u_2\right]_A-\lambda\left[u_2,u_2\right]_B;...;\left[u_n,u_2\right]_A-\lambda\left[u_n,u_2\right]_B \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[u_1,u_n\right]_A-\lambda\left[u_1,u_n\right]_B;\left[u_2,u_n\right]_A-\lambda\left[u_2,u_n\right]_B;...;\left[u_n,u_n\right]_A-\lambda\left[u_n,u_n\right]_B \end{vmatrix}=0 \quad (9_1)$$

daha önce doğal sınır koşulları için söylenenler burada da geçerlidir.

2.7. Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerleri

Bu bölümde adi diferensiyel denklemlerin özdeğerlerini inceleyeceğiz. Çeşitli sınır koşulları altında daha çok ikinci mertebeden denklemler üzerinde çalışacağız. Yüksek mertebeler için ise daha basit sınır koşullarını alacağız.

1. Aşağıdaki diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$Au=-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+r(x)u \tag{1}$$

Burada u(x) fonksiyonu $a \le x \le b$ aralığında verilmiştir. p(x) ve r(x) katsayıları;

$$p(x) \ge 0 \quad , \quad r(x) \ge 0 \qquad A = \int_a^b \frac{dx}{p(x)} < \infty \tag{2}$$

denkleminin şartlarını sağlamaktadır. u(x) öyle sınır koşullarını sağlasın ki (1) operatörünün pozitif alttan sınırlı olmasını garantilesin. A operatörünün özdeğer ve özfonksiyon problemini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

2. İlk önce en basit hali inceleyelim. Bu durumda $a \le x \le b$ aralığının mesela sol ucunda sınır koşulu;

$$u(a) = 0 \tag{3}$$

şeklinde verilsin. Sağ uç noktasında ise genel olarak

$$\gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \tag{4}$$

şeklinde verilsin. Burada $\gamma \ge 0$, $\delta \ge 0$ ve en az biri sıfırdan farklıdır. Problemi çözmek için öncelikle A operatörünün tariflediği enerji için bir sınırlama getirmek faydalı olacaktır. Bunu kolaylıkla;

$$\|u\|^2 = \int_a^b \left(pu'^2 + ru^2\right)dx + \frac{\delta}{\gamma}u^2(b)$$

şeklinde hesaplayabiliriz. Eğer $\gamma = 0$ ise son terim düşer ve her halükarda bu ifade negatif değildir. Son terimi ve işaret altındaki negatif olmayan terimi düşürerek aşağıdaki sınırlama yapılabilir;

$$\|u\|^2 \geq \int_a^b p(x)u'^2(x)dx \tag{5}$$

İkinci adım integral denklemler teorisinden aşağıdaki teoremle bağlantı kurmak olacaktır.

Teorem 2.7.1. Eğer;

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)v(t)dt \tag{6}$$

ve aşağıdaki katlı integral

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt \tag{7}$$

sonlu ise o zaman (6) daki integral operatör, bir norma göre sınırlı fonksiyon kümesini ortalama yakınsaklık anlamında kompakt bir kümeye çevirir. Böylece eğer M bir fonksiyon kümesi ise ve $\forall v(x) \in M$ için;

$$\|v\| = \left\{\int_a^b v^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq c \qquad c=sbt$$

sağlanıyorsa bu halde bu kümeden bir $v_n(x)$ dizisi seçebiliriz ki (6) formülüyle oluşturulan dizi , yani;

$$u_n(x) = \int_a^b K(x,t)v_n(t)dt$$

ortalama anlamda bir limit noktasına yakınsar. (3) şartını sağlayan bir u(x) fonksiyonu alalım ve bu sürekli türeve sahip olsun. İntegral hesaptan biliyoruz ki;

$$u(x) = \int_a^x u'(t)dt$$

v(x) ve $K_0(x,t)$ yerine;

$$v(x) = \sqrt{[p(x)]}u'(x), \quad K_0(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{p(t)}} & , \quad a \le t \le x \\ 0 & , \quad x \le t \le b \end{cases} \tag{8}$$

alalım ve böylece son denklemi şu formda yazabiliriz.

$$u(x) = \int_a^b K_0(x,t)v(t)dt \qquad (6_1)$$

Bu özdeşlik u(x) in sürekli türeve sahip olması koşulu altında elde edilmiştir. Fakat gösterilebilir ki sonlu enerjili fonksiyonlar için de bu doğrudur. Kolaylıkla görülebilir ki (7) integrali sonlu bir sayıdır. Böylece (Teorem 2.7.1.) uygulanabilirdir. Gerçekten (8) formülünden $a \le x$, $t \le b$ için;

$$0 \le K_0(x,t) \le \frac{1}{\sqrt{p(t)}}$$

olduğundan

$$\int_a^b\int_a^b K_0(x,t)dxdt \le \int_a^b\int_a^b \frac{dxdt}{p(t)} = A(b\text{-}a) < \infty$$

dır. Şimdi enerji normları sınırlı olan u(x) fonksiyonlar kümesini göz önüne alalım. (5) formülünden;

$$\int_a^b p(x)u'^2(x)dx \le c^2$$

yada (8) formülüyle verilen v(x) fonksiyonlarını ortaya koyarsak $\|v\| \le c$ olur. Böylece yukarıdaki teoremden u(x) fonksiyonlar kümesinin kompakt olduğunu, önceki bölümdeki (Teorem 2.3.3.) şartlarını sağladığını ve (2) , (3) sınır koşulları altında operatörün ayrık spektruma sahip olduğu görülmüş olur.

Bu sonucu biraz daha ayrıntılı şekilde inceleyelim. Pozitif sayıların $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \le ...$ biçiminde artan sonsuz bir dizisi mevcuttur ve bunlara karşılık gelen $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ vardır ki (2) ve (3) sınır koşullarında;

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du_n}{dx}\right) + ru_n - \lambda u_n = 0 \tag{9}$$

diferensiyel denklemini sağlar. $u_n(x)$ fonksiyonları adi anlamda ortonormaldirler, yani;

$$\left(u_n, u_m\right) = \int_a^b u_n(x)u_m(x)dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \ne m \\ 1 & , \quad n = m \end{cases} \tag{10}$$

ve enerjide de diktirler.

$$\left[u_n, u_m\right] = \int_a^b \left(pu_n' u_m' + ru_n u_m\right)dx + \frac{\delta}{\gamma}u_n(b)u_m(b) = 0 \quad n \ne m \tag{11}$$

üstelik;

$$\|u_n\|^2 = \int_a^b \left(pu_n'^2 ru_n^2 \right) dx + \frac{\delta}{\gamma} u_n^2(b) = \lambda_n \tag{12}$$

$u_n(x)$, n = 1,2,… fonksiyonlar sistemi hem enerjide hem de ortalama yakınsama anlamında tamdırlar. r(x) fonksiyonu negatif değerler de alabilir. Kabul edelim ki bu fonksiyon hala sınırlı kalsın : $|r(x)| \leq c$. O zaman $A_c u = Au + (c+1)u$ operatörü yukarıda verilen koşulları sağlar. Böylece A_c operatörü için $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pozitif özdeğerleri dizisi mevcut olur. Buna karşılık A operatörü için ise ; $\lambda_1\text{-c-1}, \lambda_2\text{-c-1}, \ldots, \lambda_n\text{-c-1}, \ldots$ özdeğerleri dizisi olur. Bunlardan sonlu tanesinin negatif yada sıfıra eşit olduğu açıktır.

3. (1) operatörünü aşağıdaki genel sınır koşullarıyla göz önüne alalım.

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0 \quad , \quad \gamma u'(b) - \delta u(b) = 0 \tag{13}$$

Burada $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\beta \geq 0$, $\delta \geq 0$ ve en az β yada δ birisi de sıfırdan farklı olmalıdır. Kabul edelim ki $\beta > 0$ olsun. Bu halde yukarıdaki (Teorem 2.4.1.) in şartlarının sağlandığını ve (1) operatörünün (13) sınır koşulları altında ayrık spektruma sahip olduğunu gösterebiliriz. Yine bu durumda;

$$\|u\|^2 = \int_a^b \left(pu'^2 ru^2 \right) dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b)$$

negatif olmayan ru^2 terimini integral içinden atarak ve yine negatif olmayan $\frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b)$ atılarak;

$$\|u\|^2 \geq \int_a^b pu'^2 dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) \tag{14}$$

denklemini buluruz. M fonksiyonlar kümesi, her birinin enerji normu sınırlı fonksiyonlardan oluşsun:

$$\|u\| \leq c \qquad c=sbt\ ,\ u \in M$$

(14) eşitsizliğinden;

$$\int_a^b pu'^2 dx \leq c^2 \tag{15}$$

$$\sqrt{p(a)}\,|u(a)| \leq c\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{16}$$

elde edilir. Yine integral hesaptan biliyoruz ki;

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)dt$$

(8) notasyonunu kullanırsak u(x) i;

$$u(x) = u(a) + \int_a^b K_0(x,t)v(t)dt \tag{17}$$

şeklinde yazarız. (15) eşitsizliğinden ve $\|v\| \leq C$ olduğundan M kümesinden bir dizi seçebiliriz ki $u_n(x)$ fonksiyonlar dizisi;

$$\int_a^b K_0(x,t)v_n(t)dt \quad , \quad v_n(t)=\sqrt{[p(t)]}\,u_n(t) \tag{18}$$

biçiminde ortalama anlamında yakınsaktır. (16) eşitsizliğinden $|u_n(a)|$ sınırlıdır. Bolzano-Weierstrass Lemma'sını göz önüne alarak $u_n(x)$, n = 1,2,… dizisinden

$u_{n_k}(x)$ k = 1,2,… alt dizisi yakınsak olarak seçilebilir. Burada $u_{n_k}(a)$ da yakınsar. (17) denkleminden $u_{n_k}(x)$ in ortalama anlamda yakınsadığı görülür.

4. $$u'(a) = u'(b) = 0 \tag{19}$$

sınır koşulları altında (1) operatörünü yeniden göz önüne alalım. $r(x) \geq 1$ olduğunu kabul edeceğiz. Değilse bu durumda Au yerine Au+cu alacağız. C yeterince büyük pozitif sabittir. Böylece A operatörünün özdeğerleri c kadar ötelenecektir. (19) sınır şartlarından;

$$|u|^2 = \int_a^b \left(pu'^2 + ru^2\right)dx \tag{20}$$

elde ederiz. M, aşağıdaki şekilde enerji normları sınırlı olan fonksiyonlar kümesi olsun;

$$|u| \leq c \quad , \quad u \in M$$

(20) den;

$$\int_a^b pu'^2 dx \leq c^2 \tag{21}$$

ve $r \geq 1$ olduğundan;

$$\int_a^b u^2 dx \leq c^2 \tag{22}$$

olur. v(x) yerine $\sqrt{[p(x)]}\,u'(x)$ yazarak (17) denklemine ulaşabiliriz. (21) eşitsizliği nedeniyle $u_n(x)$ fonksiyon dizisini seçebiliriz ki bu ortalamada yakınsar. Şimdi

$u_n(a)$ nın da sınırlı olduğunu görelim. (17) deki integralde $w_n(x)$ kullanarak $u_n(a) = u_n(x) - w_n(x)$ oluşturalım. Böylece

$$u_n^2(a) \leq 2u_n^2(x) + 2w_n^2(x)$$

bu eşitsizliği a dan b ye kadar integre edersek;

$$u_n^2(a) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b u_n^2(x)dx + \frac{2}{b-a}\int_a^b w_n^2(x)dx \tag{23}$$

elde ederiz. (22) eşitsizliğinden dolayı, (23) c^2 yi geçemez. İkinci integral de sınırlı kalır çünkü Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinden;

$$w_n^2(x) \leq \int_a^b K_0^2(x,t)dt \int_a^b v_n^2(t)dt$$

ve (21) eşitsizliğini kullanarak;

$$\int_a^b v_n^2(t)dt = \int_a^b p(t)u_n'^2(t)dt \leq c^2$$

olur. (8) formülünden $0 \leq K_0(x,t) \leq \dfrac{1}{\left[\sqrt{p(t)}\right]}$ ve buradan;

$$\int_a^b K_0^2(x,t)dt \leq \int_a^b \frac{dt}{p(t)} = A$$

dır. Böylece $w_n^2(x) \leq Ac^2$ ve sonuçta;

$$\int_a^b w_n^2(x)dx \leq Ac^2(b-a)$$

dır ve;

$$u_n^2(a) \le \frac{2c^2}{b-a} + 2Ac^2$$

dolayısıyla $|u_n(a)|$ sınırlıdır. Buradan Bolzano-Weierstrass Teoremini uygulayarak ve yukarıdaki sonuçları tekrar ederek söyleyebiliriz ki ; M kümesinden ortalama anlamda yakınsak bir dizi üretebilmekteyiz. Böylece önceki bölümdeki (Teorem 2.2.3.) e göre (1) operatörümüz (19) sınır koşullarıyla ayrık spektruma sahiptir.

5. Operatörü aşağıdaki gibi genişletelim;

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + r(x)u - \lambda\rho(x)u = 0 \tag{24}$$

Burada p(x) ve r(x) 1 in şartlarını sağlar ve ρ_0, ρ_1 belirli pozitif sabit sayılar olmak üzere $\rho_0 \le \rho(x) \le \rho_1$ dir. En basit haliyle;

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{25}$$

sınır koşullarını alalım. (24) ikinci tip operatör formdadır. Eğer Bu = $\rho(x)u$ operatörü alınırsa bu operatör pozitif alttan sınırlıdır.

$$(Bu,u) = \int_a^b \rho(x)u^2(x)dx \ge \rho_0 \int_a^b u^2(x)dx = \rho_0 \|u\|^2$$

(24) denkleminin ayrık spektruma sahip olduğunu göstermek için (Teorem 2.6.3.) ün şartlarını sağladığını göstermeliyiz.O halde;

$$|u|_A^2 = \int_a^b \left(pu'^2 + ru^2\right)dx \quad ; \quad |u|_B^2 = \int_a^b \rho u^2 dx \tag{26}$$

(6_1) ifadesinden;

$$\sqrt{[r(x)]}u(x)=\int_a^b K_1(x,t)v(t)dt \quad ; \quad K_1(x,t)=\sqrt{[\rho(x)]}K_0(x,t)$$

$\rho(t)$ fonksiyonu sınırlı olduğundan;

$$\int_a^b\int_a^b K_1^2(x,t)dxdt=\int_a^b\int_a^b \rho(x)K^2(x,t)dxdt$$

integralleri sonludur. Dolayısıyla (Teorem 2.7.1.) i uygulayabiliriz. Sınırlı normlu v(x) fonksiyonlar kümesinden $v_n(x)$ dizisini oluşturabiliriz. Öyle ki buna karşılık gelen $u_n(x)\sqrt{\rho(x)}$ ortalama anlamda yakınsar. Dolayısıyla $u_n(x)$, B operatörünün enerjisi anlamında yakınsar. Şimdi $u_n(x)$ fonksiyonlar kümesi $|u|_A \le C$ şeklinde verilsin. (26) dan;

$$\|v\|=\left\{\int_a^b p(x)u'^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} \le C$$

görülür. Böylelikle B operatörünün enerjisinde yakınsayan bir dizi u(x) fonksiyon kümesinden seçilebilir. O halde (24) denklemi ayrık spektruma sahip olur. Yani sıfır olmayan $u_n(x)$ fonksiyon dizileri ve pozitif λ_n sayı dizileri mevcuttur. (24) denklemi ve (25) koşulu için $u_n(x)$ fonksiyonları B operatörünün enerjisine göre ortonormaldirler ($\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre). Yani;

$$[u_n,u_m]_B=\int_a^b \rho(x)u_n(x)u_m(x)dx=\begin{cases}0\,, & m\neq n\\ 1\,, & m=n\end{cases}$$

ve A operatörünün enerjisine göre diktir. Yani;

$$\left[u_n,u_m\right]_A=\int_a^b\left(pu'_m u'_n+ru_m u_n\right)dx=\begin{cases}0\,, & m\neq n\\ \lambda_n\,, & m=n\end{cases}$$

(1) operatörünün spektrumunun ayrık olmasını;

$$\int_a^b \frac{dx}{p(x)}$$

integralinin sonlu olmasına bağladık. Bundan dolayı zayıf bir kabulle;

$$\int_a^b \frac{(x\text{-}a)dx}{p(x)}$$

sonlu kalırsa da ayrık spektrum elde edilir. Bu halde yalnız x = a daki sınır koşulunun yapısı değişmelidir.

6. Keyfi çift mertebeden;

$$Au-\lambda Bu=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^k u}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right]-\lambda\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{d^k u}{dx^k}\left[\rho_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right]=0 \qquad (27)$$

denklemini ele alalım (s<m). Bu denklem için aşağıdaki sınır koşullarını uygulayalım.

$$u(a)=u'(a)=...=u^{(m-1)}(a)=u(b)=u'(b)=...=u^{(m-1)}(b)=0 \qquad (28)$$

Kabul edelim ki $p_k(x)$ ve $\rho_k(x)$ negatif olmayan sınırlı fonksiyon olsunlar. Yani $p_m(x)\geq p_0$ ve $\rho_s(x)\geq\rho_0$, p_0 ve ρ_0 pozitif sabitler. Bu kabuller altında (27) deki A ve B operatörleri pozitif alttan sınırlıdır ve;

$$\left\| u \right\|_{\mathbf{A}}^{2} = \int_{a}^{b} \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \qquad (29)$$

$$\left\| u \right\|_{\mathbf{B}}^{2} = \int_{a}^{b} \sum_{k=0}^{s} \rho_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \qquad (30)$$

olur. Burada B operatörünün enerjideki yakınsaması, bütün fonksiyonların kendilerinin ve s. mertebeye kadar türevlerinin ortalamada yakınsamasını gerektirir.

Bu koşullar altında (27) nin ayrık spektruma sahip olduğunu göstereceğiz. Bunun için (Teorem 2.6.4.) ün şartlarının sağlandığını göstermemiz gerekmektedir.

a) M, A operatörünün enerjisi altında sınırlı fonksiyonlar kümesi olsun. Yani; $\mathbf{A} : \left\| u \right\|_{\mathbf{A}} \leq C, u \in M$ yada daha açık bir ifadeyle;

$$\int_{a}^{b} \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \leq C^2$$

ve

$$\int_{a}^{b} \left(\frac{d^m u}{dx^m} \right)^2 dx \leq \frac{C^2}{p_0} \qquad (31)$$

b) a noktasında u(x) ve türevleri (m-1). Mertebeye kadar sıfırdır. Bundan dolayı;

$$u(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{a}^{x} (x-t)^{m-1} u^{(m)}(t)dt \qquad (32)$$

yazılabilir. k defa türevini alarak k = 1,2,…,s

$$u^k(x) = \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{a}^{x} (x-t)^{m-k-1} u^{(m)}(t)dt \qquad (33)$$

bulunur ki (32) ve (33) integralleri (6) genel formuyla aynı yapıdadır.

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(x-t)^{m-k-1}}{(m-k-1)!} & ,a\le t\le x\\ 0 & ,x<t\le b\end{cases}$$

olmak üzere (Teorem 2.7.1.) i (32) denklemine uygularsak M kümesinden ortalamada yakınsayan yakınsak bir $u_n(x)$ $n=1,2,\dots$ dizisi oluşturabiliriz. (33) denkleminde u(x) yerine $u_n(x)$ yazıp k = 1 alırsak bunu elde ederiz. (Teorem 2.7.1.) vasıtasıyla $u_n(x)$ dizisinden $u_{n_1}(x)$ alt dizisini seçebiliriz ki kendisi ve 1. türevi ortalama anlamda yakınsar. (33) denkleminde u(x) yerine $u_n(x)$ yazıp k = 2 alarak tekrar (Teorem 2.7.1.) uygularız ve bu işleme devam ederek M kümesinden kendisi ve s. türeve varana kadar ortalamada yakınsayan bir dizi buluruz. Böylece (27) operatör denklemi (28) koşullarıyla ayrık spektruma sahip olur.

2.8. Sıkıştırılmış Çubuğun Stabilitesi

Herhangi bir çubuk göz önüne alalım (genel halde çubuğun uzunluğu boyunca dik kesitleri – enine kesitleri değişebilsin). Bu çubuk P büyüklüğünde olan ve uçlarından etkiyen iki kuvvetle sıkıştırılsın. Bu hali modelleyen diferensiyel denklem;

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left(I(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right)+P\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{1}$$

şeklindedir. Burada E çubuğun malzemesi için Young Modülü, I(x) eylemsizliğin geometrik momentidir. Bu denklemde çubuğun uçlarından sabitlemelerle sınır koşulları oluşturulacaktır. İki tip sınır koşuluyla kendimizi sınırlayalım ;

1) Her iki uçtan sıkı kenetlenmiş çubuk. Çubuk ekseni (x-ekseni) [0,l] arasında ise;

$$y(0)=y(l)=0 \quad , \quad y'(0)=y'(l)=0 \tag{2}$$

2) Her iki uçtan menteşelenmiş olsun;

$$y(0)=y(l)=0 \quad , \quad y''(0)=y''(l)=0 \tag{3}$$

sağlansın. Başka sınır koşullarıyla analiz etmekte de zorluk yoktur.

Sıkıştırılmış çubuğun stabilite problemi, (1) denklemi altında sıfır olmayan çözümlerin (2) ve (3) koşullarını sağlayacak tarzda kritik yük değerlerinin bulunmasıdır. En küçük kritik yük ise son derece önemlidir.

(1) denklemi 2. grup özdeğer problemi tipindedir. Bu halde P, λ yerine geçmektedir.

$$Ay=E\frac{d^2}{dx^2}\left(I(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad By=-\frac{d^2y}{dx^2}$$

Kısmi integrasyonlar kullanılarak (2) ve (3) yan koşullarıyla beraber;

$$\|y\|_A^2 = (Ay,y) = E\int_0^1 I(x)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \quad ,$$

$$\|y\|_B^2 = (By,y) = \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

dirler. Böylece basınç altındaki çubuğun stabilite problemi (1) denklemi (2) ve (3) koşulları altında özdeğerlerinin aranmasına döner. Çubuğun dik kesitleri noktaya yada doğruya dejenere olmazsa $\left(I(x) \neq 0\right)$ sonsuz tane kritik yük vardır. Bunların en küçüğü aşağıdaki formülle belirlenir;

$$P_1 = \min \frac{\|y\|_A^2}{\|y\|_B^2} = E.\min \frac{\int_0^1 I(x)y''^2(x)dx}{\int_0^1 y'^2(x)dx} \tag{4}$$

Buradaki minimum (2) sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfında aranır.

İkinci problem yine (Teorem 2.6.1.) ve (Teorem 2.6.4.) ün şartlarına dayandırılarak analiz edilir. En küçük kritik yük yine (4) formülü ile belirlenir fakat bu sefer minimum daha geniş bir fonksiyonlar sınıfında aranır çünkü bu sefer y(0) = y(l) = 0 şartını sağlamayı gerektirmektedir. $y''(0) = y''(l) = 0$ doğal sınır koşuludur. Genel olarak sınıfın genişlemesi minimumun küçülmesi demektir. Böylece bu haldeki kritik yük ilk problemin kritik yükünden küçük olacak demektir.

İkinci tip problemi ikinci dereceden bir denklemin özdeğer problemine indirgeyebiliriz, şöyle ki $Iy'' = u$ dersek u(x) fonksiyonu

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{5}$$

ve aşağıdaki diferensiyel denklemi haline gelir:

$$E\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{P}{I}u=0 \tag{6}$$

(6) denklemi önceki bölümdeki (24) denklemi tipindedir. p(x) = E ve ρ(x) = P / I dır. Bu denklemin en küçük özdeğeri önceki bölüm (Teorem 2.6.5.) ten aşağıdaki oranın minimumudur;

$$E\frac{\int_0^1 u'^2 dx}{\int_0^1 \frac{u^2}{I}dx}$$

veya aynı manaya gelen aşağıdaki yan koşulla birlikte verilen fonksiyonelin minimum problemidir.

$$E\int_0^1 u'^2 dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{u^2}{I}dx=1$$

Buradaki minimum (5) koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı üzerinde aranır. Son olarak çubuğun enine kesitleri sabitse (6) denklemi meşhur Euler Denklemi'ne indirgenir.

2.9. Eliptik Operatörlerin Özdeğerleri

Adi diferensiyel denklemlerin özdeğer problemlerinden kısmi diferensiyel denklemlerin özdeğer problemlerine geçiş bilindiği gibi zordur. Biz burada dejenere olmayan ikinci mertebeden eliptik denklemlerle kendimizi sınırlayacağız ve bir düzlemin eğilme problemini inceleyeceğiz.

1) Önceki bölümlerde incelemenin temeli (Teorem 2.2.3.) olmuştu ve daha sonraki bölümdeki (Teorem 2.7.1.) de uygulamalarda kullanılmıştı. Fakat bu bölümde bu son teorem yeterli olmayacak. Onun yerine başka bir teorem formüle edeceğiz. m boyutlu uzayda bir Ω sonlu bölgesi göz önüne alalım. P ve Q, Ω da iki nokta olsun, r de bunlar arasındaki mesafeyi göstersin. $0<\alpha<m$ olmak üzere A(P,Q) sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$Kv = \int_{\Omega} \frac{A(P,Q)}{r^{\alpha}} v(Q) d\Omega_Q \tag{1}$$

integral operatörünü ele alalım ve bu integral operatörünün esasta bir tekilliği olmasın. $\frac{A(P,Q)}{r^{\alpha}}$ ya operatörün çekirdeği diyelim. Bu çekirdek esas tekilliğe sahip olmasın. Bu durumda aşağıdaki teoreme sahibiz.

Teorem 2.9.1. Yukarıdaki integral operatörü sınırlı normlu fonksiyonlar kümesini ortalama anlamda yakınsak kompakt kümeye çevirir (sınırlı kümeleri kompakt kümelere çevirir, yani kompakt operatördür).

2) İşi daha da basitleştirerek Ω, üç boyutlu uzayda sınırlı bir bölge olsun. P(x,y,z) ve Q(ξ,η,ζ) burada iki nokta olsun. u(Q) fonksiyonları $\bar{\Omega} = \Omega + S$ (S, Ω'nın sınırını gösterir) kapalı bölgesinde sürekli türevlenebilsinler ve S üzerinde de sıfır değerini alsınlar. P noktasını P merkezli ε yarıçaplı S_ε yuvarı ile çevirelim. ε yarıçapı yeterince küçük olsun ve bu Ω içinde kalsın. Ω_ε ile Ω dan S_ε yı çıkardığımız kısmı gösterelim ve aşağıdaki integrali kuralım.

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ \nabla_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right\} . \nabla u d\Omega_Q = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\Omega_Q$$

Burada Ω_ε bölgesinin sınırı S ve S_ε yüzeylerinden oluşmaktadır. Bizim problemimiz buna göre iki tane yüzey integrali içerecektir. Yani;

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\Omega_Q = -\int_{\Omega_\varepsilon} u \nabla^2 \frac{1}{r} d\Omega_Q + \int_S u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS_\varepsilon$$

Burada $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ olduğu bilinmektedir. $u\big|_s = 0$ koşuluyla S üzerindeki integral sıfırdır. Şimdi son integrali daha yakından inceleyelim;

$$\int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\Omega$$

Burada n normali göstermektedir (yüzeye dik olan). S_ε yuvarının normali ile radyal istikamet aynıdır. Buna göre;

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\left. \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Şimdi küresel koordinatlara geçelim. Buna göre $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ dir. Aynı zamanda $dS_\varepsilon = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ ve $\xi = x + \varepsilon\sin\theta\cos\varphi$, $\eta = y + \varepsilon\sin\theta\sin\varphi$, $\zeta = z + \varepsilon\cos\theta$ dir. Bunları denkleme yerleştirelim;

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(x + \varepsilon\sin\theta\cos\varphi, y + \varepsilon\sin\theta\sin\varphi, z+\varepsilon\cos\theta)d\theta = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\Omega$$

$\varepsilon \to \infty$ iken Ω_ε bölgesi Ω ya dönüşür. Soldaki integral ise aşağıdaki şekli alır;

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(x, y, z)\sin\theta d\theta = u(x, y, z) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi u(x,y,z) = 4\pi u(P)$$

Her iki tarafı 4π ye bölerek şu denklemi elde ederiz;

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\Omega$$

bu, sınırda sıfır olan bütün u fonksiyonları için geçerlidir. (1) in integrali doğal olarak üç parçaya bölünebilir. Her birinde çekirdek esaslı tekliğe sahip değildir. Mesela;

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = \frac{x - \xi}{r^3} = \frac{x - \xi}{r}\frac{1}{r^2}$$

Burada

$$A(P,Q) = \frac{x - \xi}{r}$$

sınırlıdır çünkü $|x-\xi| \leq r$ dir. Böylece $|A(P,Q)| \leq 1$ ve α = 2 olup burada değişken sayısından küçüktür.

Eğer değişken sayısı 3 e eşit değilse benzer formüller bulunabilir. Özel olarak eğer Ω yüzey bölgesi ve sınırında u(x,y) sıfır ise o zaman şu formül geçerlidir;

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \eta}\right)d\Omega \tag{1}$$

3) Şimdi eliptik tip diferensiyel denklemin özdeğerlerine başlayabiliriz. Eliptik tip özdeğer problemi

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu \tag{2}$$

şeklinde verilsin ve Ω nın sınırında da u = 0 olsun. Aynı zamanda A_{jk} ve C katsayıları öyle belirlensin ki L pozitif alttan sınırlı bir operatör olsun. Özel olarak

$$A_{jj} = 1 \quad ; \quad A_{jk} = 0 \quad ; \quad j \neq k$$

Laplacian özdeğer problemini elde ederiz. Buna göre

$$|u|^2 = (Lu,u) \geq \mu_0 \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_j}\right)^2 d\Omega$$

m = 3 alınırsa yukarıdaki denklem aşağıdaki hale gelir;

$$|u|^2 \geq \mu_0 \int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2\right]d\Omega \tag{3}$$

Enerji normları sınırlı olan fonksiyonlar kümesi M olsun, $|u| \leq C$, $u \in M$. (3) ten;

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\| = \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{(\mu_0)}} \quad ; \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\| \leq \frac{C}{\sqrt{(\mu_0)}} \quad ; \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right\| \leq \frac{C}{\sqrt{(\mu_0)}} \tag{4}$$

elde edilir. $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}$ esas singülerliğe sahip olmayan bir çekirdek ve $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ fonksiyonlarının normları sınırlı olsun. Bu durumda u_1 M kümesinden bir fonksiyon ise (Teorem 2.9.1.) e göre M kümesinden öyle bir u_{1n} $n = 1,2,\ldots$ dizisi seçebiliriz ki;

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial u_{1n}}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\Omega \tag{5}$$

integrali ortalama anlamda yakınsak olur. $u_{1n} \in M$ olduğundan $\dfrac{\partial u_{1n}}{\partial \eta}$ fonksiyonları sınırlıdır ve böylece (4) eşitsizliği ile;

$$\left\| \frac{\partial u_{1n}}{\partial \eta} \right\| \leq \frac{C}{\sqrt{(\mu_0)}}$$

(Teorem 2.9.1.) i tekrar uygularsak u_{1n} dizisinden;

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial u_{2n}}{\partial \eta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} d\Omega$$

integralini ortalama anlamda yakınsatacak tarzda u_{2n} alt dizisi seçilebilir. Bu durumda;

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\partial u_{2n}}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}d\Omega$$

dizisi (5) dizisinden elde edilir ve ortalama anlamda yakınsak olur. Limiti de (5) dizisiyle aynıdır. Benzer şekilde ilerleyerek u_{2n} dizisinden de yakınsak olan alt diziler inşa edebiliriz. Böylece $n \to \infty$ iken;

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\partial u_{n}}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}d\Omega, \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\partial u_{n}}{\partial \eta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}d\Omega, \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\partial u_{n}}{\partial \zeta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}d\Omega \qquad (6)$$

Ancak (1) formülünden u_n fonksiyonlarının da ortalama anlamda yakınsak olduğunu ve limitlerinin (6) integrallerinin limitleri toplamına eşit olduğunu görürüz. Böylece M kümesindeki enerjide sınırlı olan fonksiyonlardan ortalama anlamda yakınsak olan u_n fonksiyonlar dizisini seçebiliriz. (Teorem 2.3.3.) e göre $u|_S = 0$ sınır koşulu altında dejenere olmayan (2) eliptik operatörü Ω sonlu bölgesinde ayrık spektruma sahiptir. Bu operatörün en küçük özdeğerini;

$$\lambda_1 = \min\int_{\Omega}\left(\sum_{j,k=1}^{m}A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2\right)d\Omega$$

şeklinde veririz. Burada minimum aradığımız fonksiyonlar sınıfı, bölgenin sınırında sıfır olan ve aşağıdaki denklemi sağlayan fonksiyonlardır.

$$\int_{\Omega}u^2 d\Omega = 1$$

Örneğin Laplacian operatörünün ($-\nabla^2$) en küçük özdeğeri yukarıda belirttiğimiz fonksiyon sınıfından;

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega$$

integralini minimum yapan değerdir.

4) Sabit veya serbest sınır koşulları ile bir plağın salınımı için özfrekansların bulunması problemi biharmonik operatörün özdeğerlerinin bulunması problemine indirgenir. Eğer plağın sınırları sabitse özfonksiyonlar;

$$w|_S = 0\,,\ \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{7}$$

koşullarını sağlar. Eğer plağın sınırları sabit değilse (serbest sınır koşulundaysa);

$$w|_S = 0\,,\ \left[\nabla^2 w - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n}\right]_S = 0 \tag{8}$$

koşullarını sağlar ve her iki koşul için;

$$\|w\|^2 \geq c\iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dS \tag{9}$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Burada c pozitif bir sayıdır ve (7) koşuluna göre x' e , (8) koşuluna göre de $\frac{1-\sigma}{A}$ ya eşittir. Ayrıca daha önceki gibi S' yi plağın bölgesi olarak alıyoruz.

Öyle bir M fonksiyonlar kümesi verilsin ki fonksiyonların enerji normları sınırlı olsun $\|w\| \leq C$, $w \in M$. (9) daki eşitsizlikten;

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial x}\right\| \leq \frac{C}{\sqrt{(c)}}\,,\quad \left\|\frac{\partial w}{\partial y}\right\| \leq \frac{C}{\sqrt{(c)}}$$

(1_1) deki formülden ve (Teorem 2.9.1.) den dolayı M kümesinden ortalama anlamda yakınsak bir dizi seçilebilir. Başka bir deyişle M kümesi ortalama anlamda yakınsaklık bakımından kopmaktır. Böylece (Teorem 2.3.3.) den her iki durum için de biharmonik operatörün ayrık spektrumu vardır.

5) (7) koşulları altındaki ∇^4 operatörünün en küçük özdeğeri λ_1 olsun ve (8) koşulları altında da buna μ_1 diyelim. (3) genel formülü ile;

$$\frac{|w|^2}{\|w\|^2}$$

oranının minimumunu λ_1 ve μ_1 sayıları olarak belirleyebiliriz. Minimum burada ilk durumda (7) koşullarını sağlayan fonksiyonlardan, ikinci durumda (8) koşulunu sağlayan fonksiyonlardan seçilir. Serbest sınır koşulları için;

$$|w|^2 = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} dS \qquad (10)$$

denklemini, sabit sınır koşulları için de;

$$|w|^2 = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dS \qquad (11)$$

denklemini kullanırız. Bunun yanı sıra (6_2) denklemini -2σ ile çarpıp (11) e eklersek (10) formülüyle karşılaşırız. Ayrıca (10) denklemi sabit sınır koşulları için de kullanılabilirdir. Bu söylediklerimizin sonucunda λ_1 ve μ_1 değerleri

$$\frac{\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} dS}{\iint_S w^2 dS} \qquad (12)$$

oranının minimumu olur. Ancak λ_1 için daha dar bir sınıftaki fonksiyonlar içinden aranır. Buradan $\lambda_1 \geq \mu_1$ olur. Yani serbest sınır koşulu için bir plaktaki titreşimlerin en küçük özfrekansı, sabit sınır koşullarında elde edileni geçemez.

6) Sonlu bir Ω bölgesi için verilen dejenere olmayan eliptik operatörün daha önce verilen sınır koşullarından başka sınır koşulları altında da ayrık spektruma sahip olduğu gösterilebilir.

7) Ayrık spektruma sahip olmayan diferensiyel operatörlere örnekler verilebilir. Örneğin sonlu olmayan bir Ω bölgesinde verilen Laplacian operatörünün ayrık spektruma sahip olmadığını söyleyebiliriz. Bazı durumlarda Ω bölgesi sonlu alınsa dahi dejenere olan eliptik operatörün belirli koşullar altında ayrık spektruma sahip olmadığı görülür.

2.10. Sıkıştırılmış Levhanın Stabilitesi

T_x, T_{xy} ve T_y gerilimlerinin etki ettiği düzlemdeki bir plağın eğilmesi problemini ele alalım. Burada asal normal gerilmeleri kullanacağız ve $T_1 < 0, T_2 < 0$ kabul edeceğiz. Ayrıca pozitif bir T_0 sayısı için $|T_1| \geq T_0, |T_2| \geq T_0$ alacağız. Biliyoruz ki;

$$T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

ifadesi koordinat eksenlerindeki dönümler altında değişmez (invaryant) kalmaktadır. Koordinat eksenlerini, gerilimlerin asal eksenleri ile çakışacak şekilde döndürürsek;

$$T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + T_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 \leq -T_0\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

bulunur. Ayrıca;

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 = (\nabla w)^2$$

ifadesi de eksenlerdeki dönüşümler altında integranttır ve buradan;

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \leq -T_0\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \qquad (1)$$

bulunur. Sınırların sabit olduğunu kabul edersek;

$$w\Big|_L = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_L = 0 \tag{2}$$

(1) eşitsizliğinden – T operatörünün alttan sınırlı olduğunu görürüz.

Şimdi gerilimlerin pozitif bir λ parametresiyle orantılı olduğunu kabul edelim. Plağın belirli λ özdeğerleri için stabilitesini kaybettiği bilinmektedir.

$$\tilde{T}\,w = -\frac{h}{D}Tw \tag{3}$$

gösterimini kabul ederek

$$\nabla^4 w - \lambda \tilde{T}\,w = 0 \tag{4}$$

denklemini yazalım. Burada $\tilde{T}$ operatörünün pozitif alttan sınırlı olduğuna dikkat edelim. Şimdi (2) koşulları altında (4) denkleminin sonsuz bir pozitif özdeğer kümesine sahip olduğunu gösterelim. Buradan sabit sınır koşullarına sahip bir plağın stabilitesini kaybedeceği parametrelerin sayısının sonsuz tane olduğu görülür.

Au – λ Bu = 0 denkleminde A = ∇^4 ve B = $\tilde{T}$ yazarsak (4) denklemine ulaşırız. Daha önceden gördük ki A operatörünün enerjisinde sınırlı olan herhangi bir küme B operatörünün enerjisi anlamında kompakt olur.

$$|w|_A^2 = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dS \tag{5}$$

kullanılarak;

$$\lVert w \rVert_B^2 = (\tilde{T} w, w) = -\frac{h}{D}(Tw, w)$$

eşitliğinden;

$$\lVert w \rVert_B^2 \le \frac{2Nh}{D} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \tag{6}$$

elde edilir. Burada N sayısı $|T_x|, |T_{xy}|$ ve $|T_y|$ nin maksimumlarının en büyüğüdür. Şimdi (2) koşullarını sağlayan fonksiyonların kümesine M diyelim ve $w \in M$ ise $\lVert w \rVert \le c$ olsun. (5) formülünden;

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dS \le C^2 \tag{7}$$

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dS \le C^2 \tag{8}$$

elde ederiz. (2) koşulundan;

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_L = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_L = 0 \tag{9}$$

bulunur. $-\nabla^2$ pozitif alttan sınırlı operatörünü ele alalım. Tanım kümesinin elemanları için L sınırında sıfır olma koşulunu koyalım. (9) denkleminde eğer $w \in M$ ise $\frac{\partial w}{\partial x}$ ve $\frac{\partial w}{\partial y}$ ler $-\nabla^2$ operatörünün tanım kümesinin içine girer. (7) ve (8) eşitsizlikleri ile bu türevlerin, operatörün enerjisi anlamında sınırlı olduğu görülür. Önceki bölümde elde edilen sonuçlara göre $\frac{\partial w}{\partial x}$ ve $\frac{\partial w}{\partial y}$ türevlerinin oluşturduğu kümeler ortalama anlamda yakınsaklık bakımından kompaktırlar. Böylece M kümesinden öyle bir w_n $n = 1,2,\ldots$ dizisi seçilebilir ki $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ ortalama anlamda yakınsak olur. Ancak;

$$\lim_{n,m\to\infty} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 \right\} dxdy = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 \right\} dxdy = 0$$

Şimdi (6) eşitsizliğinden;

$$\left| w_n - w_m \right|_B^2 \le \frac{2Nh}{D} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} - \frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

bulunur. Bunun anlamı da w_n $n = 1,2,\ldots$ dizisinin B operatörünün enerjisi anlamında yakınsak olduğudur. Böylece ispatı tamamlamış olduk.

Buradaki parametrenin kritik değerinin en küçüğü (5) integralinin

$$\left| T \right|_B^2 = -\frac{h}{D} \iint_S \left\{ T_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + T_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS = 1 \qquad (10)$$

koşulu altında minimumu ile elde edilir. Burada aranan minimum, sabit sınır koşulları için (2) koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesi içindedir.

2.11. Elastik Cismin Karakteristik Titreşimleri

Sabit sınır koşulları ile verilmiş elastik bir cismin karakteristik titreşim problemini ele alalım. Böyle bir cisim için sonsuz sayıda özfrekansların var olduğunu göstermeye çalışalım. Ω bölgesinin sınırına S diyelim. $\bar{\Omega} = \Omega + S_1$ ve kartezyen koordinatlarıyla çalışalım. x_1, x_2, x_3 eksenleri boyunca bileşenlere sahip olan yer değiştirme vektörüne **u** diyelim. **u** = (u_1, u_2, u_3) olsun.

$$s_{ik} = s_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

Buradaki değerler deformasyon tensörünün bileşenlerinin yarısıdır. Gerilme tensörünün bileşenlerine τ_{ik} diyelim. Bunlar;

$$\tau_{ik} = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} s_{lm} = \tau_{ki} \tag{2}$$

genelleştirilmiş kanununu sağlarlar. Burada c_{iklm} elastisite katsayıları

$$c_{iklm} = c_{kilm} = c_{ikml} = c_{lmik}$$

sağlar. Böylece bu katsayılar 21 den daha fazla farklı değer alamazlar. Gerilme bileşenleri aşağıdaki hareket denklemlerini sağlar.

$$\gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} - K_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

Burada t zamanı, γ elastik cismin yoğunluğunu ve K_i birim hacim başına düşen kuvvet vektörünün bileşenleridir. (2) yi bu denkleme yazarsak elastik yer değiştirme vektörünün sağladığı denklemleri elde ederiz. Tek bir vektör için bu, aşağıdaki gibi olur;

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au - K = 0 \tag{3}$$

burada;

$$Au = -\sum_{i,k,j,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(c_{iklm} s_{lm}) x_i^{(0)} \tag{4}$$

dır. $x_i^{(0)}$ vektörü x_i ekseni boyunca birim vektörüdür. Eğer ortam homojen ise;

$$Au = -\sum_{i,k,j,m=1}^{3} c_{iklm} \frac{\partial s_{lm}}{\partial x_k} x_i^{(0)}$$

olur. Denge durumunda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ olur ve buradan elastik denge denklemine ulaşırız;

$$Au = K \tag{5}$$

$K \equiv 0$ kabul edip **u** yerine $\mathbf{u} e^{iwt}$ yazarsak serbest titreşimler için denklem elde ederiz. Bu durumda;

$$Au - \lambda u = 0\,, \quad \lambda = \gamma w^2 \tag{6}$$

bulunur. Buradaki A operatörüne elastisite teori operatörü denir. Bileşenleri;

$$v_{ik} = \frac{1}{12\pi}\left\{\frac{5}{r}\delta_{ik} + \frac{r^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} \tag{7}$$

olan V_k simetrik tensörünü tanımlayalım. Burada r, noktalar arasındaki uzaklıktır. δ_{ik} ise $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq k \\ 1 & , \quad i = k \end{cases}$ dir.

V meşhur Somilyan tensörünün özel bir halidir. V tensörüne ait her v_i elastik izotropik homojen ortam denklemini sağlar. Bu denklemde Lame sabitleri $\lambda = 0$ ve $\mu = ½$ dir. Elastisite teori operatörünü A_0 olarak gösterelim. Bu durumda v_i aşağıdaki denklemi sağlar;

$$A_0 v_i = 0 \tag{8}$$

P noktasını ε yarıçaplı bir kümeyle çevirelim ve Ω_ε nun ilk formülünü uygulayalım. $u' = u$, $v' = v$ ve A = A_0 alalım. Buradaki u vektörü Ω da sınırlı herhangi bir vektör olsun. Bu durumda S bölgesindeki integral kaybolur. Yine bu formülün sol tarafındaki integral (8) denkleminden dolayı kaybolur ve aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\int_{\Omega_\varepsilon} w(u,v_i)\, d\Omega + \int_{S_\varepsilon} t_{i,e} u\, dS = 0 \tag{9}$$

Burada S_ε ε yarıçaplı ve P merkezli kürenin yüzeyini temsil eder. Aynı zamanda $t_{i,e}$ de S_ε yüzeyinde v_i ye karşılık gelen vektördür. $\varepsilon \to 0$ iken;

$$u_i(P) = \int_{\Omega} W(u,v_i)\, d\Omega$$

elde edilir. Ayrıca $\lambda = 0$ ve $\mu = ½$ ise;

$$W(u,v_i) = \sum_{l,m=1}^{3} s_{lm} s_{lm}^{(i)}$$

Burada s_{lm} ve $s_{lm}^{(i)}$, u ve v_i nin değişimleri nedeniyle oluşan deformasyonlardır. Böylece;

$$u_i(P)=\int_{\Omega}\sum_{1,m=1}^{3} s_{1m}s_{1m}^{(i)}d\Omega \tag{10}$$

(10) integrali;

$$\psi_{1m}^{(i)}(P)=\int_{\Omega} s_{1m}s_{1m}^{(i)}d\Omega \tag{11}$$

deki integallerin toplamıdır. Bağıntıyı sağlayan çekirdekler de;

$$\left|s_{1m}^{(i)}\right|\leq\frac{C}{r^2},\quad C=sbt$$

Neticede çekirdekler sınıfı esas olmayan singüleriteye sahip olur. Ancak (11) deki integral operatör sınırlı normlu fonksiyonlar kümesini, ortalama anlamda yakınsak $\psi_{1m}^{(i)}$ fonksiyonlar kümesine çevirir.

(11) deki integralin çekirdeği esas olmayan singüleriteye sahip olduğundan $\left\|v_{k1}^{(i)}\right\|\leq C_1\left\|s_{k1}\right\|,\quad C_1=sbt$ eşitsizliği oluşturulabilir. Bunun yanı sıra;

$$\|u\|^2\leq C_2\sum_{i,k,l=1}^{3}\left\|v_{k1}^{(i)}\right\|^2\leq C_3\sum_{k,l=1}^{3}\left\|s_{k1}\right\|^2$$

dir. Pozitif tanımlı W(u) niceliğini kullanarak kuadratik form teorisinden;

$$\sum_{k,l=1}^{3}s^2{}_{k1}\leq C_4W(u)$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\|u\|^2\leq 2C_5\int_{\Omega}W(u)d\Omega\ ,\quad 2C_5=C_3C_4$$

ve $\|u\|^2 \le C_5(Au,u)$ olduğundan;

$$(Au,u) \ge \frac{1}{C_5}\|u\|^2 \tag{12}$$

(11) deki operatörün sınırlı fonksiyonlar kümesini kompakt kümeye çevirdiğini biliyoruz. Bu durumda (10) formülünden sınırda kaybolan yer değiştirme vektörleri kompakt olur ve enerjide karşılık gelen integraller sınırlı olur. Bunu (Teorem 2.3.3.) den sınırda sabit olan maddenin elastisite teori operatörünün doğal ayrıklığı takip eder. Elastisite operatörü genel sınır koşulları altında ayrık spektruma sahiptir.

Netice itibarıyla maddenin sabit sınır koşulu altındaki elastisite teori operatörünün en küçük özdeğeri, deformasyon potansiyel enerjisinin minimumunun iki katına eşittir;

$$2\int_{\Omega} W(u)d\Omega \tag{13}$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega = 1 \tag{14}$$

koşulu altında. Burada minimum, bölgenin sınırında sıfır olan yer değiştirme vektörleri için aranır. İspata gerek olmadan diyebiliriz ki serbest sınırda elastisite teori operatörünün en küçük özdeğeri (13) integralinin minimumuna eşittir ama yer değiştirme vektörleri (14) denkleminin ilavesini de sağlar. (R, P noktasının yarıçap vektörüdür)

$$\int_{\Omega} u d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} R \times u d\Omega = 0$$

Burada serbest sınır koşulları doğal olduğundan dolayı bu vektörleri herhangi bir sınır koşuluna bağlamaya gerek yoktur.

2.12. Minimax Prensibi

A ayrık spektruma sahip pozitif tanımlı bir simetrik operatör olsun. Ayrıca $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots$ özdeğerler ve bunlara karşılık $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ özfonksiyonlar olsun. Ayrık spektrum tanımından simetrik operatörün fonksiyonları tamdır ve ortalama anlamda yakınsaktır. Bu durumda u sonlu normlu bir fonksiyonsa bunu ortogonal bir seriye açmak mümkündür.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n , \quad a_n = (u, \varphi_n) \tag{1}$$

$u \in D_A$ olsun böylece sonlu normlu Au fonksiyonları da aynı şekilde;

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} (Au, \varphi_n)\, \varphi_n$$

olur. Bu serilerin katsayıları kolayca hesaplanabilir. A simetrik olduğundan $(Au, \varphi_n) = (u, A\varphi_n)$ dir. Burada φ_n özfonksiyonu $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ denklemini sağlar. Böylece;

$$(Au, \varphi_n) = (u, \lambda_n \varphi_n) = \lambda_n (u, \varphi_n) = \lambda_n a_n$$

ve

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \varphi_n \tag{2}$$

olur. (2) serileri ortalama anlamda yakınsaktır ve de bunları sonlu normlu bir fonksiyonla iç çarpmak mümkündür. Her iki tarafı u ile iç çarparsak;

$$(Au,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n (\varphi_n, u)$$

$(\varphi_n, u) = (u, \varphi_n) = a_n$ olduğundan;

$$(Au,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2 \tag{3}$$

olur. Bildiğimiz gibi $\|u\| = 1$ koşulu altında en küçük özdeğer olan λ_1, (Au,u) nun minimumuna eşittir. Bu durumda (3) formülünden

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

olur ve $\|u\| = 1$ koşulu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1 \tag{4}$$

formunu oluşturur. (3) formülünde bütün λ_n leri en küçük olan λ_1 ile değiştirerek;

$$(Au,u) \geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{, yada } \lambda_1 \leq (Au,u) \tag{5}$$

elde edilir. Öte yandan (5) eşitsizliği eğer $a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = ... = 0$ olursa ve $u = \varphi_1$ alırsak bir eşitliğe dönüşür. Böylece $\|u\| = 1$ koşulu altında $\lambda_1 = \min(Au,u)$ olduğunu ispatlamış olduk. (3) formülü A operatörünün ardışık özdeğerlerini bulmada yeni bir imkan verir. Bu metodun λ_n özdeğerlerini hesaplamada fazla kullanışlı olmadığı düşünülebilir ancak teorik değeri oldukça önemlidir ve özdeğerlerin bazı önemli özelliklerini bulmakta çok işe yarar.

Keyfi $v_1(x), v_2(x), ..., v_{k-1}(x)$ fonksiyonları sonlu normlu olsun. Bu durumda;

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1 \tag{4_1}$$

ve

$$(u,v_1) = 0; \quad (u,v_2) = 0; \quad ...; \quad (u,v_{k-1}) = 0 \tag{6}$$

koşulları altında (Au,u) fonksiyonelinin minimumunu bulma problemini ortaya koyabiliriz. Bu minimumu $\lambda(v_1,v_2,...,v_{k-1})$ ile gösterelim.

$$\lambda(v_1,v_2,...,v_{k-1}) \leq \lambda_k \tag{7}$$

olduğunu ve (7) denklemindeki $v_1(x), v_2(x), ..., v_{k-1}(x)$ fonksiyonlarının özel bir seçimi halinde eşitlik olduğunu göstereceğiz.

$v_1,v_2,...,v_{k-1}$ leri φ_n özfonksiyonlarının serilerine açalım ve

$$v_i = \sum_{n=1}^{\infty} b_{in}\varphi_n , \quad i = 1,2,...,k\text{-}1$$

olsun. (6) koşulu;

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{in}a_n = 0, \quad i = 1,2,...,k\text{-}1 \tag{8}$$

formu ile temsil edilebilir. $\bar{u}$ fonksiyonunu öyle seçelim ki bu durumda $a_{k+1} = a_{k+2} = ... = 0$ olsun. Buradan da (8) denklemi aşağıdaki şekilde lineer cebir denklemlerinin homojen sistemine indirgenir;

$$\sum_{n=1}^{k} b_{in} a_n = 0, \quad i = 1,2,...,k\text{-}1 \tag{9}$$

$a_1, a_2, ..., a_k$ bilinmeyenleri sayısı denklem sayısı olur ve k-1 den büyüktür. Bilindiği gibi sonsuz çözümler kümesi olan sistem için en az bir çözüm

$$\sum_{n=1}^{k} a_n^2 = 1$$

$\left\| \bar{u} \right\| = 1$ koşulu altında seçebilmek mümkündür. Bu durumda (3) ten;

$$(A\bar{u}, \bar{u}) = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n a_n^2$$

olur. Bütün λ_n lerin yerine daha büyük olan λ_k yazılırsa;

$$(A\bar{u}, \bar{u}) \leq \lambda_k \sum_{n=1}^{k} a_n^2 = \lambda_k$$

olduğu görülür. (4_1) ve (6) yı sağlayan u fonksiyonunun seçimiyle beraber u = $\bar{u}$ için (Au,u)$\leq \lambda_k$ dır. Yani (Au,u) nun minimal değeri alınan koşullar altında λ_k dan büyük olmayacaktır. Buradan;

$$\lambda(v_1, v_2, ..., v_{k\text{-}1}) \leq \lambda_k$$

olur. Burada eşitlik halinin de kolayca ispatı yapılabilir. Bunun için;

$$v_i = \varphi_i, \quad i=1,2,...,k\text{-}1$$

yazmak yeterlidir. (6) koşulları λ_k ların tanımlanmasıyla (9) koşullarına dönüşebilir.

Özdeğerleri saptamak için buraya kadar anlatılanlar, minimax prensipleri olarak bilinir: k. özdeğer olan λ_k, olası bütün $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ fonksiyonları için $\lambda(v_1, v_2, ..., v_{k-1})$ nin maximumuna eşittir. Aynı zamanda $\lambda(v_1, v_2, ..., v_{k-1})$, (4) ve (6) koşulu altında (Au,u) nun minimumuna eşittir.

Not : (3) formülü aşağıdaki şekilde de temsil edilebilir;

$$|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2$$

Burada açıktır ki $\lambda(v_1, v_2, ..., v_{k-1})$ değeri $|u|^2$ nin minimumu olarak alınabilir. Burada u, normalize koşulu olan (4) ü ve diklik koşulu olan (6) yı sağlayan sonlu enerjili fonksiyonlar kümesine uygundur.

BÖLÜM 3. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Özdeğerler ve özfonksiyonlar, Spectral teori denilen Fonksiyonel Analiz ve Uygulamalı Matematiğin çok önemli bir konusudur. Bu konu kendi başına öneminin yanında bütün mühendislik ve pozitif bilimlerde karşımıza çıkmaktadır.

Operatörlerin özdeğerleri operatörün yapısını belirlemede olduğu gibi matematik modellemelerde önemli kavramlarla karşımıza çıkmaktadır. Bunların hesabı Analitik olarak bulunamazsa yaklaşık bulunması icap etmektedir. Bu çalışma sadece Diferansiyel operatörler için özel bir sınıfın Ayrık özdeğerlerinin varlığı garantilenip bunların bulunmasını vermiştir.

Konu üzerinde yeni yeni metodlar geliştirilmektedir. Sonlu boyutlu uzaylar için Matris özdeğer ve özvektör problemi de bir o kadar önemli olup çok çeşitli yöntemler, Matrisin yapısına göre geliştirilmektedir.

Bu konu güncelliğini korumakta ve yeni çalışmalar beklemektedir.

Örnek 3.1: Birim yarıçaplı dairesel bir disk -membrane- in radyal titreşimleri problemini

$$-\Delta u = u_{rr} - \frac{1}{r}u_r = \lambda u \qquad 0 < r < 1 \qquad u\big|_{r=1} = 0$$

$$-(ru_r)_r = \lambda ru$$

Rayleigh oranı;

$$\frac{\iint |\nabla u|^2\, dx}{\iint u^2 dx} = \frac{\int_0^1 ru_r^2 dr}{\int_0^1 ru^2 dr}$$

Trial (deneme) fonksiyonları;

$$u_r(0) = u(1) = 0$$

şartını sağlayan fonksiyonlar alınır.

$1-r^2$, $(1-r^2)^2$ en basit halde alınırsa çözümler şu şekilde bulunur:

Çözüm:

(Mathematica da yazılmıştır)

T = 9; (**bir yarıçaplı dairesel membrane radyal titreşimi.* $-\Delta u = -u_{rr} - (1/r)u_r = \lambda u$, $u(1) = 0$, λ *lar bessel jo bazı kökleri**)

A = Table[0,{T},{T}];B = Table[0,{T},{T}];

Do[

Do[

u[k][r_]:= (1−r^2)^k;u[j][r_]:= (1−r^2)^j;

A[[k,j]] = $\int_0^1$ r*D[u[k][r],r]*D[u[j][r],r]dr;

B[[k,j]] = $\int_0^1$ r*u[k][r]*u[j][r]dr

,{j,1,T}],{k,1,T}];

(*A//MatrixForm

B//MatrixForm*)

Chop[N[Solve[Det[A − λ*B] = 0, λ]]]

{{λ→5.783185962946784`},{λ→30.471262343662083`},{λ→74.88700679144374`},{λ→139.04032693152206`},{λ→222.99133304691063`},{λ→331.915806646964`},{λ→526.2025524689736`},{λ→1083.2228761596332`},{λ→4119.485649647944`}}

Örnek 3.2:

$$u'' + \lambda u = 0$$
$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 0$$
$$\lambda_n = n^2\pi^2$$

için özdeğer hesabı aşağıdaki gibidir.

Çözüm:

(Mathematica da yazılmıştır)

```
T = 10; (*u″ + λu = 0   u(0) = 0, u(1) = 0, λ = (n*π)^2*)
A = Table[0,{T},{T}];B = Table[0,{T},{T}];
Do[
        Do[
u[k][x_]:= (x − x^(k+1));u[j][x_]:= (x − x^(j+1));
A[[k,j]] = ∫_0^1 u[k][x]*(-1)*D[u[j][x],{x,2}]dx;
B[[k,j]] = ∫_0^1 u[k][x]*u[j][x]dx
,{j,1,T}],{k,1,T}];
(*A//MatrixForm
B//MatrixForm*)
Chop[N[Solve[Det[A − λ*B] = 0, λ]]]
```

{{λ→39.478417604375515`},{λ→157.91401835726867`},{λ→356.6575111362614 6`},{λ→726.748490389709`},{λ→2569.201562512386`},{λ→9.869604401089358`} ,{λ→88.82644937691104`},{λ→247.04271715844808`},{λ→531.6718556031016`}, {λ→1852.5893734604501`}}

KAYNAKLAR

[1] MIKHLIN S.G., BODDINGTON T., Variational Methods in Mathematical Physics. A Pergamon Press Book the Macmillan Company Newyork, 1964.

[2] COWRANT R., HILBERT D., Methods of Mathematical Physics 2 Newyork, 1953; 1962.

[3] MORSE P.M., FRESHBACK H., Methods of Theoretical Physics 2 McGraus Hill Newyork, 1953.

[4] SANSONE G., Ortogonal Functions R.E Kriegen Melbourne 1977.

[5] STRANG G. Introduction to Applied Mathematics 1986.

[6] HABERMAN R., Elementary Applied Partial Differential Equations. Prentice-Hall inc. 1983.

[7] SAGAN H., Boundary and eigenvalue Problems in Mathematical Physics Newyork Wiley 1961.

[8] ISAACSON E., KELLER H.B. Analysis of numerical methods Newyork Wiley 1966.

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf Hakan Baş, 01.01.1981 de Simav' da doğdu. Eğitimine Simav Osmanbey ilkokulunda başladı ve ortaokuldan lise 3. sınıfa kadar Sakarya Anadolu Lisesi' nde devam etti. 1998 yılında Ozanlar Lisesi' nden mezun oldu. Aynı yıl Uludağ Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2002 yılında girdiği Selçuk Üniv. Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünü 2004 yılında bitirdi. 2004-2005 Eğitim Öğretim yılında yüksek lisans eğitimine ve öğretmenlik mesleğine başladı. 2004-2006 yılları arasında Kaynarca Merkez İ.O. matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2005-2006 Eğitim Öğretim yılı sonunda Diyarbakır'a atandı. Halen Diyarbakır İsmetpaşa İ.O. matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.