T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# SÜREKLİ KESİRLER VE GEOMETRİK YORUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehtap GER

**Enstitü Anabilim Dalı** : **MATEMATİK**

**Tez Danışmanı** : **Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI**

**Haziran 2007**

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# SÜREKLİ KESİRLER VE GEOMETRİK YORUMU

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Mehtap GER**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Bu tez 05 / 06 /2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.**

| Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI | Prof. Dr. Metin BAŞARIR | Doç. Dr. İbrahim OKUR |
| --- | --- | --- |
| Jüri Başkanı | Üye | Üye |

# ÖNSÖZ

Bu çalışmada sürekli kesir kavramı ve bunun geometrik olarak yorumu üzerinde duruldu. Bir doğruya, eğiminden yararlanılarak, en yakın noktalar bulunmaya çalışıldı. Belki, bu çalışmanın devamı olarak daha farklı yaklaşım yolları bulunup bir karşılaştırma yapılabilir.

Tezin hazırlanmasının her aşamasında, yardımlarını esirgemeyen, değerli fikirlerinden yararlandığım, sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI ile çalışmam sırasında bana destek olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR

| | | |
|---|---|---|
| $\| \ \|$ | : | Mutlak Değer |
| $\\| \ \\|$ | : | Maksimum Norm |
| $\langle \ \rangle$ | : | Sürekli Kesir Gösterimi |
| $[ \ ]$ | : | Tam Değer |
| $\{\alpha_n\}$ | : | Sürekli Kesrin Kalanı |
| $A'$ | : | $A$ Matrisinin Transpozu |
| $A^{-1}$ | : | $A$ Matrisinin Tersi |
| $\det A$ | : | $A$ Matrisinin Determinantı |
| $sU$ | : | $U$ Vektörünün Eğimi |
| $d$ | : | Dik Uzaklık |
| $N$ | : | Doğal Sayılar Kümesi |
| $\frac{p_n}{q_n}$ | : | Sürekli Kesrin n. Yakınsaklığı |
| $Z$ | : | Tamsayılar Kümesi |
| $Z^2$ | : | (1,0), (1,0) Noktalarının Ürettiği Kafes |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

# ÖZET


Anahtar Kelimeler: Sürekli Kesir, İki Boyutlu Vektörler, 2x2'lik matrisler, Kafes, En iyi yaklaşımlar, Sürekli Kesir Algoritması, Periyodik Sürekli Kesirler.

$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{+a_n +} \cdots = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ biçimindeki ifadeye sürekli kesir denir. Burada $a_0$ herhangi bir tamsayı olup $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sayıları pozitif tamsayılardır. $[a_0, a_1, ..., a_n]$ sonlu sürekli kesri ya da $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ sonsuz sürekli kesri sırasıyla, rasyonel veya irrasyonel sayılar olabilirler. Herhangi bir irrasyonel sayının istenen basamağa kadar hesabı, sürekli kesirler yardımıyla yapılabilir.

Sürekli kesrin en önemli özelliği ise, istenilen sayıya sürekli kesrin yakınsaklıkları denilen değerlerle, çok yakın değerler elde edilebilmesidir. Yani, $x = [a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ...]$ biçimindeki bir sayının $p/q = [a_0, a_1, .., a_n]$ ifadesi bu kesrin n. yakınsaklığı olmak üzere, $p/q$ $q' \prec q$ için herhangi bir $p'/q'$ noktasından daha yakındır. Bu özellik, tamsayıların kareköklerine yaklaşım yapmak için önemlidir. Sürekli kesir kavramına, bu bilgilerden yaralanılarak bir yorum katmaya çalışılmıştır.

**CONTINUED FRACTIONS AND GEOMETRICAL INTERPRETATION OF THEM**


## SUMMARY

Key Words: Continued Fraction, Two-Dimensional Vektörs, Two by Two Matrices, Lattice, The Best Approximations, The Continued Fraction Algorithm, Periodic Continued Fraction.

$a_0 + \frac{1}{a_1 +} + \frac{1}{a_2 +} \dots + \frac{1}{+ a_n +} + \dots = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ is called continued fraction. Here, $a_0$ is an integer and $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ are positive integer. $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ finit continued fraction or $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ infinit continued fraction can be respektively rational or irrational numbers. Any irrational number's arithmetic demanded step can be done by the help of continued fraction.

The most important characteristic of continued fraction is to obtain very close value to demanded number by the values which are called convergent of continued fraction. If $p/q$ is fraction's n.convergent, $p/q$ is more converge than any $p^{'}/q^{'}$ point for $q^{'} \prec q$. It's tried to interpret on continued fraction through these information.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

## 1.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Euclid Algoritması:

Pozitif tamsayıların herhangi bir, $x_0 > x_1$ olmak üzere $(x_0, x_1)$ ikilisi, doğal sayılar kümesinde $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$ biçiminde azalan bir dizi oluşturur:

$$x_0 = b_0 x_1 + x_2 ,$$

$$x_1 = b_1 x_2 + x_3 ,$$

$$x_2 = b_2 x_3 + x_4 , \tag{1}$$

$$\vdots .$$

Bu formülde, $j = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere, $b_j$ bir doğal sayıdır. Doğal sayılar kümesinde herhangi bir azalan dizi sonlu olduğundan, $x_{n-1} = b_{n-1} x_n$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Bu nedenle algoritma bu adımda sona erer. (1) denklemleri yukarıdan itibaren $x_{n-2} = b_{n-2} x_{n-1} + x_n$ denklemlerine doğru okunarak $x_0$ ve $x_1$ noktalarının herhangi ortak böleninin $x_n$ sayısını böldüğü anlaşılır. Aynı denklemler aşağıdan yukarıya okunarak $x_n$ sayısının $x_0$ ve $x_1$ noktalarının ortak böleni olduğu söylenebilir. Böylece, $x_n$ sayısı $x_0$ ve $x_1$ sayılarının en büyük ortak böleni olur. Bu durum, $d = (x_0, x_1)$ biçiminde belirtilir. (1) denklemlerinde kullanılan $b_n$

katsayılarının işlevleri; $b_0, b_1, b_2, \cdots$ tamsayı katsayılı lineer cebirsel denklem sistemleri yardımıyla anlaşılabilir. (1) denklemleri $x_n$ bilinmeyenlerine bölünerek,

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = b_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{x_n}{x_{n+1}}}, \qquad n = 1,2,\cdots$$

elde edilebilir. Yani, $\frac{x_0}{x_1}$ sayısının hesaplanması, düzgün bir sürekli kesre dönüşmesi anlamına gelir,

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots + \cfrac{1}{b_n}}} \tag{2}$$

bu ise, herhangi bir rasyonel sayının, (2) eşitliğindeki gibi düzgün bir sürekli kesrin değerine eşit olduğunu gösterir. (2) deki eşitlikte, $b_0$ bir tamsayı, $b_1, b_2, b_3, \cdots$ ise, pozitif tamsayılardır [2].

**Tanım 1.1.** $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$$

biçimindeki ifadelere basit sürekli kesir ya da düzgün sürekli kesir denir. $a_0$ hariç diğer $a$ sayıları pozitif olacak şekilde alınmıştır. $a_0$ ise, pozitif, negatif veya sıfır olabilir. Bu sayılar, sürekli kesrin elemanlarıdır ve bunlar sonlu ya da sonsuz olabilirler. Sonlu ise,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{3}$$

biçiminde gösterilir. Sürekli kesir sonsuz ise,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \tag{4}$$

şeklinde olur. Her sonlu sürekli kesir, sonlu sayıda işlemin sonucu olduğu için, belli bir reel sayıya eşittir. Eğer elemanların hepsi rasyonel sayı ise, kesrin kendisi de rasyonel sayı olur. Örneğin; $\frac{40}{31} = \langle 1,2,4 \rangle$ gibi. Fakat sonsuz sürekli kesirler için, herhangi bir nümerik değer söylenemez.

**Teorem 1.1.** Her rasyonel sayı, sonlu basit sürekli kesir olarak yazılabilir.

**İspat:** $n > 0$ olmak üzere, $\frac{m}{n}$ bir rasyonel sayı ise,

$$\frac{m}{n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

dır [4].

**Teorem 1.2.** Her irrasyonel sayı sonsuz sürekli kesir olarak, bir tek şekilde ifade edilebilir.

**İspat:** $x$ herhangi bir irrasyonel sayı olsun. $a_1 = [x]$ olmak üzere,

$$x = a_1 = \frac{1}{x_1} \quad , \quad 0 < \frac{1}{x_1} < 1$$

yazılabilir. $x_1$ bir rasyonel sayı ise teorem 1.1 den dolayı $x$ sonlu basit kesir olur. Bu durumda, teorem 1.1'den dolayı $x$ sayısının rasyonel sayı olması gerekir ve bu ise hipotezle çelişir . O halde, $x_1$ irrasyonel bir sayı olmak zorundadır. Ayrıca, $0 < \frac{1}{x_1} < 1$ olduğu için, $x_1 > 1$ olur. O halde, $a_2 = [x_1]$ ve $x_2$ irrasyonel bir sayı olmak üzere,

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}, \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1$$

yazılabilir. Bu işlemler sonlanmaz. Çünkü, $x_i$ irrasyonel bir sayıdır ve onun $a_{i+1}$ tam kısma sahip olması mümkün değildir. O halde, her $x_i$ için, $a_{i+1} = [x_i]$ ve $x_{i+1}$ irrasyonel bir sayı olmak üzere,

$$x_i = a_{i+1} + \frac{1}{x_{i+1}}$$

yazılır. Böylece,

$$x = \langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$$

olur. $a_1 = [x]$ ve $i > 0$, $a_{i+1} = [x_i]$ olduğu için $x$ sayısının sürekli kesir gösterimi tektir. Buna örnek olarak, $\sqrt{8}$ sayısının sürekli kesir açılımı verilebilir: $2 < \sqrt{8} < 3$ olduğu için, $2 = [\sqrt{8}]$ ve böylece,

$$\sqrt{8} = 2 + (\sqrt{8} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{8} - 2}} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{8} + 2}{4}} = \cdots$$

yazılabilir.

Euclid Metodunun Geometrik Yorumu:

Sürekli kesirlerin cebirsel yapısı, Euclid geometrisinin önemli bir problemini teşkil eder. Bu problem ortagonallik gösterimine bağlıdır ( şekil 1.1. ).

$$AB \perp AD,\ x_1 = |AB| = |AD|$$

olsun. $|BD| = x_0$ olmak üzere, $E$ noktası $|AB| = |BE|$ olacak şekilde bir nokta ise,

$$x_0 > x_1 > x_2 = |ED|$$

olur. $A\overset{\Delta}{B}E, A\overset{\Delta}{E}F, F\overset{\Delta}{E}D$ den,

$$|AF| = |FE| = |ED|,$$

Buradan,

$$x_0 = 1.x_1 + x_2, \tag{5}$$

$$x_1 = 2.x_2 + x_3\ ,\ |A_1D| = x_3 < x_2 \tag{6}$$

olur. $A\overset{\Delta}{B}D \cong E\overset{\Delta}{F}D$ olduğu için,

$$x_2 = 2.x_3 + x_4$$

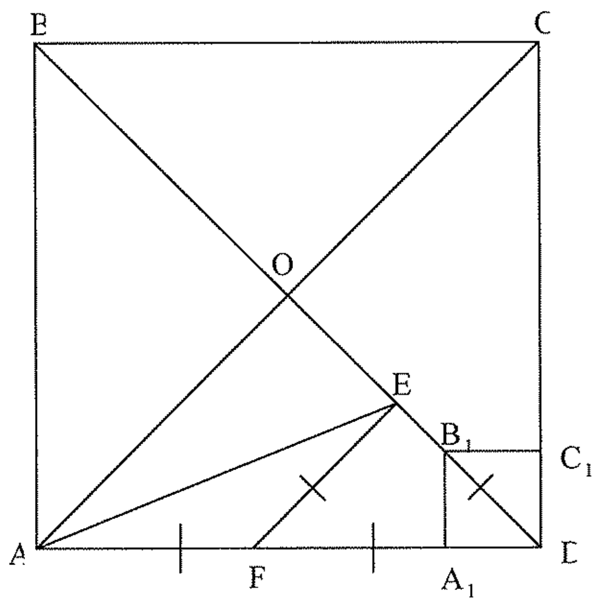
olur. Bu durum devam eder ve bitmez. Sonuç olarak, $\frac{x_0}{x_1}$ ifadesi bir sonsuz sürekli kesir yardımıyla gösterilebilir. Hiçbir zaman, $A_n = D$ olamayacağından,

$$\frac{x_0}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \tag{7}$$

yazılabilir. Rasyonel sayılar sonlu düzgün sürekli kesirlerin değerlerine eşit olduğu ve tek türlü yazılabildiğinden,

$$\sqrt{2} = \frac{|BD|}{|AD|}$$

bir irrasyonel sayı olur.




Şekil 1.1. Euclid metodunun geometrik yorumu

# BÖLÜM 2. VEKTÖRLER VE MATRİSLER

## 2.1. İki Boyutlu Vektörler

**Tanım 2.1.1.** $V=(a,b)$ sıralı bir çift olsun. $x$ koordinatı $a$, $y$ koordinatı $b$ olan $V$ vektörüne, iki boyutlu vektör denir. $V_1(a_1,b_1)$ ve $V_2(a_2,b_2)$ iki vektör olsun. Bu durumda bu iki vektörün toplamı;

$$V_1+V_2=(a_1+a_2,b_1+b_2)$$

olur. Ve $k$, bir reel sayı ise $kV_1$ vektörü de;

$$kV_1=V_1k=(ka_1,kb_1)$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlar, aritmetikteki birçok işlemin, vektörler için de uygulanabilmesine yardımcı olur.

**Teorem 2.1.1.** Eğer $V_1,V_2,V_3$ vektör ve $k_1,k_2$ sayıları reel sayılar ise;

$$V_1+V_2=V_2+V_1\ ,$$

$$(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)\ ,$$

$$k(V_1+V_2)=kV_1+kV_2\ ,$$

$$k_1(k_2V_1)=(k_1k_2)V_1$$

olur.

**İspat:** $i$=1, 2, 3, olmak üzere, $Vi=(ai,bi)$ olsun. tanım 2.1.1. ve teorem 2.1.1. yardımıyla,

$$V_1+V_2=(a_1+a_2,b_1+b_2)=(a_2+a_1,b_2+b_1)=V_2+V_1\ ,$$

$$(V_1+V_2)+V_3=(a_1+a_2,b_1+b_2)+(a_3,b_3)=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3)$$

$$=(a_1,b_1)+(a_2+a_3,b_2+b_3)=V_1+(V_2+V_3)\ ,$$

$$=k_1(V_1+V_2)=k_1(a_1+a_2,b_1+b_2)=(k_1a_1+k_1a_2,k_1b_1+k_1b_2)$$

$$=(k_1a_1,k_1b_1)+(k_1a_2,k_1b_2)=k_1V_1+k_1V_2\ ,$$

$$k_1(k_2V_1)=k_1(k_2a_1,k_2b_1)=(k_1k_2a_1,k_1k_2b_1)=(k_1k_2)V_1$$

olur.

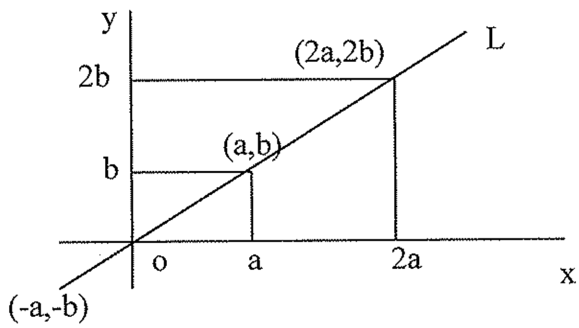
**Tanım 2.1.2.** $O=(0,0)$ vektörüne sıfır vektörü denir. Her, $V$ vektörü için sıfır vektörü, $O+V=V+O$ eşitliğini sağlar ve aynı zamanda, $0V=O$ olur.

Eğer, $V=(a,b)$ biçiminde bir vektör ise, $-V$ vektörü, $-V=(-a,-b)$ biçiminde tanımlanabilir. Buradan;

$$V+(-V)=V \text{ ve } -(-V)=V$$

yazılır.

**Tanım 2.1.3.** $V_1$ ve $V_2$ vektörleri verildiğinde $V_1-V_2$ ; $V_1-V_2=V_1+(-V_2)$ biçiminde tanımlanır. $V_i=(a_i,b_i)$ olduğundan, $V_1-V_2=(a_1-a_2,b_1-b_2)$ biçiminde yazılır. Eğer $V_1 + V_2 = V_3$ ise, $V_1 = V_3 - V_2$ olur. $-V$ gösteriminde muhtemel bir belirsizlik vardır. $(-1)V$ ve $-V$ farklı tanımlara sahiptir, fakat sonuçta, $-V = (-1)V$ denilebilir. Sabitler sayesinde vektör toplamlarına ve vektör çarpımlarına farklı bir geometrik yorum katmak mümkün olur. Eğer, ele alınan vektör $V = (a,b)$ ise, $xy$ düzlemindeki $V$ vektörü, şekil 2.1.'deki gibi olur. Eğer, $V \neq O$ ise $V$ ve $O$ vektörleri, bütün $k$ sayıları için, bir L doğrusu tanımlar ve bu $kV$ vektörü, L doğrusunun üzerinde olur. Aslında, $k > 0$ ise, $kV$ şeklinde gösterilen noktalar $V$ vektörü gibi, $O$ vektörün aynı taraftadır ve $V$ vektörü gibi $O$ vektöründen uzaklığı $k$ kadar olur. Eğer, $k = -1$ ise; $kV = -V$ olur. Ve $V$ vektörünün tam karşı tarafındadır. Eğer, $k < 0$ ise; $kV = |k|(-V)$ olduğu için, $kV$ , $O$ vektörünün zıt tarafında kalır ve $V$ gibi $O$ ile aynı $|k|$ uzaklığında olur. Bu açıklamalar üçgenlerle gösterilir.




Şekil 2.1. Vektör

## 2.2. 2X2'lik Matrisler

**Tanım 2.2.1.** Bir $mxn$ şeklindeki matriste, m, satır ve n, sütun sayısını gösterir. Örneğin: $(\pi)$ , $(1,3)$ , $\begin{pmatrix} 7.1 \\ -8 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 3.7 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ , sırasıyla 1x1, 1x2, 2x1, 2x2 tipinde matrislerdir.

**Tanım 2.2.2.** $A$ ve $B$, $mxn$ şeklinde iki matris ise, $A + B$ matrisi, $A$ matrisi ile $B$ matrisinin toplamı anlamına gelip, karşılıklı elemanların toplanmasıyla elde edilir.

Örneğin; (1,4) + (-3,7) = (-2,11) veya $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ gibi.

**Tanım 2.2.3.** Eğer, $A$, $mxn$ tipinde bir matris ve $k$ bir reel sayı ise, $k.A = A.k$ şeklinde tanımlanan $mxn$ matrisi, $A$ matrisinin $k$ katı olarak isimlendirilir. Örneğin; 3.(1,4) = (1,4).3 = (3,12) ya da $7.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.7 = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 7 & 56 \end{pmatrix}$ gibi.

1x2 reel sayı matrislerinin toplam ve çarpımı, iki boyutlu reel sayı vektörlerinin toplam ve çarpımıyla aynıdır. Bunun için, iki boyutlu vektörler ve bunlarla yapılan aritmetik işlemler, matrislerin aritmetik işlemleri için önemlidir. Mesela, teorem 2.1.1 e benzer olan aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.1.** Eğer, $A_1, A_2, A_3$, $mxn$ tipinde matrisler ve $k_1$, $k_2$ birer reel sayı ise, bu durumda, $k_1(k_2A_1) = (k_1k_2)A_1$, $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$ $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$, $(k_1 + k_2)A_1 = k_1A_1 + k_2A_1$ olur [6]. Teorem 2.2.1 yardımıyla, $4A_1 + 3A_2 + A_3 + 5A_4$ olabilir. Buradaki matrisler nasıl toplanırsa toplansın sonuç aynı olur.

**Tanım 2.2.4.** Elemanları sıfır olan $mxn$ matrislerine, sıfır matrisi denir. Eğer, $A$, $mxn$ tipinde matris ise, $-A$ matrisi, $A$ matrisinin eksili hali olarak tanımlanır. Böylece, $-A = (-1)A$ olur. Eğer $B$ matrisi, $mxn$ tipinde ise, $A - B$ , $A + (-B)$ şeklinde tanımlanır.

**Teorem 2.2.2** Eğer, $A, B, C$ $mxn$ tipinde matrisler ve $O$, $mxn$ tipinde sıfır matrisi ise; $A + O = O + A = A$ ve $A - A = O$ olur. Eğer, $A + B = C$ ise $A = C - B$ dir.

**İspat:** İlk iki eşitlik tanımlar yardımıyla bulunabilir. Üçüncü eşitlik teoremin ilk iki kısmı ve teorem 2.2.1 yardımıyla aşağıdaki gibi gösterilir, eğer, $A + B = C$ ise; $A = A + O = A + (B - B) = C - B$ ve böylece, $A = C - B$ olur. Teorem 2.2.1 ve teorem 2.2.2 den sonra matrislerin toplamı ve çıkarımları ile reel sayılarla matrislerin çarpılması, reel sayılardaki aritmetik işlemlerle aynı biçimde yapılır. Yalnız çarpımlar için aynı şey söz konusu değildir. Yine de, matrislerin çarpımları belli aritmetik kurallara sahiptir, bu da kolaylık sağlar.

**Tanım 2.2.5.** İki tane 2x2 matrisinin çarpımı, yine bir 2x2 matris olur.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

1x2 ve 2x2 şeklindeki matrislerin çarpımının sonucunda 1x2 şeklinde bir matristir.

$$(a,b)\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=(ae+bg, af+bh)$$

Örneğin: $(2{,}3)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=(8{,}10)$ olur. Fakat, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}(2{,}3)$ tanımlanamaz. Ayrıca;

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, olduğu halde; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 18 & -1 \end{pmatrix}$ olur. $A$, $B$ matrisleri tanımlı iken, $AB$ tanımlanabilir ama $BA$ tanımlanamaz. $BA$ tanımlansa bile, $BA$ ve $AB$ matrisleri aynı değildir. Bu nedenle çarpmanın esas kurallarından biri olan değişme, matrislerde geçerli değildir. Bu sadece şu anlama gelir. Bu matrislerin sıralamasına dikkat edilmesi gerekir.

**Teorem 2.2.3.** Eğer, $A$ ve $A_1$'in her ikisi de 2x2 veya 1x2 tipinde matrisler ve $B$, $C$ ise, 2x2 tipinde matrisler olduğunda;

$$(AB)C = A(BC),$$

$$A(B+C) = AB + AC,$$

$$(A+A_1)B = AB + A_1B$$

dır.

**İspat:** Teoremin ilk eşitliği üçüncü eşitliğin karışık halidir. $A$ matrisi 2x2 tipinde bir matris olsun , $A$ matrisi 1x2 tipinde olsa da yine aynı şekilde olur.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

olsun. Buradan,

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]C=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{pmatrix},$$

Ayrıca,

$$A(BC)=A\left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ei+fk & ei+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} aei+afk+bgi+bhk & aej+afl+bgj+bhl \\ cei+cfk+dgi+dhk & cej+cfl+dgj+dhl \end{pmatrix}$$

olur. Bu hesaplamalardan; $(AB)C=A(BC)$ olur. Teorem 2.2.3. yardımıyla bir örnek ele alınabilir. x ve y çözümler olmak üzere, iki denklem alınabilir ve teorem yardımıyla çözülebilir. Buna örnek olarak aşağıdaki denklemler yazılırsa,

$$\begin{aligned} 13x+3y&=1, \\ 5x+y&=2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$A=\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}$$

olur.

$$(x,y)A=(x,y)\begin{pmatrix}13 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}=(13x+3y,5x+y),$$

Eşitlik (1) den,

$$(x,y)A=(1,2) \tag{2}$$

elde edilir. Buradan; (1) in çözümünde $(x,y)A$ ve $(1,2)$ aynı matrisler olur. Buradan;

$$[(x,y)A]B=(1,2)B, \tag{3}$$

Yani, (2) eşitliğinin her iki tarafı $B$ ile çarpılıp, sağ tarafA yazılarak,

$$(1,2)B=(1,2)\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{-13}{2}\end{pmatrix}=\left(\frac{5}{2},\frac{-21}{2}\right) \tag{4}$$

olur. Ve teorem 2.2.3 yardımıyla;

$$[(x,y)A]B=(x,y)\,[AB]=(x,y)\left[\begin{pmatrix}13 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{-13}{2}\end{pmatrix}\right]$$

$$=(x,y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(x,y). \tag{5}$$

olur. (3), (4) ve (5) eşitliklerinden yararlanılarak, $(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{-21}{2}\end{pmatrix}$ olur. Buradan;

(1) denkleminin çözümü ; $x=\frac{5}{2}$ , $y=\frac{-21}{2}$ olur. Teorem 2.2.3. olmadan bu

değerler bulunamazdı.

**Tanım 2.2.6.** $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ise, $I$ matrisine birim matris denir. Eğer, $ad-bc\neq 0$ ise ve $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ise; $A^{-1}$ matrisine $A$ matrisinin tersi denir.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc}\\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur.

**Tanım 2.2.7.** Eğer, $A$ matrisi 2x2 tipinde bir matris ise; $AI=IA=A$. Eğer, $V$ bir 1x2 matrisi ise; $VI=V$. Eğer, $A$ bir 2x2 tipinde matris ve $A^{-1}$ tanımlı ise;

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I$$

olur. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ olsun. $A$ matrisinin determinantı; $\det A=ad-bc$ dır. $A^{-1}$ matrisinin tanımlanması için, $A$ matrisinin $\det A\neq 0$ olmalıdır.

**Teorem 2.2.4.** Eğer, $A$ ve $B$, 2X2 tipinde matrisler ise;

$$\det(AB)=(\det A).(\det B)$$

olur.

**İspat:** $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $\det A=ad-bc$ ve $B=\begin{pmatrix}m & n\\ k & l\end{pmatrix}$, $\det B=ml-kn$ ise,

$$\det A.\det B=(ad-bc).(ml-kn)$$

$$=adml-knad-bcml+bckn.$$

$$AB = \begin{pmatrix} am+bk & an+bl \\ cm+dk & cn+dl \end{pmatrix}$$

$$= \det\,(AB) = (am+bk)\,(cn+dl)\ -\ (cm+dk)\,(an+bl)$$

$$= amcn + amdl + bkcn + bkdl - cman - cmbl - dkan - dkbl$$

$$= amdl + bkcn - cmbl - dkan$$

$$= adml - knad - bcml + bckn$$

olur. Sonuç olarak;

$$\det\,(AB) = (\det A)\,(\det B)$$

olur. Ayrıca, $\det\,I = 1$ olduğundan,

$$(\det A)\left(\det A^{-1}\right) = \det\,\left(AA^{-1}\right) = \det\,I = 1$$

olur. O halde,

$$\det\,A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

olur.

**Tanım 2.2.8.** Eğer, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise, $A$ matrisinin *transpozu* (devriği) $\left(A^{'}\right)$ şeklinde gösterilir,

$$A^{'} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

dır.

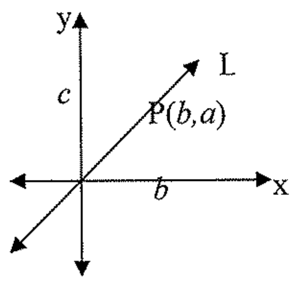
**Teorem 2.2.6.** Eğer, $A$ ve $B$ 2X2 tipinde matrisler ise; $(AB)^{'} = B^{'}A^{'}$ olur[6].

# BÖLÜM 3. GEOMETRİK YORUM

## 3.1. Sürekli Kesirler

Bu çalışmanın amacı, verilen reel bir sayıya "iyi" rasyonel yaklaşımlar bulmak için bir metot geliştirmektir. Geometrik olarak ilerlerken, belli gösterimlerin tanımları verilecektir.

**Tanım 3.1.1.** Koordinatları $(b,a)$ olan herhangi bir P noktası dikkate alınsın ve $a \neq c$ olmak üzere $(b,c)$ noktası, $x = b$ dikey doğrusu ile orijinden geçen L doğrusunun kesişim noktası olsun. Eğer; $a > c$ ise P noktası, L doğrusunun üstündedir ve $a < c$ ise, P noktası, L doğrusunun altındadır.




Şekil 3.1. I. bölgedeki doğru

**Tanım 3.1.2.** $b \neq 0, (b,a)$ koordinatlarına sahip P noktası verilsin. $\frac{a}{b}$ sayısına, P'nin eğimi denir. Yani, P'nin eğimi, orijin ve P noktasından geçen doğrunun eğimi olur. Düzlemde x ve y'nin pozitif olduğu noktalar kümesine ilk çeyrek denir.

**Teorem 3.1.1.** $\alpha > 0$ olmak üzere, $\alpha$ eğimine sahip olan ve orijinden geçen bir L doğrusu verilsin. Eğer P, birinci çeyrekteki bir nokta ise aşağıdaki durumlar söz konusu olur:

P , L doğrusunun üstündedir $\Leftrightarrow$ P'nin eğimi $> \alpha$

P , L doğrusundadır $\Leftrightarrow$ P'nin eğimi $= \alpha$

P , L doğrusunun altındadır $\Leftrightarrow$ P'nin eğimi $< \alpha$

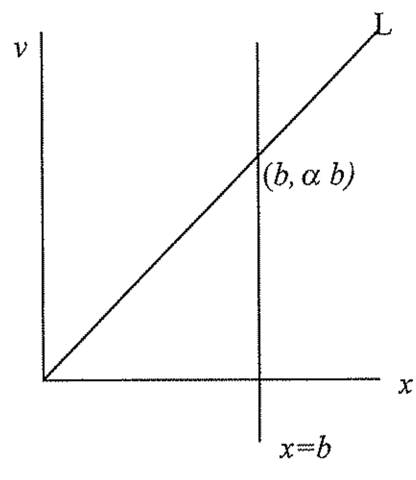
**İspat:** P, $(b,a)$ koordinatlarına sahip olsun. L doğrusunun denklemi $y = \alpha x$ olup, L doğrusunun $x = b$ doğrusuyla kesim noktası $(b, \alpha\, b)$ olur( $b > 0$ ). Ve buradan;

$$a > b\alpha \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \alpha$$

$$a = b\alpha \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \alpha$$

$$a < b\alpha \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \alpha$$

yazılabilir.




Şekil 3.2. Doğrunun eğimi

$\alpha$ pozitif reel bir sayı ve L, $y = \alpha x$ olsun. İlk çeyrekte $P(q,p)$ alalım. L' orijinden ve de P den geçen bir doğru olsun. (şekil 3.3) . $(q,p)$ noktası, L doğrusuna yakınlaştıkça, L''nün eğimi olan $\frac{p}{q}$ sayısı da, L'nin eğimi olan $\alpha$ sayısına yaklaşır.

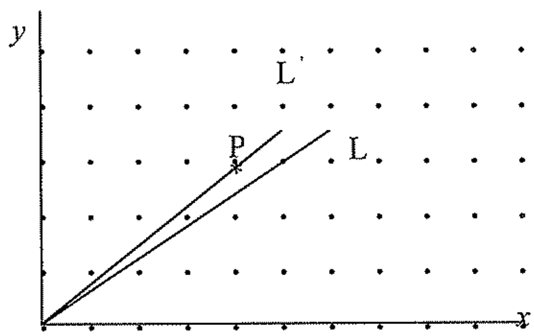
**Teorem 3.1.2.** $\alpha$ pozitif reel bir sayı ve L doğrusu $y=\alpha x$ olsun. $(q,p)$ noktası tamsayılı, $0<n\leq q$ olmak üzere, $(n,m)$ noktası da tamsayılı bir nokta ise $(q,p)$ noktasından L'ye olan uzaklık, $(n,m)$ noktasından L'ye olan uzaklığa eşittir veya daha küçüktür. $0<n\leq q$ olmak üzere, $\forall(n,m)$ noktası için;

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|$$

yani;

$$\alpha-\left(\frac{p}{q}\right)<\alpha-\left(\frac{m}{n}\right)$$

olur.



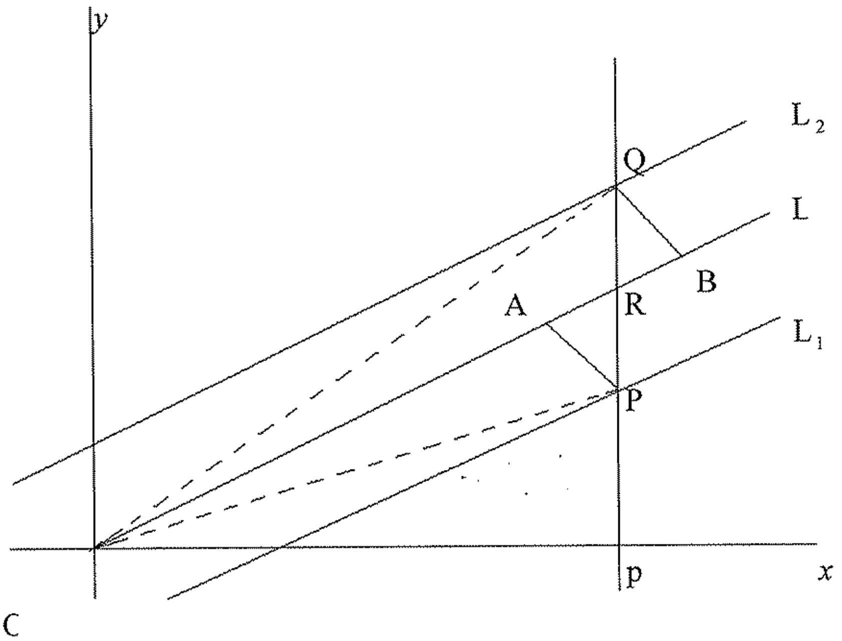

Şekil 3.3. I. Bölgedeki noktadan geçen doğrunun eğimi

**İspat:** Eğer, $(q,p)$ noktası, L'nin üzerindeyse, bu durumda $\frac{p}{q}=\alpha$ olur ve

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\left|\alpha-\frac{m}{n}\right| \text{ ve } 0\leq\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|$$

olduğu için, teoremin doğruluğu görülmüş olur. Bu nedenle $(q,p)$ noktası, L doğrusunun dışında kabul edilir, $d>0$ olmak üzere, $d$ sayısı, $(q,p)$ noktasının L doğrusuna olan dik uzaklığı olsun. P noktası, L doğrusunun, altında veya üstündedir.

Şekilde 3.4.'te P noktası, L doğrusunun altında gösterildi. $L_1$, P noktasından geçen ve L doğrusuna paralel olan bir doğru olsun. $L_2$ ile L paralel olup. $L_2$, L'ye göre $L_1$'in ters tarafında olsun. L ile $d$ uzaklığına sahip olsun. Q ve R noktaları $x = q$ doğrusunun sırasıyla $L_2$ ve L'yi kestikleri noktalar olusun. Yani; $A$, $B$ noktaları L üzerinde $AP$ ve $BQ$'nun L'ye dik olmasını sağlayan noktalar olsun. AP // BQ ve $A\hat{P}R = B\hat{Q}R$ olduğu görülür. Yani, $A\overset{\Delta}{P}R \cong B\overset{\Delta}{Q}R$ olur. Bu nedenle $QR = RP$ olup $R$ noktasının $x$ koordinatı $q$ dur. $R$, $y = \alpha x$ doğrusunun üstünde olduğundan $R = (q, q\alpha)$ olur. $Q$ noktasının $x$ koordinatı $q$ dur. $QR = RP$ olduğu için $Q$'nun $y$ koordinatı $y - q\alpha = q\alpha - p$ denklemini sağlar. $Q = (q, 2q\alpha - p)$ olur. $OP$' nin eğimi $\frac{p}{q}$ ve $OQ$' nun eğimi $2\alpha - \frac{p}{q}$ olur.




Şekil 3.4. Eğim karşılaştırılması

Şimdi tersine, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$ olsun. Burada; $0 < n \leq q$ olmak üzere tam koordinatlı $G(n,m)$ noktası alınsın. Şekil 3.4.'te gösterildiği gibi, L'nin eğimi $\alpha$, $OP$ 'nin eğiminden büyüktür, yani $\alpha > \frac{p}{q}$ dir. Buradan,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \alpha - \left(\frac{p}{q}\right)$$

olur.

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$$

ele alındığında;

$$\alpha - \frac{m}{n} \text{ veya } \left(\frac{m}{n}\right) - \alpha$$

sayılarından biri pozitiftir diğeri ise negatiftir.

$$\alpha - \frac{p}{q} > \alpha - \left(\frac{m}{n}\right) \text{ ya da } \alpha - \frac{p}{q} > \frac{m}{n} - \alpha$$

olur. Bu eşitsizliklerin ilkinden; $G$'nin eğimi $= \frac{m}{n} > \frac{p}{q} = OP$'nin eğimi olur (yani $OP$' nin üstündedir). Eşitsizliğin ikinci kısmından ise, şu sonuç çıkarılır;

$$OQ\text{'nun eğimi} = 2\alpha - \frac{p}{q} > \frac{m}{n} = G\text{'nin eğimi}$$

(yani $OQ$'nun altındadır). Böylece; $G$ noktası, $OP$ doğrusunun üstünde ve $OQ$ doğrusunun altındadır. O halde; $G$ noktası, $OP$ ve $OQ$ arasında olur. Üstelik, $0 < n \leq q$ varsayıldığından $G$'nin $\overset{\Delta}{OPQ}$ üçgeninin içerisinde olduğu görülür. Çünkü $G$ noktası, $OP$ ve $OQ$'nun üzerinde değildir. ( $G \neq P$, $G \neq Q$). Bundan dolayı $G$'nin, L'ye uzaklığı $d$ 'den daha küçüktür. Yani,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$$

olur .

**Tanım 3.1.4.** L'ye en yakın noktalar kümesi; L doğrusu $y = \alpha\ x$ olsun. $q \geq 1$ olmak üzere, $q, p$ tamsayıları göz önüne alınsın. Bu özellikteki tüm $(q, p)$ noktalarının kümesi alındığında; $0 < n \leq q$ özelliğindeki $m$ ve $n$ tamsayıları için $(q, p)$ den L'ye olan uzaklık, $(n, m)$ den L'ye olan uzaklıktan daha küçük veya eşit olur.

Örnek: $\alpha = \sqrt{3}$ ise, $y = \alpha\ x = \sqrt{3}\ x$ olur. L'ye en yakın noktaların kümesinin ilk birkaç elemanı,(1,2) , (3,5) , (4,7) , (15,26) olur. $\alpha = \pi$ ise, L'ye ilk iki yakın nokta (1,3) , (7,22) olur. Bu $\pi$ ye bir yaklaşım olarak, neden $\frac{22}{7}$ nin kullanıldığını açıklar. Teorem 3.1.2. yardımıyla $\frac{22}{7}$ sayısı, daha küçük paydalı herhangi bir kesirden sayısal olarak $\pi$'ye daha yakındır. $1 \leq n \leq 100$ ise, $y = \pi\ x$ doğrusuna $(7{,}22)$ noktasından daha yakın olacak $(n, m)$ noktası yoktur. Bu, L'ye en yakın noktaların kümesinin sonlu mu, yoksa sonsuz mu olduğunu düşündürür. $\alpha$ rasyonel olduğunda, L doğrusuna en yakın noktaların kümesi sonludur. Fakat $\alpha$ irrasyonel olduğu zaman bu durum açık değildir. $\alpha$ irrasyonel olduğu zaman, L'ye en yakın noktaların kümesinin sonsuz olduğu düşünülür.

### 3.2. Sürekli Kesir Algoritması

Teorem 3.1.2. den sonra $y = \alpha\ x$ doğrusunun en yakın noktalarının kümesi için, bir algoritma üretilmek istenir. Bu kesimde, bir algoritma tanımlanacaktır. Bu algoritmanın yardımıyla, L doğrusuna gittikçe yaklaşan noktalar bulunur. Bu algoritma, L'ye en yakın noktaların kümesini üretir ve α ya en iyi kesirsel yaklaşımları verir.

**Teorem 3.2.1.** Orijinden geçen bir L doğrusu verildiğinde, L'nin farklı taraflarında $U_1$ ve $U_2$ noktaları ele alınsın. Bu noktalar yardımıyla, ya $U_1 + aU_2$ noktası, L'nin üzerinde ya da $U_1 + aU_2$ ile $U_1 + (a+1)U_2$ noktaları, L'nin farklı taraflarında olacak şekilde bir tek $a$ tamsayısı bulunur. Ayrıca, $U_1 + aU_2$ noktası, L doğrusuna $U_2$ den daha yakındır ve eğer L'nin üzerinde değil ise, $U_1 + aU_2$ ile $U_2$ noktası, L'nin aynı tarafında olur. $U_1$, L ye $U_2$ den daha yakın ise $a \geq 1$ dir. Yönteme devam edildikçe, $U_2$ noktası, L doğrusuna $U_1$ den fazla yaklaşıyor ise, $a$=0 olur.

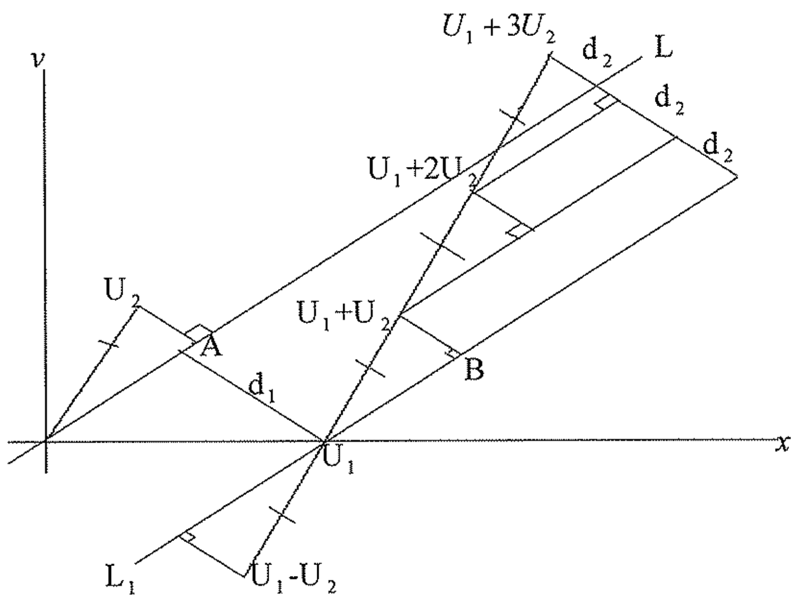
**İspat:** Teoremin ispatı için şekil 3.5.'e dikkat edilebilir. L üzerinde $AU_2 \perp L$ olacak şekilde $A$ noktası alınsın. $L_1$ doğrusu $U_1$den geçsin ve L doğrusuna paralel olsun. $B$ noktası, $L_1$ üzerinde $B(U_1 + U_2) \perp L_1$ olacak şekilde alınsın. Vektörlerin paralel toplama kuralına göre, $OU_2$ ile $U_1(U_1 + U_2)$ paraleldir ve aynı uzunluğa sahiptir.

$$U_2\hat{O}A = (U_1 + U_2)\hat{U}B \quad ,$$

$$U\overset{\Delta}{O}A \cong (U_1 + U_2)\overset{\Delta}{U_1}B \quad ,$$

$$AU_2 = B(U_1 + U_2)$$

elde edilir. $U_1$ ve $U_2$'nin L'ye olan uzaklıkları $d_1$ ve $d_2$ olsun. $U_1 + U_2$ nin, $L_1$ doğrusuna olan uzaklığı $d_2$ olur, $d_1 < d_2$ ise, $U_1 + U_2$ noktası L doğrusuna göre $U_1$ noktasının ters tarafındadır ($a = 0$). $d_1 = d_2$ ise; $U_1 + U_2$ noktası L doğrusunun üzerindedir. $d_1 > d_2$ ise; $U_1 + U_2$ noktası L doğrusunun $U_1$ ile aynı tarafındadır. Fakat aralarındaki uzaklık L'den $d_1 - d_2$ kadar olur. Aynı şekilde $U_1 - U_2$ , $U_1 - 2U_2, \cdots$ noktaları L doğrusunun $U_1$ ile aynı tarafında yer alır. Ve bu noktalar sırasıyla L'den $d_1 + d_2, d_1 + 2d_2, \ldots$ kadar uzaklıktadırlar. Ayrıca $U_1 + U_2$, $U_1 + 2U_2$ noktaları L'ye yakınsarlar.




Şekil 3.5. Algoritma

**Tanım 3.2.1.** $\alpha$ pozitif reel bir sayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki yöntem $\alpha$ sayısına yaklaşmak için, sürekli kesir algoritması olarak adlandırılır: L , $y = \alpha\, x$ doğrusu ele alınsın. Başlangıç şartı olarak; $V_{-2}(1,0)$ , $V_{-1}(0,1)$ olsun.

$$V_0 = V_{-2} + a_0 V_{-1} = (1, a_0)$$

dır. Buradaki $a_0$ sayısı , $V_0 = V_{-2} + a_0 V_{-1}$ noktası L'nin üzerinde ya da $V_{-2}$ gibi L'nin aynı tarafında olacak şekilde, bir tek tam sayıdır. Fakat , $V_{-2} + (a_0 + 1)V_{-1}$ ile $V_{-2}$ noktaları L doğrusunun zıt tarafındadır. Eğer $V_0$ noktası, L doğrusu üzerinde ise, yöntem $V_0$ noktasında biter. Eğer $V_0$ noktası L doğrusu üzerinde değilse yöntem tekrarlanır. $V_{n-2}$ ve $V_{n-1}$ tanımlanmışsa, bu durumda,

$$V_n = V_{n-2} + a_n V_{n-1} \tag{1}$$

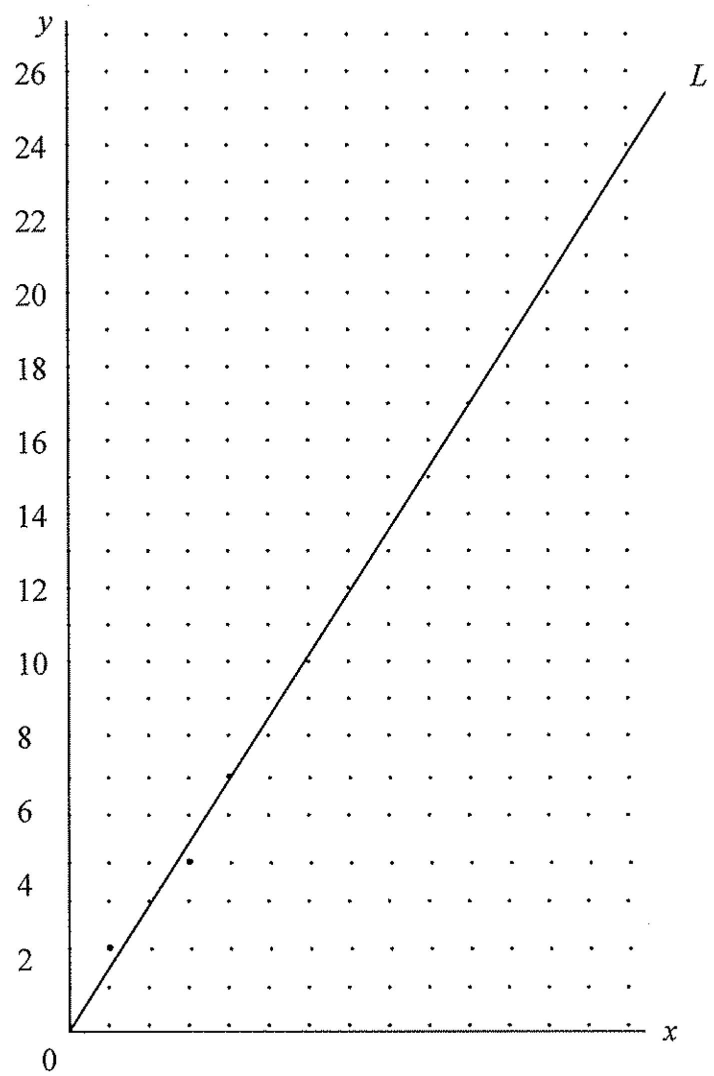
yazılır. Buradaki $a_n$ sayısı; $V_{n-2} + a_n V_{n-1}$ noktası, L doğrusunun üzerinde ya da $V_{n-2}$ noktası gibi L doğrusunun aynı tarafında olacak şekilde, bir tek tamsayıdır. Fakat; $V_{n-2} + (a_{n+1})V_{n-1}$ noktası, $V_{n-2}$'ye göre, zıt tarafta kalır. Eğer $V_n$ noktası, L doğrusu üzerinde ise, yöntem $V_n$ noktasında sonlanır. Eğer $V_n$ noktası, L doğrusu üzerinde değilse, algoritma devam eder.

Gösterim:

Bundan sonra, $\alpha$ sayısı pozitif bir reel sayı olarak alınacaktır. L doğrusu, $y = \alpha\, x$ olup $a_0, a_1, a_2$ sayıları ve $V_{-2} = (1,0)$ , $V_{-1} = (0,1)$ noktaları, $\alpha$ sayısına yaklaşmak için sürekli kesir algoritması tarafından verilir. $V_n$ noktasının koordinatları, $q_n$ ve $p_n$ harfleri ile gösterilsin. $V_n = (q_{n,}p_n)$ ve $V$ 'nin eğimi, $\frac{p_n}{q_n}$ dir.

**Teorem 3.2.2.** $a_0$ sayısı sıfır olabilmesine rağmen $n \geq 1$ için $a_n \geq 1$ olur. Ayrıca, $V_0, V_1, V_2, \ldots$ noktaları, L doğrusuna gittikçe yaklaşır. $V_0, V_2, V_4, \ldots$ L doğrusunun altında; $V_1, V_3, V_5, \ldots$ noktaları ise, L doğrusunun üstünde kalır.

**İspat:** Teorem 3.2.1 ve $V_0$ ın tanımı yardımıyla, $V_0$ noktası da $V_{-2}$ noktası gibi L doğrusunun aynı tarafında kalır. Yani L doğrusunun altında olur. Ve L ye $V_{-1}$ den daha yakındır. Böylece teorem 3.2.1 den , $V_{-1}$ ve $V_0$ noktaları, L doğrusunun farklı taraflarında bulunurlar. $V_1$ noktası, $V_{-1}$ gibi L doğrusunun aynı tarafında olur. $V_1$ , L doğrusuna $V_0$ noktasından daha yakındır ve $V_0$ noktası L dorusuna $V_{-1}$ noktasından daha yakın olduğundan, $a_1 \geq 1$ olur. (Fakat, $V_0$ ve $V_1$ noktaları L doğrusunun farklı taraflarında ve teorem 3.2.1.'e göre $V_2$ noktası L doğrusuna göre $V_0$ noktasıyla aynı tarafta yani, L doğrusunun altındadır). $V_2$ noktası L doğrusuna $V_1$ noktasından yakındır ve $a_2 \geq 1$ dir. Şekil 3.9. genel durumu gösterir. Eğer $\alpha$ irrasyonel ise, algoritma sonsuza kadar devam edebilir ve algoritma kesinlikle sona ermez. Bu nedenle, $V_n = V_{n-2} + a_n V_{n-1}$ noktaları tam koordinat noktalara sahiptir ve eğer $V_n$ noktaları L doğrusu üzerinde ise, L doğrusu rasyonel eğime sahiptir.




Şekil 3.6. $y = \sqrt{3}x$ n grafiği

Algoritma için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek: Bu teorem $\alpha = \sqrt{3}$ sayısı için uygulanacak olursa, aşağıdaki adımları takip edilir. Buradaki örnek şekil 3.6. yardımıyla da görülebilir.

$V_{-2}$ noktası başlangıç noktası olsun. $V_{-2}$= (1,0) noktası, L doğrusunun altındadır ve, $V_{-1}$= (0,1) noktası, L doğrusunun üstünde olur. $n = 0$ olsun. Buna göre, $V_0 = V_{-2} + 1V_{-1} = (1,1)$ noktası, L doğrusunun altındadır ve $V_{-2} + 2V_{-1} = (1,2)$

noktası L doğrusunun üstünde olur. Bu durumda algoritmaya göre, $a_0$=1 olup, $V_0$=(1,1) noktası alınır.

$n=1$ olsun. $V_1 = V_{-1} + 1V_0 = (1,2)$ noktası, L doğrusunun üstündedir ve $V_{-1} + 2V_0 = (2,3)$ noktası L doğrusunun altında kalır. Yine algoritma takip edilirse, $a_1 = 1$ olup, $V_1 = (1,2)$ noktası alınır.

Bu şekilde devam ederek, $n$= 2 alınırsa, $V_2 = V_0 + 2V_1 = (3,5)$ noktası, L doğrusunun altında kalır, $V_0 + 3V_1 = (4,7)$ noktası ise L doğrusunun üstündedir. Sırada doğrunun altında kalan nokta ele alınacağından, $a_2 = 2$ olup $V_2 = (3;5)$ alınır.

$n=3$ olsun. $V_3 = V_1 + 1V_2 = (4,7)$ noktası, L doğrusunun üstündedir ve $V_1 + 2V_2 = (7,12)$ noktası, L doğrusunun altında kalır. O halde $a_3 = 1$, $V_3 = (4,7)$ dir.

Şimdi $V_4$ noktasına bakılırsa, bunun için $n = 4$ alınır. $V_4 = V_2 + 2V_3 = (11,19)$ noktası, L doğrusunun altında kalır ve $V_2 + 3V_3 = (15,26)$ noktası, L doğrusunun üstünde olur. Doğrunun altında olmasını sağlayan nokta, $a_4 = 2$ olan $V_4 = (11,19)$ noktası alınır.

$n = 5$ için; $V_3 + 1V_4 = (15,26)$ noktası, L doğrusunun üstünde olur ve $V_3 + 2V_4 = (26,45)$ noktası L doğrusunun altında kalır. Yani, $a_5 = 1$, $V_5 = (15,26)$ olur.

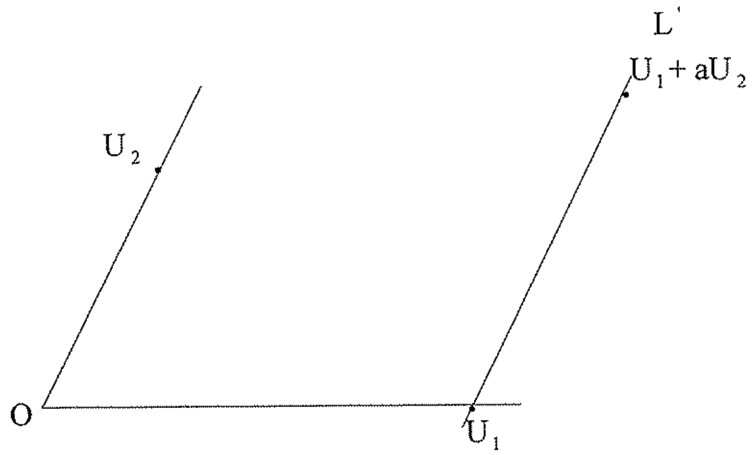
Sonuç olarak; $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$ diye devam eder ve $V_0 = (1,1)$, $V_1 = (1,2)$, $V_2 = (3,5)$, $V_3 = (4,7)$, $V_4 = (11,19)$, $V_5 = (15,26)$ noktalarının seçimi bu şekilde olur. Teorem 3.2.2 den $V_0$, $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, $V_5$ noktaları, sırasıyla L nin farklı taraflarından L doğrusuna yaklaşırlar. Bu durumda, $V_0$ noktası çıkarıldığında L doğrusuna en yakın noktalar kümesinde, x koordinatı 15 ten küçük noktaların olmadığı görülür. Bu bir tesadüf değildir. Bunun tesadüf olmadığı görülebilir. $\sqrt{3}$ sayısının ondalık değeri 1,732... ve $\frac{26}{15} = 1{,}733$ dir. Bu yaklaşımın gerçek değere yakınlığı, kabaca aynı boyutlu paydalara bakarak, daha iyi değerlendirilebilir. Mesela payda 10 olduğunda burada yapılabilecek en iyi değer $\frac{17}{10} = 1{,}700$ dır. $V_0, V_1, V_2, \ldots$ noktaları L doğrusuna gittikçe yaklaştığından teorem 3.1.2 yardımıyla $\frac{p_n}{q_n}$ kesirlerinin $\alpha$ sayısı için çok iyi yaklaşımlar olduğunu görülür. Burada, iki soru akla takılabilir; bu yaklaşımlar ne kadar iyidir ve daha iyisi olabilir mi? L doğrusuna en yakın noktaların kümesi $V_n$ midir? Bundan sonraki iki teorem bu sorulara yardımcı olabilecek niteliktedir.

**Teorem 3.2.3.** $U_1$ ve $U_2$ noktaları, orijinde olmamak şartıyla, pozitif koordinatlı olup, farklı eğimlere sahip olsunlar. Eğer, $a > 0$ ise, $U_3 = U_1 + aU_2$ olmak üzere, $U_3$ noktasının eğimi, $U_1$ ve $U_2$ noktalarının eğimleri arasında kalır.

**İspat:** $\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2$ olmak üzere $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_3 < \tan\alpha_2$ olur. 's' ile noktaların eğimi gösterilmek üzere,

$$sU_1 < sU_3 < sU_2$$

yazılabilir. Teorem 3.1.1 den de, aynı yargıya varılır. Burada aşağıdaki şekle göre, $sU_1 < sU_2$ durumu ele alındı. $L' // OU_2$ ve $L'$ doğrusu, $U_1$ noktasından geçsin. $U_3$ noktası, $L'$ doğrusunun üstündedir ve böylece $OU_2$ nin altındadır. Yani, $U_3$ ün eğimi $U_2$ ile $U_1$ in eğimleri arasında kalır.




Şekil 3. 7. Vektör toplamlarının eğimi

**Teorem 3.2.4.** $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... dizisi, bir reel dizi olsun ve $U_{-2} = (1,0)$, $U_{-1} = (0,1)$, $U_0 = U_{-2} + x_0 U_{-1}$, $U_1 = U_{-1} + x_1 U_0$, ... olsun. Eğer, $U_{n-2}$ ve $U_{n-1}$ tanımlı ise, $U_n = U_{n-2} + x_n U_{n-1}$ olur. Ayrıca eğer $\forall_n \geq 0$ ise $U_n$'nin $(s_n, r_n)$ noktaları için; $r_{n-1}s_{n-2} - r_{n-2}s_{n-1} = (-1)^n$ olur.

**İspat:** İspatta tümevarım yönteminden yararlanıldı.

$$U_{-2} = (s_{-2}, r_{-2}) = (1,0)$$

$$U_{-1} = (s_{-1}, r_{-1}) = (0,1)$$

Böylece,

$$r_{-1}s_{-2} - r_{-2}s_{-1} = (1).(1) - (0).(0) = 1 = (-1)^0.$$

olur. O halde, teorem $n = 0$ için doğru olur. Teorem bazı $n = k$, $k \geq 0$ sayıları için doğru olsun. Bu durumda;

$$r_{k-1}s_{k-2} - r_{k-2}s_{k-1} = (-1)^k,$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak;

$$r_k s_{k-1} - r_{k-1} s_k = (-1)^{k+1}$$

olur. Bunun ispatı için, $U_k$ 'nın tanımından;

$$(s_k, r_k) = (s_{k-2}, r_{k-2}) + x_k (s_{k-1}, r_{k-1}),$$

$$s_k = s_{k-2} + x_k s_{k-1} \ , \ r_k = r_{k-2} + x_k r_{k-1}$$

dir. Böylece;

$$(r_{k-1}) s_k = (s_{k-2} + x_k s_{k-1})(r_{k-1})$$

$$(r_k)(s_{k-1}) = (r_{k-2} + x_k r_{k-1})(s_{k-1})$$

Bununla birlikte;

$$r_k s_{k-1} - r_{k-1} s_k = (r_{k-2} + x_k r_{k-1})\ s_{k-1} - r_{k-1}(s_{k-2} + x_k s_{k-1})$$

$$= -(r_{k-1} s_{k-2} - r_{k-2} s_{k-1})$$

$$= -(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

Bu durumda teorem $n = k$ için doğru iken $n = k+1$ için de doğrulanır. Yani her n pozitif sayısı için teorem doğrudur.

**Teorem 3.2.5.** a) $V_n$ tanımlanmış ve $n \geq 0$ olsun. Bu durumda, $V_n$ 'nin koordinatları

$$q_n = q_{n-2} + a_n q_{n-1}$$
$$p_n = p_{n-2} + a_n p_{n-1} \qquad (2)$$

olup $p_n$ ve $q_n$ tamsayılardır. Ayrıca; $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$ eşitliği $p_n$ ve $q_n$'nin aralarında asal olduğunu gösterir.

b) $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \ldots < q_{n-1} < q_n$, olup α sayısı irrasyonel ise,

$$\lim_{n \to \infty} q_n = +\infty$$

olur.

**İspat:** Teoremin ilk kısmı $V_n$ için tanımlanan; $V_n = V_{n-2} + a_n V_{n-1}$ denklemidir. $q_{-2}$, $q_{-1}$, $p_{-2}$, $p_{-1}$ tamsayı olduğundan ve $a_n$ sayıları da tamsayı olduğundan, (2) den $q_0$ ve $p_0$'ın tamsayı olduğu görülür. Daha sonra $q_1$ ve $p_1$ sayıları da tamsayı olur. Bu şekilde devam ederek her $n$ sayısı için, $q_n$ ve $p_n$ sayılarının tamsayı olduğu tümevarımla görülür. Teorem 3.2.4'ten $x_n = a_n$ yazılırsa; $U_n = V_n$ olur ve sonuç olarak,

$$p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$$

olur. Son yazılan sonuçta $n$ yerine $n+1$ yazılarak,

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n+1}$$

olur. Bundan dolayı, $d/p_n$, $d/q_n$ ise, $d/(-1)^{n+1}$ olur. Böylece $d = \mp 1$ yazılabilir. Buna göre $p_n$ ve $q_n$ sayıları aralarında asaldır. $q_0 = 1$ durumu belirtilmişti. Teorem 3.2.2.'den hatırlanırsa $n \geq 1$ iken, $a_n \geq 1$ olur. Böylece;

$$q_1 = q_{-1} + a_1 q_0 = a_1 q_0 \geq q_0 \geq 1 \ ,$$

ve buna bağlı olarak;

$$q_2 = q_0 + a_2 q_1 > a_2 q_1 \geq q_1$$

olur. Genel olarak, $k \geq 2$ sayıları için $q_k > q_{k-1} \geq 1$ ise, o zaman, $q_{k+1} = q_{k-1} + a_{k+1} q_k > a_{k+1} q_k \geq q_k$ olur. Bundan dolayı tümevarım yardımıyla $n \geq 2$ iken, $q_n > q_{n-1} > 1$ olur. $q_n > q_{n-1}$ olması durumunu kullanarak, $q_n > q_{n-1} > q_{n-2} > \cdots > q_2 > q_1 \geq q_0 = 1$ olur. Eğer $\alpha$ sayısı için sürekli kesir algoritması sonlanmıyorsa o zaman, $q_0 \leq q_1 < q_2 < \cdots$ artan tamsayı dizisi elde edilir ve böylece n arttıkça $q_n$ sayıları da sınırsız olarak artar. Yani dizi sonsuza gider.

**Teorem 3.2.6.** $\alpha$ irrasyonel olsun. Bu durumda sürekli kesir algoritması sonlanmaz ,

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots \alpha \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

olur. Özellikle $n \geq 0$ ise, bu durumda $\alpha$ tam olarak $\frac{p_n}{q_n}$ ile $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ arasındadır.

**İspat:** Teorem 3.2.5 den yukarıdaki kesirlerin paydaları pozitiftir ve bundan dolayı bu kesirler tanımlanabilir. $V_n$'nin eğiminin $\frac{p_n}{q_n}$ olduğu görülür. Teorem 3.2.3.'ün hipotezindeki gibi $V_0$, $V_1$ ve $V_2$ alınabilir ve buradan; $\frac{p_2}{q_2}$ tam olarak $\frac{p_0}{q_0}$ ile $\frac{p_1}{q_1}$ arasında olur. $V_1$, L doğrusunun üstünde iken $V_0$ noktası L doğrusunun altında olduğundan;

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1}$$

olur. Bundan dolayı,

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_1}{q_1} \tag{3}$$

yazılır. $V_1$, $V_2$ ve $V_3$ için teorem 3.2.3 uygulanarak, $\frac{p_3}{q_3}$ , $\frac{p_1}{q_1}$ ve $\frac{p_2}{q_2}$ arasında olduğu görülebilir. Bu ifade (3)'te yerine konulursa,

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \tag{4}$$

elde edilir. Tekrar teorem 3.2.3 yardımıyla; $\frac{p_4}{q_4}$ , tam olarak $\frac{p_2}{q_2}$ ve $\frac{p_3}{q_3}$ arasında kalır ve (4) de yerine konularak aşağıdaki sonuç yazılır.

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Bu şekilde devam ederek, dizide $\alpha$ 'nın yer almayacağı aşağıdaki şekilde bir bağıntı elde edilebilir;

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} < \ldots < \frac{p_7}{q_7} < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Teorem 3.2.2.'den; $V_{2n+1}$ noktası L doğrusunun üstünde iken $V_{2n}$ noktası L doğrusunun altındadır. Bundan dolayı, eğimler aşağıdaki gibi verilebilir;

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \alpha < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$$

Böylece $\alpha$ 'nın eşitsizlikte iddia edilen nokta olduğu görülebilir. Ayrıca, ispat yardımıyla, ya $n+1$ tektir,

$$\frac{p_n}{q_n} < \alpha < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

olur. Ya da $n+1$ çifttir,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \alpha < \frac{p_n}{q_n}$$

olur. Her iki durumda da $\alpha$, $p_n/q_n$ ve $p_{n+1}/q_{n+1}$ arasında kalır. Teorem 3.2.6. ilginç olmasına rağmen $p_n/q_n$ in $\alpha$'ya ne kadar yakın olduğu hakkında gerçek bir bilgi vermez. $p_n/q_n$'lerin $\alpha$'ya yakınlıkları için aşağıdaki teorem verilebilir. Dikkat edilirse, (4)'teki eşitsizlik sayfa 47'deki tablo değerlerine göre açıklanabilir.

**Teorem 3.2.7.** $n \geq 0$ ve $\alpha$ irrasyonel olsun. Bu durumda;

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

olur. Böylece,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}$$

olur. Ayrıca,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha .$$

**İspat:** Teorem 3.2.6 yardımıyla $\alpha$, $\frac{p_n}{q_n}$ ile $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ arasındadır. Bu nedenle $\alpha$ ile $\frac{p_n}{q_n}$ arasındaki sayısal fark $\frac{p_n}{q_n}$ ile $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ arasındaki sayısal farktan daha küçüktür. Yani;

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right|$$

$$= \frac{|p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}|}{q_n q_{n+1}}$$

$$= \frac{\left|(-1)^{n+2}\right|}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

olur. Teorem 3.2.5'deki $n$ ile $(n+2)$ yer değiştirerek, yukarıdaki eşitsizlikte teorem 3.2.5 kullanılır. Teorem 3.2.5'ten;

$$q_{n+1} = q_{n-1} + a_{n+1}q_n > a_{n+1}q_n$$

olur. Ve buradan;

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \prec \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n a_{n+1} q_n} = \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}$$

dır. Son eşitsizlikte; $n \geq 0$ için $n+1 \geq 1$ olduğundan ve $a_{n+1} \geq 1$ dır. Teorem 3.2.5 ten, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q_n^2} = 0$ dır. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$ olduğu görülür. Diğer bir anlatımla, $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|$ olacak şekilde bir $n > N$ sayısının var olduğu gösterilmelidir. $n \to \infty$ iken, $\frac{1}{q_n^2} \to 0$ olduğundan istenen özellikte bir N sayısı vardır. Yani $n > N$ ise bu durumda; $\frac{1}{q_n^2} = \left|0 - \frac{1}{q_n^2}\right| < \varepsilon$ olur. Bu N sayısı için; $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} < \varepsilon$ dur.

Böylece limitin tanımı gereği $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\alpha$ olur. Teorem 3.2.7'nin son kısmı, $\frac{p_n}{q_n}$ değerlerinin $\alpha$ sayısının $n$. yaklaşımı olarak adlandırılmasını sağlar.

### 3.3. $a_n$ nin Hesaplanması

$y=\alpha\, x$ grafiği verilirse, yazılan geometrik algoritma yardımıyla $\alpha$ için birkaç iyi kesirsel yaklaşımın bulunması da kolay olur. Fakat daha iyi yaklaşımlar istenirse ya da grafik kolay çizilemiyorsa bu durumda ne olur? $V_n$ in tanımı, L'den $V_{n-2}$ ve $V_{n-1}$ in uzaklıklarına bağlı olan $a_n$ katsayısı hakkında bilgi içerir. $d_n$,$V_n$ nin L doğrusuna olan uzaklığı olsun. Bu durumda ( şekil 3.9),

$$d_n = d_{n-2} - a_n d_{n-1} \tag{5}$$

$V_n$ ,L doğrusuna $V_{n-1}$ den daha yakın olduğundan , $d_{n-1} > d_n$ ,

$$d_{n-1} \succ d_{n-2} - a_n d_{n-1} \geq 0 \tag{6}$$

olur. Bu sonuçtan,

$$1 > \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} - a_n \geq 0 \ ;$$

yani;

$$a_n \leq \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} < a_n + 1$$

olur. Buradan,

$$a_n \leq \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} \text{ iken, } a_n + 1 > \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}}$$

olduğu için, tamdeğer fonksiyonun tanımından $a_n = \left[\frac{d_{n-2}}{d_{n-1}}\right]$ olur. Bu sonucun basitleştirilmesi için, $n \geq 0$ iken,

$$\alpha_n = \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}}, \tag{7}$$

öyle ki,

$$a_n = [\alpha_n] \tag{8}$$

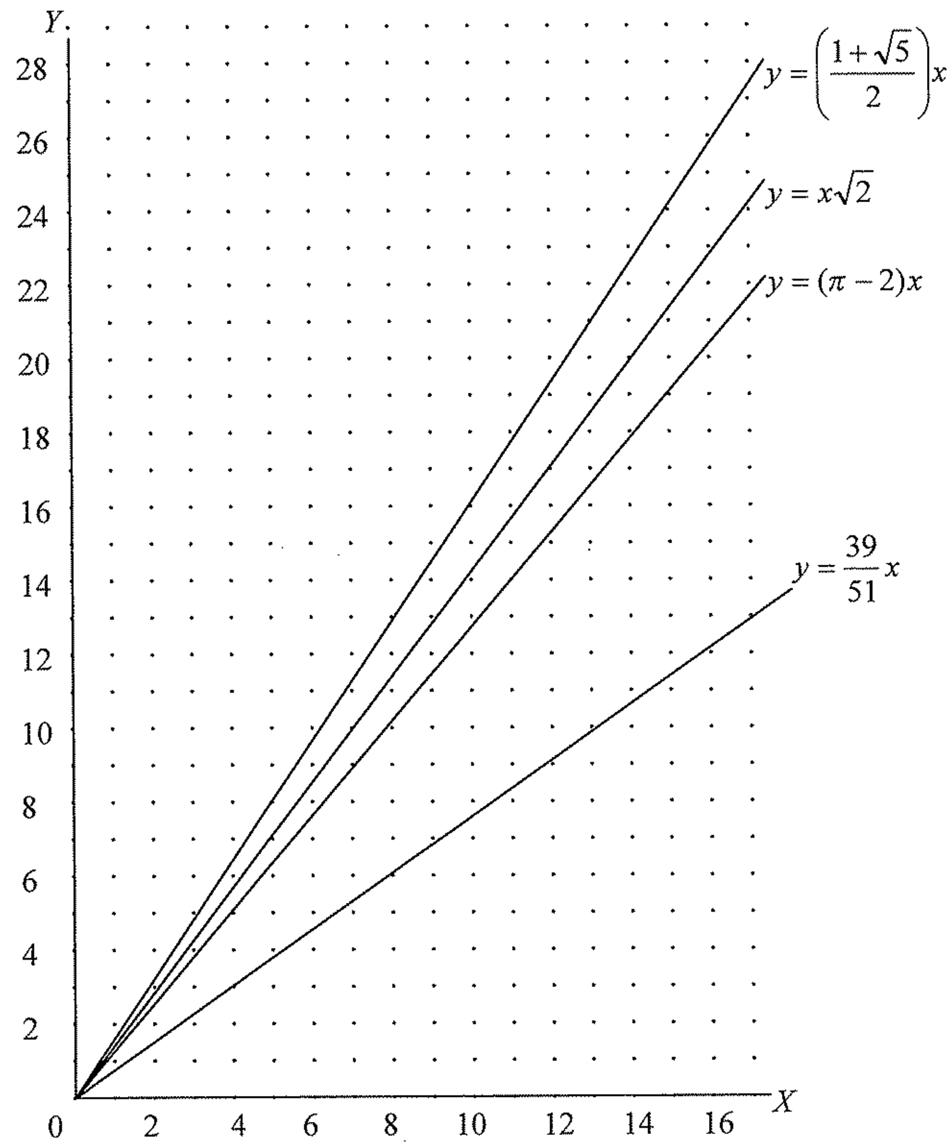
tanımlanır. Ayrıca, (5) in her iki tarafı $d_{n-1}$ ile bölünerek aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} = a_n + \frac{d_n}{d_{n-1}}$$

ya da, $V_n$, L doğrusu üzerinde değil ise, $d_n \neq 0$ ve $\alpha_{n+1}$ tanımlı olması durumunda,

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \tag{9}$$

olur. $V_n$ , L doğrusunun üzerindeyken $d_n = 0$ ve $\alpha_n = a_n$ olur. Bu durumda; $\alpha_n$, bir tamsayı ise işlem $V_n$ ile biter aksi takdirde devam eder. Eğer , $\alpha_0$ için basit bir ifade bulunabilirse, bu durumda (8) ve (9) ifadelerinden $a_n$ sayılarını bulmak kolay olur.




Şekil 3.8. Çeşitli doğru eğimleri

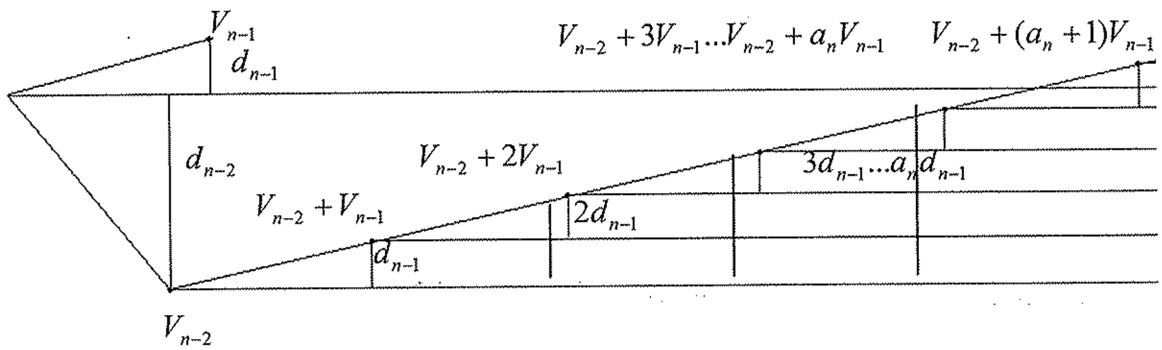
Bundan sonra verilecek olan teorem bu nedenle önem arz eder.

**Teorem 3.3.1.** $\alpha_0=\alpha$ olsun. Bu durumda $a_n$ sayıları aşağıdaki formülden hesaplanabilir. $n \geq 0$ için, eğer $\alpha_n$ tanımlı ise;

$$a_n=[\alpha_n]$$

olur. Ve $\alpha_n$ bir tamsayı olmadığında, $\alpha_{n+1}$ tanımlıdır ve aşağıdaki denklemden bulunabilir.

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$




Şekil 3.9. Algoritmanın açık hali

**İspat:** $\alpha_0 = \alpha$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Daha önceki kısımdan; $\alpha_0 = \frac{d_{-2}}{d_{-1}}$ idi. Bir noktadan bir doğruya olan uzaklık formülü kullanılabilir. $\theta$, $x$ ekseni ile L doğrusu arasındaki açı ise (şekil3.10). Öyle ki, $\alpha = sL = \tan\theta$ dır. Bu durumda aşağıdaki eşitlik yazılabilir. $O\hat{V}_{-1}A = \theta$ olur. Buradan;

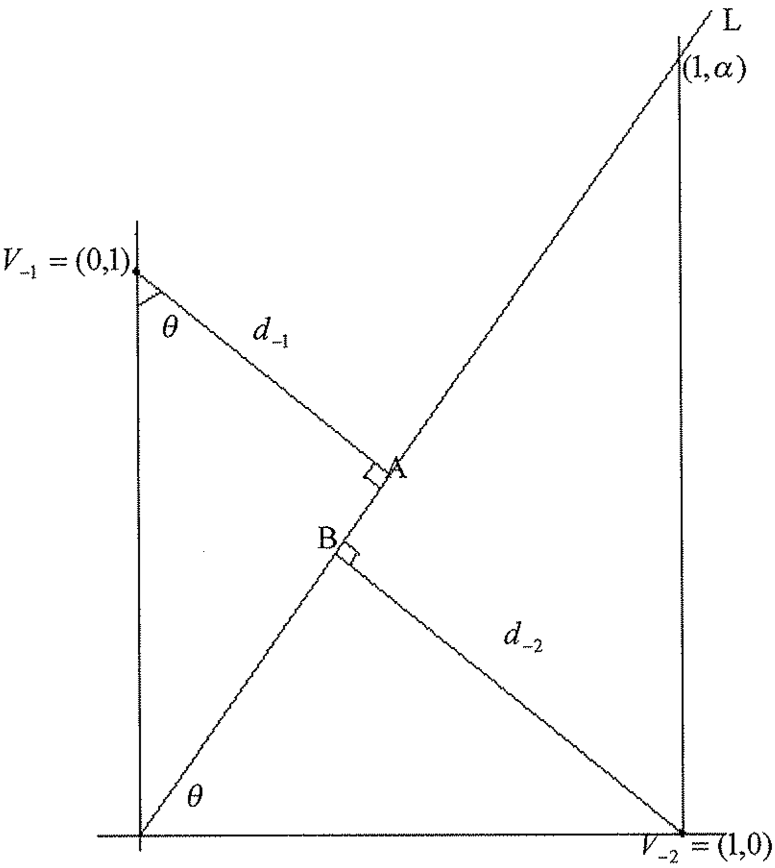
$$\sin\theta = \frac{BV_{-2}}{OV_{-2}} = \frac{d_{-2}}{1} = d_{-2},$$

$$\cos\theta = \frac{AV_{-1}}{OV_{-1}} = \frac{d_{-1}}{1} = d_{-1},$$

olur ve böylece;

$$\alpha_0 = \frac{d_{-2}}{d_{-1}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \alpha$$

olur. Bundan sonraki teorem bu algoritmanın neden sürekli kesir algoritması olarak isimlendirildiğini açıklayabilir.




Şekil 3.10. Başlangıç noktalarının doğruya uzaklığı

**Teorem 3.3.2.** $L'$ doğrusu, $y=\beta x$ olsun. $b_0$, $b_1$, $b_2,\dots$ reel sayılardan oluşan bir dizi verilmiş olsun. $\beta_0=\beta$'dan eğer, $\beta_n \neq b_n$ ve $\beta_{n+1}$ tanımlı ise, bu durumda $\beta_n$'ler (10) eşitliği yardımıyla tanımlanarak $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2,\dots$ sayılarının bir dizisi tanımlanabilir.

$$\beta_n = b_n + \frac{1}{\beta_{n+1}} \tag{10}$$

Eğer, $\beta_n = b_n$ ise, $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots$ dizisi $\beta_n$'de sonlanır. $U_{-2}=(1,0)$, $U_{-1}=(0,1)$ olsun. Eğer $n \geq 0$, $U_{n-1}$ ve $U_{n-2}$ tanımlanmış ise bu durumda;

$$U_n = U_{n-2} + b_n U_{n-1}$$

olur. Eğer $n \geq 0$ ve $\beta_n$ tanımlıysa; $U_{n-2} + \beta_n U_{n-1}$ , $L'$ doğrusu üzerindedir.

**İspat:** Teorem tümevarım yöntemi ile ispatlanabilir. $n = 0$ olduğu zaman;

$$U_{-2} + \beta_0 U_{-1} = (1,0) + \beta(0,1) = (1,\beta) \quad ,$$

$L'$ üzerinde olur. Belli $k \geq 0$ için; $U_k = U_{k-2} + \beta_k U_{k-1}$ , $L'$ doğrusu üzerindeki bir nokta ve $\beta_{k+1}$ tanımlı olsun. Bu durumda;

$$U_{k+1} = U_{k-1} + \beta_{k+1} U_k = U_{k-1} + \beta_{k+1}(U_{k-2} + b_k U_{k-1})$$

$$= \beta_{k+1} U_{k-2} + (\beta_{k+1} b_k + 1) U_{k-1}$$

$$= \beta_{k+1}[U_{k-2} + (b_k + \frac{1}{\beta_{k+1}}) U_{k-1}]$$

$$= \beta_{k+1}(U_{k-2} + \beta_k U_{k-1}) \; ,$$

$L'$ doğrusu üzerinde olur. Sonuç olarak; $n = 0$ için doğru olduğundan tüm $n$ değerleri için doğru olur.

**Teorem 3.3.3.** $\forall n \geq 0$ için $V_n$ tanımlı olduğunda;

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}}} \; ,$$

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

olur.

**İspat:** teoremin birinci kısmı görülebilir. Teorem 3.3.1 yardımıyla;

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}} = \ldots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}}$$

olur. İkinci kısım için; $L', y = (p_n/q_n)x$ doğrusu olup, bu diziden $b_n = a_n$, $\beta_0 = p_N/q_N$ olmak üzere $\beta_n$'lerin (10)'daki tanımıyla teorem 3.3.2 kullanılabilir. Bu durumda,

$$\frac{p_N}{q_N} = a_0 + \frac{1}{\beta_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\beta_2}} = \cdots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{N-1} + \cfrac{1}{\beta_N}}}}}$$

olur. Burada $\beta_N = a_N$ olduğunu göstermemiz gerekir. Teorem 3.3.2 kullanılarak, (1) de $V_n$ yerine $U_n$ yazılarak,

$$V_{N-2} + \beta_N V_{N-1} = U_{N-2} + \beta_N U_{N-1}$$

Elde edilen nokta, $L^{'}$ doğrusu üzerinde olur. Fakat,

$$(q_N, p_N) = V_N = V_{N-2} + a_N V_{N-1}$$

noktası da $L^{'}$ doğrusu üzerinde olur. $L''$ doğrusu, $V_{n-2}$den geçen ve $V_{n-1}$ ile aynı eğime sahip olan bir doğru olsun. (şekil 3.11). $L'$'nün eğimi $V_N$ noktasının eğimidir ve bu doğrunun eğimi $L''$'nün eğiminden farklıdır. Böylece $L'$ ve $L''$ kesinlikle bir kesim noktasına sahip olur. Ve bu nokta;

$$V_N = V_{N-2} + a_N V_{N-1} \text{ veya; } V_{N-2} + \beta_N V_{N-1}$$

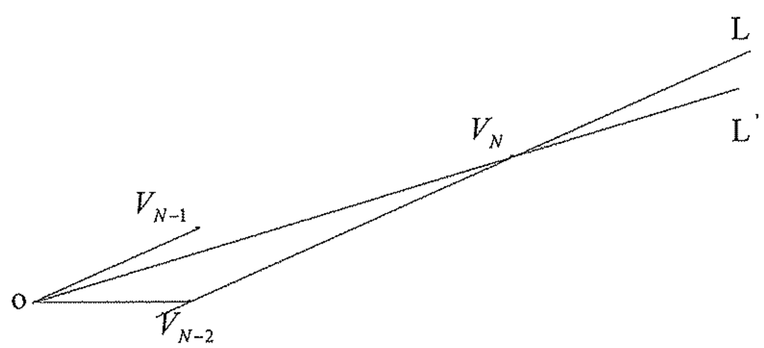
olur. Böylece;

$$V_{N-2} + a_N V_{N-1} = V_{N-2} + \beta_N V_{N-1},$$

$$a_N V_{N-1} = \beta_N V_{N-1},\ V_{N-1} \neq (0,0)$$

olduğundan dolayı;

$$a_N = \beta_N .$$



Şekil 3.11. $L''$'nün eğimi

Teorem 3.3.3. algoritmanın neden sürekli kesir algoritması olarak adlandırıldığı konusunda aydınlatıcıdır ve teorem 3.3.3'deki iki açıklama için sürekli kesirlerin algoritması iyi tanım olabilir niteliktedir. Sürekli kesirler genellikle $\alpha_0 = \alpha$ olarak verilir ve $\alpha_n$'ler ve $a_n$'ler (8) ve (9) yardımıyla tanımlanabilirler. Teorem 3.3.3 yardımıyla $\frac{p_n}{q_n}$ tanımlanmış olur. Payda pozitif olmak üzere, pay ve payda değerlerini en küçük olacak şekilde sadeleştirilmesi ile $p_n$ ve $q_n$ değerleri bulunabilir. Teorem 3.3.3'teki gösterim zor olduğundan daha basit olan, $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ ifadesi,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

yerine yazılabilir. Ayrıca, $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ ifadesi de,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

yerine yazılabilir. Böylece,

$$\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \tag{11}$$

alınabilir. Bu ifade bazı durumları doğrulasa da aşağıdaki gibi sonsuz sürekli kesirlerin nasıl bulunacağını açıkça gösteremeyebilir. $\pi = 3.14159265\ldots$; 3, 3.1,

$3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159,\ldots$ dizisinin limiti olur. Teorem 3.2.7 , (11)'deki eşitlik ile aynı anlama gelir.

$$\frac{p_n}{q_n} = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \rangle \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha \text{ den,}$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

olur. Teorem 3.3.3.'den sonra $V_n$ noktasının $\alpha$ eğimi bulunabilir. Teorem 3.3.3.'e bakarak $p_n/q_n$ bulmak kolay görülebilir fakat (1)'de hesaplanılan $V_n$'den bulmak daha kolay olur. Daha önce kullanılan metodun ek bir avantajı vardır. Çünkü bu metot $V_n$'leri belirler. Bu süreci açıklamak için aşağıda üç örnek verildi.

Örnek: $\alpha = \dfrac{42}{57}$ alınsın. Bu durumda;

$$\alpha_0 = \frac{42}{57} = 0 + \frac{42}{57}, \qquad a_0 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{57}{42} = 1 + \frac{15}{42}, \qquad a_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{42}{15} = 2 + \frac{12}{15}, \qquad a_2 = 2$$

$$\alpha_3 = \frac{15}{12} = 1 + \frac{3}{12}, \qquad a_3 = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{12}{3} = 4\ , \qquad a_4 = 4$$

olur. Ve algoritma sonlanır. Aynı $a_n$'ler şekil 3.12.'deki hesaplamadan $V_n$ değeri, $V_{n-2}$ ve $V_{n-1}$ yardımıyla kolayca bulunabilir. $V_n$ , $a_n$'in basit halidir. Üst üste ekleyerek elde edilir. Böylece $\alpha_4 = a_4, V_4 = (19,14)$ noktası $y = (42/57)x$ doğrusun üstündedir. Kabaca; $\frac{42}{57} = \frac{14}{19}$ , $\frac{42}{57} = \langle 0,1,2,1,4 \rangle$ olur.

| | $\alpha = \frac{42}{57}$ | | | $\alpha = \sqrt{3}$ | | | $\alpha = \pi$ | | | $\alpha \approx \pi$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $a_n$ | $q_n$ | $p_n$ | $a_n$ | $q_n$ | $p_n$ | $a_n$ | $q_n$ | $p_n$ | $a_n$ | $q_n$ | $p_n$ |
| -2 | | 1 | 0 | | 1 | 0 | | 1 | 0 | | 1 | 0 |
| -1 | | 0 | 1 | | 0 | 1 | | 0 | 1 | | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 7 | 7 | 3 | 7 | 7 | 22 |
| 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 5 | 15 | 106 | 333 | 15 | 106 | 333 |
| 3 | 1 | 4 | 3 | 1 | 4 | 7 | 1 | 113 | 355 | 1 | 113 | 355 |
| 4 | 4 | 19 | 14 | 2 | 11 | 19 | 292 | 33102 | 103993 | 288 | 32650 | 102573 |
| 5 | | | | 1 | 15 | 26 | | | | | | |
| 6 | | | | 2 | 41 | 71 | | | | | | |
| 7 | | | | 1 | 56 | 97 | | | | | | |
| 8 | | | | 2 | 153 | 265 | | | | | | |

Şekil 3. 12. Algoritma ve sürekli kesir açılımının karşılaştırılması

Örnek: $\alpha = \sqrt{3} \approx 1,7$ alınabilir. Yani $a_0 = 1$

$$\alpha_0 = \sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1), \qquad a_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx \frac{2,7}{2} \quad , \quad a_1 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1 \approx 2,7, \qquad a_2 = 2$$

$$\alpha_2 = 2 + (\sqrt{3} - 1),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

$\alpha_3 = \alpha_1$ olur. Ve;

$$a_3 = [\alpha_3] = [\alpha_1] = a_1$$

olur. Ayrıca;

$$\frac{1}{\alpha_4} = \alpha_3 - a_3 = \alpha_1 - a_1 = \frac{1}{\alpha_2}$$

olur. Buradan; $\alpha_4 = \alpha_2$ olur. Sonra ; $a_4 = a_2$ ve $\alpha_5 = \alpha_3 = \alpha_1$ olur. Ayrıca, $a_5 = a_1, \alpha_6 = \alpha_2$ elde edilir. Bu durum böyle devam eder. $\sqrt{3}$ sürekli kesrinin açılımı buradan şöyle gösterilebilir.

$$\sqrt{3} = \langle 1,1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots \rangle.$$

Örnek: $\alpha = \pi = 3{,}1415592653589793\ldots$ alınabilir.

$$\alpha_0 = 3{,}141559265\ldots, \qquad a_0 = 3,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{.141559265\ldots} = 7{,}06251330\ldots, \quad a_1 = 7,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{.06251330\ldots} = 15{,}99659440\ldots, \quad a_2 = 15,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{.99659440\ldots} = 1{,}00341723\ldots, \quad a_3 = 1,$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{.00341723\ldots} = 292{,}63459101\ldots,\ a_4 = 292,$$

bu şekilde devam eder.

Bu örneklerden ilkinde (42,57)=3 olduğu bulundu. Aslında bu ilk örnek yöntem bakımından Euclit algoritmasının çok benzeridir. Bu yöntemde Euclit algoritması irrasyonelliği kontrol etmek için kullanılabilir: $\alpha$ sayısı için algoritma sonlanırsa o zaman $\alpha$ rasyonel olur. Aksi takdirde $\alpha$ irrasyoneldir.

İkinci örnekte $a_n$'in periyodik olması durumu incelendi. Bu örnekte istenilen kadar çok $V_n$'in hesaplanması mümkündür. Bu ise kolayca $\sqrt{3}$ için, çok iyi rasyonel yaklaşımlar bulmayı mümkün kılar. Böylece teorem 3.2.7. yardımıyla; $\left|\sqrt{3} - \frac{97}{56}\right| < \frac{1}{56.153} = 0{,}000116\ldots$ yazılabilir. Bu nedenle $\sqrt{3}$ ün ondalık açılımı kesin olarak söylenmese de, onbininci ya da daha küçük bir hatayla üçün karakökünün $\frac{97}{56}$ olduğu söylenebilir. Bu $a_n$ in periyodik olmasından kaynaklanan güzel bir durumdur. Periyodikliği belirtmek için , $a_n$'lerin üstüne çizgi çizilerek gösterilebilir. Örneğin; $\sqrt{3} = \langle 1, \overline{1,2} \rangle$ ve $\langle 2,3,1,4,2,5,7,4,2,5,7,4,\ldots \rangle$ yerine $\langle 231, \overline{4257} \rangle$ yazılır.

Üçüncü örnekte durum farklıdır ve bu örneklere göre zor bir durumdur. $a_n$'lerin dizisi tam olarak belirli değildir. Sonraki $a_n$'lerin hesaplanması için $\alpha$'nın, daha doğru ondalık açılımının daha fazla bilinmesi gerekir. Örnekte $\alpha_n$'lerin doğru değerleri verildi. Son basamak civarında sadece $\pi = 3{,}14159265\ldots$ olduğunun bilindiği kabul edilsin. Burada sekiz ondalıklıdır. Her hesaplamadan sonra tahminler yardımıyla şu sonuçlar yazılabilir;

$$\alpha_0 = 3{,}14159265 \qquad , \qquad a_0 = 3$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{14159265} = 7{,}06251348 \quad , \quad a_1 = 7$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{.06251348} = 15{,}99654986 \quad , \quad a_2 = 15$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{.99654986} = 1{,}003446208 \quad , \quad a_3 = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{.003446208} = 288{,}84370090 \, , \quad a_4 = 288$$

Önceki sayılarla bu sayılar karşılaştırıldığında doğru olmayan ve çok hızlı ilerleyen $a_4$ değerindeki yuvarlak hata bulunur. Bu açıklanabilir çünkü; $a_4$ doğru olsaydı sadece $10^{-8}$ uzunluklu verilen bir aralıkta bulunan $\pi$ 'nin olduğu bilinmesine rağmen,

$$\left| \pi - \frac{102573}{32650} \right| < \frac{1}{32650} < 10^{-9} \, ,$$

olduğu iddia edilebilir. Hesaplarda $\pi$ 'nin $3{,}1415265 \pm 5.10^{-9}$ oluşundan başka özellikler kullanılmadığı için $a_4 = 288$ in doğruluğu kesin olarak söylenemez.

### 3.4. En İyi Yaklaşımlar

3.1 Bölümde $L : y = \alpha x$ doğrusuna en yakın noktaların kümesinin $\alpha$ için en iyi rasyonel yaklaşımların verildiği görüldü. Sonraki iki bölümde ise, $\alpha$ için çok daha iyi rasyonel yaklaşımları veren bir algoritma geliştirildi. Aslında $L$ doğrusuna en yakın noktaların kümesini bulan veya $\alpha$ için en iyi rasyonel yaklaşımları bulan bu algoritmadan daha uygun algoritmaların uygun olup olmadığı merak edilebilir. Bu bölümde öncelikle $\alpha$ için en iyi yaklaşımları veren algoritma tanıtılacaktır. Daha sonra çok kullanılışlı olabilecek iki sonuç verilecektir.

**Tanım 3.4.1.** $U_1$ ve $U_2$ farklı eğimlere sahip, sıfırdan farklı iki vektör olsun. $n = 0$, $\mp 1$, $\mp 2$, ... olmak üzere $L_n$, $U_2$'ye paralel olan $nU_1$ boyunca uzanan doğru olsun ve; $m = 0$ $\mp 1$, $\mp 2$, ... olmak üzere $\ell m$, $U_1$'e paralel olan $mU_2$ boyunca uzanan doğru olsun (şekil 3.13). $L_n$'nin $\ell m$ ile arakesit noktalarının kümesi $U_1$ ve $U_2$ tarafından üretilmiş kafes olarak adlandırılır. Bu ara kesit kümesi aynı zamanda $L_n$ ve $\ell m$ tarafından oluşturulan paralel kenarın köşelerinin kümesini oluşturur. Örneğin; $(1,0)$ ve $(0,1)$ ile üretilen kafes tam koordinatlı tüm noktaların kümesidir.

**Teorem 3.4.1.** $U_1 = (s_1, r_1)$, $U_2 = (s_2, r_2)$ tam koordinatlı noktalar ve $r_2 s_1 - r_1 s_2 = \pm 1$ olsun. Bu durumda; $U_1$ ve $U_2$ tarafından üretilen kafes sadece tam koordinatlı noktaların kümesi olur.

**İspat:** n ve m tamsayılar olmak üzere , $U_1$ ve $U_2$ tarafından üretilen kafes, $nU_1 + mU_2$ formundaki noktaların kümesidir. $U_1$ ve $U_2$ tam koordinatlara sahip olduğundan kafesin herhangi bir noktası da tam koordinatlı olur. Böylece, problem tam koordinatlı herhangi bir noktanın kafesin bir noktası olup olmadığının gösterilmesine dönüşür. $(b, a)$ tam koordinatlı bir nokta olsun.

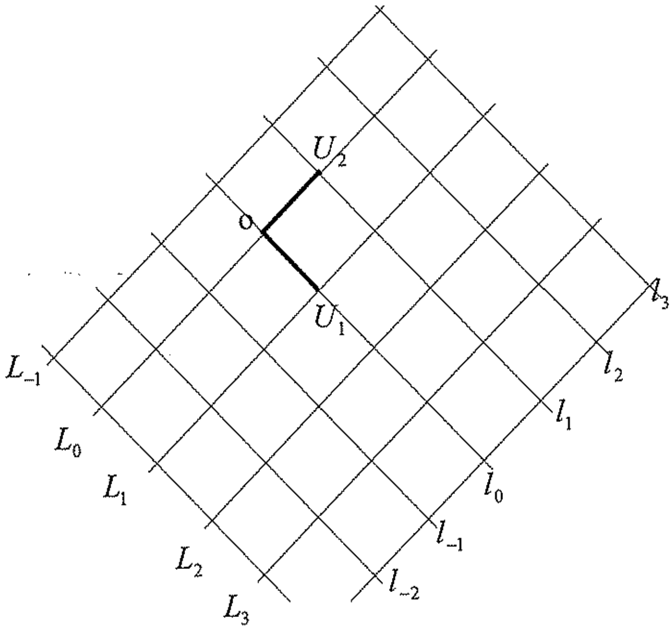
$$xU_1 + yU_2 = (b, a) \text{ ise,}$$

bu durumda $U_1$ ve $U_2$'nin koordinatlarından;

$$(s_1, r_1)x + (s_2, r_2)y = (s_1 x + s_2 y, r_1 x + r_2 y) = (b, a),$$

$$s_1 x + s_2 y = b \ , \quad r_1 x + r_2 y = a$$

olur. Böylece; $x = \dfrac{br_2 - as_2}{r_2 s_1 - r_1 s_2}$ ve $y = \dfrac{as_1 - br_1}{r_2 s_1 - r_1 s_2}$ olur. $br_2 - as_2$, $as_1 - br_1$ tamsayılı ve hipotez gereği $r_2 s_1 - r_1 s_2 = \mp 1$ olduğundan $x, y$ tamsayılardır. Böylece $(b, a)$ bir kafes noktasıdır.



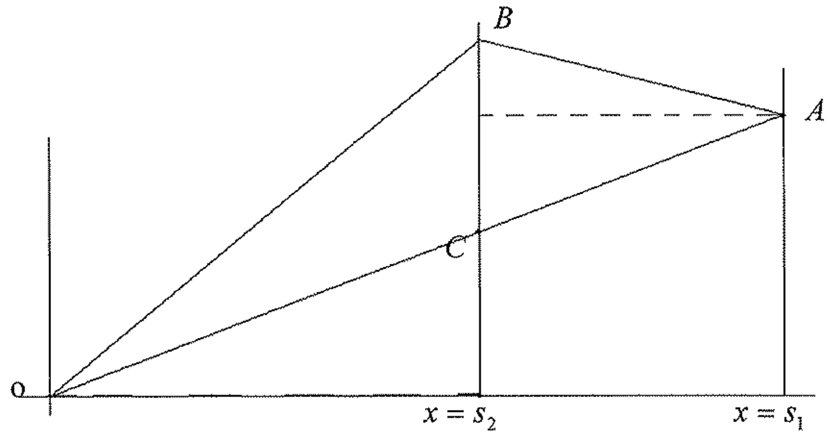

Şekil 3. 13. Kafes noktaları

**Teorem 3.4.2.** $A=(s_1,r_1)$ ve $B=(s_2,r_2)$ birinci bölgede iki nokta olsun. Bu durumda;

$$\text{Alan}(O\overset{\Delta}{A}B)=\frac{1}{2}|r_2s_1-r_1s_2|$$

olur.

**İspat:** $|r_2s_1-r_1s_2|=|-(r_2s_1-r_1s_2)|=|r_1s_2-r_2s_1|$ olduğu için, elemanların yeri değiştiğinde sonuç değişmez. Bundan dolayı $s_2\leq s_1$ kabul edilebilir. $C$ noktası, $x=s_2$ doğrusu ile $OA$ doğrusunun kesim noktası olsun . $B$ noktası, $C$ noktasının altında veya üstünde kalır. $B$ noktasının, $C$ noktasının üstünde olduğu durum ele alınsın. $BC$ dikey bir doğru olduğundan $O\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninin ve $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninin, $BC$ kenarlarına ait yükseklikleri paralel olur. Böylece sırasıyla $s_2$ ve $s_1-s_2$ yüksekliklerine sahip olurlar.




Şekil 3. 14. En yakın noktaların aralığı

Üstelik $\ddot{O}A$ doğrusunun denklemi $y = (r_1/s_1)x$ olur. $C$ noktasının $x$ koordinatı $s_2$ olup, $C = (s_2, \frac{r_1 s_2}{s_1})$ yazılabilir. Böylece; $BC = r_2 - \frac{r_1 s_2}{s_1}$ olur. Bundan dolayı;

$$\text{Alan}(O\overset{\Delta}{A}B) = \text{Alan}(O\overset{\Delta}{B}C) + \text{Alan}(A\overset{\Delta}{B}C)$$

$$= \frac{1}{2}(BC)s_2 + \frac{1}{2}(BC)(s_1 - s_2) = \frac{1}{2}(BC)s_1 = \frac{1}{2}(r_2 - \frac{r_1 s_2}{s_1})s_1 = \frac{1}{2}(r_2 s_1 - r_1 s_2)$$

olur. $B$ noktası, $C$ noktasının, altında iken ispat aynı şekilde çözülebilir. $BC = (C$'nin $y$ koordinatı $) - (B$'nin $y$ koordinatı$) = \frac{r_1 s_2}{s_1} - r_2$ olması hariç olan $(O\overset{\Delta}{A}B) = \frac{1}{2}(r_1 s_2 - s_2 s_1)$ olur. $B$ noktası ister $C$'nin altında ister üstünde olsun;

$$\text{Alan} \quad (O\overset{\Delta}{A}B) = \frac{1}{2}|r_2 s_1 - r_1 s_2|$$

olur. Teorem 3.4.2. $A$ ve $B$ noktalarının düzlemde yerleşmeleri hakkında herhangi bir kısıtlama getirilmeksizin daima doğru olur. Asıl önemli olan $V_n$'lerin L doğrusuna en yakın noktaların kümesini oluşturduğu noktalar olmasıdır. Aşağıdaki teorem bununla ilgilidir.

**Teorem 3.4.3.** $\alpha$ irrasyonel ve $0 < q_{n-1} < q_n$ olsun. $U \neq V_{n-1}$ , $U \neq V_n$ ve $0 < s \leq q_n$ olmak üzere $U = (s, r)$ şeklinde bir nokta olsun. Bu durumda $U$ noktası L doğrusuna $V_{n-1}$ den daha uzak olur.

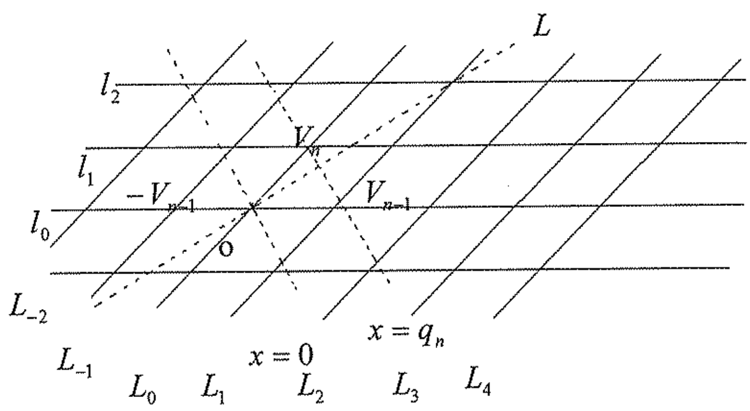
**İspat:** $V_n$'nin eğiminin $V_{n-1}$ in eğiminden daha büyük olduğuna dikkat edilsin. Teorem 3.2.5 ten $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$ , böylece, $V_{n-1}$ ve $V_n$ tarafından üretilen kafes, X,Y düzleminde tam koordinatlı noktaların kümesi olur. $V_{n-1}$ ve $V_n$ tarafından üretilen kafes şekil 3.14 ten görülebilir. Arakesiti $jV_{n-1} + kV_n$ noktası olacak şekilde $L_j$ ve $l_k$ doğruları vardır. $U$ tam koordinatlı olduğu için,

$$U = jV_{n-1} + kV_n$$

olacak şekilde $j, k$ tamsayıları vardır. $U$ noktası $x = 0$ doğrusunun sağında ve $x = q_n$ doğrusunun üzerinde veya sol tarafında olur. $j < 0$ ise, $U$ noktası $L_{-1}, L_{-2}, L_{-3}, \ldots$ doğrularının birinin üzerinde olur. $0 < x < q_n$ olduğu zaman bu doğrular L doğrusunun üst tarafında kalır. Ayrıca $L_j$ doğrusunun eğimi, L doğrusunun eğiminden daha büyük olduğundan, L doğrusundan uzaklaşırız. Böylece $U$ noktası $L_j$ ve y eksenin arakesitinden, L doğrusuna daha uzak kalır. Bu nokta $L_{-1}$ ve y eksenin arakesiti olarak L doğrusundan $(j = -1)$ aynı uzaklıkta kalır veya $(j \leq -2)$ gittikçe uzaklaşır. Bu nokta L doğrusuna $-V_{n-1}$ den daha uzak olur. Yani, $j < 0$ ise $U$ noktası L doğrusundan $V_{n-1}$ e daha uzak kalır. $j \geq 2$ olsun. $k \geq 1$ ise, $s$ aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$s = jq_{n-1} + kq_n \geq q_{n-1} + q_n > q_n$$

Böylece, $U$ noktası $x = q_n$ doğrusunun sağında kalır. Bu istenen bölgenin dışında olduğundan, $k \leq 0$ olur. Fakat, $U$ noktası $L_j$ doğrusunun üzerinde olduğundan L'nin eğiminden daha küçüktür. $U$ noktasından x in artan yönünde $L_j$ doğrusu boyunca hareket edilerek, L ye daha yaklaşılmış olur. Böylece, $jV_{n-1}$noktası, $U$ kadar L doğrusuna yakın olan ve bu L doğrusundan $V_{n-1}$ noktasına $j$ kere daha uzak olur. $j \geq 2$ olduğundan, $U$ noktası L doğrusuna $V_{n-1}$ noktasından daha uzaktır. Bu $j=0$ ve $j=1$ alınmasını sağlar. $\mathrm{L}_0$ doğrusu üzerinde kafesin noktaları ya $x=0$ doğrusunun solunda ve O noktasında olur, ya da $V_n$ noktasındadır ve $x=q_n$'nin sağında olur. $U \neq V_n$ olduğu için, $j \neq 0$, $U$ noktası $\mathrm{L}_0$ doğrusunun üzerinde değildir. $\mathrm{L}_1$ doğrusu üzerinde $V_{n-1}-V_n$ negatif $x$ koordinatına sahip olur ve $V_{n-1}+V_n$ , $q_n$ den daha büyük bir koordinata sahip olur. Böylece, $0<x<q_n$ şeklinde olan $x$ koordinatlı $\mathrm{L}_1$ üzerindeki kafes noktası, sadece $V_{n-1}$ olur. $U \neq V_{n-1}$ kabul edildiğinden $U$ noktası $\mathrm{L}_1$ üzerinde olamaz. Böylece, $U$ noktası $0<s<q_n$ aralığının neresinde olursa olsun L doğrusuna, $V_{n-1}$ noktasından daha uzak kalır.




Şekil 3. 15. Kafeste en yakın nokta

### 3.5. Periyodik Sürekli Kesirler

Bundan sonraki bölümlerde matrislerden yararlanılacaktır. Matris notasyonuna sürekli kesir algoritması yerleştirilerek başlanacaktır. (1) ve teorem 3.3.1 yardımıyla;

$n \geq 0$ için, $A_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$ , $M_n=\begin{pmatrix} q_{n-2} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & p_{n-1} \end{pmatrix}$ $\gamma_n=q_{n-2}+\alpha_n q_{n-1}$ olsun. Bundan sonraki kısımlarda $A_n, M_n, \gamma_n$ bu şekilde alınacaktır.

**Teorem 3.5.1.** $\alpha$ irrasyonel olsun. O zaman $\forall n \geq 0$ için,

$$M_{n+1} = A_n M_n,$$

$$\gamma_n(1,\alpha) = (1,\alpha_n)M_n,$$

$$\gamma_n \neq 0,$$

$$\det M_n = (-1)^n,$$

$$M_{n+1} = A_n A_{n-1} \ldots A_1 A_0$$

olur. Ayrıca, $M_n^{-1}$ tam sayılar matrisidir ve eğer, $M_n = M_m$ ise $n = m$ olur.

**İspat:** Matris çarpımının tanımı ve teorem 3.2.5 yardımıyla,

$$A_n M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-2} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-2} + a_n q_{n-1} & p_{n-2} + a_n p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{n-1} & p_{n-1} \\ q_n & p_n \end{pmatrix} = M_{n+1}$$

olur. Eğer, teorem 3.3.2.'de, $\beta = \alpha, b_n = a_n$, yazılırsa o zaman teorem 3.3.2'nin sonucu yardımıyla $V_{n-2} + \alpha_n V_{n-1}$ noktası, $y = \alpha x$ doğrusu üzerinde olur. Böylece, $V_{n-2} + \alpha_n V_{n-1}$ noktasının koordinatları aşağıdaki denklemi sağlar.

$$p_{n-2} + \alpha_n p_{n-1} = \alpha(q_{n-2} + \alpha_n q_{n-1}).$$

$$(1,\alpha_n)M_n = (1,\alpha_n)\begin{pmatrix} q_{n-2} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= (q_{n-2} + \alpha_n q_{n-1}, p_{n-2} + \alpha_n p_{n-1})$$

$$= (q_{n-2} + \alpha_n q_{n-1})(1,\alpha)$$

$$= \gamma_n (1,\alpha)$$

olur. $\alpha$ irrasyonel sayı olduğundan, $\alpha_n$ 'de irrasyonel bir sayı olur.

$$q_{n-2} + \alpha_n q_{n-1} = 0,$$

$$q_{n-2} = q_{n-1} = 0$$

olur. Fakat $q_{-2} = 1, q_{-1} = 0$ ve $n \geq 0$ için $q_n \geq 1$ dir. Böylece, iki ardışık $q_n$ 'nin sıfır olması imkansız olduğundan,

$$\gamma_n = q_{n-2} + \alpha_n q_{n-1} \neq 0$$

dır. Teorem 3.2.5 ten ve $M_n$ 'nin tanımından,

$$\det M_n = p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$$

olur. $M_0 = \begin{pmatrix} q_{-2} & p_{-2} \\ q_{-1} & p_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ olduğundan ve teoremin ilk kısmından;

$$M_{n+1} = A_n M_n = A_n A_{n-1} M_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$= A_n A_{n-1} \dots A_1 M_1$$

$$= A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0 M_0$$

$$= A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0$$

olur. $\det M_n = (-1)^n$ olduğu için;

$$M_n^{-1} = \frac{1}{\det M_n} \begin{pmatrix} p_{n-1} & -p_{n-2} \\ -q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{pmatrix} p_{n-1} & -p_{n-2} \\ -q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix},$$

$M_n^{-1}$ tamsayılı matris olur. Sonuç olarak, $n \neq m$, fakat $M_n = M_m$ olduğu kabul edilerek, yani;

$$\begin{pmatrix} q_{n-2} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{m-2} & p_{m-2} \\ q_{m-1} & p_{m-1} \end{pmatrix}$$

olup, bu eşitlikten,

$$q_{n-2} = q_{m-2}, \quad q_{n-1} = q_{m-1}$$

yazılır. $q_{-1} = 0 < 1 = q_{-2} = q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots$, olduğu için, $n-2$ değeri ya -2, 0 veya 1 e eşit olur. Yani, $n$ değeri ya 0, 2 veya 3 e eşit olur. Benzer şekilde, $n-1$ , ya -2, 0 veya 1 e eşit olur. Yani, $n$ ya -1, 1 veya 2 ye eşit olur. Buradan da, $n = 2$ olur. Benzer yöntemle $m = 2$ ve böylece $m = n$ olur. Şimdi periyodik sürekli kesir açılımı yardımıyla $\alpha$ 'yı bulmanın yolu örnekle verildi. $\alpha = \langle 4, \overline{1,3,1,8} \rangle = \langle 4,1,3,1,8,1,3,1,8,\dots \rangle$ verilsin. O zaman,

$$\alpha_1 = \langle 1,3,1,8,1,3,1,8,\ldots\rangle = \langle\overline{1,3,1,8}\rangle,$$

$$\alpha_2 = \langle 3,1,8,1,3,1,8,1,\ldots\rangle = \langle\overline{3,1,8,1}\rangle,$$

$$\alpha_3 = \langle 1,8,1,3,1,8,1,3,\ldots\rangle = \langle\overline{1,8,1,3}\rangle,$$

$$\alpha_4 = \langle 8,1,3,1,8,1,3,1,\ldots\rangle = \langle\overline{8,1,3,1}\rangle,$$

$$\alpha_5 = \langle 1,3,1,8,1,3,1,8,\ldots\rangle = \langle\overline{1,3,1,8}\rangle.$$

Bir başka deyişle, $\alpha_5 = \alpha_1$ olur. Şimdi algoritma yardımıyla önce $V_4$'den $V_0$ bulunup $M_1$ ve $M_5$ hesaplanır.

| $n$ | $a_n$ | $q_n$ | $p_n$ |
|---|---|---|---|
| -2 | | 1 | 0 |
| -1 | | 0 | 1 |
| 0 | 4 | 1 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 19 |
| 3 | 1 | 5 | 24 |
| 4 | 8 | 44 | 211 |

olur, Böylece,

$$M_1 = \begin{pmatrix} q_{-1} & p_{-1} \\ q_0 & p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 1 \\ 1 4 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} q_3 & p_3 \\ q_4 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 24 \\ 44 & 211 \end{pmatrix},$$

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Teorem 3.6.1.'den,

$$\gamma_1(1,\alpha)=(1,\alpha_1)M_1,\quad \gamma_5(1,\alpha)=(1,\alpha_5)M_5$$

olur. Bu eşitliklerin ilkinden,

$$(1,\alpha_1)=[(1,\alpha_1)M_1]M_1^{-1}=\gamma_1(1,\alpha)M_1^{-1},$$

elde edilir. İkinci eşitlikten, $(\alpha_5=\alpha_1)$ ten,

$$\gamma_5(1,\alpha)=(1,\alpha_5)M_5=(1,\alpha_1)M_5=\gamma_1(1,\alpha)M_1^{-1}M_5$$

Veya, $\delta=\gamma_5/\gamma_1$, yazarak,

$$\delta(1,\alpha)=(1,\alpha)M_1^{-1}M_5=(1,\alpha)\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 24\\ 44 & 211\end{pmatrix}=(1,\alpha)\begin{pmatrix}24 & 115\\ 5 & 24\end{pmatrix}$$

olur. Buradan;

$$\delta=24+5\alpha,\qquad \delta\alpha=115+24\alpha,$$

Ve böylece,

$$(24+5\alpha)\alpha=\delta\alpha=115+24\alpha$$

olur. Buradan;

$$24\alpha+5\alpha^2=115+24\alpha,$$

Veya diğer bir deyişle,

$$n\alpha^2 = 23$$

olur. Böylece, $\alpha$ quadratik denklemin bir kökü olur. Bu durumda, $\alpha = \pm\sqrt{23}$ , $[\alpha] = a_0 = 4$ olduğu için, $\alpha > 0$ ve böylece,

$$\alpha = \sqrt{23}$$

olur. Eğer $\alpha$ 'nın sürekli kesir açılımı sonuçta periyodik olursa, o zaman, $\alpha$ tam katsayılı quadratik denklemin bir köküdür. $\alpha^2$'nin, katsayısının sıfır olmadığını göstermek için, sonraki iki teorem yardımcı olur.

**Teorem 3.5.2.** $n \geq 0$ ve $j > 0$ olsun. ve $M_n^{-1} M_{n+j} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ olsun. O zaman

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \neq rI$$

olur.

**İspat:** Varsayalım ki tersine $M_n^{-1} M_{n+j} = rI$ olsun. O zaman,

$$M_{n+j} = M_n \left[ M_n^{-1} M_{n+j} \right] = M_n (r.I) = rM_n .$$

$M_{n+j}$ ve $rM_n$'nin ilk satırı eşitlendiği zaman, aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$q_{n+j-2} = rq_{n-2} \text{ , } \quad p_{n+j-2} = rp_{n-2}$$

dır.

Böylece, r, $q_{n+j-2}$ ve $p_{n+j-2}$ asal sayılarını böler. Buradan, $r = \pm 1$ olur. $M_{n+j}$ negatif olmadığından $r = 1$ olur. Böylece, $M_n = M_{n+j}$ ve teorem 3.6.1'den $n = n + j$ olur.

Fakat, $j > 0$ olduğu için bu mümkün değildir. Böylece,

$$M_n^{-1} M_{n+j} \neq rI$$

olur.

**Teorem 3.5.3.** $\alpha$ irrasyonel olsun. $r, s, t, u$ tamsayılar ve $\delta$ reel sayı olsun.

$$\delta(1,\alpha) = (1,\alpha)\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

olur. Eğer $t = 0$ ise o zaman,

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = rI$$

olur.

**İspat:** $t = 0$ olduğu zaman, şunu elde ederiz;

$$(\delta, \delta\alpha) = (1,\alpha)\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & u \end{pmatrix} = (r, s + u\alpha)$$

olur. Böylece,

$$\delta = r \quad , \quad \delta\alpha = s + u\alpha$$

olur. Bu eşitlikten,

$$r\alpha = s + u\alpha \quad \text{veya} \quad s + (u - r)\alpha = 0$$

olur. Böylece; $u = r$ , $s = 0$ ve buradan,

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = rI .$$

**Teorem 3.5.4.** $\alpha$ 'nın sürekli kesir açılımı periyodik olsun. Ayrıca, $N \geq 0$ , $j > o$, $\forall n \geq N$ için,

$$a_{n+j} = a_n$$

olsun. O zaman $\alpha$ tam katsayılı quadratik denklemin bir irrasyonel köküdür ve $\alpha^2$'nin katsayısı sıfır değildir.

**İspat:** Hipotezden, $\quad \alpha_{N+j} = \langle \overline{a_{N+j}, a_{N+j+1}, \ldots, a_{N+2j-1}} \rangle$

$$= \langle \overline{a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+j-1}} \rangle = \alpha_N$$

olur. Burada $\alpha$ 'nın sürekli kesir açılımı sona ermediğinden $\alpha$ irrasyoneldir. Teorem 3.5.1.'den,

$$\gamma_N(1,\alpha) = (1,\alpha_N)M_N, \quad \gamma_{N+j}(1,\alpha) = (1,\alpha_{N+j})M_{N+j}$$

olur. Bu eşitliklerin ilkinden,

$$(1,\alpha_N) = [(1,\alpha_N)M_N]M_N^{-1} = \gamma_N(1,\alpha)M_N^{-1},$$

Ve böylece ikinci denklemden, ($\alpha_{N+j} = \alpha_N$ olduğu için) ,

$$\gamma_{N+j}(1,\alpha) = (1,\alpha_{N+j})M_{N+j} = (1,\alpha_N)M_{N+j} = \gamma_N(1,\alpha)M_N^{-1}M_{N+j}$$

Veya, $\delta = \gamma_{N+j}/\gamma_N$ ($\gamma_N \neq 0$ olduğu için bölme yapılabilir),

$$\delta(1,\alpha) = (1,\alpha)M_N^{-1}M_{N+j} . \tag{24}$$

$$M_N^{-1} M_{N+j} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}, \tag{25}$$

olsun. Burada $r, s, t, u$ tamsayılardır. Çünkü $M_N^{-1}$ bir tamsayılar matrisidir. $\alpha$ irrasyonel olduğundan, önceki teorem yardımıyla,

$$t \neq 0 \tag{26}$$

olur. (24)'deki eşitlik tekrar yazılırsa,

$$(\delta, \delta\alpha) = (1, \alpha)\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = (r + t\alpha, s + u\alpha), \text{ ve böylece } \delta = r + t\alpha \ , \ \delta\alpha = s + u\alpha$$

olur. Böylece,

$$(r + t\alpha)\alpha = \delta\alpha = s + u\alpha \ ,$$

buradan,

$$t\alpha^2 + (r - y)\alpha - s = 0 \tag{27}$$

olur. Böylece $\alpha$ tam katsayılı quadratik bir denklemin kökü olur ve $\alpha^2$'nin katsayıları sıfır olamaz. Şimdi teorem 3.5.4.'ün tersi incelenebilir. Eğer $\alpha$ tam katsayılı quadratik denklemin bir irrasyonel kökü ise, o zaman $\alpha$ için sürekli kesir açılımı tekrar eder. Bu teoremin birkaç ispatı vardır, fakat bunların tümü aynı fikre dayanır. Amaç, bazı $n \geq 0$ ve $j > 0$ için, $\alpha_{n+j} = \alpha_n$ olduğunu ispatlamaktır. Periyodiklik buradan görülür, çünkü $a_{n+j} = a_n$ , $\alpha_{n+j+1} = \alpha_{n+1} \ldots$ dır. Belli $n$ ve $j$ sayıları için, $\alpha_{n+j} = \alpha_n$ olduğunu gösteren metot ve $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ sayılarının kümesinin sonlu küme olduğunu gösterir. Bunun anlamı, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ dizisinde tekrarlar var demektir ve bu ispatlanmak istenen şeydir. Her bir $\alpha_n$ sayısının tam katsayılı bir quadratik denklemi sağladığı ve $\alpha^2$'nin katsayısının sıfıra eşit olmadığı görülecektir. Böylece, eğer sadece sonlu tane bu tip birkaç denklemin var olduğu gösterilebilirse, o zaman her bir denklem yalnız iki köke sahip olduğu için, (burada $\alpha_n^2$'nin katsayıları sıfır değildir, çünkü $0\alpha_n^2 + 0\alpha_n + 0 = 0$ denklemi alınmayacak) yalnızca sonlu çoklukta $\alpha_n$ var olacaktır. $\alpha_n$ için denklemin katsayıları tamsayılar olduğu için, eğer katsayıların mutlak değerlerinin sınırı olduğu gösterilirse (örneğin eğer onların tümü 1 milyondan az ise), o zaman üç katsayının her biri için sadece sonlu sayıda ihtimal vardır ve buradan $\alpha_n$ için denklemler sonlu sayıda olacaktır. Bu ispatlanması istenen şeydir. Matrislerle işlem yapılacağından, aşağıda bunlarla ilgili gösterim verildi.

**Tanım 3.5.1.** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun. $\|A\| = \max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$, gösterimi ile $A$'nın normu tanımlanır. $|a| \le \|A\|, |b| \le \|A\|$ ve $|c| \le \|A\|, |d| \le \|A\|$ olur.

**Örnek:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ise, $\|A\| = 5$ olur. $|A|$'nın yerine, $\|A\|$ notasyonunu kullanılacaktır. Çünkü $|A|$ ile $A$'nın determinantı da anlaşılabilir.

**Teorem 3.6.5.** Eğer $A$, $B$, $C$, $2x2$'lik matrisler ise,

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|\ ,\ \|AB\| \le 2\|A\|.\|B\|,$$

$$\|ABC\| \le 4\|A\|.\|B\|.\|C\|$$

olur.

**İspat:** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $A+B = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$

olsun. O zaman $i = 1$ veya $2$, $j = 1$ veya $2$ için,

$$\left|d_{ij}\right| = \left|a_{ij} + b_{ij}\right| \le \left|a_{ij}\right| + \left|b_{ij}\right| \le \|A\| + \|B\| .$$

Böylece, $|d_{11}|, |d_{12}|, |d_{21}|, |d_{22}|$ sayıları yukarıdaki eşitliği sağladığı için

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$$

olur. Ayrıca $i = 1$ veya 2 , $j = 1$ veya 2 için,

$$e_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} ,$$

Buradan,

$$\left|e_{ij}\right| = \left|a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}\right| \le \left|a_{i1}\right|\left|b_{1j}\right| + \left|a_{i2}\right|\left|b_{2j}\right|$$

$$\le \|A\|.\|B\| + \|A\|.\|B\| \le 2\|A\|.\|B\|$$

olur. İki matrisin çarpımı, üç matrisin çarpımı için de kullanılabilir. Bu durumda,

$$\|ABC\| = \|(AB)C\| \le 2\|AB\|.\|C\| \le 2.2.\|A\|.\|B\|.\|C\|$$

olur.

**Teorem 3.5.6.** $a, b, c$ birer tamsayı olsun , $a \ne 0$ ve $\alpha$ aşağıdaki eşitliği sağlayan pozitif bir irrasyonel sayı olsun:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 .$$

Bu durumda, $\alpha$ 'nın sürekli kesir açılımı periyodik olur.

**İspat:** $a\alpha^2 = -b\alpha - c$ olduğu için,

$$a\alpha(1,\alpha)=(a\alpha,a\alpha^2)=(a\alpha,-c-b\alpha)=(1,\alpha)\begin{pmatrix}0 & -c\\ a & -b\end{pmatrix}$$

olur. $B=\begin{pmatrix}0 & -b\\ a & -c\end{pmatrix}$ olsun,

$$a\alpha(1,\alpha)=(1,\alpha)B \ , \tag{28}$$

$\alpha_n$ 'nin, quadratik denklemi sağlayıp sağlamadığına bakılsın. Teorem 2.6.1 den,

$$\gamma_n(1,\alpha)=(1,\alpha_n)M_n$$

yazılır. Buradan ve (28) eşitliğinden,

$$a\alpha(1,\alpha_n)=a\alpha[(1,\alpha_n)M_n]M_n^{-1} \tag{29}$$

$$=a\alpha[\gamma_n(1,\alpha)]M_n^{-1}$$

$$=\gamma_n[a\alpha(1,\alpha)]M_n^{-1}$$

$$=\gamma_n[(1,\alpha)B]M_n^{-1}$$

$$=[\gamma_n(1,\alpha)]BM_n^{-1}$$

$$=(1,\alpha)M_nBM_n^{-1}$$

olur. $M_nBM_n^{-1}=\begin{pmatrix}r_n & s_n\\ t_n & u_n\end{pmatrix}$ olsun. Burada $M_n, B$ ve $M_n^{-1}$ tamsayılar matrisi oldukları için, $M_nBM_n^{-1}$ matrisi de bir tamsayılar matrisidir. O halde,

$$(a\alpha, a\alpha\alpha_n) = (1,\alpha_n)\begin{pmatrix} r_n & s_n \\ t_n & u_n \end{pmatrix} = (r_n + t_n\alpha_n, s_n + u_n\alpha_n),$$

Bu durumda,

$$a\alpha = r_n + t_n\alpha_n,\ a\alpha\alpha_n = s_n + u_n\alpha_n \tag{30}$$

(30) yardımıyla,

$$(r_n + t_n\alpha_n)\alpha_n = a\alpha\alpha_n = s_n + u_n\alpha_n$$

olur ve buradan da,

$$t_n\alpha_n^2 + (r_n - u_n)\alpha_n - s_n = 0$$

olur. Böylece, $\alpha_n$ tam katsayılı bir quadratik denklemi sağlar ayrıca $\alpha_n^2$'nin katsayısı olan $t_n$ sıfır değildir, çünkü $t_n = 0$ olsaydı $\alpha = r_n / a$ rasyonel olurdu bu ise doğru değildir. Böylece, $M_nBM_n^{-1}$ matrisi verildiğinde $\alpha_n$ sayıları için yalnızca iki seçim mümkündür ve buradan eğer, $M_nBM_n^{-1}$ matrislerinin kümesi sonlu ise, o zaman $\alpha_n$'lerin kümesi de sonlu olur. $(n = 0,1,2,...), n \neq m$ için, $\alpha_n = \alpha_m$ olur ve $\alpha$'nın sürekli kesir açılımı, sonuçta periyodik olmuş olur. Böylece, $M_nBM_n^{-1}$ matrislerinin kümesinin sonlu olduğunun ispatlanması yeterli olur.

$$\theta = |a\alpha| + 4(1 + |\alpha|).\|B - a\alpha\| \tag{31}$$

olsun,

$$k = [\theta]$$

yazalım. Dikkat edilirse $\theta$ , $n$ değişkeninden bağımsız bir sayıdır. $\forall n \geq 2$ , için

$$\left\| M_n B M_n^{-1} \right\| \leq 0$$

olsun. Matris normunun tanımından, $r_n, s_n, t_n, u_n$ sayıları $-\theta$ ve $\theta$ arasında kalır. Böylece, $r_n, s_n, t_n, u_n$ sayılarının her biri için $(2k+1)$ tane olasılık vardır ve buradan, $M_n B M_n^{-1}$ $(n \geq 2)$ matrisi için $(2k+1)^4$ tane olasılık vardır. Böylece, $M_n B M_n^{-1}$ matrislerinin kümesi sonlu olmuş olur. ($n \geq 0$ yerine $n \geq 2$ kullanılmasının sebebi, $q_{-1} = 0$ ve ispatın akışında $1/q_{n-2}$ ve $1/q_{n-1}$ kullanılacağındandır). Böylece, teoremde eğer $n \geq 2$ için,

$$\left\| M_n B M_n^{-1} \right\| \leq \theta$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

$$E_n = \begin{pmatrix} 0 & p_{n-2} - q_{n-2}\alpha \\ 0 & p_{n-1} - q_{n-1}\alpha \end{pmatrix}$$

olsun. Teorem 3.2.7 den, eğer, $j \geq 0$ ise,

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| \leq \frac{1}{q_j q_{j+1}} \text{ veya } \left| q_j \alpha - p_j \right| \leq \frac{1}{q_{j+1}}$$

olur. $n \geq 2$ için, $\left| q_{n-2}\alpha - p_{n-2} \right| \leq 1/q_{n-1}$ ve $\left| q_{n-1}\alpha - p_{n-1} \right| \leq \frac{1}{q_n} < \frac{1}{q_{n-1}}$, olur. Böylece,

$$\left\| E_n \right\| \leq \frac{1}{q_{n-1}} \tag{32}$$

olur. $E_n$ matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$M_n = \begin{pmatrix} q_{n-2} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{n-2} & q_{n-2}\alpha \\ q_{n-1} & q_{n-1}\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_{n-2} - q_{n-2}\alpha \\ 0 & p_{n-1} - q_{n-1}\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{n-2} & 0 \\ 0 & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} + E_n \tag{33}$$

olur. (33),(28) ve tekrar (33) ten yaralanarak,

$$M_n B = \begin{pmatrix} q_{n-2} & 0 \\ 0 & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} B + E_n B$$

$$= \begin{pmatrix} q_{n-2} & 0 \\ 0 & q_{n-1} \end{pmatrix} .a\alpha \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} + E_n B$$

$$= a\alpha \begin{pmatrix} q_{n-2} & 0 \\ 0 & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} + E_n B$$

$$= a\alpha (M_n - E_n) + E_n B$$

$$= a\alpha M_n + E_n (B - a\alpha I).$$

Böylece,

$$M_n B M_n^{-1} = a\alpha M_n M_n^{-1} + E_n (B - a\alpha I) M_n^{-1}$$

$$= a\alpha I + E_n (B - a\alpha I) M_n^{-1}.$$

Sonuç olarak,

$$\left\|M_n B M_n^{-1}\right\| \leq \left\|a\alpha I\right\| + \left\|E_n (B - a\alpha I) M_n^{-1}\right\| \tag{34}$$

$$\leq \left|a\alpha\right| + 4\left\|E_n\right\| . \left\|B - a\alpha I\right\| . \left\|M_n^{-1}\right\| .$$

$\left\|E_n\right\|$ tahminen bulundu.

$$M_n^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} p_{n-1} & -p_{n-2} \\ -q_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğu ve $j \geq 0$ olduğu için,

$$\left|p_j\right| = \left|\alpha q_j + (p_j - \alpha q_j)\right| \leq \left|\alpha q_j\right| + \left|(p_j - \alpha q_j)\right|$$

$$\leq \left|\alpha\right| q_j + \frac{1}{q_{j+1}} \leq \left|\alpha\right| q_j + q_j = q_j (1 + \left|\alpha\right|),$$

Buna göre $n \geq 2$ için,

$$\left|p_{n-2}\right| \leq q_{n-2}(1 + \left|\alpha\right|) \leq q_{n-1}(1 + \left|\alpha\right|),$$

$$p_{n-1} \leq q_{n-1}(1 + \left|\alpha\right|).$$

olur, böylece,

$$\left\|M_n^{-1}\right\| \leq q_{n-1}(1 + \left|\alpha\right|)$$

olur. (34) de (32) yazılırsa istenilen sonuç elde edilebilir.

$$\left\|M_n B M_n^{-1}\right\| \leq \left|a\alpha\right| + 4.\frac{1}{q_{n-1}}.\left\|B - a\alpha\right\|.q_{n-1}(1 + \left|\alpha\right|)$$

$$= \left|a\alpha\right| + 4(1+\left|\alpha\right|).\left\|B - a\alpha I\right\| = \theta$$

olur.

# BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

**Tanım 4.1.** L doğrusu $y = \alpha\, x$ olsun. $q \geq 1$ olmak üzere, $q, p$ tamsayıları göz önüne alınsın. Bu özellikteki tüm $(q, p)$ noktalarının kümesi alındığında; $0 < n \leq q$ özelliğindeki $m$ ve $n$ tamsayıları için $(q, p)$ den L ye olan uzaklık, $(n, m)$ den L ye olan uzaklıktan daha küçük veya eşit olur. Bu nokta, istenilen sayıya yaklaşım için istenilen $0 < n \leq q$ aralığındaki en iyi noktadır.

**Teorem 4.1.** a) $\{\alpha\} < \frac{1}{2}$ ise, $\alpha$ ya en iyi yaklaşımlar, $n \geq 0$ için, tam olarak $\frac{p_n}{q_n}$ yakınsaklıklarıdır. Hatırlanırsa, $\{\alpha\}$, $\alpha$ sayısının kesirsel kısmı olup, $0 \leq \{\alpha\} < 1$ dır.

b) $\{\alpha\} > \frac{1}{2}$ ise $\alpha$ ya en iyi yaklaşımlar $n \geq 1$ için, tam olarak $\frac{p_n}{q_n}$ yakınsaklıklarıdır.

Not: a) $\{\alpha\} > \frac{1}{2}$ ise, $\alpha$ ya en iyi tam yaklaşım $[\alpha]+1$ olur. Çünkü, $1 < \frac{1}{\{\alpha\}} = \alpha_1 < 2$, $a_1 = 1$ olur ve $\alpha$'nın $\frac{p_0}{q_0} = a_0 = [\alpha]$ ve $\frac{p_1}{q_1} = a_0 + 1/1 = [\alpha]+1$ olmak üzere iki tam (integral) yakınsaklığını buluruz, bunlardan $\frac{p_1}{q_1}$ olan en iyi yaklaşımdır.

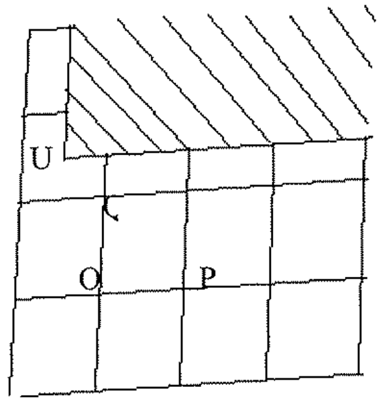
b) $\{\alpha\} = \frac{1}{2}$ ise o zaman $\alpha$'nın tam en iyi yaklaşımı yoktur, çünkü, $\frac{p_0}{q_0} = [\alpha]$ bir en iyi yaklaşım olmayıp, $\frac{p_1}{q_1} = \alpha$ bir en iyi yaklaşımdır.

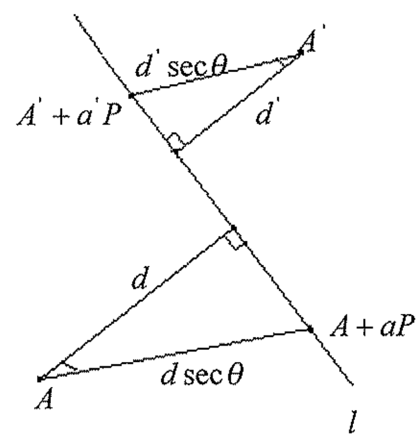
**İspat:** İspatın ana hatları aşağıdaki gibi takip edilebilir. En iyi yaklaşım noktaları da denilen düzlemdeki noktalarla, $\alpha$ sayısına en iyi yaklaşımlar geometrik olarak birleştirilir. Tekrarlı uygulandığında tüm en iyi yaklaşımların başarıyla elde edildiği geometrik bir oluşum tanımlanır. [8] Sonuç olarak, en iyi yaklaşım noktalarının koordinatları, $\alpha$ için en iyi yaklaşımların, verilen yakınsaklıklar olduğunu göstermek için hesaplanır. Ayrıca bu ispattan ortaya çıkan, $\alpha$'nın yakınsaklıklarının daha birçok özellikleri de bulunur. Bunlar, sonuç olarak belirtilecektir.

Tanım ve gösterimler:

Düzlemdeki noktalar ve vektörler için, $P=(b,a)$ gösterimi kullanıldı. $m,n \in Z$ olmak üzere, tüm $mP+nQ$ noktalarının kümesi, $P$ ve $Q$ noktaları ile oluşturulmuş bir kafes oluşturur. $\forall a \geq 0$, $b \geq 0$ sayıları için, $U+aP+bQ$ noktalarının kümesi, $U$ köşeli pozitif $(P,Q)$ konisi olarak tanımlanır. Bir $A$ noktasından $P$ yönündeki bir $l$ doğrusuna uzaklık, $l$ doğrusu üzerinde $A+aP$ biçimindeki bir tek noktayı $A$ ya birleştiren doğru parçasının uzunluğudur.

$A$'nın $l$'ye uzaklığının, $A'$'nün $l$'ye uzaklığına oranı, $P$'nin doğrultusundan bağımsızdır. Bu yüzden uygun olan bir yönü kullanarak, noktaların $l$ doğrusuna uzaklıkları serbestçe düzenlenebilir. Bu gösterim ve tanımlar için şekil 4.1. verildi.




Şekil 4.1. U köşeli koni

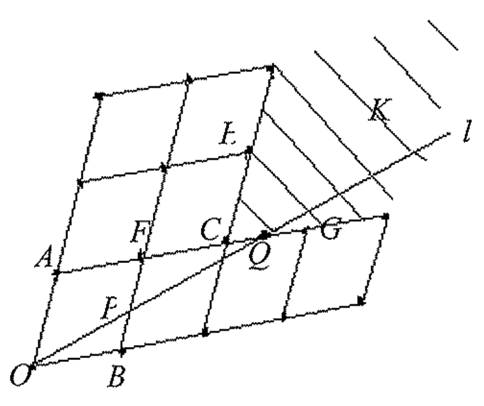
En İyi Yaklaşımın Geometrik Yorumu:

$l$, $y = \alpha x$ doğrusu olsun. $\alpha$ sayısına en iyi yaklaşım olan $\frac{p}{q}$ değerinin geometrik yorumu şudur. (1,0) ve (0,1) noktalarının ürettiği kafese $Z^2$ denilsin. $0 < q^{'} \leq q$ şartını sağlayan $x$ koordinatlı $Z^2$'nin tüm $(q^{'}, p^{'})$ noktalarının arasında $l$ doğrusuna en yakın olan bir tek *(q,p)* noktası vardır. Burada $|q^{'}\alpha - p^{'}|$ nün $(q^{'}, p^{'})$ den $l$ doğrusuna dik uzaklık olduğu kullanıldı (yani, (0,1) doğrultusunda). *(q,p)* noktasına $l$ için bir en iyi yaklaşım denir.

Dış Noktanın Oluşturulması:

Bir $\alpha \in R$ ve iki tane $A$ ve $B$ gibi tam kafes noktaları verilsin. Şekil 4.2.'ye dikkat edilsin. Şekilde görülen $C$ noktası oluşturulmak istensin. Bu $C$ noktası $C = C(A, B; \alpha)$ ile gösterilir ve $A$ ile $B$'nin dış noktası olarak bilinir.

Dış nokta yapımı şöyledir; $l$, $y = \alpha x$ olsun. $l$ doğrusu orijinde $OBFA$ paralelkenarı ile ve $BF$ doğrusunun iç noktası olan $P$ noktası ile kesişsin. $l$ doğrusu, $Q$ noktasında $AF$ doğrusunun uzantısı ile kesişsin bu durum da, $P = \theta A + B$, $0 < \theta < 1$, $Q = A + (\frac{1}{\theta})B$ olur.




Şekil 4.2. Dış nokta

Böylece $Q$ noktası, $C = A + \left[\frac{1}{\theta}\right]B$ ve $G$=$B$+$C$ noktaları arasında bir kafes doğrusu üzerinde olur. Bu ise $C = (A, B; \alpha)$ dış noktasının oluştuğunu belirtir. $C$ noktasının, $l$ doğrusunun bir noktasına iyi bir yaklaşım olması için ne yapılabilir? $C$ noktası ve $-C$ den başka, (0'daki, $C$'nin yansıması), $C$'nin $l$'ye en iyi yaklaşım olması için ne yapılabilir?

a. $C$ köşeli pozitif *K-(A,B)* konisi ve
b. 0 noktasına göre $K$'nın yansıması,

olan herhangi bir kafes noktasından $l$ doğrusuna daha yakındır. Çünkü, $B$ yönündeki herhangi bu çeşit kafes noktalarından $l$ ye uzaklık, en az $|B|$'nin pozitif tam çarpanıdır. Oysa, bu yönde $C$ den $l$ ye uzaklık, $\varphi < 1$ olmak üzere $\varphi|B|$ dir. Üstelik, $K$ için yarı açık bir koni ile devam edilebilir. Çünkü, $C$ den başka $K$'nın, $A$ kenarı üzerindeki herhangi bir nokta, $A$ yönündeki $l$ doğrusundan $|A|$ değerinden daha büyük uzaklığa sahiptir. Bu şöyle de yorumlanabilir. İki koninin dışında komşu olan kafes noktaları $l$ ye 0 noktasından başka $C$, $-C$ dir. Ve B , $-B$ dir. Çünkü, bunlar sırasıyla $A$ ve $B$ yönünde $\theta|A|$ ve $|B|$ uzaklılarına sahiptirler.

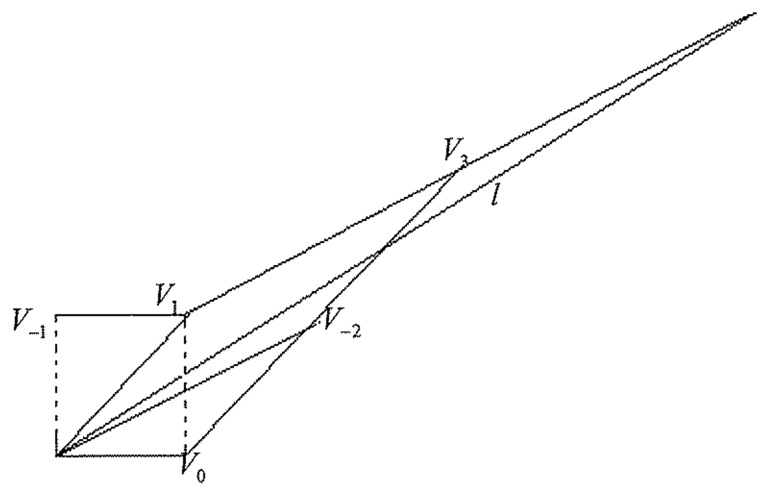
Dış Noktanın Yapımının Tekrarı:

Dış noktanın yapımı için iterasyon yapılır. Bunun yanında iki şeyi görmek önemli olur. Birincisi $A$ ve $B$ tarafından üretilen kafes, $B$ ve $C$ ile üretilen kafes ile tam olarak aynıdır. Çünkü, $C = A + \left[\frac{1}{\theta}\right]B$ , $A = C - \left[\frac{1}{\theta}\right]B$ ve $\left[\frac{1}{\theta}\right]$ bir tamsayıdır.

İkinci olarak, herhangi bir köşede, pozitif *(A,B)* konisi, $A$ kenarı boyunca açık olan koni, $B$ kenarı boyunca açık olan pozitif *(B,C)* konisini bulundurur. Çünkü; $C = A + \left[\frac{1}{\theta}\right]B$ ve $\left[\frac{1}{\theta}\right] \geq 1$ dir.

$\alpha \in R$ ve iki tane $V_{-1} = (0,1)$, $V_0 = (1, a_0)$; $a_0 = [\alpha]$, kafes noktaları ele alınsın. O zaman $\forall n = 1,2,3,...$ için $V_n = C(V_{n-2}, V_{n-1}, \alpha)$ olur. $\alpha = \sqrt{5} - 1 = [0;1,1,1,\ldots]$ iken $V_1, V_2, V_3$ noktalarının oluşumu şekil 4.3'te gösterildi.

$\{\alpha\} < \frac{1}{2}$ ise $\frac{p_0}{q_0} = [\alpha]$, $\alpha$ için bir en iyi yaklaşımdır. $n \geq 1$ için, pozitif koniler ve kafesler hakkındaki bilgiler kullanılarak, $(q', p'), q' > 0$, $Z^2$'nin bir noktası ise, ve $l$ doğrusu $(q', p')$ den itibaren $V_n$ den daha uzak değil ise, o zaman $(q', p')$ noktası $V_{-1}$ kenarı boyunca açık olan $V_n$ köşeli $(V_{-1}, V_0)$ pozitif konisinin içinde olur. Böylece, geometrik yorum sayesinde $\frac{p_n}{q_n}$, $\alpha$ ya bir en iyi yaklaşımdır. Ayrıca, $B$ ve $-B$'nin en yakın olma özelliği yardımıyla $l$ doğrusu, $q_{n-1}$ ve $q_n$ arasında $x$ koordinatı olan $Z^2$'nin herhangi bir noktasından, $V_{n-1}$ e daha yakındır. Böylece, $q_{n-1} < q < q_n$ olmak üzere, $\frac{p}{q}$ en iyi yaklaşımı yoktur. Buradan şu sonuç çıkar; $\{\alpha\} < \frac{1}{2}$ için, $\frac{p_0}{q_0}$ ve $\frac{p_n}{q_n}$, $n \geq 1$, yaklaşımlarından başka en iyi yaklaşım olmadığıdır.




Şekil 4. 3. Doğruya en yakın noktalar

Yakınsaklıklar Olarak En İyi Yaklaşımlar:

$l'$ doğrusu, $y=(p_n/q_n)x$ olsun. $0 \le r \le n$ olmak üzere, oluşum dizisi tam olarak, $l$ için olduğu gibi $l'$ için de aynı $a_r$ tamsayıları ve aynı $V_r$ noktalarını verir. (fakat $l=l'$ olmadıkça $\theta_r$ ile değiştirerek $\theta_r'$ sayılarının dizisi alınır.) Çünkü, $0 \le r \le n$ için, $l'$ doğrusu, $V_r$ yi $V_r + V_{r-1}$ e birleştiren doğru parçasının iç noktası ile kesişir. Eğer $l'$ böyle davranmazsa o zaman $V_r$ veya $V_r + V_{r-1}$ kafes noktalarından biri $l$ ve $l'$ doğrularını x>0 yarı düzleminde ayırır. $q_{n-1} \le q_n$ koordinatına sahip olan nokta $l$ doğrusuna $V_n$ den daha yakındır. Bu ise, $\frac{p_n}{q_n}$'nin $\alpha$ ya bir en iyi yaklaşım olduğu gerçeği ile çelişir. $d_r'$ ile $V_r$ den $l'$ doğrusuna olan dik uzaklık gösterilsin. O zaman, $\frac{d_r'}{d_{r-1}'} = \theta_r'$ olur. Çünkü, $\frac{CQ}{OB}$ uzaklık oranı, temel geometrik oluşumda $\varphi$ ye eşittir.

Bu nedenle, $\frac{d_{r-2}'}{d_{r-1}'} = \frac{1}{\theta_{r-1}'} = a_r + \theta_r' = a_r + \frac{d_r'}{d_{r-1}'}$; $1 \le r \le n$ olur. Ve $\frac{d_{r-1}'}{d_{r-2}'} = \cfrac{1}{a_r + \cfrac{d_r'}{d_{r-1}'}}$ olur. $\frac{d_0'}{d_{-1}'} = \frac{p_n}{q_n}$ ve $d_n' = 0$ dır. Böylece, $\frac{d_1'}{d_0'}, \ldots, \frac{d_{n-1}'}{d_{n-2}'}$ oranları sırasıyla yerine yazılırsa, $\{p_n/q_n\} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ve buradan, $p_n/q_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ dır.

**Sonuç:** $n \ge 1$ için, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$.

**İspat:** Pratik olarak bu bağıntılar, $p_n$ ve $q_n$ değerlerini hesaplamada kullanılır. Elde edilen $p_n$ ve $q_n$ çifti en büyük ortak bölen olarak 1 sayısına sahiptir. Bu en iyi yaklaşım tanımından anlaşılır. $\alpha$'nın irrasyonel olması durumunda, $n \ge 0$ için, $q_n$ dizisinin $\infty$ yaklaştığı görülür. Çünkü, $q_n \ge q_{n-1} + q_{n-2}$ dir. Kaba bir tahmin, $n \ge 2$ için, $q_n \ge 2^{\frac{n}{2}}$ dir. Çünkü, $q_n \ge 0$, $q_n \ge q_{n-1}$ ve buradan, $q_n \ge 2q_{n-2}$ dir.

**Sonuç:** $\alpha \neq \frac{p_n}{q_n}$ ise, o zaman, α sayısı $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ve $\frac{p_n}{q_n}$ sayısı arasındadır. $\frac{p_n}{q_n}$ dizisi, çift $n$ sayıları için, artan olup, tek $n$'ler için azalan olur. Bunu ispatı geometrik olarak görülebilir.

**Sonuç:** $n \geq 0$ için, $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ dir.

**İspat:** Sol taraf; $0, V_n, V_n + V_{n-1}, V_{n-1}$ köşeli paralelkenarın yönlendirilmiş alanıdır. $n = 0$ iken, sonuç +1 değerinden görülür. Geometrik yapıma göre, OBFA ve OCGB paralelkenarları aynı tabana ve yüksekliğe sahip olup, zıt yönlendirmeye sahiptirler. Önceki sonuçlar yardımıyla α irrasyonel iken, $\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$ olup

$n \to \infty$ iken, $\frac{p_n}{q_n} \to \alpha$ olur.

**Sonuç:** $p_{n-2}q_n - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$ dir.

**İspat:** Yukarıdaki sonuçta, $n$ ile $n-1$ yer değiştirdiğinde, ve geometrik yapı incelendiğinde sonuç görülür. *OBFA* ve *OCHA* paralelkenarları aynı *OA* tabanına sahip olup, yükseklikleri $\frac{OB}{AC}$ oranındadır ve bu oran, $\frac{1}{\left[\frac{1}{\theta}\right]}$ dır.

# KAYNAKLAR


[1] OLDS, C.D., Continued Fractions, Yale University, 1963.

[2] KHRUSHCHEV, S., Continued Fractions and Orthogonal Polynomials on The Unit Circle, Journal of Computational and Applied Mathematics 178 (2005) 267-303.

[3] PERRON, O., Die Lehre Von Den Kettenbrüchen, Stuttgaart, 1954.

[4] BAYRAKTAR, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Erzurum,1988.

[5] AKBULUT, F., Lineer Cebir, İzmir, 1973.

[6] STARK, H.M., An Introduction to Number Theory, Chicago, 1970.

[7] WALL, H.S., Analitic Theory of Continued Fractions, New York, 1948.

[8] KHICHIN, A.Y., Continued Fractions, Chicago, 1964.

[9] IRWIN, M.C., Geometry of Continued Fractions, American Mathematical Monthly, Vol. 96,Issue 8, pp. 696-703,1989.

# ÖZGEÇMİŞ

Mehtap GER 26.07.1981 yılında Adana'da doğdu. İlköğretimini Ankara'da tamamladı. 1999 yılında başladığı Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği'ni 2003 yılında tamamladı. 2004 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenciliğine başladı. 2003 yılında M.E.B. tarafından Kocaeli'nin Gebze ilçesine Matematik öğretmeni olarak atandı. Şu an hala Zübeyde Hanım İlköğretim Okulunda görev yapmaktadır.