

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SINIR İNTEGRALİ METODU VE
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Öğr. Fatih ÖZBEK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

Şubat 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SINIR İNTEGRALİ METODU VE
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Öğr. Fatih ÖZBEK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 06 / 02 /2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Abdullah YILDIZ
Jüri Başkanı**

**Yrd. Doç. Dr.
Ö. Faruk GÖZÜKIZIL
Üye**

**Yrd. Doç. Dr.
Yılmaz GÜNEY
Üye**

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlamamda benden hiçbir yardımını esirgemeyen ve bana en iyi şekilde yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. Abdullah YILDIZ' a teŐekkürlerimi ve Őukranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	x
SUMMARY.....	xi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
1.1. Green Fonksiyon Kavramı.....	1
1.2. Genelleştirilmiş Fonksiyon Kavramı.....	1
BÖLÜM 2.	
GREEN FONKSİYONLARI.....	4
2.1. Green Fonksiyonları ve Adjoint Operatörler.....	4
2.1.1. Green fonksiyon kavramı.....	4
2.1.2. Adjoint operatörler.....	8
2.2. Eliptik Denklemlerin Green Fonksiyonları.....	11
2.2.1. Laplace operatörü için Green fonksiyonu.....	11
2.2.1.1. Doğrudan metod.....	11
2.2.1.2. Fiziksel kavramlar kullanılarak çözüm.....	13
2.2.1.3. Görüntü metodu.....	15
2.2.1.4. Seri açılımı metodu.....	16
2.2.2. Helmholtz operatörü için Green fonksiyonu.....	17
2.3. Parabolik Denklemlerin Green Fonksiyonları.....	20

2.4. Hiperbolik Denklemlerin Green Fonksiyonları.....	25
BÖLÜM 3.	
GREEN FONKSİYONLARININ UYGULAMALARI.....	30
3.1. Drihlet Problemleri.....	30
3.2. Neumann Problemleri.....	31
3.3. Robin Problemleri.....	33
3.4. Helmholtz Denkleminin Green Fonksiyonu Cinsinden Çözümü....	33
3.5. Hiperbolik ve ya Parabolik Denklemlerin Çözümü.....	35
BÖLÜM 4.	
GREEN ÖZDEŞLİKLERİ.....	43
BÖLÜM 5.	
SINIR İNTEGRALİ METODU.....	47
5.1. Ağırlıklandırılmış Kalanlar Metoduyla Yaklaşık Çözüm.....	47
5.1.1. Kollokasyon metodu.....	48
5.1.2. Momentler metodu.....	49
5.1.3. Galerkin metodu.....	49
5.1.4. Alt bölgelerle kollokasyon.....	50
5.1.5. En küçük kareler metodu.....	50
5.2. Sınır Elemanları Metodu.....	51
5.3. Diferansiyel Denklemin Sınır İntegrali Metodu.....	54
5.4. Laplace Denkleminin Sınır Elemanları Formülasyonu.....	59
5.4.1. Ters formülasyon.....	59
5.4.2. İki boyutlu problemler için sınır integrali metodu.....	61
5.4.3. Zayıf tekil integral.....	62
5.4.4. Kuvvetli tekil integral.....	63
5.4.5. Sınırın ayrıklaştırılması.....	64
5.4.6. Sabit şekil fonksiyonu.....	64
5.4.7. Lineer şekil fonksiyonu.....	65
5.4.8. Kollokasyon metodu.....	66
5.4.9. Örnek(sabit durumlu ısı iletimi).....	67

BÖLÜM 6.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	103
KAYNAKLAR.....	104
ÖZGEÇMİŞ.....	105

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$G(x, x')$: Green fonksiyonu
L	: Lineer diferansiyel operatör
L^*	: Adjoint operatör
$\delta(x, x')$: Dirac delta fonksiyonu
$\nabla^2 + k^2$: Helmholtz operatör
$w(x)$: Test fonksiyonu
$u_{,ii}$: Sınır elemanları metodu için laplace denklemi
u^*	: Temel çözüm
ξ	: Yükleme noktası
Φ	: Şekil fonksiyonu
a	: Isıl iletkenlik
a_0, a_n, b_n	: Fourier katsayıları
$G(x, x'; t, t')$: Tam uzay operatörü için Green fonksiyonu
\hbar	: Planck sabiti
$I_n(x)$: Modifiye Bessel fonksiyonu
J	: Jacobian
\mathcal{L}	: Laplace dönüşümü
\mathcal{L}^{-1}	: Ters Laplace dönüşümü
(r, θ)	: Polar koordinatlar
R^n	: n boyutlu uzayda Euclidean
$f(x)$: Serbest terim
t	: u_{yy} biçiminde kısmi türev
t'	: Kaynak nokta
u	: Bağımlı değişken
x	: R^n içinde (x_1, x_2, \dots, x_n) biçiminde bir nokta
x'	: Kaynak nokta

z	: Kompleks sayı
ξ, η	: Karakteristik koordinatlar
ϕ_n	: Özel fonksiyon
Ω	: Bölge
∂D	: D bölgesinin sınırı
∇	: Grad
∇^2	: Laplacian
$\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2$: Diffusion operatörü
\square_c	: Dalga operatörü
\square	: Teoremler için ispat sona erdi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Green fonksiyonunun yarı düzlemde bulunuşu.....	16
Şekil 4.1.	Γ sınırlı bölgeden z_0 merkezli diskin çıkmasıyla oluşan bölge...	45
Şekil 5.1.	ξ yük noktası etrafına sınır ilavesi.....	61
Şekil 5.2.	Sınır ilavesinin geometrisi.....	62
Şekil 5.3.	Sabit şekil fonksiyonu.....	64
Şekil 5.4.	Lineer interpolasyonunun $\Gamma^{(e)}$ elementinin içine kaydırılması....	65
Şekil 5.5.	Örnek: 4 element için dikdörtgensel bölge içindeki ısı iletimi.....	68
Şekil 5.6.	4 element için H_{12} ve G_{12} matris bileşenlerinin hesaplanması...	69
Şekil 5.7.	4 element için H_{23} ve G_{23} matris bileşenlerinin hesaplanması...	70
Şekil 5.8.	4 element için u sınır değerinin nümerik çözümünün grafiği....	74
Şekil 5.9.	4 element için q sınır değerinin nümerik çözümünün grafiği.....	74
Şekil 5.10.	4 element için analitik çözümün grafiği.....	74
Şekil 5.11.	Örnek: 4 Element için iç noktalarda çözüm.....	75
Şekil 5.12.	Örnek: 6 Element için dikdörtgensel bölge içindeki ısı iletimi...	82
Şekil 5.13.	6 nokta için H_{12} ve G_{12} matris bileşenlerinin hesaplanması.....	83
Şekil 5.14.	6 nokta için H_{13} ve G_{13} matris bileşenlerinin hesaplanması.....	84
Şekil 5.15.	6 element için u sınır değerinin nümerik çözümünün grafiği..	91
Şekil 5.16.	6 element için q sınır değerinin nümerik çözümünün grafiği....	91
Şekil 5.17.	6 element için analitik çözümün grafiği.....	91
Şekil 5.18.	Örnek: 6 element için iç noktalarda çözüm	92

TABLolar LİSTESİ

Tablo 5.1.	Sınır elemanları metodunun avantajları ve dezavantajları.....	52
Tablo 5.2.	FEM ve BEM metotlarının karşılaştırılması.....	53
Tablo 5.3.	4 element için iç noktalarda çözümün gerçek çözümle kıyası.....	82
Tablo 5.4.	6 element için iç noktalarda çözümün gerçek çözümle kıyası.....	102

ÖZET

Anahtar kelimeler: Temel Çözüm, Green Fonksiyonu, Sınır İntegrali Metodu

Uygulamalı Matematik ve mühendislikte nümerik hesaplama ve benzetme artan bir önemle, önemli bir rol oynamaktadır. Hesaplama kolaylığı ve kalitesi, deneylerin yapılamaması veya pahalılığı karşısında vazgeçilmez olmaktadır. Nümerik işlemlerin etkinlik, doğruluk ve güvenilirlik açısından güven verici olmaları önemlidir.

Bu nümerik hesaba sınır elemanları yöntemi bir örnektir. Jaswon ve Symm 1963 yılında potansiyel problemler için sınır elemanları metodunu (BİEM) Green özdeşliği kullanarak geliştirdi. 1976'da Lachat&Watson, 1977'de Butterfield ve Brebbia çeşitli uygulama alanlarında gelişmelere sebep oldular.

Bu metotta en önemli iş verilen diferansiyel denklem için Temel Çözüm dediğimiz noktasal yük kaynağı altında serbest uzay çözümünü bulmaktır.

Bu tezde biz bazı örneklerle bu Temel Çözümün nasıl bulunduğunu ve nasıl kullanıldığını verdik ve bazı bilgisayar uygulamalarını gösterdik.

BOUNDARY INTEGRAL METHOD AND APPLICATIONS

SUMMARY

Key Words: Fundamental solution, Green Function, Boundary Integral Method

In the design of engineering structures, numerical simulations play an increasingly important role. This can be attributed to the rapid advances in computational power and software quality and the resulting decrease in the costs of computer simulations, as compared to the high costs and / or practical difficulties of experiments. However, to supplement or even replace experiments, numerical simulations have to fulfil strong requirements on efficiency, accuracy, and reliability.

Our simulation tool the Boundary Element Method. Jaswon and Symm have developed direct Boundary Integral Equation Methods (BIEM) for potential problems using Green's third identity (1963). Lachat&Watson (1976) Butterfield (1977) and Brebbia (1977) have been developed the range of application was extended to other fields of mathematical physics.

A common feature of all Boundary Element Methods is their use of fundamental solutions, which are free space solutions of the governing differential equations under the action of a point source.

In these theses we give some example of finding classical equation of fundamental solutions and use in same examples.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Green Fonksiyon Kavramı

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin Green fonksiyonu, kuvvet fonksiyonunun Ω bölgesinde Dirac delta fonksiyonu ile temsil edilen birim noktasal kuvvet fonksiyonu olduğu adjoint denklemin çözümüdür. Bu fonksiyon, çeşitli sınır koşullarının ve iç kaynakların bulunduğu kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünün bulunmasını sağlar. Eğer L bir diferansiyel operatör, $Lu(x) = f(x)$ bir lineer diferansiyel denklem, $\Omega \in R^n$ bölgesi içinde x bir nokta ve diferansiyel denklem içinde homojen olmayan bir terim $f(x)$ ise bu denklemin çözümünü homojen sınır koşullarına bağlı $u(x) = \int \dots \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$ formunda yazılabilir. Burada $G(x, y)$ bir Green fonksiyonudur.

1.2. Genelleştirilmiş Fonksiyon Kavramı

Green fonksiyonlarını oluşturmak için, genelleştirilmiş fonksiyonların matematiksel yapısını öğrenmek önemlidir. Bu nedenle, Distribution teorisinin temel kavramları, Green fonksiyon kavramı ve çeşitli sınır değer problemlerinin oluşturulması verilmeye çalışılacaktır.

Nokta kaynağı, Dirac delta fonksiyonu ile temsil edilir ve bu Distribution veya genelleştirilmiş fonksiyonlar denilen bir fonksiyon sınıfına aittir. Klasik anlamda fonksiyon olmayan fakat başka ilişkiler sağlayan bu fonksiyonlar için, şu örnekle işe başlansın. Bir yay sistemi göz önüne alınsın. Dış kuvvet $F(t)$, $t_0 - t_1 \leq t \leq t_0 + t_1$ zaman diliminde uygulansın ve $F(t)$ aşağıdaki gibi tanımlansın

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t_0 < |t - t_1|, \\ f(t), & t_0 \geq |t - t_1|. \end{cases}$$

t_1 noktasındaki bu kuvvetin etkisi olan $I(t)$ ölçüsü

$$I(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt = \int_{t_1-t_0}^{t_1+t_0} f(t)dt$$

olsun. Kabul edilsin ki $f(t)$ artarken t_0 azalsın öyle ki $I(t_1)$ sabit kalsın. Bu hal ani darbe fonksiyonu olarak isimlendirilir ve kabul edilsin ki $I(t_1) = 1$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_{t_1-t_0}^{t_1+t_0} f(t)dt = 1 \quad (1.1)$$

bulunur. Bu denklemi sağlayan birçok fonksiyon vardır. Bunlardan birisi $f(t) = \frac{1}{2t_0}$ dır. $F(t)$ şöyle tanımlansın

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t_0 < |t - t_1| \text{ için,} \\ \frac{1}{2t_0} & t_0 \geq |t - t_1| \text{ için.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Bu şekilde (1.2) ile verilen fonksiyon Distribution fonksiyon veya genelleştirilmiş fonksiyon şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyon $\delta(t - t_1)$ ve ya $\delta(t, t_1)$ şeklinde gösterilir ve Dirac delta fonksiyonu olarak bilinir. Başka tanımları da olan bu fonksiyon

$$\delta(t - t_1) = \begin{cases} 0 & t \neq t_1 \text{ için,} \\ \infty & t \rightarrow t_1 \text{ için,} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \delta(t - t_1)dt = 1 \quad (1.3)$$

özelliğindedir. Burada $\varepsilon > 0$ keyfi olarak seçilen çok küçük bir reel sayıdır. (1.3)'den sonuç olarak

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} f(t)\delta(t - t_1)dt = f(t_1) \quad (1.4)$$

elde edilir. Burada Dirac delta fonksiyonu polar koordinatlarda (r, θ) cinsinden

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (1.5)$$

küresel koordinatlarda (ρ, θ, ϕ) cinsinden

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(\rho)}{4\pi\rho^2}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.6)$$

kartezyen koordinatlardaki $\mathbf{x} = (x, y)$ genel koordinatlarda $\mathbf{u} = (u, v)$ 'ya dönüştürülürse genel olarak

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x - x')\delta(y - y') = \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \left[J \left(\begin{matrix} (x', y') \\ (u', v') \end{matrix} \right) \right]^{-1} \quad (1.7)$$

şeklinde ifade edilir.

BÖLÜM 2. GREEN FONKSİYONLARI

2.1. Green Fonksiyonları ve Adjoint Operatörler

L lineer kısmi türevli diferansiyel operatör olmak üzere Green fonksiyonu $G(x, z)$ için Ω içinde $L^*G(x, z) = \delta(x - z)$ ve $\partial\Omega$ sınırında $MG(x, z) = 0$ dır. Burada M lineer operatördür ve ya L veya L^* 'dan daha düşük mertebeli bir diferansiyel operatördür. Eğer Ω tüm uzayda ise, sistemin çözümü L kendine eş operatörü için temel çözüm veya tekil çözüm adını alır. Burada adjoint ve self-adjoint operatörlerin Green fonksiyon kavramı tanımını için 2.1.2'ye bakınız.

2.1.1. Green fonksiyon kavramı

Aşağıdaki adi diferansiyel denklem ve sınır koşulları ele alınsın

$$Ly = y'' - k^2y = f(x), \quad a < x < b, \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (2.1)$$

Parametrelerin değişimi metodu ile problemin çözümü

$$y = \frac{1}{2k} \int_a^x \frac{\cosh k(b - x - z + a) - \cosh k(b - x + z - a)}{\sinh k(b - a)} f(z) dz \\ + \frac{1}{2k} \int_x^b \frac{\cosh k(b + x - z - a) - \cosh k(b + x - z - a)}{\sinh k(b - a)} f(z) dz$$

şekindedir. Burada $\cos a - \cos b = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ kullanılarak işlem kısaltılırsa

$$y = -\frac{1}{k} \left[\int_a^x \frac{\sinh k(b-x) \sinh k(z-a)}{\sinh k(b-a)} f(z) dz + \int_x^b \frac{\sinh k(x-a) \sinh k(b-z)}{\sinh k(b-a)} f(z) dz \right] \quad (2.2)$$

elde edilir. Eğer

$$G(x, z) = \begin{cases} -\frac{\sinh k(x-a) \sinh k(b-z)}{k \sinh k(b-a)} & x < z \text{ için,} \\ -\frac{\sinh k(b-x) \sinh k(z-a)}{k \sinh k(b-a)} & z < x \text{ için,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa yukarıdaki çözüm

$$y = \int_a^b G(x, z) f(z) dz$$

şeklinde yazılır. Buradaki $G(x, z)$ Green fonksiyonu olarak bilinir. Ters operatör L^{-1} ise çözüm

$$y = L^{-1}f(z) = \int_a^b G(x, z) f(z) dz$$

şeklinde bulunur. $G(x, z)$ 'nin aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğu gösterilebilir

$$y'' - k^2 y = \delta(x - z), \quad a < x < b, \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (2.3)$$

Bunu göstermek için aşağıdaki sonuç ifade edilsin.

Teorem 2.1. : Aşağıdaki diferansiyel denklemin çözümü

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = \delta(x - z), \quad a < x < b, \quad y(a) = y(b) = 0 \quad (2.4)$$

z , $P(x)$ 'in tekil noktası değil ise

$$y'(z_+) - y'(z_-) = \frac{1}{P(z)}$$

şartını sağlar.

İspat : $F(x) = e^{\int Q/P dx}$ tanımlansın. (2.4) şöyle yazılabilir

$$Fy'' + \frac{Q}{P}Fy' + \frac{R}{P}Fy = \frac{F}{P}\delta(x - z), \quad (2.5)$$

veya şöyle de yazılabilir

$$\frac{d}{dx}(Fy') + \frac{R}{P}Fy = \frac{F}{P}\delta(x - z).$$

Her iki tarafın $z - \varepsilon$ dan $z + \varepsilon$ 'a giderken integrali alınırsa

$$\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{d}{dx}(Fy')dx + \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{R}{P}Fydx = \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{F(x)}{P(x)}\delta(x - z)dx = \frac{F(z)}{P(z)} \quad (2.6)$$

elde edilir. Eğer $\varepsilon \rightarrow 0$ giderken limit alınırsa (2.6) denkleminin ikinci terimi sıfır olur ve burada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(z + \varepsilon)y'(z + \varepsilon) - F(z - \varepsilon)y'(z - \varepsilon)] = \frac{F(z)}{P(z)},$$

veya

$$F(z)(y'(z_+) - y'(z_-)) = \frac{F(z)}{P(z)}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. \square

(2.3)'ün çözümünde verilenler

$$y(x) = \begin{cases} A \sinh k(x - a) & x < z \text{ için,} \\ B \sinh k(b - x) & x > z \text{ için,} \end{cases} \quad (2.7)$$

ifadesindeki sınır koşullarını sağlar. A ve B ise $y(x)$ 'in süreklilik şartında ve $y'(x)$ 'in sıçrama miktarından belirlenir (Bkz. Teorem 2.1). Burada,

$$\begin{aligned} A \sinh k(z - a) &= B \sinh k(b - z), \\ -Bk \cosh k(b - z) - Ak \cosh k(z - a) &= 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

şekindedir. (2.8) çözülerek A ve B yerine yazılırsa

$$y(x) = G(x, z) = \begin{cases} -\frac{\sinh k(x - a) \sinh k(b - z)}{k \sinh k(b - a)} & x < z \text{ için,} \\ -\frac{\sinh k(z - a) \sinh k(b - x)}{k \sinh k(b - a)} & x > z \text{ için.} \end{cases}$$

Bu durumda $G(x, z)$ Green fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(1) \ a < x < z \text{ ve } z < x < b \text{ için } \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) G(x, z) = 0;$$

(2) $x = z$ de $G(x, z)$ süreklidir;

$$(3) \ x = z \text{ de } \frac{dG}{dx} \text{ süreksizdir ve } \left. \frac{dG(x, z)}{dx} \right|_{x=z^+} - \left. \frac{dG(x, z)}{dx} \right|_{x=z^-} = 1;$$

(4) $G(x, z) = G(z, x)$;

(5) $G(a, z) = G(b, z) = G(x, a) = G(x, b) = 0$;

(6) $z \in \Omega$ kaynak noktasında $G(x, z)$ Green fonksiyonu tekildir. Böylece L bir diferansiyel operatör olduğundan $LG(x, z) = \delta(x, z)$ olur.

2.1.2. Adjoint operatörler

Ω üzerinde $Lu = 0$ $\partial\Omega$ sınırında $Bu = 0$ sınır değer probleminin $G(x, z)$ Green fonksiyonu aşağıdaki sistemi sağlar. $L^*G(x, z) = \delta(x, z)$ burada L^* adjoint operatör adını alır. Sınır üzerinde $B^*G(x, z) = 0$ dır. Burada B ve B^* lineer diferansiyel operatörlerdir ve L ve L^* mertebelerinden daha küçük mertebeye sahiptirler. $B^*G(x, z) = 0$ sınır koşulunda $Bu = 0$ sınır koşulunun adjoint-eş sınır koşuludur. Eğer $L = L^*$ şartı sağlanıyor ise L self adjoint operatör adını alır.

Tanım 2.1. : L lineer diferansiyel operatörü verilsin. O zaman L^* operatörü

$$\int_a^b vLudx = \left[M(u, v, u', v', x) \right]_a^b + \int_a^b uL^*vdx \quad (2.9)$$

sağlar. Burada $M(u, v, u', v', x)$ kısmi integrasyon kuralı ile elde edilen sınır terimlerini temsil eder. Basitlik için ikinci mertebeden diferansiyel operatörlerle ilgilenilecektir. Aşağıdaki problem Green fonksiyon kavramına açıklık getirecektir. $Lu = A(x)u'' + B(x)u' + C(x)u$ ve B_1 ve B_2 'in mertebeleri ≤ 1 olmak üzere

$$B_1u \Big|_{x=a} = 0 \text{ ve } B_2u \Big|_{x=b} = 0 \text{ için } (a, b) \text{de } Lu = f(x)$$

şeklinde dir. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_a^b vLudx = \left[A(x)vu' - (A(x)v)'u + B(x)vu \right]_a^b + \int_a^b uL^*vdx,$$

ve $L^*v = A(x)v'' + [2A'(x) - B(x)]v' + [A''(x) - B'(x) + C(x)]v$ dir. Eğer v 'nin $B_1^*v \Big|_{x=a} = 0$ ve $B_2^*v \Big|_{x=b} = 0$ sınır koşullarını sağlaması istenirse burada B_1^* ve B_2^* , $\left[A(x)vu' - (A(x)v)' + B(x)vu \right]_a^b = 0$ olacak tarzda seçilirler ve burada

$B_1^* v \Big|_{x=a} = 0$ ve $B_2^* v \Big|_{x=b} = 0$ sınır koşulları önceki sınır koşullarının adjoint sınır koşulları olurlar. Bundan sonra aşağıdaki problem ele alınsın.

$$B_1^* v \Big|_{x=a} = 0 \text{ ve } B_2^* v \Big|_{x=b} = 0 \text{ için } (a, b) \text{ de } L^* v = \delta(x - x')$$

$G(x, x')$ bunun çözümü ise v 'yi $G(x, x')$ yerine koyulursa denklem (2.16) aşağıdaki hale dönüşür

$$\int_a^b G(x, x') L u dx = \int_a^b u L^* G(x, x') dx = \int_a^b u \delta(x - x') dx = u(x').$$

(a, b) de $Lu = f(x)$ olduğundan yukarıdaki ifade

$$\int_a^b G(x, x') f(x) dx = u(x') \quad (2.10)$$

olur. x' keyfi bir nokta olduğundan x ile x' 'nin yerleri değiştirilirse

$$u(x) = \int_a^b G(x', x) f(x') dx' \quad (2.11)$$

elde edilir. Şimdi ikinci mertebeden kısmi diferansiyel operatörü içinde aynı şeyler yapılsın. L bu operatörü temsil etsin. $u(x)$ ve $v(x)$ C^2 fonksiyonları olsun. Kısmi integrasyonla aşağıdaki denklem elde edilir

$$\iiint_{\Omega} v(x) L u(x) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} M(u, v) dS + \iiint_{\Omega} u(x) L^* v(x) d\Omega. \quad (2.12)$$

Burada $M(u, v)$ birinci mertebeden diferansiyel operatördür. $L^* = L$ şartı sağlanıyor ise aşağıdaki problem ele alınsın.

$$\Omega \text{ da } Lu = f(x) \text{ ve } \partial\Omega \text{ da } Bu = 0$$

Burada B birinci mertebeden lineer diferansiyel operatördür. Bu problemin çözümünü bulmak için aşağıdaki problem çözülsün.

$$\Omega \text{ da } L^*v = \delta(x, x') \text{ ve } \partial\Omega \text{ da } B^*v = 0 \quad (2.13)$$

Burada B^* , $M(u, v) = 0$ olacak şekilde lineer diferansiyel operatördür. $v(x, x')$ çözümü $G(x, x')$ ile gösterilir ve (2.13)'ün Green fonksiyonu adını alır. (2.11) kullanılarak

$$\iiint_{\Omega} G(x, x')Lu(x)d\Omega = \iint_{\partial\Omega} M(u, G)dS + \iiint_{\Omega} u(x)L^*G(x, x^*)d\Omega \quad (2.14)$$

yazılır. Buda

$$\iiint_{\Omega} G(x, x')f(x)d\Omega = \iiint_{\Omega} u(x)\delta(x - x')d\Omega = u(x')$$

denklemini verir. x' keyfi olduğundan x ile x' yer değiştirilirse

$$u(x) = \iiint_{\Omega} G(x', x)f(x')d\Omega$$

elde edilir. Eğer u üzerindeki sınır koşulları homojen değilse (2.14)'den çözüm bulunur.

Teorem 2.2. : Self adjoint operatörler için x ve x' argümanlarına göre Green fonksiyonu simetriktir. Yani $G(x, x') = G(x', x)$ dir.

İspat : $LG(x, y) = \delta(x, y)$ ve $LG(x, z) = \delta(x, z)$, birinci denklem $G(x, z)$ ve ikinci denklem $G(x, y)$ ile çarpılıp birbirinden çıkartılırsa

$$G(x, z)LG(x, y) - G(x, y)LG(x, z) = \delta(x, y)G(x, z) - \delta(x, z)G(x, y) \quad (2.15)$$

elde edilir. Burada operatör self adjoint olduğundan

$$\iiint_{\Omega} G(x, z) LG(x, y) d\Omega = \iiint_{\Omega} G(x, y) LG(x, z) d\Omega,$$

(2.15)'in sınır terimleri sıfırlanır. Buna göre

$$0 = \iiint_{\Omega} [\delta(x, y)G(x, z) - \delta(x, z)G(x, y)] d\Omega = G(y, z) - G(z, y)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. \square

2.2. Eliptik Denklemlerin Green Fonksiyonları

Bu kısımda Laplace ve Helmutz operatörlerinin ve bunların Green fonksiyonlarının oluşturulması incelenecektir. Genellikle Green fonksiyonu orijindeki kaynağa göre -1 etkisinde hesaplanır. Eğer bu kaynak noktası $x' \neq 0$ ise x yerine $x - x'$ yerleştirilir ve Green fonksiyonu $G(x - x') = G(x; x')$ olarak gösterilir.

2.2.1. Laplace operatörü için Green fonksiyonu

$\nabla^2 u(x) = \delta(x)$ ve homojen sınır koşullarıyla bu operatörün Green fonksiyonu bulunacaktır. Bu birkaç farklı metotla hesaplanabilir. Şimdi sırasıyla bu metotlar incelensin.

2.2.1.1. Doğrudan metot

Kaynak noktası x' 'nin orijin olduğu kabul edilsin. $G(x) = G(x; 0)$ için R^3 de Laplacian operatörü

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (2.16)$$

denklemini sağlar. Problem radyal simetrik olduğundan küresel koordinatlara geçilirse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\delta(\rho)}{4\pi\rho^2}$$

elde edilir. Her iki taraf ρ^2 ile çarpılırsa

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = \frac{\delta(\rho)}{4\pi}$$

elde edilir. 0 dan ρ ya kadar her iki taraf integre edilirse

$$\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi} \text{ ve ya } u = -\frac{1}{4\pi\rho}$$

bulunur. Burada integrasyon sabiti sıfır alınmıştır ve $\rho \rightarrow \infty$ da u 'un sıfır olması sağlanmıştır. Bu halde Green fonksiyonu

$$G(x) = -\frac{1}{4\pi\rho} = -\frac{1}{4\pi|x|} \quad (2.17)$$

şeklindedir. x' keyfi tekil nokta ise Green fonksiyonu

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi|x - x'|} \quad (2.18)$$

şeklinde yazılır. R^2 de problemin çözümü için polar koordinatlar kullanılır ve

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

ifadesi elde edilir. Her iki taraf r ile çarpılıp 0 dan r 'ye integre edilirse $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r}$ elde edilir. Buda

$$u = \frac{1}{2\pi} \log r + B$$

denklemini verir. $r \rightarrow \infty$ da sıfırlanması isteğiyle normalize edilemez. Onun yerine $r = 1$ de $u = 0$ ki buda $B = 0$ yapacak şekilde normalize edilsin. Böylece Green fonksiyonu

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \log r = \frac{1}{2\pi} \log|x| \quad (2.19)$$

olur ve x' keyfi tekil noktası için

$$G(x - x') = \frac{1}{2\pi} \log r_1 = \frac{1}{2\pi} \log|x - x'| \quad (2.20)$$

olur.

2.2.1.2. Fiziksel kavramlar kullanılarak çözüm

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - x') dx = \begin{cases} f(x') & x' \in \Omega \\ 0 & x' \notin \Omega \end{cases}$$

özelliği kullanılarak (2.16) denklemi

$$\iiint_{\Omega} \nabla^2 G(x) dV = \iiint_{S_{\varepsilon}} \delta(x) dV = 1 \quad (2.21)$$

denklemini verir. Burada S_{ε} orijin merkezli ε yarıçaplı küredir. ∇^2 operatörü koordinat eksenlerinin rotasyonu altında invariant olduğundan çözüm $\rho = |x|$ 'e

bağlı olarak hesaplınsın. $\rho > 0$ için $G(\rho)$, $\nabla^2 G = 0$ homojen denklemini sağlar ve küresel koordinatlarda

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0$$

olur. Bu denklemin çözümü $G(\rho) = A/\rho + B$ olur. Sonsuzda sıfır olma şartıyla $B = 0$ alınır. Böylece $G(\rho) = A/\rho$ olur. A 'yı belirlemek içinde $x = 0$ da kaynağın etkisi -1 olarak kullanılsın. (2.21)'i kullanarak ve ε yarıçaplı yuvarın üzerinden geçen akıyı göz önüne alarak

$$- \iint_{\partial S_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \rho} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{A}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \sin\phi d\phi d\theta = 4\pi A = -1 \quad (2.22)$$

bulunur. Burada ∂S_ε , S_ε yuvarının yüzeyidir. Fiziksel olarak (2.22) yükün korunmasını temsil eder. Yani elektrik akısı alanı $4\pi\varepsilon^2$, ∂S_ε kapalı yüzeyinden geçen miktar S_ε 'nin iç kısmındaki yüke eşittir. Bunu kullanarak $A = -\frac{1}{4\pi}$ bulunur. Böylece üç boyutlu Laplace operatörü için Green fonksiyonu

$$G(x) = -\frac{1}{4\pi\rho} = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

olur. R^2 de

$$r \neq 0 \text{ için } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \text{ ve } r = |x| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

bulunur. Çözüm $G(r) = A \ln r + B$ dir. A 'yı bulmak içinde orijin merkezli ε yarıçaplı C_ε çemberi boyunca akı göz önüne alınırsa

$$- \int_{C_\varepsilon} \left[\frac{\partial G}{\partial r} \right]_{r=\varepsilon} ds = -2\pi A = -1$$

elde edilir. Buradan $A = \frac{1}{2\pi}$ bulunur. B de normalize koşulundan önceki gibi sıfır bulunur.

2.2.1.3. Görüntü metodu

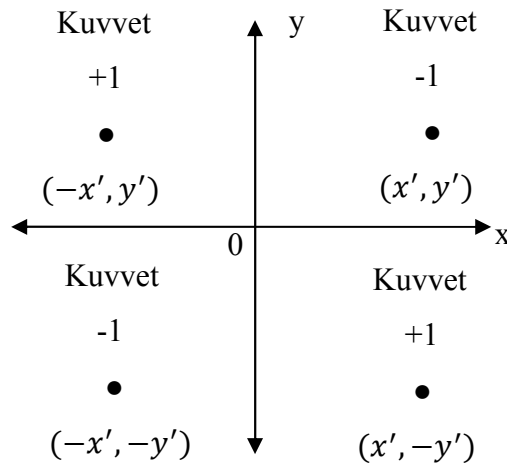
$G(x; x') = G(x, y; x', y')$ Green fonksiyonu Γ kapalı eğrisiyle sınırlı Ω bölgesinde homojen sınır koşullarıyla bulma problemi aşağıdaki elektrostatik potansiyel bulma problemine denktir. (x', y') noktasındaki noktasal bir yük Γ sınırının içerisindeki topraklanmış iletken olmak üzere elektrostatik potansiyel bulma problemi ile aynıdır. Örnek olarak Ω bölgesi $y > 0$ yarı düzlemi olsun. (x', y') noktasında -1 etkiye sahip noktasal yük ile verilen Green fonksiyonu buna eşit fakat zıt işaretli ve $+1$ etkili $(x', -y')$ simetrik noktası kullanılarak Green fonksiyonu yarı uzayda bulunmaya çalışılır (Bkz. Şekil 2.1). x ekseninde $G = 0$ dir. $r \rightarrow \infty$ giderken $G \rightarrow 0$ gider. Burada $r = |x - x'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ dir. Buna göre Green fonksiyonu

$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(x - x')^2 + (y + y')^2} \right\} \quad (2.23)$$

olur. Tüm (x, y) düzleminde yüklerin cebirsel toplamı sıfırdır. Böylece $r \rightarrow \infty$ giderken $G \rightarrow 0$ mümkündür. Çünkü herhangi sıfır olmayan yük Green fonksiyonunu $\ln r$ gibi davranır. Bunun manası eğer yarı düzlemde ($y > 0$ için) $G_y = 0$ 'ın sınır üzerinde ve $r \rightarrow \infty$ giderken $G \rightarrow 0$, koşullarıyla bulunamayacağı anlamına gelir. Fakat $x > 0, y > 0$ düzleminde, $y = 0$ da $G = 0$, $x = 0$ da $G_y = 0$ koşullarıyla Green fonksiyonları bulunabilir. Burada Şekil 2.1'e bakılırsa $(x', -y')$ ve $(-x', y')$ de yük etkileri $+1$, (x', y') ve $(-x', -y')$ de yük etkileri -1 dir. Bu halde Green fonksiyonu

$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ \frac{[(x - x')^2 + (y - y')^2][(x + x')^2 + (y + y')^2]}{[(x - x')^2 + (y + y')^2][(x + x')^2 + (y - y')^2]} \right\} \quad (2.24)$$

olur.



Şekil 2.1. Green fonksiyonunun yarı düzlemde bulunuşu

2.2.1.4. Seri açılımı metodu

$R = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ dörtgeninde $\nabla^2 u = 0$ denklemi için Green fonksiyonu bulunmaya çalışılırsa $G(x, y; x', y')$ Green fonksiyonu

$$\nabla^2 G(x, y; x', y') = \delta(x - x')\delta(y - y'), \quad (2.25)$$

denklemini sağlar ve

$$G(0, y; x', y') = G(a, y; x', y') = G(x, 0; x', y') = G(x, b; x', y') = 0, \quad (2.26)$$

sınır koşullarıdır. $G(x, y; x', y')$ ve $\delta(x - x')\delta(y - y')$ için çift katlı Fourier seri açılımları

$$G(x, y; x', y') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.27)$$

ve

$$\delta(x - x')\delta(y - y') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.28)$$

şeklindedir. (2.26) denklemini sağlaması koşulu ile A_{mn} ve B_{mn} Fourier katsayıları

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y'}{b}$$

olarak bulunur. (2.27) ve (2.28) denklemleri (2.25) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & = \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$A_{mn} = - \frac{4ab}{m^2\pi^2 b^2 + n^2\pi^2 a^2} \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y'}{b}$$

ve böylece Green fonksiyonu

$$G(x, y; x', y') = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4ab}{m^2\pi^2 b^2 + n^2\pi^2 a^2} \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.29)$$

olur. D bölgesinde $\nabla^2 u = 0$ şartını sağlayan $u(x, y) \in C^2(D)$ fonksiyonlarına harmonik fonksiyon denir. Harmonik fonksiyonlar maksimum ve minimum değerlerini sınırda alırlar ve ortalama değer teoremini sağlarlar.

2.2.2. Helmholtz operatörü için Green fonksiyonları

$k > 0$ reel sayı olmak üzere $(\nabla^2 + k^2)$ Helmholtz operatörüdür ve bu operatörün Green fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$(\nabla^2 + k^2)G(x - x') = \delta(x - x') \quad (2.30)$$

Örnek 2.1. : $(\nabla^2 + k^2)$ için R^2 'de çözüm

$$(\nabla^2 + k^2)u = \delta(x)\delta(y)$$

şekindedir. Sağ taraf orijin noktası hariç sıfırdır ve birim etkide negatif kaynağa sahiptir ve bunun orijindeki tekil çözümü

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n} ds = -1 \quad (2.31)$$

ifadesinden bulunur. Burada r orijinden olan uzaklıktır. Çözüm orijine göre simetrik olduğundan sadece r 'ye bağlıdır. Buna göre $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ denklemi

$$r \neq 0 \text{ için } \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + k^2 G = 0$$

şeklini alır. $G(r) = AH_0^{(1)}(kr) + BH_0^{(2)}(kr)$ çözümdür. Burada $H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr)$ ve $H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - iY_0(kr)$ birinci ve ikinci çeşit Hankel fonksiyonlarıdır. (2.31) koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n} ds &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial r} \{AH_0^{(1)}(kr) + BH_0^{(2)}(kr)\} \right]_{r=\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\varepsilon \left[k\{(A+B)J_1(kr) + (A-B)iY_1(kr)\} \right]_{r=\varepsilon} \\ &= 2\pi \left(-\frac{2i}{\pi} \right) (A-B) = -1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

bulunur ve $A - B = -i/4$ verir. $(A + B)$ katsayısı sıfır olduğundan bu değerler bulunabilir. Geleneksel olarak $B = 0$ alınır. Böylece Green fonksiyonu

$$G(r) = -\frac{iH_0^{(1)}(kr)}{4}$$

olur. R^3 de Helmholtz operatörü küresel simetrik olmalıdır. Küresel koordinatlarda denklem

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dG}{d\rho} \right) + k^2 G = \frac{\delta(\rho)}{4\pi\rho^2} \quad (2.33)$$

haline gelir. $G = w/\rho$ yazarsak (2.33) denklemi

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + k^2 w = \frac{\delta(\rho)}{4\pi\rho} \quad (2.34)$$

haline gelir. Buda sinüs Fourier transformasyonu uygulanırsa

$$\alpha c_0 + (k^2 - \alpha^2) \tilde{w}_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\delta(\rho)}{4\pi\rho} \sin(\alpha\rho) d\rho = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{4\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha\rho)}{\rho} = \frac{\alpha}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

elde edilir ve burada

$$c_0 \sqrt{\pi} = \sqrt{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} w$$

dır. Böylece

$$\tilde{w}_s = \left(c_0 - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2}$$

olur. Ters transformasyonu alınarak $c_0 = 0$ alınırsa $w = -e^{-ik\rho}/(4\pi)$ bulunur. Böylece

$$G(\rho) = -\frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho} \quad (2.35)$$

elde edilir. Burada Helmholtz operatörünün Green fonksiyonu simetriktir.

2.3. Parabolik Denklemlerin Green Fonksiyonları

Parabolik denklemler için de Green fonksiyonu bulunabilir. $\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operatörü R^1 de $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ bölgesinde verilsin. Bu operatör self adjoint değildir. Fakat Laplace dönüşümü alındığında self adjoint olur. $G(x, x'; t, t')$ Green fonksiyonu

$$\frac{\partial G}{\partial t} - k \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x - x')\delta(t - t') \quad (2.36)$$

$$G(x, x'; 0, t') = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x, x'; t, t') = 0 \quad (2.37)$$

denklemlerini sağlar. Laplace transformasyonu (2.36)'ya uygulanırsa

$$s\bar{G} - k \frac{d^2 \bar{G}}{dx^2} = \delta(x - x')e^{-st'}$$

olur ve burada sınır koşulu

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{G}(x, x'; s, t') = 0 \quad (2.38)$$

x' deki süreksizlik koşulu

$$\frac{d\bar{G}(x'_+, x'; s, t')}{dx} - \frac{d\bar{G}(x'_-, x'; s, t')}{dx} = -\frac{1}{k}e^{-st'} \quad (2.39)$$

olur. Tamamlayıcı fonksiyon ise

$$\bar{G}_c = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}, \quad \alpha = \sqrt{s/k} \quad (2.40)$$

şeklindedir. Özel çözüm G_p ise parametrelerin değişimine göre aşağıdaki şekilde bulunur.

$$G_p = ue^{\alpha x} + ve^{-\alpha x}$$

Burada u ve v aşağıdaki şartları sağlar.

$$u'e^{\alpha x} + v'e^{-\alpha x} = 0 \quad (2.41)$$

$$\alpha(u'e^{\alpha x} - v'e^{-\alpha x}) = -\frac{1}{k}e^{-st'}\delta(x - x') \quad (2.42)$$

u ve v , x' 'e göre türevleri göstermektedir. Yukarıdaki denklemler çözülerek

$$u' = -\frac{1}{2k\alpha}e^{-\alpha x}e^{-st'}\delta(x - x'), \quad v' = \frac{1}{2k\alpha}e^{\alpha x}e^{-st'}\delta(x - x') \quad (2.43)$$

bulunur. Buradan da

$$u = -\frac{H(x - x')}{2k\alpha}e^{-\alpha x' - st'}, \quad v = \frac{H(x - x')}{2k\alpha}e^{\alpha x' - st'}$$

elde edilir. Buna göre (2.40) ve (2.43)'ü birleştirilirse

$$\bar{G}(x, x'; s, t') = \begin{cases} A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x} & x < x' \text{ için,} \\ A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x} + \frac{H(x - x')}{2k\alpha} [e^{-\alpha(x-x')} - e^{\alpha(x-x')}] e^{-st'} & x > x' \text{ için} \end{cases} \quad (2.44)$$

elde edilir. $x = x'$ deki \bar{G} 'nin sürekliliği, sınır koşulu ve (2.39) sıçrama şartı kullanılırsa katsayılar bulunur. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{G} = 0$ ifadesi $B_1 = 0$ olmasını gerektirir. Süreklilik ise

$$A_1 e^{\alpha x'} = A_2 e^{\alpha x'} + B_2 e^{-\alpha x'} \quad (2.45)$$

şartını verir. $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{G} = 0$ olması şartı

$$A_2 + \frac{1}{2k\alpha} e^{-\alpha x' - st'} = 0 \quad (2.46)$$

verir. (2.41) koşulundan

$$A_2 e^{\alpha x'} + B_2 e^{-\alpha x'} - A_1 e^{\alpha x'} = \frac{1}{k\alpha} e^{-st'} \quad (2.47)$$

bulunur. Son üç denklem çözülerek

$$A_1 = -\frac{1}{2k\alpha} e^{-\alpha x' - st'} = A_2, \quad B_2 = \frac{1}{k\alpha} e^{\alpha x' - st'}$$

bulunur. A_1, A_2, B_1 ve B_2 (2.44) de yerine konulursa

$$\bar{G} = -\frac{1}{2k\alpha} e^{-\alpha|x-x'| - st'} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{s}} e^{r\sqrt{s/a} - st'}, \quad r = |x - x'|$$

elde edilir. Ters transformasyonu alınarak

$$G(x, x'; t, t') = \frac{H(t - t')}{2\sqrt{\pi k(t - t')}} e^{-(x-x')^2/(4a(t-t'))} \quad (2.48)$$

elde edilir. Bir başka metotta Fourier transformasyonu kullanmaktır. (2.36) daki Laplace transformu bölgesinde bu transformasyon uygulanırsa

$$s\bar{\bar{G}} + k\alpha^2 \bar{\bar{G}} = -\frac{1}{2\pi} e^{-st' + i\alpha x'}$$

bulunur. Burada \sim ve $-$ sırası ile Fourier ve Laplace transformasyonunu temsil eder. O zaman çözüm

$$\bar{\bar{G}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(s + k\alpha^2)} e^{-st' + i\alpha x'}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\tilde{G}(x, \alpha) = \frac{H(t - t')}{\sqrt{2\pi}} e^{-k\alpha^2(t-t') + i\alpha x'}$$

ve sonra ters Fourier dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$G(x, x'; t, t') = \frac{H(t - t')}{\sqrt{2\pi k(t - t')}} e^{-(x-x')^2 / (4k(t-t'))} \quad (2.49)$$

Örnek 2.2. : R^3 de $\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2$ operatörünün Green fonksiyonu bulmaya çalışılırsa $t = 0$ da tekilliğin olduğu kabul edilerek $G(x; t)$ Green fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$$\frac{\partial G}{\partial t} - k\nabla^2 G = \delta(x)\delta(t) \quad \text{ve } t \leq 0 \text{ için } G(x; t) \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.50)$$

Uzay koordinatlarına göre üç defa Fourier dönüşümü ve t 'ye göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s\tilde{\tilde{G}}(\alpha, \beta, \gamma, s) - k(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\tilde{\tilde{G}}(\alpha, \beta, \gamma, s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

elde edilir. Burada α, β, γ değişkenleri x, y ve z 'nin Fourier dönüşüm değerleridir. Böylece

$$\tilde{\tilde{G}}(\alpha, \beta, \gamma, s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}[s - k(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)]}$$

bulunur. Ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\tilde{\tilde{G}}(\alpha, \beta, \gamma, s) = \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-k(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t}$$

bulunur. Üç defa ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$G(x; t) = \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}(2kt)^{3/2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4kt)} = \frac{H(t)}{8(\pi kt)^{3/2}} e^{-|x|^2/(4kt)}$$

bulunur. x' ve t' 'ye göre öteleme yapılırsa Green fonksiyonu

$$G(x - x'; t - t') = \frac{H(t - t')}{8[\pi k(t - t')]^{3/2}} e^{-|x-x'|^2/(4k(t-t'))} \quad (2.51)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 2.3.(Schrödinger Denklemi) : Homojen olmayan Fourier ısı denklemi

$$\left(\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) u(x, t) = f(x, t) \quad (2.52)$$

olsun. Bu iki şekilde yorumlanabilir:

(i) $k > 0$ reel sayı ise ortamın termal geçişken oluşuna ve özel ısısına bağlı olarak $u(x, t)$ sıcaklık dağılımını temsil eder. $f(x, t)$ kaynak fonksiyonu ise yerel ısı üretimini ve eksi tüketimini temsil etmektedir.

(ii) $u(x, t)$ bir partikül yoğunluğunu temsil ederse k da difüzyon katsayısı olsun.

Eğer k tam sanal ise $k = \frac{i\hbar}{2m}$ ve m burada kuantum parçasının kütesidir.

$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ Planck sabitidir. O zaman bu denklem Schrödinger denklemini oluşturur

$$i\hbar \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u(x, t) = f(x, t).$$

$K = \hbar/(2im)$ alındığında R^1 de (2.51) deki Green fonksiyonu

$$G(x, t) = H(t) \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{m}{x\hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)}$$

şeklinde verilir.

2.4. Hiperbolik Denklemlerin Green Fonksiyonları

Dalga operatörü R^n de $\square_c = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2$ dir. O zaman Green fonksiyonu $G_n(x, t)$

$$\square_c G_n(x, t) = \delta(x, t) \quad (2.53)$$

denklemini sağlar. x 'e göre ∇^2 Laplacian operatörüdür ve $t > 0$ dir. R^1, R^2 ve R^3 de Green fonksiyonları aşağıdaki örneklerde çıkarılmıştır.

Örnek 2.4. : R^1 de $G_1(x; t)$ Green fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t)$$

denklemini sağlar ve burada $t > 0$ için $G_1(x; t) \rightarrow 0$ ve $|x| \rightarrow \infty$ dur. Laplace ve Fourier dönüşümleri ardı ardına uygulanırsa

$$(s^2 + \alpha^2 c^2) \bar{\bar{G}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

veya

$$\bar{\bar{G}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(s^2 + \alpha^2 c^2)}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\tilde{G}_1 = \frac{1}{\alpha c \sqrt{2\pi}} \sin \alpha ct$$

bulunur. Ters Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$G_1(x; t) = \frac{1}{2c} [H(x + ct) - H(x - ct)]$$

elde edilir. Fakat önce ters Fourier sonra ters Laplace dönüşümü uygulansaydı

$$G_1(x, t) = \frac{1}{2c} H(t - |x|/c) = \frac{1}{2c} H(ct - |x|)$$

elde edilirdi. Bu çözümler denktirler. Eğer kaynak noktası (x', t') olsa çözüm

$$G_1(x, t; x', t') = \frac{1}{2c} H[c(t - t') - (|x - x'|)] \quad (2.54)$$

bulunur.

Örnek 2.5. : R^2 de Green fonksiyonu G_2

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} \right) = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t')$$

denklemini sağlar. Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^2 \bar{G}_2 - c^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{G}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{G}_2}{\partial y^2} \right) = e^{-st'} \delta(x - x') \delta(y - y')$$

olur. Eksensel simetri kullanılarak polar koordinatlarda $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ ile bu denklem

$$s^2 \bar{G}_2 - c^2 \left(\frac{d^2 \bar{G}_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{G}_2}{\partial r} \right) = \frac{e^{-st'} \delta(r)}{2\pi r} \quad (2.55)$$

halini alır. Sağ taraftaki terim kuvvet terimi $r = 0$ da $e^{-st'}$ büyüklüğünde bir kaynağı temsil eder. Bu denklemin homojen kısmının çözümü $AI_0(kr) + BK_0(kr)$ olur. Burada I_0 ve K_0 birinci ve ikinci çeşit modifiye Bessel fonksiyonlarıdır. $r \rightarrow \infty, I_0 \rightarrow \infty$ olduğundan $A = 0$ olmalıdır. B 'yi elde etmek için ise ε yarıçaplı C_ε çemberini akısını eşitleyerek elde edilir. Böylece

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial C_\varepsilon} B \frac{\partial K_0(sr/c)}{\partial r} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \varepsilon B(s/c) K_1(s\varepsilon/c) = 2\pi B = e^{-st'}$$

olur. Burada

$$B = \frac{e^{-st'}}{2\pi} \text{ ve } \bar{G}_2(r, s; t') = \frac{e^{-st'}}{2\pi} K_0(sr/c)$$

dir. Buradan

$$\mathcal{L}^{-1}\{K_0(\alpha s)\} = \frac{H(t - \alpha)}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}}$$

elde edilir. Ters transformasyonla

$$G_2(r, t; t') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi c \sqrt{c^2(t-t')^2 - r^2}} & r < c(t-t') \text{ için} \\ 0 & r > c(t-t') \text{ için} \end{cases} \quad (2.56)$$

$$= -\frac{H(c(t-t') - r)}{2\pi c \sqrt{c^2(t-t')^2 - r^2}}$$

bulunur.

Örnek 2.6 : R^3 de Green fonksiyonu G_3

$$\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 G_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial z^2} \right) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\delta(t - t')$$

şartını sağlar. Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^2 \bar{G}_3 - c^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{G}_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{G}_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{G}_3}{\partial z^2} \right) = e^{-st'} \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

elde edilir. Eksensel simetri kullanılarak $\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ ile

$$s^2 \bar{G}_3 - c^2 \left(\frac{d^2 \bar{G}_3}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \bar{G}_3}{\partial \rho} \right) = \frac{e^{-st'} \delta(\rho)}{4\pi\rho^2} \quad (2.57)$$

bulunur. $\rho \bar{G}_3 = V$ denilirse

$$s^2 \bar{V}_3 - c^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \rho^2} = \frac{e^{-st'} \delta(\rho)}{4\pi\rho}, \quad \rho = |x - x'|$$

elde edilir. Bunun çözümü ise $\bar{V} = Ae^{s\rho/c} + Be^{-s\rho/c}$ dir. $e^{s\rho/c}$ ifadesi $\rho \rightarrow \infty$ iken $A = 0$ değerini verir. Böylece $\bar{G}_3 = Be^{-(s\rho/c)}/\rho$ olur. B 'yi bulmak için ε yarıçaplı S_ε küresi üzerindeki akı $\rho = 0$ noktasında denklem $e^{-st'}$ 'ye eşitlenerek $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial S_\varepsilon} B \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{-s\rho/c}}{\rho} \right) dS = e^{-st'}$$

veya

$$-4\pi B \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \left[-\frac{s e^{-s\rho/c}}{c \rho} - \frac{e^{-s\rho/c}}{\rho^2} \right]_{\rho=\varepsilon} = e^{-st'}$$

elde edilir.

Burada $4\pi B = e^{-st'}$ veya $\bar{G}_3 = \frac{e^{-st' - s\rho/c}}{4\pi\rho}$ şeklinde verilir. Ters transformasyonla

$$G_3(\rho; t, t') = \frac{1}{4\pi\rho} \delta\left(t - t' - \frac{\rho}{c}\right)$$

veya

$$\begin{aligned} G_3(x, y, z, t; x', y', z', t') \\ = \frac{1}{4\pi\rho} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

elde edilir.

BÖLÜM 3. GREEN FONKSİYONLARININ UYGULAMALARI

3.1. Dirichlet Problemleri

x_s sınır üzerinde keyfi bir nokta olmak üzere Ω içinde $\nabla^2 u = f(x)$ ve $\partial\Omega$ üzerinde $u = g(x_s)$ olsun. Verilenler ile sınır değer probleminin çözümü

$$u(x') = \iiint_{\Omega} f(x)G(x, x') d\Omega + \iint_{\partial\Omega} g(x_s) \frac{\partial G(x, x')}{\partial n} dS \quad (3.1)$$

olur.

İspat : x' , Ω içinde keyfi bir nokta belirtmek üzere (4.7) denklemindeki Green özdeşliğinden

$$\iiint_{\Omega} (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

elde edilir. Eğer v ile $G(x, x')$ yerine yazılırsa

$$\iiint_{\Omega} (u \nabla^2 G(x, x') - G(x, x') \nabla^2 u) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G(x, x')}{\partial n} - G(x, x') \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

olur ve buradan

$$\iiint_{\Omega} (u \delta(x, x') - f(x) G(x, x')) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} g(x_s) \frac{\partial G(x, x')}{\partial n} dS$$

elde edilir.

□

3.2. Neumann Problemi

x_s sınır üzerinde keyfi bir nokta olmak üzere Ω içinde $\nabla^2 u = F(x)$ ve $\partial\Omega$ üzerinde $\frac{\partial u}{\partial n} = P(x_s)$ için çözüm bulunsun. Problemin çözümü tüm durumlar için bulunamayabilir ama ∇u da Diverjans teoremi kullanılırsa

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u d\Omega = \iiint_{\Omega} \nabla^2 u d\Omega = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

elde edilir ve buradan

$$\iiint_{\Omega} F(x) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} P(x_s) dS \quad (3.2)$$

ifadesi bulunur. Bu uyumluluk koşulu Neumann probleminin çözümünün varlığı için gerekli bir koşuldur. Homojen denklemin çözümü yani $F(x)$ ve $P(x)$ sıfırda $u = C = (\text{sabit})$ daima sıfır olmayan çözümdür. Böylece keyfi bir sabit Neumann probleminin çözümüne daima eklenebilir ve bu hala çözüm olur. Green fonksiyonu $F(x) = \delta(x - x')$ ve $P(x_s) = 0$ ise (3.2) sağlanmaz. $F(x) = \delta(x - x') - 1/V$ ise burada V , Ω 'nın hacmidir ve (3.2) sağlanır. Bu modifiye Green fonksiyonuna Neumann problemi denir ve

$$\nabla^2 G(x, x') = \delta(x - x') - \frac{1}{V}, \quad \frac{\partial G(x, x')}{\partial n} = 0$$

şartını sağlar. Önceki işlemler gibi yapılırsa (3.1) şu hale gelir

$$\iiint_{\Omega} \left[u \left\{ \delta(x - x') - \frac{1}{V} \right\} - F(x)G(x, x') \right] d\Omega = \iint_{\partial\Omega} (u(x_s)V - P(x_s)G(x, x')) dS,$$

veya

$$u(x') = \iiint_{\Omega} \left[\frac{u}{V} + F(x)G(x, x') \right] d\Omega - \iint_{\partial\Omega} P(x_s)G(x, x') dS \quad (3.3)$$

olur. Burada

$$\iiint_{\Omega} \frac{u}{V} d\Omega$$

ve u 'nun Ω içindeki ortalama değeri bir sabittir. Bu sabiti Neumann problemine ilave edilirse (3.3) şöyle yazılabilir.

$$u(x') = \iiint_{\Omega} [F(x)G(x, x')] d\Omega - \iint_{\partial\Omega} P(x_s)G(x, x') dS + C$$

Bu çözüm uyumluluk şartı sağlandığı sürece doğrudur. Bu problemin bir boyutlu hali

$$y'' = f(x), \quad y'(0) = \alpha, \quad y'(l) = \beta$$

şeklindedir. Eğer bu denklemin 0 dan l ye integrali alınırsa

$$y' \Big|_0^l = \int_0^l f(x) dx$$

veya

$$\beta - \alpha = \int_0^l f(x) dx \quad (3.4)$$

olur. Bir boyutlu Neumann problemi daima çözüme sahip değildir. Ancak (3.4) şartı sağlanırsa çözüm vardır.

3.3. Robin Problemi

$\nabla^2 u = f(x)$ 'in Ω içinde çözüm bulunsun ve $\partial\Omega$ üzerinde $u + \alpha \frac{\partial u}{\partial n} = g(x_s)$ çözümü sağlansın. Robin problemi için verilen çözüm

$$\begin{aligned} u(x') &= \iiint_{\Omega} f(x) G(x, x') d\Omega - \frac{1}{\alpha} \iint_{\partial\Omega} g(x_s) G(x, x') dS \\ &= \iiint_{\Omega} f(x) G(x, x') d\Omega + \iint_{\partial\Omega} g(x_s) \frac{\partial G(x, x')}{\partial n} dS \end{aligned}$$

olur. Bu durumda Green fonksiyonu aşağıdaki çözüme sahip olan fonksiyondur.

$$\Omega \text{ içinde } \nabla^2 G(x, x') = \delta(x - x') \text{ ve } \partial\Omega \text{ üzerinde } G(x, x') + \alpha \frac{\partial G(x, x')}{\partial n} = 0$$

3.4. Helmholtz Denkleminin Green Fonksiyon Cinsinden Çözümü

Aşağıdaki durumlar için Dirichlet problemi çözülsün.

$$\Omega \text{ içinde } (\nabla^2 + k^2)u(x) = F(x) \text{ ve } \partial\Omega \text{ üzerinde } u(x_s) = K(x_s) \quad (3.5)$$

Aşağıdaki koşullar ile Green fonksiyonu sağlansın.

$$\Omega \text{ içinde } (\nabla^2 + k^2)G(x, y) = \delta(x - y), \partial\Omega \text{ üzerinde } G(x_s, y) = 0 \quad (3.6)$$

Buradaki x_s $\partial\Omega$ sınırı üzerinde herhangi bir noktadır. (3.5) içindeki birinci denklem $G(x, y)$ ile ve (3.6) içindeki birinci denklem $u(x)$ ile çarpılıp bu ifadeler birbirinden çıkartılırsa

$$G(x, y)\nabla^2 u(x) - u(x)\nabla^2 G(x, y) = F(x)G(x, y) - u(x)\delta(x - y) \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) denkleminin her iki tarafı Ω 'ya göre integrali alınır ve (4.7) denklemindeki Green özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} [G(x, y)\nabla^2 u(x) - u(x)\nabla^2 G(x, y)] d\Omega \\ &= \iint_{\partial\Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \right) dS \\ &= \iiint_{\Omega} [F(x)G(x, y) - u(x)\delta(x - y)] d\Omega \\ &= \iiint_{\Omega} F(x)G(x, y) d\Omega - u(y) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$u(y) = \iiint_{\Omega} F(x)G(x, y) d\Omega + \iint_{\partial\Omega} K(x_s) \frac{\partial G(x_s, y)}{\partial n} dS \quad (3.8)$$

ve burada $G(x_s, y) = 0$, $u(x_s) = K(x_s)$ olduğundan çözüm bulunur. $F(x) = K(x_s) = 0$ ise sadece adi çözüm mevcuttur. Ama Ω sınırı üzerinde

$R : \{ 0 < x, y < a \}$ kare bölge ise $u = \phi(x, y) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$ denklemi $u = 0$ şartı ile $(\nabla^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2})u(x, y) = 0$ 'ın çözümüdür.

Teorem 3.1.: $u(x, y)$ 'nin bir çözümü

$$R \text{ içinde } (\nabla^2 + 2n^2\pi^2/a^2)u(x, y) = F(x, y) \text{ ve } \partial R \text{ üzerinde } u = 0 \quad (3.9)$$

şeklinde ise $\phi(x, y) = \frac{1}{2} \sin(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a)$ ve $F(x, y)$ koşulları ile

$$\iint_R F(x, y) \phi(x, y) dx dy = 0$$

denklemini sağlar.

İspat : (3.9)'un çözümü $u(x, y)$ olsun. (3.9)'un her iki tarafı $\phi(x, y)$ ile çarpılıp $(\nabla^2 + n^2\pi^2/a^2)\phi(x, y) = 0$ olduğu görülerek

$$\phi(x, y) \left(\nabla^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right) u(x, y) - u(x, y) \left(\nabla^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right) \phi(x, y) = \phi(x, y) F(x, y)$$

veya

$$\phi(x, y) \nabla^2 u(x, y) - u(x, y) \nabla^2 \phi(x, y) = \phi(x, y) F(x, y)$$

olur. Her iki tarafın R üzerinde integrali alınır ve sol tarafta (4.7) denklemindeki Green özdeşliği kullanılırsa

$$\int_{\partial R} \left[\phi(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} - u(x, y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right] ds = \iint_R \phi(x, y) F(x, y) dx dy$$

bulunur. ∂R üzerinde $u(x, y)$ ve $\phi(x, y)$ 'nin ikisi de sıfır olduğundan sol taraf sıfırdır ve açıkça çözüm tek değildir çünkü $u(x, y) + C\phi(x, y)$ çözümdür ve C herhangi bir keyfi sabittir. Neumann ve Robin sınır değer problemlerinin çözümüne benzer yol Laplace denkleminin çözümü içinde izlenebilir. \square

3.5. Hiperbolik ve ya Parabolik Denklemlerinin Çözümü

Green fonksiyonu cinsinden dalga denkleminin çözümü için

$$\Omega \text{ içinde } u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = f(x, t) \quad (3.10)$$

denklemini ele alalım. $u(x, 0) = 0 = u_t(x, 0)$ ve $\partial\Omega$ sınırı üzerinde $u(x, t) = 0$ olsun.

$G(x, t; x', t')$ Green fonksiyonu

$$\Omega \text{ içinde } G_{tt} - c^2 \nabla^2 G = \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (3.11)$$

şartını sağlamaktadır ve $G(x, x'; 0) = 0 = G_t(x, x'; 0)$ ve $\partial\Omega$ üzerinde $G(x, x'; t, t') = 0$ koşullarıyla (3.10) denklemini G ile ve (3.11) denklemini u ile çarpılıp birbirinden çıkartılırsa,

$$Gu_{tt} - c^2 G \nabla^2 u - uG_{tt} + c^2 u \nabla^2 G = Gf(x, t) - u\delta(x - x')\delta(t - t')$$

olur. 0 dan t' ye giderken t' ye göre integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_0^{t'} [(Gu_{tt} - uG_{tt}) + c^2(u\nabla^2 G - G\nabla^2 u)] dt \\ = \int_0^{t'} [Gf(x, t) - u\delta(x - x')\delta(t - t')] dt, \end{aligned}$$

ve buda

$$\begin{aligned} (Gu_t - uG_t) \Big|_0^{t'} - \int_0^{t'} [(G_t u_t - u_t G_t) + c^2(u\nabla^2 G - G\nabla^2 u)] dt \\ = \int_0^{t'} [Gf(x, t) - u\delta(x - x')\delta(t - t')] dt \end{aligned}$$

denklemini verir. $u(x, 0) = 0 = u_t(x, 0)$ ve $G(x, x'; 0) = G(x, x'; t', t') = 0 = G_t(x, x'; 0) = G_t(x, x'; t, t')$ koşulları kullanılırsa

$$c^2 \int_0^{t'} (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u) dt = \int_0^{t'} [Gf(x, t) - u(x, t')\delta(x - x')] dt$$

bulunur. Buda bölge üzerindeki integralle

$$c^2 \iiint_{\Omega} \int_0^{t'} (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dt d\Omega = \iiint_{\Omega} \int_0^{t'} G f(x, t) dt - \iiint_{\Omega} u(x, t') \delta(x - x') d\Omega$$

çıkar. (4.7) denklemindeki Green özdeşliğini kullanılırsa

$$c^2 \int_0^{t'} \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS dt = \int_0^{t'} \iiint_{\Omega} G f(x, t) d\Omega dt - u(x', t')$$

bulunur. Buradan $\partial\Omega$ sınırı üzerinde u ve G sıfır olduğundan

$$u(x', t') = \int_0^{t'} \iiint_{\Omega} G(x, x'; t, t') f(x, t) d\Omega dt$$

elde edilir. $G(x, x'; t, t')$ Green fonksiyonunun simetrikliğinden ve x yerine x' ve t yerine t' yazabileceğinden

$$u(x, t) = \int_0^{t'} \iiint_{\Omega} G(x, x'; t, t') f(x', t') d\Omega dt' \quad (3.12)$$

elde edilir. Eğer sınır koşulları genel olarak

$$\partial\Omega \text{ üzerinde } u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u(x, t) = g(x, t)$$

verilseydi çözüm

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^{t'} \iiint_{\Omega} G(x, x'; t, t') f(x', t') d\Omega dt \\ &+ \iiint_{\Omega} \left[\psi(x) G(x, x'; t, 0) - \phi(x) \frac{\partial G(x, x'; t, 0)}{\partial t'} \right] d\Omega \\ &+ \frac{c^2}{\alpha} \int_0^{t'} \iint_{\partial\Omega} G(x, x'; t, t') g(x', t') dS dt, \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \int_0^t \iiint_{\Omega} G(x, x'; t, t') f(x', t') d\Omega dt' \\
& + \iiint_{\Omega} \left[\psi(x) G(x, x'; t, 0) - \phi(x) \frac{\partial G(x, x'; t, 0)}{\partial t'} \right] d\Omega \\
& + \frac{c^2}{\beta} \int_0^{t'} \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, x'; t, t')}{\partial n} g(x', t') dS dt' \quad (3.13)
\end{aligned}$$

olurdu. Eğer denklem Ω içinde $u_t - k\nabla^2 u = f(x, t)$, $\partial\Omega$ üzerinde $u(x, 0) = \phi(x)$ şeklinde verilseydi $\alpha \frac{\partial u}{\partial n} \beta u(x, t) = g(x, t)$ koşulları ile Green fonksiyonu cinsinden çözüm

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \int_0^t \iiint_{\Omega} G(x, x'; t, t') f(x', t') d\Omega dt' + \iiint_{\Omega} \phi(x) G(x, x'; t, 0) d\Omega \\
& + \frac{k}{\alpha} \int_0^t \iint_{\partial\Omega} G(x, x'; t, t') g(x', t') dS dt',
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \int_0^t \iiint_{\Omega} G(x, x'; t, t') f(x', t') d\Omega dt' + \iiint_{\Omega} \psi(x) G(x, x'; t, 0) d\Omega \\
& - \frac{k}{\beta} \int_0^t \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, x'; t, t')}{\partial n} g(x', t') dS dt' \quad (3.14)
\end{aligned}$$

olurdu. Not edilsin ki tekil çözüm temel çözümle yani serbest uzay Green fonksiyonu ile aynıdır. Yani tüm uzayda geçerli Green fonksiyonu demektir. Öte yandan $L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \delta(x - x')\delta(t - t')$ çözümüne sadece Green fonksiyonu denir.

Örnek 3.1. : Ω $y > 0$ yarı düzlemi olsun. $y = 0$ sınırında $u = 0$ sınır koşulu ile Dirichlet problemi için Green fonksiyonu (2.23) de verilmiştir. $u(x, 0) = f(x)$ sınır koşulu ile

$$u(x', y') = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[\ln \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(x - x')^2 + (y + y')^2} \right]_{y=0} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{-4y'}{(x-x')^2 + y'^2} dx \\
&= \frac{y'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x-x')^2 + y'^2} dx
\end{aligned}$$

olur. Alternatif olarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, y > 0, u(x, 0) = f(x)$$

denkleminin Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} - \alpha^2 \tilde{u} = 0$$

elde edilir. $y \rightarrow \infty$ gittiğinde çözüm sınırlı kalacağından $\tilde{u} = Ae^{-|\alpha|y}$ bulunur. $y = 0$ da $\tilde{u}(\alpha, 0) = \tilde{f}(\alpha)$ ve $A = \tilde{f}(\alpha)$ olur. Buradan $\tilde{u} = \tilde{f}(\alpha)e^{-|\alpha|y}$ elde edilir. $e^{-|\alpha|y}$

fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2}$ olur. Convolution teoremi

kullanılarak

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\eta)}{(x-\eta)^2 + y^2} d\eta$$

elde edilir. Parabolik ve hiperbolik denklemler için Laplace transformasyonu sıkça kullanılan bir yöntemdir. Örneğin $[L\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \nabla^2]u = f(x, t)$ denklemini ele alalım. t 'ye göre Laplace transformasyonu alınırsa homojen sınır koşullarında

$$[L(s) - \nabla^2]\bar{u} = F(x, s). \quad (3.15)$$

elde edilir. Operatör self-adjoint olduğundan Green fonksiyonu aşağıdaki denklemin sağları.

$$[L(s) - \nabla^2]\bar{G} = e^{-st'} \delta(x - x') \quad (3.16)$$

(3.15) denklemini \bar{G} ile (3.16) denklemini \bar{u} ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılırsa

$$\bar{u}\nabla^2\bar{G} - \bar{G}\nabla^2\bar{u} = \bar{G}F(x, s) - \bar{u}e^{-st'} \delta(x - x'). \quad (3.17)$$

elde edilir. İki tarafı integre edip (4.7) denklemindeki Green özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} [\bar{u}\nabla^2\bar{G} - \bar{G}\nabla^2\bar{u}]d\Omega \\ = \iint_{\partial\Omega} \left(\bar{u} \frac{\partial\bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} \right) dS = \iiint_{\Omega} [\bar{G}F(x, s) - \bar{u}e^{-st'} \delta(x - x')]d\Omega, \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\bar{u} = e^{st'} \left[\iiint_{\Omega} \bar{G}F(x, s)d\Omega - \iint_{\partial\Omega} \left(\bar{u} \frac{\partial\bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} \right) dS \right] \quad (3.18)$$

bulunur. (3.18) denkleminde yüzey integralinin integrantı ya bilinen fonksiyonlardır veya sınırda sıfır olan fonksiyonlardır. $\bar{G} = 0$ Dirichlet problemi için \bar{u} da sınırda bellidir. Neumann problemi için $\partial\Omega$ üzerinde $\frac{\partial\bar{G}}{\partial n} = 0$ ve $\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}$ bilinmektedir. Böylece transformasyon bölgesinde çözüm bellidir. Ters dönüşümle esas çözüm bulunur. x_B sınır üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere Robin problemi sınır üzerinde $u + \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \phi(x_B, t)$ denklemini sağlar. Buna tekabül eden Green fonksiyonu $\phi(x_B, t)$ sıfırlanır. Böylece

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \left(\bar{u} \frac{\partial\bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} \right) dS &= \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial\bar{G}}{\partial n} \left(\bar{\phi}(x_B, s) - \lambda \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} \right) - \bar{G} \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} \right] dS \\ &= \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial\bar{G}}{\partial n} \left(\bar{\phi}(x_B, s) - \lambda \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} \right) + \lambda \frac{\partial\bar{G}}{\partial n} \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} \right] dS \\ &= \iint_{\partial\Omega} \bar{\phi}(x_B, s) \frac{\partial\bar{G}}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.19) denkleminin sağ tarafı bilinmektedir. Son çözüm ters Laplace transformasyonu kullanılarak bulunur.

Örnek 3.2. : Aşağıdaki sınır değer problemi çözümü için

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = e^{-|x|} \sin t, \quad u(x, 0), \quad u_t(x, 0) = e^{-|x|}$$

Laplace transformasyonu alınırsa

$$\bar{u}_{xx}(x, s) - \frac{s^2}{c^2} \bar{u}(x, s) = -\frac{2 + s^2}{c^2(1 + s^2)} e^{-|x|}$$

elde edilir. Bunun Green fonksiyonu

$$G(x, x'; s) = -\frac{c}{2s} e^{-s|x-x'|/c}$$

olur. Çözümde

$$\bar{u}(x, s) = \frac{2 + s^2}{2cs(1 + s^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x'| - s|x-x'|/c} dx'$$

şeklinde verilir. Buradan $x < 0$ ise

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, s) &= \frac{2 + s^2}{2cs(1 + s^2)} \left\{ \int_{-\infty}^x e^{-x' - s(x-x')/c} dx' \right. \\ &\quad \left. + \int_x^0 e^{x' + s(x-x')/c} dx' + \int_0^{\infty} e^{-x' + s(x-x')/c} dx' \right\} \\ &= \frac{2 + s^2}{s(1 + s^2)(s^2 - c^2)} [s e^x - c e^{sx/c}] \\ &= B \left(\frac{1}{s - c} - \frac{1}{s + c} \right) e^x - \frac{e^x}{(1 + c^2)(1 + s^2)} \\ &\quad + \left[\frac{2}{cs} - B \left(\frac{1}{s - c} + \frac{1}{s + c} \right) - \frac{cs}{(1 + c^2)(1 + s^2)} \right] e^{s|x|/c} \end{aligned}$$

olur ve buradan $B = \frac{2+c^2}{2c(1+c^2)}$ ve

$$u(x, t) = B(e^{ct+x} - e^{-ct+x}) - \frac{e^x \sin t}{1+c^2} \\ + H(ct+x) \left[\frac{2}{c} - B(e^{ct+x} + e^{-ct-x}) - \frac{c}{1+c^2} \cos(t-x/c) \right]$$

elde edilir. Eğer $x > 0$ ise

$$\bar{u}(x, s) = \frac{2+s^2}{2cs(1+s^2)} \left\{ \int_{-\infty}^x e^{x'-s(x-x')/c} dx' \right. \\ \left. + \int_x^0 e^{-x'-s(x-x')/c} dx' + \int_0^{\infty} e^{-x'+s(x-x')/c} dx' \right\} \\ = \frac{2+s^2}{s(1+s^2)} [se^{-x} - ce^{-sx/c}] \\ = B \left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s+c} \right) e^{-x} - \frac{e^{-x}}{(1+c^2)(1+s^2)} \\ + \left[\frac{2}{cs} - B \left(\frac{1}{s-c} + \frac{1}{s+c} \right) - \frac{cs}{(1+c^2)(1+s^2)} \right] e^{-sx/c}$$

olur. Böylece $x > 0$ için

$$u(x, t) = B(e^{ct-x} - e^{-ct-x}) - \frac{e^{-x} \sin t}{1+c^2} \\ + H(ct+x) \left[\frac{2}{c} - B(e^{ct-x} + e^{-ct+x}) - \frac{c}{1+c^2} \cos(t-x/c) \right]$$

bulunur.

BÖLÜM 4. GREEN ÖZDEŞLİKLERİ

Ω sonlu bir bölge Γ düzgün kapalı bir eğri w ve F skaler fonksiyonlar ve G de vektör değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Böylece

$$\text{Gradient teoremi: } \iint_{\Omega} \nabla F dx dy = \oint_{\Gamma} n F ds,$$

$$\text{Divergence teoremi: } \iint_{\Omega} \nabla \cdot G dx dy = \oint_{\Gamma} n \cdot G ds,$$

$$\text{Stokes teoremi: } \oint_{\Gamma} G \cdot dr = \iint_{\Omega} (\nabla \times G) \cdot n d\Omega$$

olur. Burada n , Γ eğrisinin dış normal birim vektörüdür. ds de yay elemanıdır ve $dr = i dx + j dy$ dir. Divergence teoremine Gauss teoremi de denir. Gradient ve Divergence teoremleri

$$\iint_{\Omega} (\nabla F) w dx dy = - \iint_{\Omega} (\nabla w) F dx dy + \oint_{\Gamma} n w F ds, \quad (4.1)$$

$$- \iint_{\Omega} (\nabla^2 F) w dx dy = \iint_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla F dx dy - \oint_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial n} w ds, \quad (4.2)$$

eşitliklerini verir. Burada $\frac{\partial}{\partial n} = n \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}$ normal türev operatörüdür.

Gradient teoremi bileşenlerin cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} w \frac{\partial F}{\partial x} dx dy &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} F dx dy + \oint_{\Gamma} n_x w F ds, \\ \iint_{\Omega} w \frac{\partial F}{\partial y} dx dy &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} F dx dy + \oint_{\Gamma} n_y w F ds, \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur. Gradient ve Divergence teoremleri R^3 içinde geçerlidir. Yalnız yüzey integrali hacim integrali ile eğrisel integral yüzey integraline çevrilmelidir. Buradan

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) d\Omega \\ = \iint_{\partial\Omega} [M \cos(n, x) + N \cos(n, y) + P \cos(n, z)] dS, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Divergence teoremi olur. Burada dS yüzey elemanıdır. $\partial\Omega$ sınır elemanıdır.

$\cos(n, x), \cos(n, y)$ ve $\cos(n, z)$ n 'nin doğrultu kosinüsleridir. Eğer $M = u \frac{\partial v}{\partial x}$

$$N = u \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ve } P = u \frac{\partial v}{\partial z} \text{ alınırsa}$$

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega, \quad (4.5)$$

Green'in birinci özdeşliği olur. (4.5) denkleminde u ve v 'nin yerleri değiştirilirse

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} v \nabla^2 u d\Omega \quad (4.6)$$

olur. (4.5) den (4.6) çıkartılırsa Green'in ikinci özdeşliği

$$\iiint_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (4.7)$$

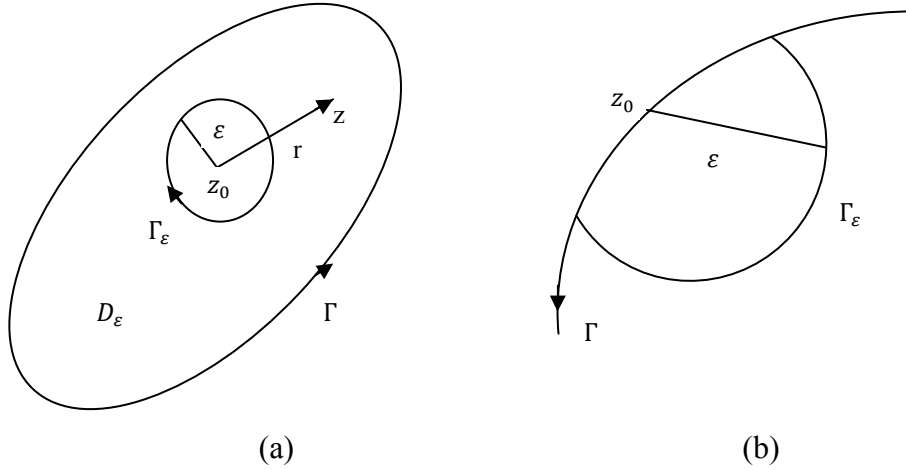
elde edilir. Bu R^2 içinde doğrudur. f ve g reel harmonik fonksiyonlar ise

$$\int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. D basit irtibatlı Γ sınırı ile bir bölge olsun. z_0 da D içinde herhangi bir nokta olsun. Ω da ε yarıçaplı z_0 merkezli bir diskin çıkarılmasıyla elde edilen bir

bölge olur (Bkz. Şekil 4.1.(a)). O zaman $\partial D \Gamma$ ve Γ_ε çevreleri ile iki sınıra sahip olur. $f = u$ ve $g = \log r$ alınarak (4.92) de $z \in D$, $r = |z - z_0|$ ve Γ_ε üzerinde

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r} \text{ olur. Böylece}$$



Şekil 4.1. Γ sınırlı bölgeden z_0 merkezli diskin çıkmasıyla oluşan bölge

$$\int_{\Gamma} \left[u \frac{\partial(\log r)}{\partial n} - \log r \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{u}{r} - \log r \frac{\partial u}{\partial r} \right) ds = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u}{r} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon d\theta = 2\pi u(z_0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \log r \frac{\partial u}{\partial r} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \log \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \varepsilon d\theta = 0,$$

elde edilir. (4.9) da $\varepsilon \rightarrow 0$ alınırsa

$$2\pi u(z_0) = \int_{\Gamma} \left[u \frac{\partial(\log r)}{\partial n} - \log r \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad (4.10)$$

olur ve bu Green'in üçüncü özdeşliği olarak bilinir. Bu ise z_0 iç noktasında u harmonik fonksiyonunun değerini u ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal türevleri cinsinden verir. Eğer Γ

sınırı sürekli türevlenebiliyorsa ve z_0 Γ 'nın üzerinde ise (Bkz. Şekil 4.1.(b)) z_0 merkezli yarı disk alınır ve

$$\pi u(z_0) = p.v. \int_{\Gamma} \left[u \frac{\partial(\log r)}{\partial n} - \log r \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad (4.11)$$

bulunur ve burada p.v. integralin temel değeri olarak bilinir.

BÖLÜM 5. SINIR İNTEGRALİ METODU

5.1. Ağırlıklandırılmış Kalanlar Metoduyla Yaklaşık Çözüm

Diferansiyelin denklemlerin yaklaşık çözümlerine bir model örnekle başlansın. $\bar{u} = u(0) = 0$ sınır koşulları ile $0 \leq x \leq 1$ aralığında

$$u'(x) + u(x) = x \quad (5.1)$$

olsun. Bu denklemin aşağıda beş farklı yaklaşımı ağırlıklandırılmış kalanlar yöntemi altında incelenecektir. Gerçek çözüm $u(0) = 0$ sınır koşulları ile $u = e^{-x} + x - 1$ ve $u(1) = 0.3678 \dots$ olur. (5.1) denkleminin çözümü $\bar{u} = 0$ sınır koşulu ile

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5.2)$$

formunda aranır. \hat{u} yaklaşık çözümü ise bu seriden bir parçası alınarak yapılır. Mesela

$$\hat{u} = ax^2 + bx^3 \quad (5.3)$$

olsun. Bu denklem sınır koşullarını sağlamaktadır. \hat{u} yaklaşık çözümü (5.1) denklemini tam olarak sağlamaz. Fakat hata veya kalan olarak

$$\epsilon(x) =: \hat{u}'(x) + \hat{u}(x) - x \quad (5.4)$$

ifadesini oluşturur. Bu denklemde (5.3) yaklaşık çözümüne koyulursa

$$\epsilon(x) = (2x + x^2)a + (3x^2 + x^3)b - x \quad (5.5)$$

elde edilir. Şimdi a ve b katsayılarını $\epsilon(x)$ hata fonksiyonunu minimize edecek tarzda belirlemek istiyoruz. Bu işlem ağırlıklandırılmış kalanlar metodu veya $w(x)$ test fonksiyonu ile ağırlıklandırılmış hatanın integrali sıfırlanarak yapılsın.

$$\int_0^1 \epsilon(x)w(x)dx = 0 \quad (5.6)$$

(5.6) denklemini bilinmeyen katsayılar ne kadarsa o kadar tekrarlınsın ve buradan bir cebirsel denklem takımı çözülerek bilinmeyen katsayılar belirlenebilir. (5.6) denklemindeki test fonksiyonu w çeşitli şekillerde seçilebilir. Buna göre de çeşitli isimler altında metotlar geliştirilir.

5.1.1. Kollokasyon metodu

Farklı noktalarda kalan sıfırlanır. Kullanılan problemde iki tane bilinmeyen mevcuttur. Bunun için iki noktada mesela $x = 0.5$ ve $x = 1$ de ifade sıfırlansın. (5.5) kalan ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \epsilon(0.5) &= 1.25a + 0.875b - 0.5 = 0 \\ \epsilon(1) &= 3a + 4b - 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

sistemi elde edilir. Buda çözülerek

$$\hat{u} = 0.474x^2 - 0.105x^3 \quad (5.8)$$

bulunur ve $\hat{u}(1) = 0.369$ olur. Dirac Distribüsyonu $\delta(x, \xi)$ kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x, \xi)dx = f(\xi) \quad (5.9)$$

elde edilir. Burada ağırlık fonksiyonu yerine Delta Dirac fonksiyonu alınmıştır. Delta Dirac fonksiyonunun öteleme özelliği sınır elemanları metodunda önemlidir. Bu yaklaşımda (5.6) ve (5.7) denklemleri

$$\int_0^1 \epsilon w_1 dx = 0 \quad \text{ve} \quad \int_0^1 \epsilon w_2 dx = 0 \quad (5.10)$$

$$w_1 = \delta(x - 0.5) \quad \text{ve} \quad w_2 = \delta(x - 1) \quad (5.11)$$

olur.

5.1.2. Momentler metodu

Bu metotta w ağırlık fonksiyonu yerine lineer bağımsız fonksiyonlar kümesi seçilir. Mesela $w_1 = 1$ ve $w_2 = x$ alınsın. Bu ifadeler (5.10) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} 1.3\bar{a} + 1.25b - 0.5 &= 0 \\ 0.91\bar{6}a + 0.95b - 0.\bar{3} &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlerse

$$\hat{u} = 0.483x^2 - 0.115x^3 \quad (5.13)$$

bulunur ve $\hat{u}(1) = 0.368$ olur.

5.1.3. Galerkin metodu

Bu metotta yaklaşık fonksiyonunun bizzat kendisi ağırlık fonksiyonu olarak alınır. Yani $\hat{u} = aw_1 + bw_2$ dir. $w_1 = x^2$ ve $w_2 = x^3$ dür. Moment metodundaki gibi benzer yaklaşım kullanılarak

$$\hat{u} = 0.475x^2 - 0.107x^3 \quad (5.14)$$

bulunur ve $\hat{u}(1) = 0.368$ olur.

5.1.4. Alt bölgelerle kollokasyon

Bu yaklaşımda tüm bölge alt bölgelere ayrılır. Ki bunların sayısı bilinmeyenler kadardır. Bu alt bölgelerde ortalama kalanların sıfırlanması istenir. Kullanılan örnekte bölge $0 \leq x \leq 1/2$ ve $1/2 < x \leq 1$ şeklinde iki parçaya ayrılırsa

$$\int_0^{1/2} \epsilon dx = 0 \quad \text{ve} \quad \int_{1/2}^1 \epsilon dx = 0 \quad (5.15)$$

elde edilir. (5.5) denklemini son denklemde yazılıp integraller çözülerek

$$\hat{u} = 0.485x^2 - 0.118x^3 \quad (5.16)$$

elde edilir. Bu halde ağırlık fonksiyonları

$$H(x - \xi) = \begin{cases} 1, & x > \xi \\ 0, & x < \xi \end{cases} \quad (5.17)$$

adım fonksiyonları olarak seçilmektedir. $x = \xi$ için literatürde çeşitli tanımlar mevcuttur. Çoğunlukla bu tanım gerekmebilir. Fakat w_1 ve w_2

$$w_1 = H(x - 0) - H(x - 0.5) \quad \text{ve} \quad w_2 = H(x - 0.5) \quad (5.18)$$

şeklinde yazılır.

5.1.5. En küçük kareler metodu

Bu metotta hatanın karesinin integrali minimize edilmeye çalışılır. İntegral katsayıların fonksiyonu olduğunda bunlara göre kısmi türevler sıfırlanır.

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^1 \epsilon^2(x, a, b) dx = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_0^1 \epsilon^2(x, a, b) dx = 0 \quad (5.20)$$

a ve b x 'e bağılı olmadığından integralle diferansiyelin yerleri değiştirilirse

$$2 \int_0^1 \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial a} dx = 0 \quad \text{ve} \quad 2 \int_0^1 \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial b} dx = 0 \quad (5.21)$$

olur ve burada ağırlık fonksiyonları

$$w_1 = \frac{\partial \epsilon}{\partial a} \quad \text{ve} \quad w_2 = \frac{\partial \epsilon}{\partial b} \quad (5.22)$$

bulunur. Çözüm

$$\hat{u} = 0.478x^2 - 0.110x^3 \quad (5.23)$$

şeklinde elde edilir ve $\hat{u}(1) = 0.368$ olur.

5.2. Sınır Elemanları Metodu

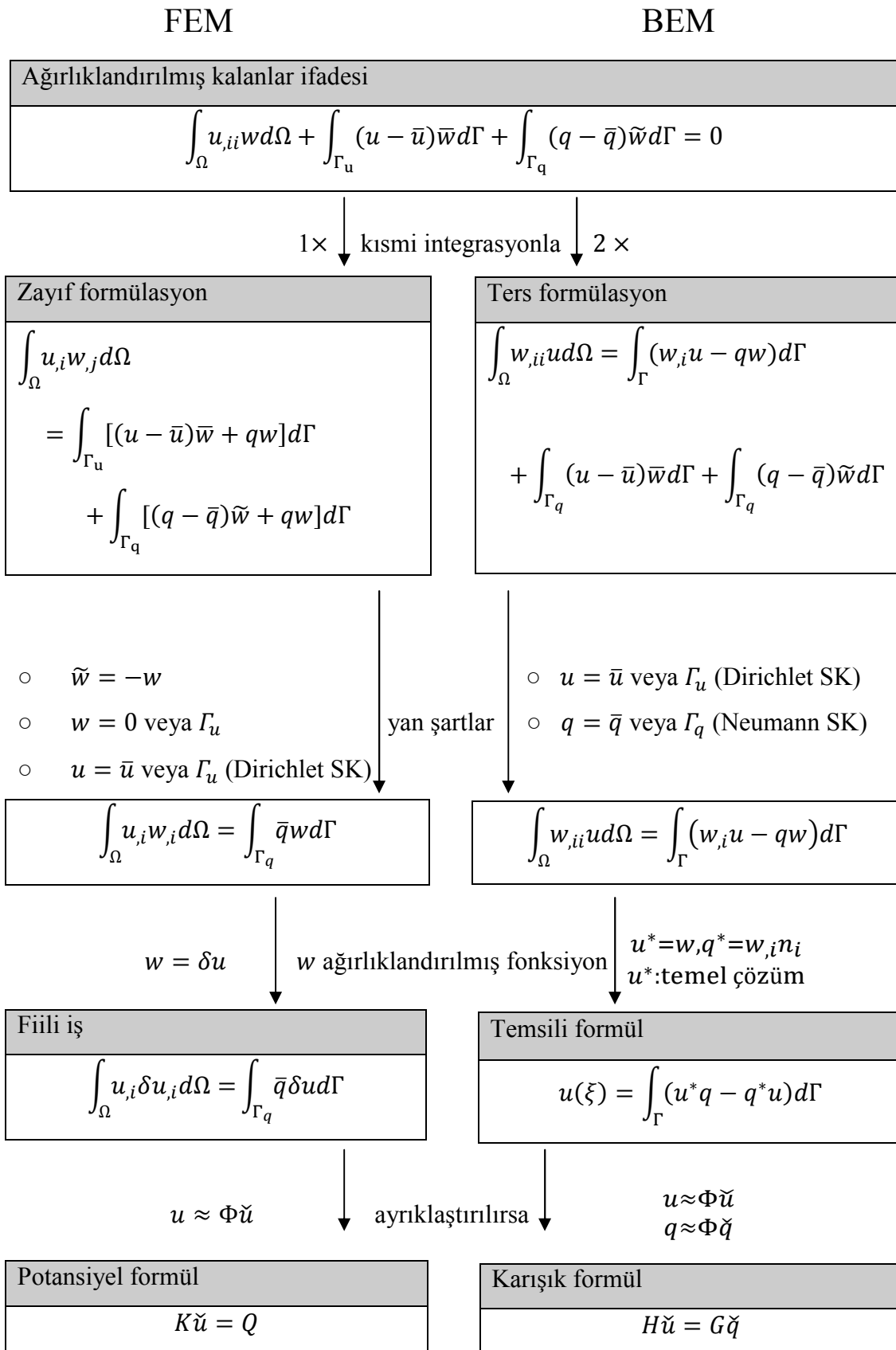
Bu metotta temel düşünce temel çözümün kullanılmasıdır. Temel çözüm analitik olarak verilen diferansiyel denklemin noktasal kaynak etkisinde serbest uzay çözümüdür. Böylece gerçek çözüm kullanılarak bu metot avantaj sağlamaktadır. Sınır elemanları metodunun avantaj ve dezavantajları Tablo 5.1 de verilmiştir.

Tablo 5.1. Sınır elemanları metodunun avantajları ve dezavantajları

Avantajları	Dezavantajları
<ul style="list-style-type: none"> ●Sadece sınırlar ayrıklaştırılır ●Sonsuz ve ya yarı sonsuz bölgeler için uygun modeller yapılabilmektedir ●Problemin simetrisinden faydalanılarak kolaylıklar sağlanabilir ●Esas değişkenlerde olduğu gibi ikinci değişkenlerde de hassas sonuçlar elde edilebilir 	<ul style="list-style-type: none"> ●Homojen olmayan ve lineer olmayan denklemlerde formülasyonda zorluklar çıkartabilir ●Uygun temel çözüm bulunması gerektirmektedir ●Pratik uygulamaları kolay olmayabilir

Bununla beraber bazı diferansiyel operatörlerde temel çözümün bulunması zor olabilir. Mesela homojen olmayan denklemler, lineer olmayan denklemler ve bazı eş yönsüz operatörler... Bu gibi hallerde genellikle Dual Reciprocity metodu kullanılır. Tablo 5.2 de örnek olarak sonlu elemanlar metodu ile sınır elemanları metodu Laplace denklemleri için karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.2. FEM ve BEM metodlarının karşılaştırılması



5.3. Diferansiyel Denklemin Sınır İntegrali Metodu

Bu kısımda adi bir diferansiyel denklem sınır koşulları ile beraber ele alınıp, sınır integrali metodu ile çözümüne nasıl dönüştürüldüğü gösterilecektir. Buradaki yöntemle daha kompleks problemler benzer tarzda yapılabilir. Daha yüksek boyutlu problemlerin anlaşılması için bu basit örneğin anlaşılması önemlidir. Burada ağırlıklandırılmış kalanlar tekniği kullanılacaktır. Buradan elde edilen integral denklemde, diferansiyel operatör bilinmeyen u fonksiyonuna uygulanacaktır. Kısmi integrasyon uygulanarak adım adım u üzerindeki diferansiyel yalnız bırakılana kadar devam edilir. Bu kısmi integrasyon esnasında sınır integralleri ve w ağırlık fonksiyonunun türevlerini içeren bölge integralleri elde edilir. Böylelikle diferansiyel operatör u bilinmeyen fonksiyonundan ağırlık fonksiyonuna kaydırılmış olur. Ağırlık fonksiyonu temel çözüm seçilerek bölge integralleri yok edilebilir. Sonuçta elde edilen denklemler içerisinde u bilinmeyen fonksiyonu görülmeyecektir. Bu sınır integralleri ayrıklaştırılarak yaklaşık çözümler ele alınacaktır. Bilinen sınır koşulları ve bunlardan yararlanılarak bilinmeyen sınır koşulları bulunup bölgedeki çözümler böylece hesaplanabilecektir. Buraya kadar anlatılanlar aşağıdaki model örnekle adım adım gösterilmiştir.

$$\underbrace{\frac{d^2u}{dx^2} + u}_{\mathcal{L}u} = -x \quad (5.24)$$

denklemi göz önüne alınsın. Γ sınırında $0 \leq x \leq 1$ aralığının da tanımlı $u = \bar{u}$ verilmiş olsun. Örneğin iki nokta belirlenirse

$$\bar{u}_1 = u(x = 0) = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{u}_2 = u(x = 1) = 0. \quad (5.25)$$

Burada diferansiyel operatör

$$\mathcal{L} := \frac{d^2}{dx^2} + 1 \quad (5.26)$$

olur. w test fonksiyonu ile diferansiyel denklem çarpılıp integre edilsin.

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x \right) w dx = 0 \quad (5.27)$$

Kısmi integrasyonlarla u üzerindeki türevler w test fonksiyonuna aktarılınsın.

$$\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} w dx = \left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx \quad (5.28)$$

$$\int_0^1 \underbrace{\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + w \right)}_{\mathcal{L}^* w} u dx + \int_0^1 x w dx + \underbrace{\left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1}_{[u'w]_0^1} - \underbrace{\left[u \frac{dw}{dx} \right]_0^1}_{[uw']_0^1} = 0 \quad (5.29)$$

Sınır terimlerindeki $u'(0)$ ve $u'(1)$ bilinmemektedir. Yukarıdan görüldüğü gibi $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ olur. Yani diferansiyel operatör self-adjointtir. \mathcal{L}^* operatörü için u^* temel çözümünü

$$\mathcal{L}^* u^* = \frac{d^2 u^*}{dx^2} + u^* = \delta(x - \xi) \quad (5.30)$$

ağırlık fonksiyonu olarak seçelim. Burada ξ noktasal kaynağın yerini göstermektedir. $w = u^*$ seçilerek ve

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 u^*}{dx^2} + u^* \right) u dx = \int_0^1 \delta(x, \xi) u(x) dx = u(\xi) \quad (5.31)$$

kullanılarak

$$u(\xi) = - \int_0^1 x u^*(x, \xi) dx - \left[\frac{du}{dx} u^* \right]_0^1 + \left[u \frac{du^*}{dx} \right]_0^1 \quad (5.32)$$

elde edilir. Bu formül bölge içerisinde ξ noktasında $u(\xi)$ değerinin neye eşit olduğunu vermektedir. u^* temel çözümü 1-boyutlu Helmholtz denklemi için

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} + \lambda^2 u^* = \delta(x - \xi) \quad (5.33)$$

$\lambda = 1$ alınarak elde edilir. Bunun temel çözümü

$$u^* = \frac{\sin(\lambda|x - \xi|)}{2\lambda} \quad (5.34)$$

olur. Bu denklem ve (5.25)'i (5.32) denkleminde yerine yazılarak bilinmeyen vereni temsil formülü

$$\begin{aligned} u(\xi) &= - \int_0^1 \frac{x}{2} \sin|x - \xi| dx - \left[u'(x) \frac{1}{2} \sin|x - \xi| \right]_0^1 \\ &= - \int_0^1 \frac{x}{2} \sin|x - \xi| dx \\ &\quad - \left(\frac{u'(1)}{2} \sin|1 - \xi| - \frac{u'(0)}{2} \sin|-\xi| \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

haline gelir. Bu ξ yükleme noktası sınıra götürülürse $u'(0)$ ve $u'(1)$ bilinmeyen sınır değerleri sırası ile $\xi = 0$ ve $\xi = 1$ olarak bulunabilir. Böylece

$$\begin{aligned} u(\xi = 0) &= - \int_0^1 \frac{x}{2} \sin|x| dx - \frac{u'(1)}{2} \sin 1 + \frac{u'(0)}{2} \sin 0 \\ u(\xi = 1) &= - \int_0^1 \frac{x}{2} \sin \underbrace{|x - 1|}_{1-x} dx - \frac{u'(1)}{2} \sin 0 + \frac{u'(0)}{2} \sin 1 \end{aligned} \quad (5.36)$$

elde edilir. $u(\xi = 0) = 0$ ve $u(\xi = 1) = 0$ yazılarak (5.36) sistemi çözülürse

$$u'(0) = \frac{1}{\sin 1} - 1 \quad \text{ve} \quad u'(1) = \frac{\cos 1}{\sin 1} - 1 \quad (5.37)$$

bulunur. Bunlar (5.35) denkleminde yerleştirilirse

$$u(\xi) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos 1}{\sin 1} - 1 \right) \sin|1 - \xi| + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin 1} - 1 \right) \sin \xi - \int_0^1 \frac{x}{2} \sin|x - \xi| dx \quad (5.38)$$

elde edilir. Böylece iç noktalardaki çözüm elde edilmiş olur. $u\left(\frac{1}{2}\right)$ için sonuç

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos 1 - \sin 1}{\sin 1} \right) \sin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin 1} - 1 \right) \sin \frac{1}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x \sin\left(\frac{1}{2} - x\right) dx - \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 x \sin\left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{\sin 0.5}{\sin 1} - \frac{1}{2} = 0.0697 \end{aligned} \quad (5.39)$$

bulunur. Diferansiyel denklemin gerçek çözümü ise

$$u(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x \quad (5.40)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki formülasyon çok boyutlu problemlere de genelleştirilebilir.

$$\mathcal{L}u - b = 0 \quad (5.41)$$

diferansiyel denklem olsun. Buradaki \mathcal{L} sabit katsayılı bir lineer diferansiyel operatör ve u bilinmeyen fonksiyondur. b ise Ω içinde bir kaynak terimi ifade etmektedir.

Yukarıdaki denkleme adapte edilirse $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + 1$ ve $b(x) = -x$ olur. Çok katlı halde ağırlıklandırılmış fonksiyon

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u - b)w d\Omega = 0 \quad (5.42)$$

olur. Yine kısmi integrasyon uygulanarak 1-boyutlu problemlerde

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}^* w u dx + \left[\mathcal{G}u \cdot S^* w \right]_{x_1}^{x_2} - \left[S u \cdot \mathcal{G}^* w \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}u w dx = 0 \quad (5.43)$$

çok boyutlu problemde de

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}^* w u d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathcal{G}u \cdot S^* w - S u \cdot \mathcal{G}^* w) d\Gamma - \int_{\Omega} \mathcal{L}u w d\Omega = 0 \quad (5.44)$$

benzeri formülasyon oluşturulur. İki boyutlu veya üç boyutlularda Gauss teoremi ile bölge integralleri sınır integrallerine dönüştürülür. Buralarda \mathcal{G} ve S u için sınır operatörleridir. \mathcal{G}^* ve S^* da adjoint operatör değişkenleridir ve w ile ilgilidir. Mesela bir boyutlu halde $\mathcal{G} = \frac{d}{dx}$ ve $S = 1$ dir. Adjoint operatörünün temel çözümü $\mathcal{L}^* u^* = -\delta(x, \xi)$ ifadesinden $w = u^*$ olarak bulunur. Bu kullanılarak

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} (\mathcal{G}u \cdot S^* u^* - S u \cdot \mathcal{G}^* u^*) d\Gamma - \int_{\Omega} b u^* d\Omega \quad (5.45)$$

çözümün temsili formülasyonunu bulunmuş olur. Sınır koşulları

$$\Gamma_{\mathcal{G}} \text{ üzerinde } \mathcal{G}u = \bar{\mathcal{G}} \quad (5.46)$$

$$\Gamma_S \text{ üzerinde } S u = \bar{S} \quad (5.47)$$

Dirichlet veya Neumann sınır koşulları olarak verilsin. (5.45) formülü ξ 'nin iç bölgede değerini vermektedir. Özel bir limit işlemiyle yük noktası sınıra kaydırılabilir. Bunun nasıl yapılacağı daha sonraki kısımlarda örneklerle gösterilecektir. Böylelikle sınır integral denklemleri elde edilecektir. Bunlarda bütün bilinmeyenler sınırlarda olacaktır. Bu integral denklemler sınır elemanları metodunun başlangıç noktasıdır. Sonlu sınır elemanlarını ayırarak bölgenin geometrisi ve bilinmeyen fonksiyon yaklaşık olarak hesaplanabilir. Bu yaklaşımlarla sınırlarda u 'nun bazı düğüm noktalarında bilinmeyenlerini içeren denklem sistemleri elde edilir. Bunlar çözülerek de sınır bilinmeyenleri belirlenir. (5.45) temsil denkleminde götürerek iç bölgelerdeki çözüm bulunur. Bundan sonraki kısımlarda iki boyutlu Laplace denklemi için bu yöntemin çözümüne ilişkin işlemler bir örnekle birlikte açıklanacaktır

5.4. Laplace Denkleminin Sınır Elemanları Formülasyonu

5.4.1. Ters formülasyon

Sınır elemanları formülü için Laplace denklemi

$$\Omega \text{ içinde } u_{,ii} = 0 \quad (5.48)$$

ve akı ifadeleri

$$q_i = u_{,i} \quad \sim \quad q = u_{,i}n_i \quad (5.49)$$

şeklinde olsun. Buradaki u değişkeni potansiyeli temsil etmektedir. Ağırlıklı kalanlar metodu kullanılarak

$$\int_{\Omega} u_{,ii} w d\Omega = 0 \quad (5.50)$$

bulunur. Kısmi integrasyonlarla veya Green'in ikinci özdeşliğini kullanılarak

$$\int_{\Omega} u_{,ii} w d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{,i} w - u w_{,i}) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u w_{,ii} d\Omega \quad (5.51)$$

yazılır. Birinci integralde $w_{,ii} := -\delta(x, \xi)$ kullanılarak

$$-\int_{\Omega} u w_{,ii} d\Omega = u(\xi) \quad (5.52)$$

elde edilir. x_i vektörü değişken noktaları ξ_i de yüklenme noktasının koordinatlarıdır. $w_{,ii} := -\delta(x, \xi)$ ifadesindeki w 'ya temel çözüm denir. Genel olarak \mathcal{L}^* diferansiyel operatörü \mathcal{L} 'nin adjoint'i olduğundan

$$\mathcal{L}^* u^* = -\delta(x, \xi) \quad (5.53)$$

elde edilir. u^* kullanılarak

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} (q(x) u^*(x, \xi) - u(x) q^*(x, \xi)) d\Gamma \quad (5.54)$$

bulunur. Burada $q^* := u_{,i}^* n_i$ akı için temel çözümdür. (5.54) denkleminde temsil formülü veya Green temsil formülü denir. Temel çözümler iki ve üç boyutlu uzaylar için $|x_i - \xi_i| = \sqrt{(x_i - \xi_i)^2}$ olmak üzere

$$u^*(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x_i - \xi_i| = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (5.55)$$

$$q^*(x, \xi) = u_{,i}^* n_i = -\frac{1}{2\pi r} r_{,i} n_i = -\frac{1}{2\pi|x_i - \xi_i|^2} (x_i - \xi_i) n_i \quad (5.56)$$

$$u^*(x, \xi) = \frac{1}{4\pi|x_i - \xi_i|} = \frac{1}{4\pi r} \quad (5.57)$$

$$q^*(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi r^2} r_{,i} n_i = -\frac{1}{4\pi|x_i - \xi_i|^3} (x_i - \xi_i) n_i \quad (5.58)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

5.4.2. İki boyutlu problemler için sınır integrali metodu

(5.54) temsil formülü iç noktadaki u potansiyellerinin sınırdaki potansiyeller cinsinden ifade etmektedir. Sınır üzerindeki bilinmeyenler bulunabilir. Bunları belirlemek için ξ yük noktasının sınıra yaklaştırılması gerekir. Sonuçta elde edilen denklemlere sınır integral denklemleri denir ve buda sınır elemanları metodunun önemli bir parçasıdır. Bu denklemleri elde etmek için orijinal Γ sınırı ε yarıçaplı bir çember ile genişletilerek değiştirilmiş Γ' sınırı elde edilir (Bkz. Şekil 5.1). Yani

$$\Gamma' = \Gamma - \Gamma_{\varepsilon}^* + \Gamma_{\varepsilon} \quad (5.59)$$

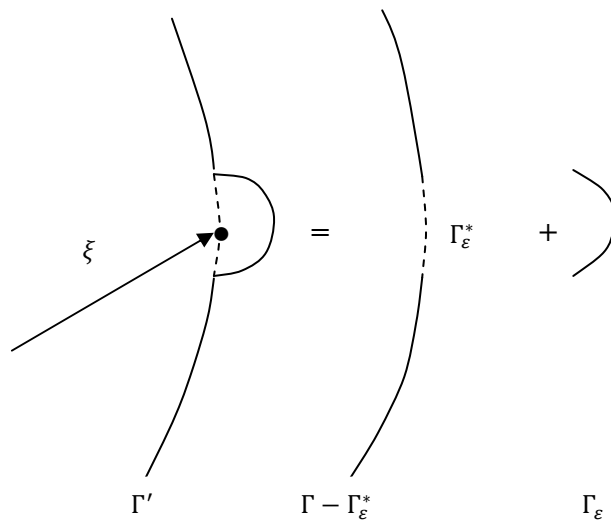
$$\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma' \quad (5.60)$$

Şekil 5.2'de görüldüğü gibi

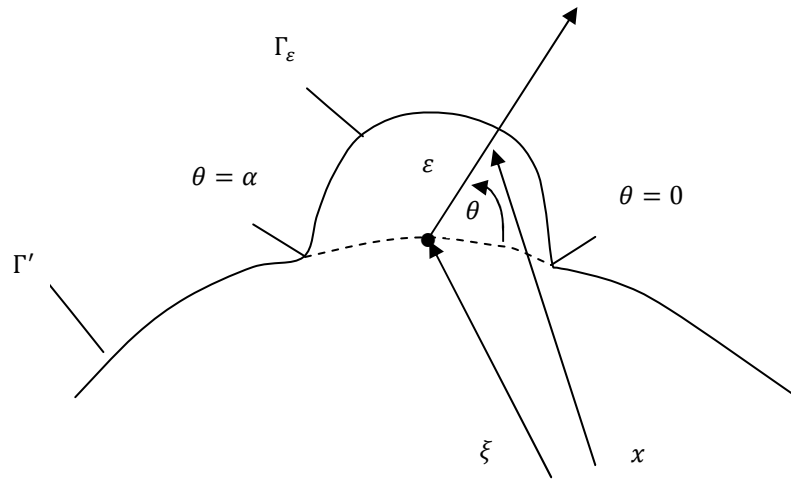
$$d\Gamma_{\varepsilon} = \varepsilon d\theta \quad (5.61)$$

$$\varepsilon = |x_i - \xi_i| \quad (5.62)$$

elde edilir.



Şekil 5.1. ξ yük noktası etrafına sınır ilavesi



Şekil 5.2. Sınır ilavesinin geometrisi

5.4.3. Zayıf tekil integral

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} q \frac{\ln|x_i - \xi_i|}{2\pi} d\Gamma \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} q \frac{\ln|x_i - \xi_i|}{2\pi} d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{\ln|x_i - \xi_i|}{2\pi} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.63)$$

formülünde birinci integral zayıf tekildir. İkinci integral ise (5.61), (5.62) ve L'Hospital kuralı kullanılarak yapılır. Yani

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{\ln|x_i - \xi_i|}{2\pi} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} q(\ln\varepsilon)\varepsilon d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} q \frac{(\ln\varepsilon)'}{(\frac{1}{\varepsilon})'} d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} -q\varepsilon d\theta = 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

bulunur.

5.4.4. Kuvvetli tekil integral

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} u \frac{(x_i - \xi_i) n_i}{2\pi |x_i - \xi_i|^2} d\Gamma \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon^*} u \frac{(x_i - \xi_i) n_i}{2\pi |x_i - \xi_i|^2} d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{(x_i - \xi_i) n_i}{2\pi |x_i - \xi_i|^2} d\Gamma \quad (5.65)
 \end{aligned}$$

ifadesinin Cauchy temel değeri anlamında integrali hesaplanırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon^*} u q^* d\Gamma = \oint_{\Gamma} u q^* d\Gamma \quad (5.66)$$

elde edilir. (5.65) denkleminin ikinci integrali

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{(x_i - \xi_i) n_i}{2\pi |x_i - \xi_i|^2} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta=0}^{\alpha} u \frac{\varepsilon}{2\pi \varepsilon^2} \varepsilon d\theta = u(\xi) \int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{1}{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{\alpha}{2\pi} u(\xi) \quad (5.67)
 \end{aligned}$$

değerini verir. (5.54) denklemi buna yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} u(\xi) + \oint_{\Gamma} u(x) \frac{(x_i - \xi_i) n_i}{2\pi |x_i - \xi_i|^2} d\Gamma - \int_{\Gamma} q(x) \frac{\ln|x_i - \xi_i|}{2\pi} d\Gamma \quad (5.68)$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)}_{c(\xi)} u(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(x, \xi) u(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(x, \xi) q(x) d\Gamma \quad (5.69)$$

elde edilir. Burada $c(\xi)$ ifadesi

$$c(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2\pi} & \xi \in \Gamma \\ 1 & \xi \in \Omega \\ 0 & \xi \notin \Gamma, \xi \notin \Omega \end{cases} \quad (5.70)$$

şeklinde tanımlanır.

5.4.5. Sınırın ayrıklaştırılması

Γ sınırı $\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(E)}$ sınır elemanlarına bölünür. (e) nolu elemanda yerel koordinatlar s , potansiyel $u^{(e)}$, akı ise $q^{(e)}$ olmak üzere $\Phi_m(s)$ şekil fonksiyonları yardımıyla bu ifadeler interpolate edilirler. Eğer düğüm noktalarındaki değerleri $\check{u}_m^{(e)}$ ve $\check{q}_m^{(e)}$ ile gösterilirse

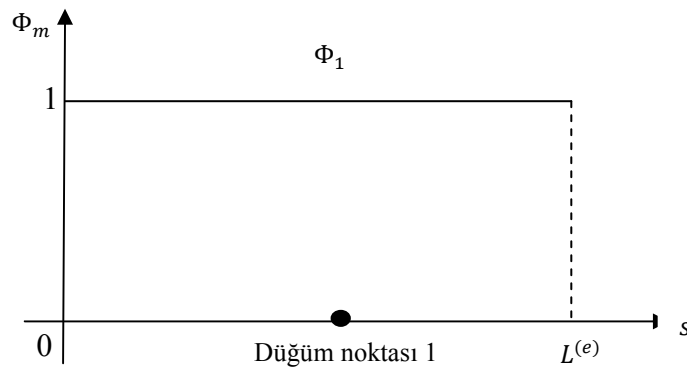
$$u^{(e)}(s) = \sum_{m=1}^{M^{(e)}} \Phi_m(s) \check{u}_m^{(e)} \quad \text{ve} \quad q^{(e)}(s) = \sum_{m=1}^{M^{(e)}} \Phi_m(s) \check{q}_m^{(e)} \quad (5.71)$$

$$u^{(e)}(s) = \Phi^T(s) \check{u}^{(e)} \quad \text{ve} \quad q^{(e)}(s) = \Phi^T(s) \check{q}^{(e)} \quad (5.72)$$

elde edilir.

5.4.6. Sabit şekil fonksiyonu

$u^{(e)}$ ve $q^{(e)}$ eleman boyunca sabit kabul edilir. Düğüm noktası ise tam orta noktadır (Bkz. Şekil 5.3).



Şekil 5.3. Sabit şekil fonksiyonu

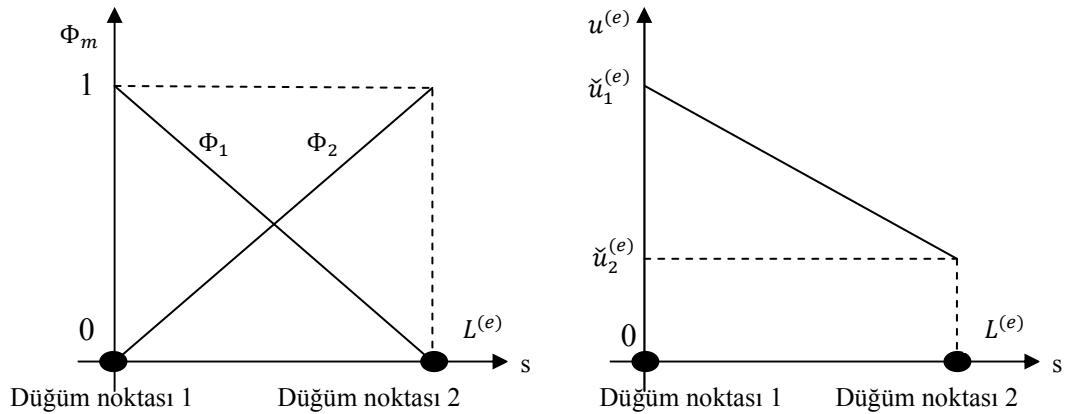
5.4.7. Lineer şekil fonksiyonu

Eleman üzerindeki düğüm noktası sınırlarda alınarak $L^{(e)}$ boyunca lineerle interpolate edilince (Bkz. Şekil 5.4)

$$\begin{aligned} u^{(e)}(s) &= \check{u}_1^{(e)} + \frac{\check{u}_2^{(e)} - \check{u}_1^{(e)}}{L^{(e)}} s \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{s}{L^{(e)}}\right)}_{\Phi_1} \check{u}_1^{(e)} + \underbrace{\frac{s}{L^{(e)}}}_{\Phi_2} \check{u}_2^{(e)} \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$u^{(e)}(s) = [\Phi_1 \quad \Phi_2] \begin{bmatrix} \check{u}_1^{(e)} \\ \check{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} = \Phi^T \check{u}^{(e)} \quad (5.74)$$

olur.



Şekil 5.4. Lineer interpolasyonunun $\Gamma^{(e)}$ elementinin içine kaydırılması

(5.71) denklemindeki değerler (5.69) denklemine yerleştirilirse

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\sum_{m=1}^M \Phi_m u_m^{(e)} \right) q^* d\Gamma = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\sum_{m=1}^M \Phi_m q_m^{(e)} \right) u^* d\Gamma \quad (5.75)$$

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{e=1}^E \left(\sum_{m=1}^M \check{u}_m^{(e)} \int_{\Gamma^{(e)}} \Phi_m q^* d\Gamma \right) = \sum_{e=1}^E \left(\sum_{m=1}^M \check{q}_m^{(e)} \int_{\Gamma^{(e)}} \Phi_m u^* d\Gamma \right) \quad (5.76)$$

elde edilir. $\alpha = \pi$ alınrsa $c(\xi) = \frac{1}{2}$ olur. Eğer noktasal yükün koordinatları ile x değerleri aynı elemanda iseler $r_i = (x_i - \xi_i)$, n_i 'lere dik olduğundan

$$(x_i - \xi_i)n_i = 0 \quad (5.77)$$

olur. Buradan $q^* = 0$ çıkar.

5.4.8. Kollokasyon metodu

(5.76) denkleminde bir sistem elde etmek için yine ağırlıklandırılmış kalanlar metoduna göre ξ yük noktaları ayırıklaştırma noktalarında seçilir. Böylece bilinmeyenler kadar denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & \check{u}_1 \left(\underbrace{\int_{\Gamma(1,e)} \Phi_1 q^*(x, \xi^1) d\Gamma + c_1}_{\hat{H}_{11}} \right) + \dots + \check{u}_N \underbrace{\int_{\Gamma(N,e)} \Phi_N q^*(x, \xi^1) d\Gamma}_{H_{1N}} \\ & = \check{q}_1 \underbrace{\int_{\Gamma(1,e)} \Phi_1 u^*(x, \xi^1) d\Gamma}_{G_{11}} + \dots + \check{q}_N \underbrace{\int_{\Gamma(N,e)} \Phi_N u^*(x, \xi^1) d\Gamma}_{G_{1N}} \end{aligned} \quad (5.78)$$

Buradaki $n = 1, \dots, N$ genel düğüm noktalarının numaralarıdır. Green fonksiyonlarının olduğu matrislere G , türevlerinin olduğu matrislere H denilirse

$$[\hat{H}_{11} \ H_{12} \ \dots \ H_{1N}] \begin{bmatrix} \check{u}_1 \\ \check{u}_2 \\ \cdot \\ \check{u}_N \end{bmatrix} = [G_{11} \ G_{12} \ \dots \ G_{1N}] \begin{bmatrix} \check{q}_1 \\ \check{q}_2 \\ \cdot \\ \check{q}_N \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

elde edilir. Kollokasyon noktaları 2'den N 'ye kadar döndürülerek

$$\begin{bmatrix} \widehat{H}_{11} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & \widehat{H}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{u}_1 \\ \check{u}_2 \\ \cdot \\ \check{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{q}_1 \\ \check{q}_2 \\ \cdot \\ \check{q}_N \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

elde edilir. Matris notasyonuyla

$$H\check{u} = G\check{q} \quad (5.81)$$

bulunur. H ve G 'nin köşegen elemanlarında kuvvetli ve tekil integral mevcuttur. Çünkü $r = |x_i - \xi_i|$, ξ ile x_i 'ler çakıştığında sıfır olmaktadır. Sınırdaki bilinenler ve bilinmeyenler bir tarafta toplanırsa

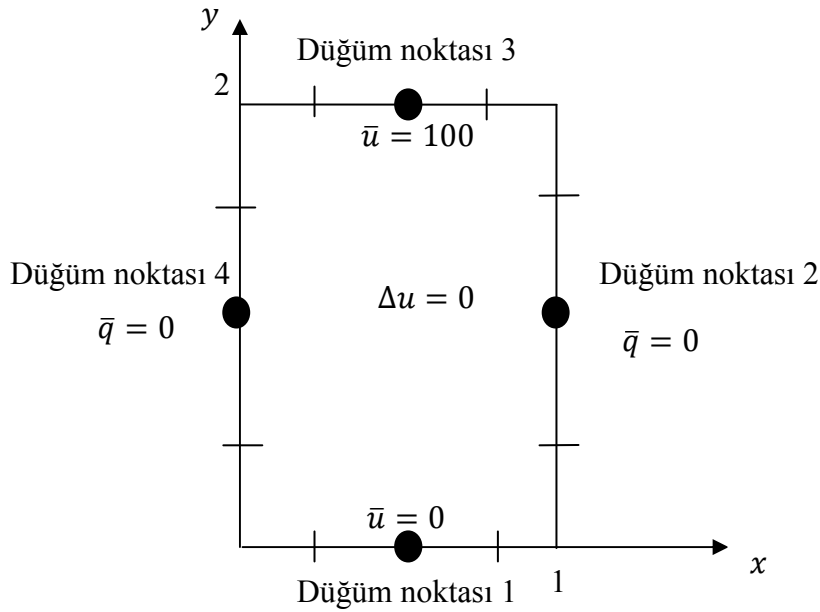
$$A\check{y} = f \quad (5.82)$$

bulunur. Burada f bilinmektedir. \check{y} bilinmeyenleri ise denklem sisteminden çözülür.

5.4.9. Örnek(sabit durumlu ısı iletimi):

Bu kısımda Laplace denklemi için Sınır Elemanları formülü elde edilmeye çalışılacaktır. Metodun anlaşılmasını kolaylaştırmak için en-boy oranı 1:2 olan dikdörtgensel bölge içinde iki boyutlu basit sabit durumlu ısı iletimi örneğinin giriş matrisinin hesaplanmasının gösterilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için bölgede alınacak 4 element ve 6 element için bu örnek incelensin.

Öncelikle 4 element için sınır üzerindeki yük noktaları için çözüme başlayalım. Bölgede alacağımız 4 elementli sabit şekil fonksiyonları için bilinen sınır değerleri $\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_3 = 100$ ve $\bar{q}_2 = 0, \bar{q}_4 = 0$ olsun (Bkz. Şekil 5.5). Burada bilinmeyen sınır değerleri u_2, u_4 ve q_1, q_3 'ü sınır elemanları metodu ile hesaplayıp, nümerik sonucu analitik çözümle karşılaştıracğız.



Şekil 5.5. Örnek: 4 element için dikdörtgenel bölge içindeki ısı iletimi

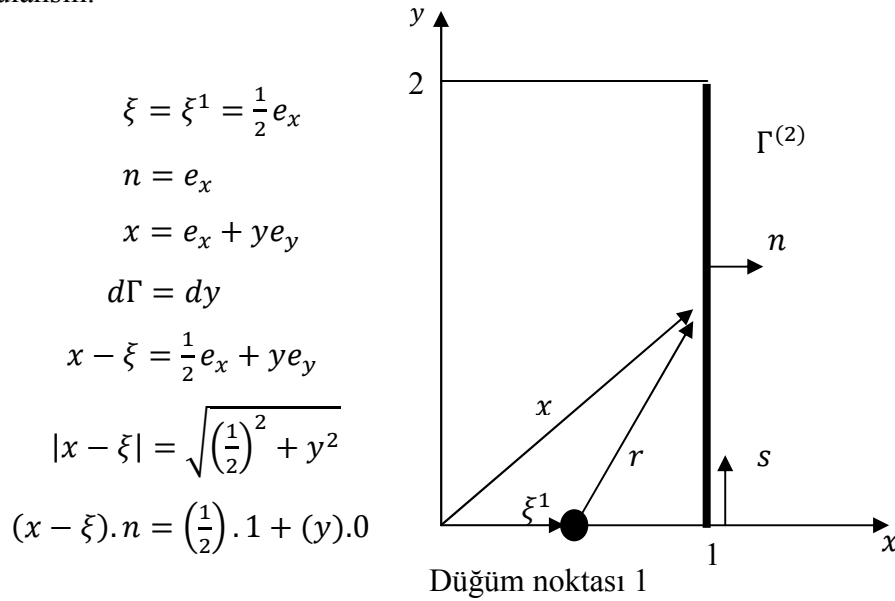
Kolaylık için sabit elementler seçilsin ve $M = 1$, $\Phi_1 = 1$ ve $c(\xi) = 0.5$ olsun. ξ^l yükleme noktası için (5.76) denkleminde bu değerler yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underbrace{u(\xi^l)}_{u_l} + \sum_{e=1}^E \underbrace{\left(\int_{\Gamma^{(e)}} -\frac{(x - \xi^l) \cdot n}{2\pi |x - \xi^l|^2} d\Gamma \right)}_{H_{le}} u_e \\ = \sum_{e=1}^E \underbrace{\left(\int_{\Gamma^{(e)}} -\frac{1}{2\pi} \ln|x - \xi^l| d\Gamma \right)}_{G_{le}} q_e \end{aligned} \quad (5.83)$$

elde edilir. 4 element için bu ifadenin matris notasyonu

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} q_1 \\ \bar{q}_2 \\ q_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

H_{12} ve G_{12} matris bileşenlerini hesaplamak için Şekil 5.6'da görüldüğü gibi düğüm noktası 1 üzerine yükleme noktasını götürüp ve $\Gamma^{(2)}$ elemanı boyunca integral uygulansın.



Şekil 5.6. 4 element için H_{12} ve G_{12} matris bileşenlerinin hesaplanması

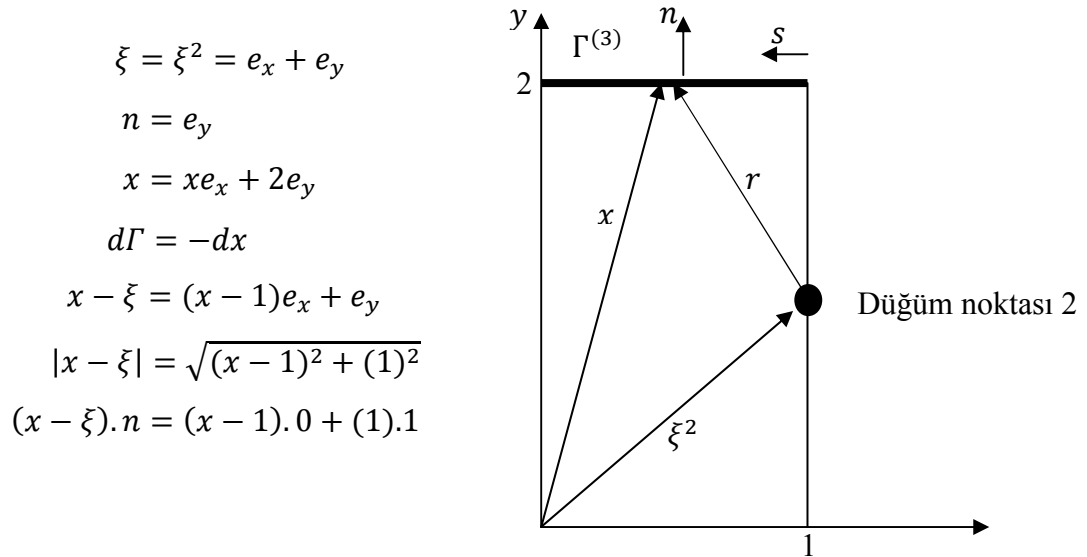
Şekil 5.6 içinde verilenler (5.83) denkleminde yazılarak denklemin çözümü

$$H_{12} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{2 \left(y^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right)} dy = -0.2110$$

$$G_{12} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^2 \ln \sqrt{y^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} dy = -0.0175$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{14} = H_{34} = H_{32} = H_{12}$ ve $G_{14} = G_{34} = G_{32} = G_{12}$ elde edilir.

H_{23} ve G_{23} matris bileşenlerini hesaplamak için Şekil 5.7'de görüldüğü gibi düğüm noktası 2 üzerine yükleme noktasını götürüp ve $\Gamma^{(3)}$ elemanı boyunca integral uygulansın.



Şekil 5.7. 4 element için H_{23} ve G_{23} matris bileşenlerinin hesaplanması

Şekil 5.7 içinde verilenler (5.83) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{23} = \frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{1}{((x-1)^2 + 1)} dx = -0.1250$$

$$G_{23} = \frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{(x-1)^2 + (1)^2} dx = -0.0210$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{21} = H_{41} = H_{43} = H_{23}$ ve $G_{21} = G_{41} = G_{43} = G_{23}$ elde edilir.

H_{13} ve G_{13} matris bileşenleri içinde benzer şekilde hesaplama yapılırsa

$$\xi = \xi^1 = \frac{1}{2}e_x$$

$$n = e_y$$

$$x = xe_x + 2e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + 2e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + (2) \cdot 1$$

Verilenler (5.83) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{13} = \frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{2}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\right)} dx = -0.0780$$

$$G_{23} = \frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4} dx = -0.1119$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{31} = H_{13}$ ve $G_{31} = G_{13}$ elde edilir.

H_{24} ve G_{24} matris bileşenleri içinde benzer şekilde hesaplama yapılırsa

$$\xi = \xi^2 = e_x + e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = -e_x + (y - 1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{1 + (y - 1)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (-1) \cdot (-1) + (y - 1) \cdot 0$$

Verilenler (5.83) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{24} = \frac{1}{2\pi} \int_2^0 \frac{1}{1 + (y - 1)^2} dy = -0.2500$$

$$G_{24} = \frac{1}{2\pi} \int_2^0 \ln \sqrt{(y - 1)^2 + 1} dy = -0.0420$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{42} = H_{24}$ ve $G_{42} = G_{24}$ elde edilir.

Şimdide köşegen terimler hesaplınsın. $(x_i - \xi_i)n_i = 0$ ifadesine göre H matrisinin temel köşegeni sıfırlanmış olur. Yani $H_{11} = H_{22} = H_{33} = H_{44} = 0$ elde edilir. G_{11} 'i elde etmek için

$$\xi = \xi^1 = \frac{1}{2}e_x, \quad x = xe_x, \quad d\Gamma = dx,$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x, \quad |x - \xi| = \left|x - \frac{1}{2}\right|,$$

ifadeleri kullanılırsa

$$G_{11} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \left|x - \frac{1}{2}\right| dx$$

bulunur. Her ne kadar son ifadedeki integrand da zayıf tekillik olsa da, integral bulunur.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0$$

olduğundan

$$G_{11} = -\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} (1 + \ln 2) = 0.2695$$

elde edilir. Tekrar simetriklik göz önüne alınırsa $G_{33} = G_{11}$ olur. Benzer biçimde

$$G_{22} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^2 \ln |y - 1| dy = 0.3183$$

ve $G_{44} = G_{22}$ elde edilir. Bu kısma kadar yapılan hesaplamalar kullanılarak verilen sınır koşulları ile sistem matrisi düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} 0.5000 & -0.2110 & -0.0780 & -0.2110 \\ -0.1250 & 0.5000 & -0.1250 & -0.2500 \\ -0.0780 & -0.2110 & 0.5000 & -0.2110 \\ -0.1250 & -0.2500 & -0.1250 & 0.5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 = 0 \\ u_2 \\ \bar{u}_3 = 100 \\ u_4 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.2695 & -0.0175 & -0.1119 & -0.0175 \\ -0.0210 & 0.3183 & -0.0210 & -0.0420 \\ -0.1119 & -0.0175 & 0.2695 & -0.0175 \\ -0.0210 & -0.0420 & -0.0210 & 0.3183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \bar{q}_2 = 0 \\ q_3 \\ \bar{q}_4 = 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bilinenler bir tarafta bilinmeyenler bir tarafta toplanır ve bu matris sistemi çözülürse bilinmeyen sınır değerleri

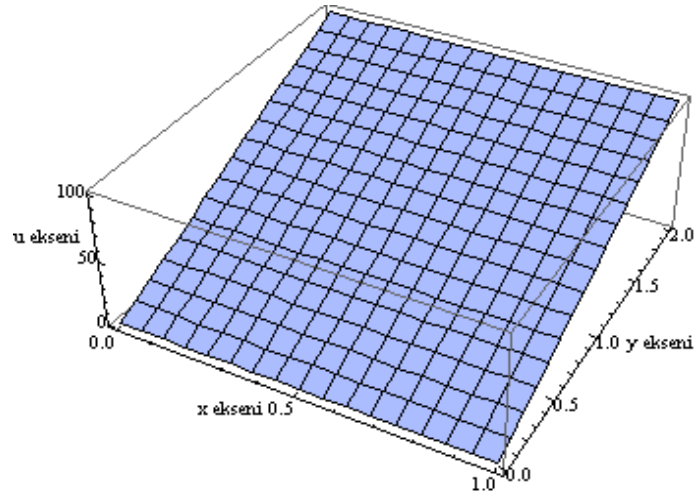
$$\begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75.77 \\ 50.00 \\ 75.77 \\ 50.00 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

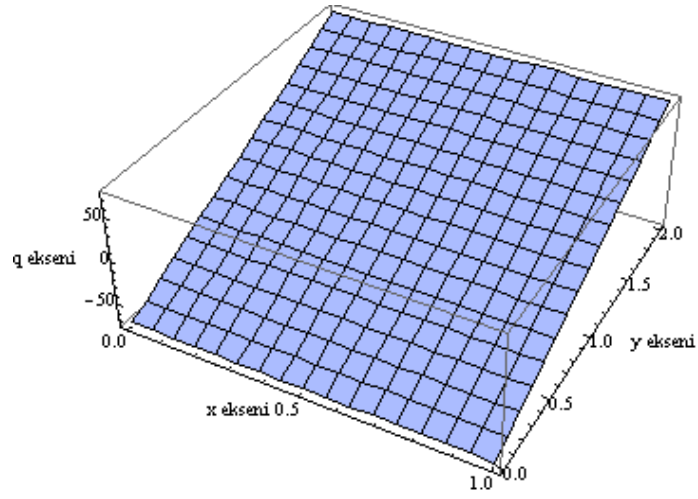
Burada analitik çözüm $u = 50y$ ve $q = 50e_y$. n olduğundan

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50.00 \\ 50.00 \\ 50.00 \\ 50.00 \end{bmatrix}$$

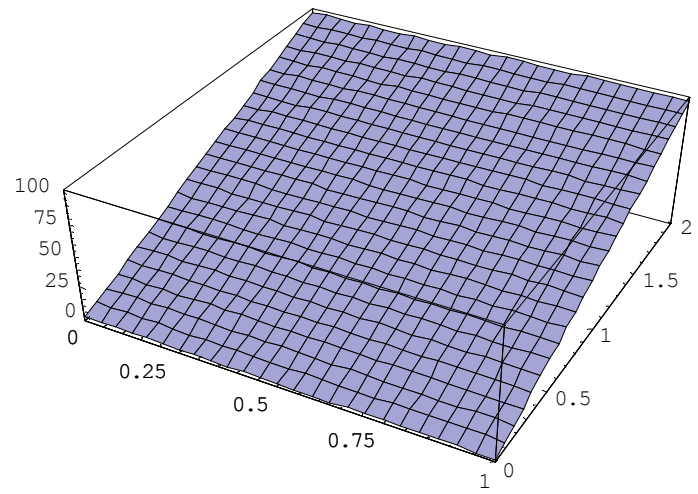
bulunur. Böylece u Dirichlet değerinin nümerik çözümü ile analitik çözümü tam olarak eşit çıktı. Fakat q Neumann değerinin nümerik çözümü ile analitik çözümü arasında büyük hata oluştu. Şimdi Analitik çözüm ve nümerik çözümün u ve q sınır koşulları için grafikleri çizilerek şekil üzerinde bu durum görülsün.



Şekil 5.8. 4 element için u sınır değerinin nümerik çözümünün grafiği



Şekil 5.9. 4 element için q sınır değerinin nümerik çözümünün grafiği

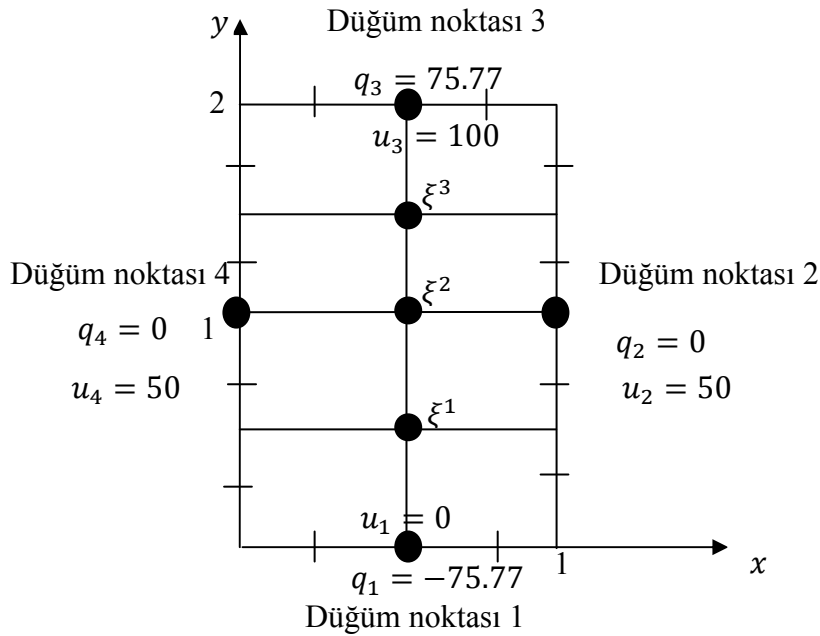


Şekil 5.10. 4 element için analitik çözümün grafiği

Şimdi de bu 4 element için iç bölgelerde alınacak yük noktaları ile çözüm bulunsun. $r_i = x_i - \xi_i^l$ olmak üzere $\xi^l \in \Omega$ noktasında $u(\xi^l)$ bilinmeyen potansiyeli hesaplanarak gerçek çözümle karşılaştırılacaktır. Bu çözüm

$$u(\xi^l) = \sum_{e=1}^E \check{u}_e \left(\underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{r_i n_i}{2\pi r^2} d\Gamma}_{H_{le}} \right) - \sum_{e=1}^E \check{q}_e \left(\underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{\ln r}{2\pi} d\Gamma}_{G_{le}} \right) \quad (5.85)$$

denklemine gerekli değerler yazılarak bulunur.



Şekil 5.11. Örnek: 4 element için iç noktalarda çözüm

$$\xi^1 = \frac{1}{2}e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = -e_y$$

$$x = xe_x$$

$$d\Gamma = dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + \left(-\frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dx = 0.2500$$

$$G_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx = -0.0893$$

$$\xi^1 = \frac{1}{2} e_x + \frac{1}{2} e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + y e_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right) e_x + \left(y - \frac{1}{2}\right) e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1$$

$$H_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.3237$$

$$G_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \ln \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0746$$

$$\xi^1 = \frac{1}{2} e_x + \frac{1}{2} e_y$$

$$n = e_y$$

$$x = x e_x + 2 e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right) e_x + \left(\frac{3}{2}\right) e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 1$$

$$H_{13} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{\frac{3}{2}}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right)} dx = 0.1024$$

$$G_{13} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} dx = 0.0673$$

$$\xi^1 = \frac{1}{2}e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{14} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^0 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.3237$$

$$G_{14} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^0 \ln \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0746$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = -e_y$$

$$x = xe_x$$

$$d\Gamma = dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + (-1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)$$

$$H_{21} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)} dx = 0.1475$$

$$G_{21} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = 0.0061$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right)e_x + (y - 1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(y - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (y - 1) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$H_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\left((y - 1)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.3524$$

$$G_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \ln \sqrt{(y - 1)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.1065$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = e_y$$

$$x = xe_x + 2e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 1 \cdot 1$$

$$H_{23} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{1}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)} dx = 0.1475$$

$$G_{23} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = 0.0061$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + (y - 1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(y - 1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (y - 1) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{24} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^0 \frac{\frac{1}{2}}{\left((y - 1)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.3524$$

$$G_{24} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^0 \ln \sqrt{(y - 1)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.1065$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = -e_y$$

$$x = xe_x$$

$$d\Gamma = dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + \left(-\frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{31} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{3}{2}}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right)} dx = 0.1024$$

$$G_{31} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} dx = 0.0673$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$H_{32} = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.3237$$

$$G_{32} = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \ln \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx = -0.0746$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = e_y$$

$$x = xe_x + 2e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + \left(\frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$H_{33} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dx = 0.2500$$

$$G_{33} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx = -0.0893$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{34} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^0 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.3237$$

$$G_{34} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^0 \ln \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0746$$

$$u(\xi^1) = [0.2500 \quad 0.3237 \quad 0.1024 \quad 0.3237] \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$- [-0.0893 \quad -0.0746 \quad 0.0673 \quad -0.0746] \begin{bmatrix} -75.77 \\ 0 \\ 75.77 \\ 0 \end{bmatrix} = 30.74$$

$$u(\xi^2) = [0.1475 \quad 0.3524 \quad 0.1475 \quad 0.3524] \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

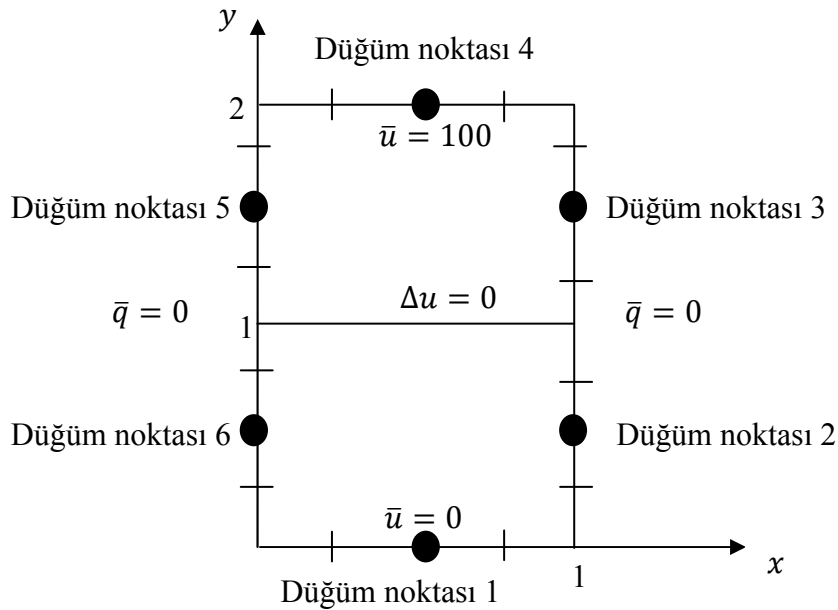
$$- [0.0061 \quad -0.1065 \quad 0.0061 \quad -0.1065] \begin{bmatrix} -75.77 \\ 0 \\ 75.77 \\ 0 \end{bmatrix} = 49.06$$

$$u(\xi^3) = [0.1024 \quad 0.3237 \quad 0.2500 \quad 0.3237] \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} - [0.0673 \quad -0.0746 \quad -0.0893 \quad -0.0746] \begin{bmatrix} -75.77 \\ 0 \\ 75.77 \\ 0 \end{bmatrix} = 69.23$$

Tablo 5.3. 4 element için iç noktalarda çözümün gerçek çözümle kıyası

$u(\xi^l)$	Gerçek Çözüm $u = 50y$	4 Element İçin Çözüm
$u(\xi^1)$	25	30.74
$u(\xi^2)$	50	49.06
$u(\xi^3)$	75	69.23

6 element için örnek çözümlerse bölgede alınacak 6 elementli sabit şekil fonksiyonları için bilinen sınır değerleri $\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_4 = 100$ ve $\bar{q}_2 = 0, \bar{q}_3 = 0, \bar{q}_5 = 0, \bar{q}_6 = 0$ olsun (Bkz. Şekil 5.12). Burada bilinmeyen sınır değerleri u_2, u_3, u_5, u_6 ve q_1, q_4 'ü sınır elemanları metodu ile hesaplanıp, nümerik sonuç ile analitik çözüm karşılaştırılacaktır.



Şekil 5.12. Örnek: 6 element için dikdörtgenel bölge içindeki ısı iletimi

Kolaylık için sabit elementler seçilsin ve $M = 1$, $\Phi_1 = 1$ ve $c(\xi) = 0.5$ olsun. ξ^l yükleme noktası için (5.76) denkleminde bu değerler yazılırsa

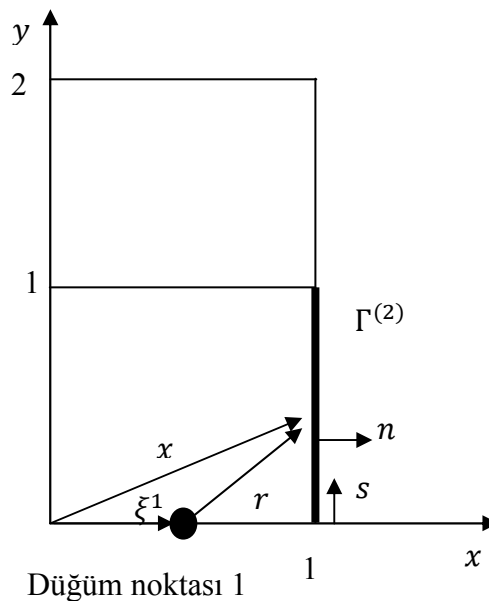
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{u(\xi^l)}{u_l} + \sum_{e=1}^E \underbrace{\left(\int_{\Gamma^{(e)}} -\frac{(x - \xi^l) \cdot n}{2\pi |x - \xi^l|^2} d\Gamma \right)}_{H_{1e}} u_e \\ = \sum_{e=1}^E \underbrace{\left(\int_{\Gamma^{(e)}} -\frac{1}{2\pi} \ln|x - \xi^l| d\Gamma \right)}_{G_{1e}} q_e \end{aligned} \quad (5.86)$$

elde edilir. 6 element için bu ifadenin matris notasyonu

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \bar{u}_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \bar{u}_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} q_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ q_4 \\ \bar{q}_5 \\ \bar{q}_6 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

H_{12} ve G_{12} matris bileşenlerini hesaplamak için Şekil 5.13'de görüldüğü gibi düğüm noktası 1 üzerine yükleme noktasını götürüp ve $\Gamma^{(2)}$ elemanı boyunca integral uygulansın.

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^1 = \frac{1}{2} e_x \\ n &= e_x \\ x &= e_x + y e_y \\ d\Gamma &= dy \\ x - \xi &= \frac{1}{2} e_x + y e_y \\ |x - \xi| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2} \\ (x - \xi) \cdot n &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + (y) \cdot 0 \end{aligned}$$



Şekil 5.13. 6 nokta için H_{12} ve G_{12} matris bileşenlerinin hesaplanması

Şekil 5.13 içinde verilenler (5.86) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

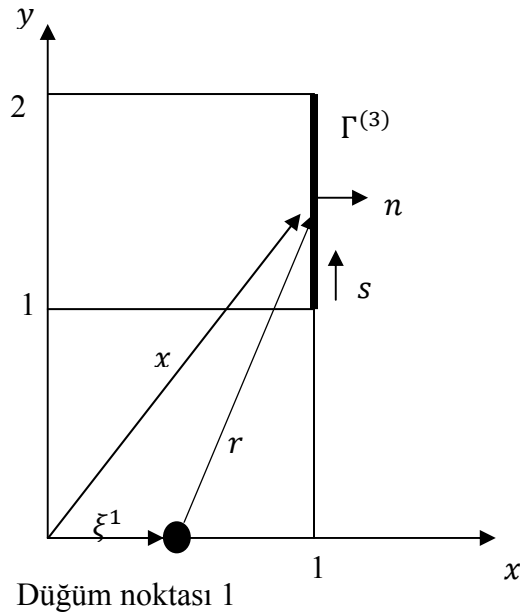
$$H_{12} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2 \left(y^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right)} dy = -0.1762$$

$$G_{12} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{y^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} dy = 0.0533$$

olur. Tekrar simetriklik den $H_{12} = H_{16} = H_{21} = H_{34} = H_{43} = H_{45} = H_{54} = H_{61}$ ve $G_{12} = G_{16} = G_{21} = G_{34} = G_{43} = G_{45} = G_{54} = G_{61}$ elde edilir.

H_{13} ve G_{13} matris bileşenlerini hesaplamak için Şekil 5.14'de görüldüğü gibi düğüm noktası 1 üzerine yükleme noktasını götürüp ve $\Gamma^{(3)}$ elemanı boyunca integral uygulansın.

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^1 = \frac{1}{2} e_x \\ n &= e_x \\ x &= e_x + y e_y \\ d\Gamma &= dy \\ x - \xi &= \frac{1}{2} e_x + y e_y \\ |x - \xi| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + (y)^2} \\ (x - \xi) \cdot n &= \left(\frac{1}{2} \right) \cdot 1 + (y) \cdot 0 \end{aligned}$$



Şekil 5.14. 6 nokta için H_{13} ve G_{13} matris bileşenlerinin hesaplanması

Şekil 5.14 içinde verilenler (5.86) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{13} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{2 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 + (y)^2 \right)} dy = -0.0348$$

$$G_{13} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^2 \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (y)^2} dy = -0.0708$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{13} = H_{42} = H_{15} = H_{46}$ ve $G_{13} = G_{42} = G_{15} = G_{46}$ elde edilir.

H_{14} ve G_{14} matris bileşenleri içinde benzer şekilde hesaplama yapılırsa

$$\xi = \xi^1 = \frac{1}{2} e_x$$

$$n = e_y$$

$$x = x e_x + 2 e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right) e_x + 2 e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(2)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + (2) \cdot 1$$

Verilenler (5.86) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{14} = \frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{2}{2^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx = -0.0780$$

$$G_{14} = \frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{2^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx = -0.1120$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{14} = H_{41}$ ve $G_{14} = G_{41}$ elde edilir.

H_{23} ve G_{23} matris bileşenleri içinde benzer şekilde hesaplama yapılırsa

$$\xi = \xi^2 = e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(y - \frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (0) \cdot 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0$$

Verilenler (5.86) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{23} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^2 \frac{0}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2} dy = 0.0000$$

$$G_{23} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^2 \ln \left|y - \frac{1}{2}\right| dy = 0.0072$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{23} = H_{32} = H_{56} = H_{65}$ ve $G_{23} = G_{32} = G_{56} = G_{65}$ elde edilir.

H_{24} ve G_{24} matris bileşenleri içinde benzer şekilde hesaplama yapılırsa

$$\xi = \xi^2 = e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = e_y$$

$$x = xe_x + 2e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = (x - 1)e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (x - 1)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (x - 1) \cdot 0 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 1$$

Verilenler (5.86) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{24} = \frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (x-1)^2} dx = -0.0936$$

$$G_{24} = \frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (x-1)^2} dx = -0.0750$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{24} = H_{31} = H_{51} = H_{64}$ ve $G_{24} = G_{31} = G_{51} = G_{64}$ elde edilir.

H_{25} ve G_{25} matris bileşenleri içinde benzer şekilde hesaplama yapılırsa

$$\xi = \xi^2 = e_x + \frac{1}{2} e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = -e_x + \left(y - \frac{1}{2}\right) e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (-1) \cdot (-1) + \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0$$

Verilenler (5.86) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{25} = \frac{1}{2\pi} \int_2^1 \frac{1}{1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} dy = -0.0826$$

$$G_{25} = \frac{1}{2\pi} \int_2^1 \ln \sqrt{1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} dy = -0.0553$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{25} = H_{36} = H_{52} = H_{63}$ ve $G_{25} = G_{36} = G_{52} = G_{63}$ elde edilir.

H_{35} ve G_{35} matris bileşenleri içinde benzer şekilde hesaplama yapılırsa

$$\xi = \xi^3 = e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = -e_x + \left(y - \frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (-1) \cdot (-1) + \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot 0$$

Verilenler (5.86) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{35} = \frac{1}{2\pi} \int_2^1 \frac{1}{1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2} dy = -0.1476$$

$$G_{35} = \frac{1}{2\pi} \int_2^1 \ln \sqrt{1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2} dy = -0.0062$$

elde edilir. Verilen problemin simetrikliğinden $H_{35} = H_{26} = H_{53} = H_{62}$ ve $G_{35} = G_{26} = G_{53} = G_{62}$ elde edilir.

Köşegen terimler içinde benzer şekilde hesaplama yapılırsa

$$\xi = \xi^1 = \frac{1}{2}e_x$$

$$n = -e_y$$

$$x = xe_x$$

$$d\Gamma = dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right) e_x$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + (0) \cdot -1$$

Verilenler (5.86) denkleminde yazılırsa denklemin çözümü

$$H_{11} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{0}{\left|x - \frac{1}{2}\right|^2} dx = 0.0000$$

$$G_{11} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \left|x - \frac{1}{2}\right| dx$$

bulunur. Her ne kadar son ifadedeki integrand da zayıf tekillik olsa da, integral bulunur.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0$$

olduğundan aşağıdaki ifade elde edilir

$$G_{11} = -\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \right) = \frac{1}{2\pi} (1 + \ln 2) = 0.2695.$$

Verilen problemin simetrikliğinden $H_{11} = H_{22} = H_{33} = H_{44} = H_{55} = H_{66}$ ve $G_{11} = G_{22} = G_{33} = G_{44} = G_{55} = G_{66}$ elde edilir.

Bu kısma kadar yapılan hesaplamalar kullanılarak verilen sınır koşulları ile sistem matrisi düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} 0.5000 & -0.1762 & -0.0348 & -0.0780 & -0.0348 & -0.1762 \\ -0.1762 & 0.5000 & 0.0000 & -0.0936 & -0.0826 & -0.1476 \\ -0.0936 & 0.0000 & 0.5000 & -0.1762 & -0.1476 & -0.0826 \\ -0.0780 & -0.0348 & -0.1762 & 0.5000 & -0.1762 & -0.0348 \\ -0.0936 & -0.0826 & -0.1476 & -0.1762 & 0.5000 & 0.0000 \\ -0.1762 & -0.1476 & -0.0826 & -0.0936 & 0.0000 & 0.5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ \bar{u}_4 = 100 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} 0.2695 & 0.0533 & -0.0708 & -0.1120 & -0.0708 & 0.0533 \\ 0.0533 & 0.2695 & 0.0072 & -0.0750 & -0.0553 & -0.0062 \\ -0.0750 & 0.0072 & 0.2695 & 0.0533 & -0.0062 & -0.0553 \\ -0.1120 & -0.0708 & 0.0533 & 0.2695 & 0.0533 & -0.0708 \\ -0.0750 & -0.0553 & -0.0062 & 0.0533 & 0.2695 & 0.0072 \\ 0.0533 & -0.0062 & -0.0553 & -0.0750 & 0.0072 & 0.2695 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \bar{q}_2 = 0 \\ \bar{q}_3 = 0 \\ q_4 \\ \bar{q}_5 = 0 \\ \bar{q}_6 = 0 \end{bmatrix}$$

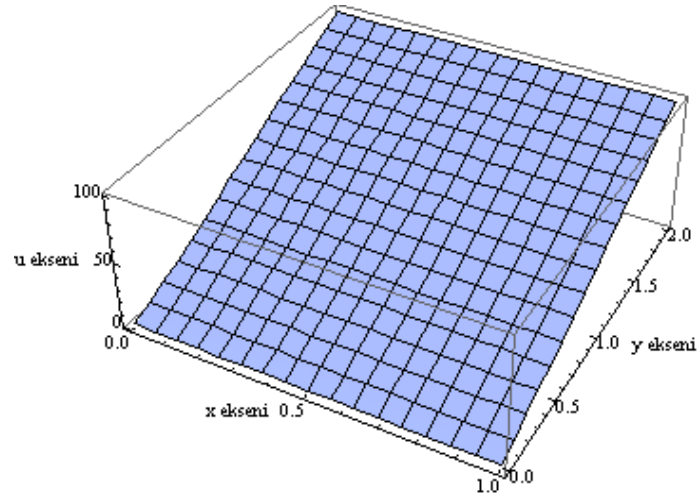
elde edilir. Bilinenler bir tarafta bilinmeyenler bir tarafta toplanır ve bu matris sistemi çözülürse bilinmeyen sınır değerleri

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ q_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56.39 \\ 23.87 \\ 76.13 \\ 56.39 \\ 76.13 \\ 23.87 \end{bmatrix}$$

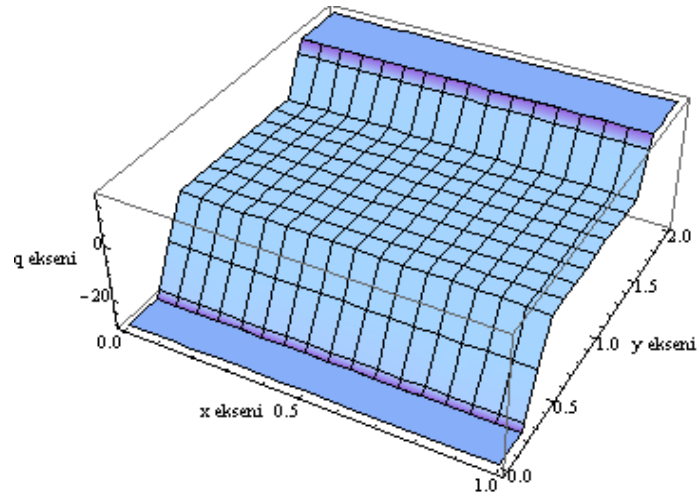
şeklinde elde edilir. Burada analitik çözüm $u = 50y$ ve $q = 50e_y$. n olduğundan

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ q_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50.00 \\ 25.00 \\ 75.00 \\ 50.00 \\ 75.00 \\ 25.00 \end{bmatrix}$$

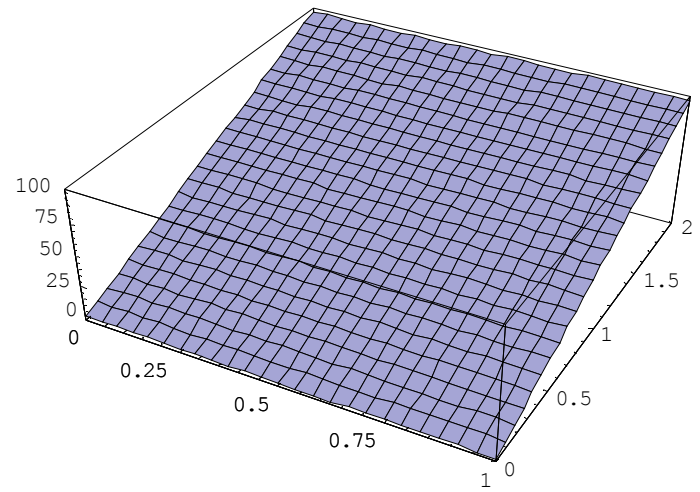
bulunur. Böylece u Dirichlet değerinin nümerik çözümü ile analitik çözümü arasında küçük bir hata oluştu. Fakat q Neumann değerinin nümerik çözümü ile analitik çözümü arasındaki hata azaldı. Nokta sayısı arttırıldığında q Neumann değerindeki hatanın azaldığı ortaya çıkar. Şimdi Analitik çözüm ve nümerik çözümün u ve q sınır koşulları için grafikleri çizilerek şekil üzerinde bu durum gösterilsin.



Şekil 5.15. 6 element için u sınır değerinin nümerik çözümünün grafiği



Şekil 5.16. 6 element için q sınır değerinin nümerik çözümünün grafiği

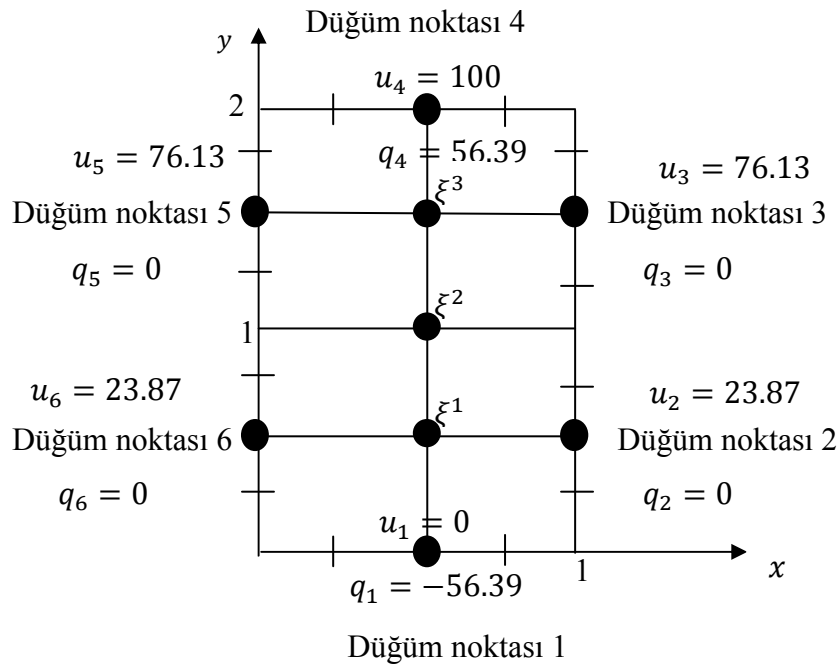


Şekil 5.17. 6 element için analitik çözümün grafiği

Şimdi de bu 6 element için iç bölgelerde alınacak yük noktaları ile çözüm bulunsun. $r_i = x_i - \xi^l$ olmak üzere $\xi^l \in \Omega$ noktasında $u(\xi^l)$ bilinmeyen potansiyeli hesaplanarak gerçek çözümle karşılaştırılacaktır. Bu çözüm

$$u(\xi^l) = \sum_{e=1}^E \check{u}_e \left(\underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{r_i n_i}{2\pi r^2} d\Gamma}_{H_{le}} \right) - \sum_{e=1}^E \check{q}_e \left(\underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{\ln r}{2\pi} d\Gamma}_{G_{le}} \right) \quad (5.88)$$

denkleminde gerekli değerler yazılarak bulunur.



Şekil 5.18. Örnek: 6 element için iç noktalarda çözüm

$$\xi^1 = \frac{1}{2}e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = -e_y$$

$$x = xe_x$$

$$d\Gamma = dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + \left(-\frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dx = 0.2500$$

$$G_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx = -0.0893$$

$$\xi^1 = \frac{1}{2}e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1$$

$$H_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.2500$$

$$G_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0893$$

$$\xi^1 = \frac{1}{2}e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1$$

$$H_{13} = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.0737$$

$$G_{13} = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \ln \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = 0.0146$$

$$\xi^1 = \frac{1}{2}e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = e_y$$

$$x = xe_x + 2e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + \left(\frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 1$$

$$H_{14} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{\frac{3}{2}}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right)} dx = 0.1024$$

$$G_{14} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} dx = 0.0673$$

$$\xi^1 = \frac{1}{2}e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{15} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.0737$$

$$G_{15} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^1 \ln \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = 0.0146$$

$$\xi^1 = \frac{1}{2}e_x + \frac{1}{2}e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{16} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.2500$$

$$G_{16} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0893$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = -e_y$$

$$x = xe_x$$

$$d\Gamma = dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + (-1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)$$

$$H_{21} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)} dx = 0.1475$$

$$G_{21} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = 0.0061$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right)e_x + (y - 1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(y - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (y - 1) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$H_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left((y - 1)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.1762$$

$$G_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{(y - 1)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0532$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right)e_x + (y - 1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(y - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (y - 1) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$H_{23} = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{\left((y-1)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.1762$$

$$G_{23} = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \ln \sqrt{(y-1)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0532$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = e_y$$

$$x = xe_x + 2e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 1 \cdot 1$$

$$H_{24} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{1}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)} dx = 0.1475$$

$$G_{24} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = 0.0061$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + (y-1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(y-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (y-1) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{25} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left((y-1)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.1762$$

$$G_{25} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^1 \ln \sqrt{(y-1)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0532$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}e_x + e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + (y-1)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(y-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = (y-1) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{26} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{\frac{1}{2}}{\left((y-1)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.1762$$

$$G_{26} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{(y-1)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0532$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = -e_y$$

$$x = xe_x$$

$$d\Gamma = dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + \left(-\frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{31} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{3}{2}}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right)} dx = 0.1024$$

$$G_{31} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} dx = 0.0673$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$H_{32} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.0737$$

$$G_{32} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = 0.0146$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = e_x$$

$$x = e_x + ye_y$$

$$d\Gamma = dy$$

$$x - \xi = \left(\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$H_{33} = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.2500$$

$$G_{33} = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \ln \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0893$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = e_y$$

$$x = xe_x + 2e_y$$

$$d\Gamma = -dx$$

$$x - \xi = \left(x - \frac{1}{2}\right)e_x + \left(\frac{1}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$H_{34} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dx = 0.2500$$

$$G_{34} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx = -0.0893$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{35} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.2500$$

$$G_{35} = -\frac{1}{2\pi} \int_2^1 \ln \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = -0.0893$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}e_x + \frac{3}{2}e_y$$

$$n = -e_x$$

$$x = ye_y$$

$$d\Gamma = -dy$$

$$x - \xi = \left(-\frac{1}{2}\right)e_x + \left(y - \frac{3}{2}\right)e_y$$

$$|x - \xi| = \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x - \xi) \cdot n = \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$H_{36} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)} dy = 0.0737$$

$$G_{36} = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dy = 0.0146$$

$$u(\xi^1) = [0.2500 \quad 0.2500 \quad 0.0737 \quad 0.1024 \quad 0.0737 \quad 0.2500] \begin{bmatrix} 0 \\ 23.87 \\ 76.13 \\ 100 \\ 76.13 \\ 23.87 \end{bmatrix}$$

$$-[-0.0893 \quad -0.0893 \quad 0.0146 \quad 0.0673 \quad 0.0146 \quad -0.0893] \begin{bmatrix} -56.39 \\ 0 \\ 0 \\ 56.39 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 24.56$$

$$\begin{aligned}
 u(\xi^2) &= [0.1475 \quad 0.1762 \quad 0.1762 \quad 0.1475 \quad 0.1762 \quad 0.1762] \begin{bmatrix} 0 \\ 23.87 \\ 76.13 \\ 100 \\ 76.13 \\ 23.87 \end{bmatrix} \\
 &\quad - [-0.0893 \quad -0.0893 \quad 0.0146 \quad 0.0673 \quad 0.0146 \quad -0.0893] \begin{bmatrix} -56.39 \\ 0 \\ 0 \\ 56.39 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= 49.98
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(\xi^3) &= [0.1024 \quad 0.0737 \quad 0.2500 \quad 0.2500 \quad 0.2500 \quad 0.0737] \begin{bmatrix} 0 \\ 23.87 \\ 76.13 \\ 100 \\ 76.13 \\ 23.87 \end{bmatrix} \\
 &\quad - [0.0673 \quad 0.0146 \quad -0.0893 \quad -0.0893 \quad -0.0893 \quad 0.0146] \begin{bmatrix} -56.39 \\ 0 \\ 0 \\ 56.39 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= 75.42
 \end{aligned}$$

Tablo 5.4. 6 element için iç noktalarda çözümün gerçek çözümle kıyası

$u(\xi^l)$	Gerçek Çözüm $u = 50y$	6 Element İçin Çözüm
$u(\xi^1)$	25	24.56
$u(\xi^2)$	50	49.98
$u(\xi^3)$	75	75.42

Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 de görüldüğü üzere bölgenin içindeki noktalar için düğüm noktaları arttırıldıkça bulunan değerler gerçek çözüme daha yakın elde edilmiş oldu.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Fiziksel Model Teorisi kısıtlamalarıyla birlikte Matematik Modellemeye imkan verirse nümerik modelleme için sonlu elemanlar, sınır elemanları, sonlu farklar yöntemleri ile sayısal sonuçlar elde edilebilir. Matematik Modelin doğruluk derecesi ve sonuçların yorumlanması, Sınır Elemanları yönteminde, nümerik hesaplamaları sıklaştırılmış elemanlarla yaparak kontrol edilebilir. Bu sıklaştırma sınır bölünmesinde yapılabildiği gibi integral yöntemlerinde ve bölge integrallerinde de yapılabilir.

Regüler İntegrallerin yanında zayıf ve kuvvetli tekil integraller ve yarı tekil integraller hesaplamalarda çok hassas olarak hesaplanabilmektedirler.

Bu tezde Laplace denklemi için Sınır Elemanları Metodu bütün yönleriyle sergilenmiş bulunuyor. Çıkan sonuçları daha da iyileştirmek için düğüm sayısı çoğaltıldığında gerçek çözümün bilinen çözüme yaklaştığı gözlenir. Sınırdaki daha yüksek mertebeli şekil fonksiyonları kullanarak ve nümerik integralleri daha hassas yaparak iyileştirmelerin olduğu görülür. Akı hesaplarında sabit elemanlarda görülen süreksizlikler beklendiği gibi lineer elemanlarda oluşmamış ve iyi yaklaşımlar bunlar içinde gözlemlenmiştir. Matematika programı kullanılarak bilgisayar programı yapılmış integrallerin hesaplanmasındaki hatalar iyice azaltılmıştır.

Böylesine önemli bir yöntemin başka sahalara uygulanmaları ileride yapılacak çalışmalar olarak önümüzde durmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] KYTHE, P., K., PURÍ, P., SCHÄFERKOTTER, M., R., Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Mathematica, 2002.
- [2] CROUCH, S., L., STARFIELD, A., M., Boundary Element Methods in Solid Mechanics, 1990.
- [3] GAUL, L., KÖGL, M., WAGNER, M., Boundary Element Methods for Engineers and Scientists, 2003.
- [4] BANERJEE, P., K., The Boundary Element Methods in Engineering, 1994.
- [5] BATHE, K., -J., Finite Element Procedures, 1996.
- [6] BALAS, J., SLÁDEK, J., SLÁDEK, V., Stress Analysis by Boundary Element Methods, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih Özbek, 17.08.1981 de İstanbul' da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 1998 yılında Geyve Lisesinden mezun oldu. 1998 yılında başladığı Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisansını 2003 yılında tamamladı. 2003 yılında özel bir dershanede Matematik Öğretmenliği görevine başladı ve halen aynı dershanede görevini sürdürmektedir.