T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI EULER DİZİ UZAYLARININ TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrah Evren KARA

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Mayıs 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI EULER DİZİ UZAYLARININ TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrah Evren KARA

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 03 / 06 /2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Metin Başarır	Doç.Dr.Mehmet Özen	Doç.Dr.Elman Aliyev
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bana zaman ayırıp ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yardımlarından dolayı Araş. Gör. Mahpeyker ÖZTÜRK'e, Sevim KULU' ya ve her zaman yanımda olup bana destek olan abim Recep KARA' ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Emrah Evren KARA

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

ρ	: Konveks modül
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$B(X)$	: X uzayının kapalı birim yuvarı
$S(X)$	: X uzayının birim küresi
Çek$A$	: A operatörünün sıfır uzayı(çekirdeği)
w	: Bütün dizilerin uzayı
λ^α	: λ dizi uzayının α-duali
λ^β	: λ dizi uzayının β-duali
λ^γ	: λ dizi uzayının γ-duali
L	: Banach limiti
f	: Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
fs	: Hemen hemen yakınsak serilerin uzayı
l^0	: Reel sayı dizilerinin uzayı
$\mathcal{F}$	: $\mathbb{N}$' nin bütün sonlu alt kümelerinin ailesi
N_p	: Nörlund ortalaması(matrisi)
R^t	: Riesz ortalaması(matrisi)
C_1	: 1. Mertebeden Cesàro ortalaması
S	: Toplam matrisi
Δ^1	: Fark matrisi
$\Delta^{(1)}$	: Fark matrisi
$\Delta^{(m)}$	: m. mertebeden fark matrisi
E^r	: Euler ortalaması(matrisi)
e_0^r	: e_0^r Euler dizi uzayı
e_c^r	: e_c^r Euler dizi uzayı

e_∞^r	: e_∞^r Euler dizi uzayı
$e_0^r(\Delta)$	: $e_0^r(\Delta)$ Euler fark dizi uzayı
$e_c^r(\Delta)$	: $e_c^r(\Delta)$ Euler fark dizi uzayı
$e_\infty^r(\Delta)$	: $e_\infty^r(\Delta)$ Euler fark dizi uzayı
$e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$	: $e_0^r(\Delta^{(m)})$ Euler dizi uzayı
$e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$	: $e_0^r(\Delta^{(m)})$ Euler dizi uzayı
$e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)$	: $e_0^r(\Delta^{(m)})$ Euler dizi uzayı
e_p^r	: e_p^r Euler dizi uzayı
e_∞^r	: e_∞^r Euler dizi uzayı
$e^r(p)$	: $e^r(p)$ Euler dizi uzayı
$p = (p_k)$	: Pozitif reel sayıların sınırlı dizisi
$(\lambda{:}\,\mu)_s$	: s-çarpımsal matrislerin sınıfı

ÖZET

Anahtar kelimeler: Euler dizi uzayı, Paranormlu dizi uzayı, α-, β- ve γ-dualleri, Schauder bazı, Matris dönüşümleri, Banach-Saks özelliği, Zayıf Banach-Saks özelliği, Sabit nokta özelliği, p tipi Banach-Saks özelliği, (H) özelliği, Rotund olma, LUR özelliği

"Bazı Euler dizi uzaylarının topolojik ve geometrik özellikleri" isimli bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. İlk beş bölüm bu konu ile ilgili yapılan çalışmaların bir kısmının derlemesinden oluşmaktadır. Altıncı bölüm ise tezin orijinal kısmıdır.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, e_0^r ve e_c^r Euler dizi uzayları tanıtıldı ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri verildi.

Üçüncü bölümde, bazı Euler fark dizi uzayları tanıtıldı ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri verildi.

Dördüncü bölümde, $m.$ mertebeden bazı Euler fark dizi uzayları tanıtıldı ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri verildi.

Beşinci bölümde, e_p^r ve e_∞^r dizi uzayları tanıtıldı ve bu uzayların bazı topolojik ve geometrik özellikleri verildi.

Altıncı bölümde ise e_p^r Euler dizi uzayının genelleştirilmiş hali olan $e^r(p)$ Euler dizi uzayı tanımlandı ve bu uzayın bazı topolojik ve geometrik özellikleri diğer bölümlerden elde edilen sonuçlar doğrultusunda çalışıldı.

Son bölümde ise, elde edilen bazı genel sonuçlar verilmiştir.

TOPOLOGICAL AND GEOMETRIC PROPERTIES OF SOME EULER SEQUENCE SPACES

SUMMARY

Key Words: Euler Sequence Spaces, Paranormed Sequence Spaces, α-, β-, and γ-Duals, Schauder Basis, Matrix Transformations, Banach-Saks Property, Weak Banach-Saks Property, Fixed Point Property, Banach-Saks Type p, Property (H), Rotund Property, LUR Property

This study which is entitled "Topological and Geometric Properties of Some Euler Sequence Spaces" contains seven chapters. The first five chapters are composed of a compilation of some studies on this subject. The sixth chapter contains original results which related to some topological and geometric properties of $e^r(p)$ sequence space.

In the first chapter, some basic definitions and theorems which are used in the following chapters, are given.

In the second chapter, The Euler sequence spaces e_0^r and e_c^r are introduced and some topological properties of these spaces are examined.

In the third and fourth chapters, some Euler difference sequence spaces and Euler spaces of difference sequences of order m are introduced and some topological properties of these spaces are examined, respectively.

In the fifth chapter, The Euler sequence spaces e_p^r and e_∞^r are introduced and some topological and geometric properties of these spaces are examined.

In the sixth, we introduce the generalized Euler sequence space $e^r(p)$ and examine some topological and geometric properties of this space.

The last chapter gives some general results which are obtained.

BÖLÜM 1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ ve $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$+: X \times X \to X \qquad\qquad .: K \times X \to X$$
$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \to \lambda . x$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

1) $x + y = y + x$
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
3) $\forall x \in X$ için $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır.
4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.
5) $1. x = x$
6) $\alpha. (x + y) = \alpha. x + \alpha. y$
7) $(\alpha + \beta). x = \alpha. x + \beta. x$
8) $\alpha. (\beta. x) = (\alpha. \beta). x$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne, K üzerinde bir lineer uzay(vektör uzayı) denir.

Tanım 1.1.2. Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$d: X \times X \to \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \to d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir [49].

Tanım 1.1.3. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir [49].

Tanım 1.1.4. X bir lineer uzay olsun. $g: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa g' ye X üzerinde bir paranorm (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir.

i) $g(x) \geq 0$ ve $g(0) = 0$

ii) $g(-x) = g(x)$

iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$ (alt toplamsallık özelliği)

iv) (Skalerle çarpımın sürekliliği): (t_n), $t_n \to t$ $(n \to \infty)$ şartını sağlayan skalerlerin bir dizisi ve (x_n), X içinde $g(x_n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$ olan bir dizi ise $n \to \infty$ iken $g(x_n t_n - xt) \to 0$ dır [20].

Tanım 1.1.5. X, K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \|.\|: X &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\to \| x \| \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

(N1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$

(N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (üçgen eşitsizliği) özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir [49].

Tanım 1.1.6. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. X bir normlu uzay olmak üzere,

$$B(X) = \{x \in X: \ \| x \| \leq 1\}$$

kümesine X uzayının kapalı birim yuvarı,

$$S(X) = \{x \in X: \ \| x \| = 1\}$$

kümesine ise, X uzayının birim küresi denir.

Tanım 1.1.7. $A: X \to Y$ lineer operatörü verilsin.

$$\text{Çek}A = \{x \in X: Ax = 0\}$$

kümesine A operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir [60].

Teorem 1.1.8. A lineer operatörünün bire bir olması için gerek yeter şart $Çek A = \{0\}$ olmasıdır [60].

Tanım 1.1.9. X bir K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X, K)$ uzayına X uzayının sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 1.1.10. X, K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$<.,.>: X \times X \to K$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse $<.,.>$' ye X üzerinde bir iç çarpım $(X,<.,.>)$ ikilisine de iç çarpım (veya ön Hilbert) uzayı denir.

i) $\forall x \in X$ için $< x,x >\geq 0$ ve $< x,x >= 0 \Leftrightarrow x = \theta$
ii) $\forall x,y \in X$ için $< x,y >=\overline{< y,x >}$ (kompleks eşlenik)
iii) $\forall x,y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için $< \alpha x,y >= \alpha < x,y >$
iv) $\forall x,y,z \in X$ için $< x+y,z >=< x,z > +< y,z >$
($K = \mathbb{R}$ halinde $< x,y >=< y,x >$ dir.) [49]

Tanım 1.1.11. $(X,<.,.>)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu

$$\| x \| =< x,x >^{1/2} \tag{1.1.11.1}$$

olarak tanımlanır [49].

Teorem 1.1.12. (Paralel Kenar Kuralı) Bir $(X,<.,.>)$ iç çarpım uzayı üzerindeki (1.1.11.1) normu $\forall x,y \in X$ için

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$$

eşitliğini sağlar [49].

Teorem 1.1.13. $(X,\|.\|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter şart $\forall x,y \in X$ vektörleri için paralel kenar kuralı özelliğinin sağlanmasıdır [49].

Tanım 1.1.14. Bir $(X,<.,.>)$ iç çarpım uzayı (1.1.11.1) normuna göre tam ise yani $(X,<.,.>)$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsarsa, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [49].

Örnek 1.1.15. $1 \leq p < \infty$ ve $p \neq 2$ olmak üzere ℓ_p Banach uzayı bir iç çarpım uzayı değildir ve dolayısıyla da bir Hilbert uzayı değildir [49].

1.2. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Tanım 1.2.1. $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ olmak üzere

$$w=\{x=(x_k)\in w:\ x:\mathbb{N}\to K, k\to x_k=(x_k)\}$$

kümesine bütün dizilerin kümesi denir. w kümesi,

$$((x_k),(y_k))\to(x_k+y_k)\ \text{ ve } \big(\lambda,(x_k)\big)\to(\lambda x_k)$$

ikili işlemleri ile K üzerinde bir vektör uzayıdır. w' nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir [20].

Örnek 1.2.2.

$$\ell_\infty=\left\{x=(x_k)\in w:\sup_k|x_k|<\infty\right\},$$

$$c=\left\{x=(x_k)\in w:(x_k)\text{ yakınsak yani }\lim_{k\to\infty}x_k\text{ mevcut}\right\},$$

$$c_0=\left\{x=(x_k)\in w:\ \lim_{k\to\infty}x_k=0\right\},$$

$$bs=\left\{x=(x_k)\in w:\left(\sum_{k=0}^{n}x_k\right)\in\ell_\infty\right\},$$

$$cs=\left\{x=(x_k)\in w:\ \left(\sum_{k=0}^{n}x_k\right)\in c\right\},$$

$$\ell_p=\left\{x=(x_k)\in w:\ \sum_k|x_k|^p<\infty\right\},\qquad(1\le p<\infty)$$

$$bv=\left\{x=(x_k)\in w:|x_0|+\sum_k|x_k-x_{k+1}|<\infty\right\}$$

uzayları birer dizi uzayıdır [20].

Tanım 1.2.3. (K-, FK-, BK-Uzayları) λ bir lineer topolojik uzay olsun. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $p_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $p_i: \lambda \to \mathbb{C}$ dönüşümü sürekliyse λ' ya bir K-uzayı denir. Tam lineer metrik bir K-uzayına bir FK-uzayı, normlu FK-uzayına da bir BK-uzayı denir [5].

Örnek 1.2.4. ℓ_∞, c ve c_0 uzayları $\| x \|_\infty = \sup_k |x_k|$ normuna göre, $1 \leq p < \infty$ için ℓ_p uzayı da $\| x \|_p = \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ normuna göre birer BK-uzayıdırlar [45].

Teorem 1.2.5. BK-uzayları arasında tanımlanan lineer dönüşümler süreklidirler [62].

Tanım 1.2.6. λ ve μ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ $(n, k = 0,1,2, \ldots)$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k) \in \lambda$ iken $Ax = (A_n(x)) \in \mu$ ise o zaman A' ya λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümüdür denir ve bu durum $A: \lambda \to \mu$ olarak gösterilir. Ax dizisine de x' in A-dönüşümü denir.

$(\lambda: \mu)$ ile $A: \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi, $(\lambda: \mu; p)$ ile de limit ya da toplamı koruyan $A: \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi gösterilecektir. $(\lambda: \mu; p) \subset (\lambda: \mu)$ olduğu açıktır [52].

Tanım 1.2.7. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $\forall n = 0,1,2, \ldots$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ mevcut ve $\lim_n A_n(x) = l \in \mathbb{C}$ ise $x = (x_n)$ dizisine l sayısı için A-toplanabilirdir denir. Bu durum x' in A-limiti l' dir diye ifade edilir ve $A - \lim_n x_n = l$ olarak gösterilir [45].

Tanım 1.2.8. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $k > n$ olan $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üçgensel matris denir. $A = (a_{nk})$ üçgensel matrisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A' ya normal matris denir [20].

Teorem 1.2.9. $A \in (c\colon c)$ olması için gerek ve yeter şartlar

i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) Bazı $\alpha \in \mathbb{C}$' ler için $\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = \alpha$

iii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k$

olmasıdır [52].

Tanım 1.2.10. Teorem 1.2.9. daki şartları sağlayan bir matrise koruyucu (conservative) matris denir. Bu tip matrisler kısaca K-matrisi olarak gösterilir.

Teorem 1.2.11. $A \in (c\colon c; p)$ olması için gerek ve yeter şartlar

i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = 1$

olmasıdır [52].

Tanım 1.2.12. Teorem 1.2.11. deki şartları sağlayan bir matrise Toeplitz matrisi veya regüler matris denir. Bu tip matrisler kısaca T-matrisi olarak gösterilirler.

Tanım 1.2.13. $p_0 > 0,\ p_n \geq 0\ (n \geq 1),\ P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$ olsun. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$p_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $N_p = (p_{nk})$ matrisine Nörlund matrisi(ortalaması) denir [52].

Tanım 1.2.14. $t = (t_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$, $(n \in \mathbb{N})$ olsun. O zaman $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$r_{nk}^{t} = \begin{cases} \frac{t_k}{T_n} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $R^t = (r_{nk}^t)$ matrisine Riesz ortalaması($t = (t_k)$ dizisiyle ilişkili) denir [55].

Tanım 1.2.15. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ $için$

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c_{nk})$ matrisine 1. mertebeden Cesàro ortalaması denir [55].

Tanım 1.2.16. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$s_{nk} = \begin{cases} 1 & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $S = (s_{nk})$ matrisine toplam(summation) matrisi denir [55].

Tanım 1.2.17. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & (n-1 \leq k \leq n) \\ 0 & (0 \leq k < n-1 \text{ yada } k > n) \end{cases}$$

ve

$$d_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & (n \leq k \leq n+1) \\ 0 & (0 \leq k < n \text{ yada } k > n+1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(1)} = (\delta_{nk})$ ve $\Delta^1 = (d_{nk})$ matrislerine fark matrisleri denir [55].

Tanım 1.2.18. Herhangi bir sabit $m \in \mathbb{N}$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_{nk}^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{n-k}\binom{m}{n-k} & (\max\{0, n-m\} \leq k \leq n) \\ 0 & (0 \leq k < \max\{0, n-m\} \text{ yada } k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(m)} = (\delta_{nk}^{(m)})$ matrisine m. mertebeden fark matrisi denir [55].

Tanım 1.2.19. $A^r = (a_{nk}^r)$ matrisi herhangi bir sabit $r \in \mathbb{R}$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk}^r = \begin{cases} \dfrac{1 + r^k}{n+1} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (n > k) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matristir [5].

Tanım 1.2.20. $r \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk}^r = \begin{cases} \binom{n}{k}(1-r)^{n-k} r^k & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $E^r = (e_{nk}^r)$ matrisine r. mertebeden Euler ortalaması denir [20].

Teorem 1.2.21. $r, s \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda Euler matrisi için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $E^r E^s = E^{rs}$

ii) $(E^r)^{-1} = E^{\frac{1}{r}}$

iii) E^r-matrisi bir K-matrisidir $\Leftrightarrow$ $0 \leq r \leq 1$ dir.

iv) E^r-matrisi regüler matristir $\Leftrightarrow$ $0 < r < 1$ dir.

[20].

Tanım 1.2.22. λ bir normlu dizi uzayı olsun ve (b_n) dizisi verilsin. $\forall x \in \lambda$ için

$$\lim_{n\to\infty} \parallel x - (\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) \parallel = 0$$

olacak şekilde bir tek (α_n) skalerler dizisi varsa (b_n)' ye λ dizi uzayının bir Schauder bazı(kısaca bazı) denir ve burumda $x = \sum_k \alpha_k b_k$ yazılır [5].

Tanım 1.2.23. λ bir dizi uzayı olmak üzere bir A sonsuz matrisinin λ uzayındaki matris bölgesi(domain) olan λ_A kümesi

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in w: Ax \in \lambda\}$$

olarak tanımlanır [5].

Şimdi yukarıda tanımları verilen C_1, R^t, Δ ve A^r matrisleri yardımıyla tanımlanan bazı dizi uzayları örnek olarak verilecektir.

Örnek 1.2.24. $(\ell_\infty)_{C_1} = X_\infty$, $(\ell_p)_{C_1} = X_p$, $(\ell_\infty)_{R^t} = r_\infty^t$, $c_{R^t} = r_c^t$, $(c_0)_{R^t} = r_0^t$, $(\ell_p)_\Delta = bv_p$, $(c_0)_{A^r} = a_0^r$, $c_{A^r} = a_c^r$, $(\ell_p)_{A^r} = a_p^r$, $(\ell_\infty)_{A^r} = a_\infty^r$ dır [5].

Bir A matrisinin λ dizi uzayına kısıtlanmasıyla elde edilen λ_A yeni dizi uzayı, genelde orijinal λ uzayının genişlemesi ya da daralması olmasına rağmen bazı durumlarda bu uzaylar örtüşmezler [55].

Örnek 1.2.25. $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ ise $\lambda_S \subset \lambda$ ve $\lambda \in \{c, c_0\}$ ise $\lambda \subset \lambda_{\Delta^1}$ kapsamaları kesin bir şekilde sağlanır. Buna rağmen $z = ((-1)^k)$ olmak üzere $\lambda = c_0 + z$ yani $x \in \lambda \Leftrightarrow$ bazı $s \in c_0$ ve bazı $\alpha \in \mathbb{C}$' ler için $x = s + \alpha z$ olarak alınsın ve A matrisi de satırları $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n = (-1)^n e^{(n)}$ şeklinde tanımlanan bir matris olsun($e^{(n)}$, n. terimi 1 diğer terimleri 0 olan dizi). O zaman $Ae = z \in \lambda$ ama $Az = e \notin \lambda$ olup bu $z \in \lambda \backslash \lambda_A$ ve $e \in \lambda \backslash \lambda_A$ olduğunu gösterir($e = (1,1,1, \dots)$). Yani λ ve λ_A uzayları örtüşmezler [55].

Teorem 1.2.26. A bir üçgensel matris ise $(c: \|.\|_A)$ bir BK-uzayıdır [62, s. 61].

Teorem 1.2.27. λ, μ herhangi iki dizi uzayı, A bir sonsuz matris ve B de üçgensel bir matris olsun. O zaman $A \in (\lambda: \mu_B)$ olması için gerek ve yeter şart $BA \in (\lambda: \mu)$ olmasıdır [5].

Tanım 1.2.28. λ ve μ dizi uzayları için $S(\lambda, \mu)$ kümesi

$$S(\lambda, \mu) = \{z = (z_k) \in w: \forall x \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in \mu\}$$

olarak tanımlansın. Bu $S(\lambda, \mu)$ kümesi yardımı ile λ uzayının α, β ve γ-dualleri olan $\lambda^\alpha, \lambda^\beta$ ve λ^γ kümeleri,

$$\lambda^\alpha = S(\lambda, \ell_1), \quad \lambda^\beta = S(\lambda, cs) \text{ ve } \lambda^\gamma = S(\lambda, bs)$$

olarak tanımlanır [4].

Örnek 1.2.29. $bv_0 = bv \cap c_0$ olmak üzere

$$cs^\alpha = bv^\alpha = bv_0^\alpha = bs^\alpha = \ell$$
$$cs^\beta = bv, bv^\beta = cs, bv_0^\beta = bs, bs^\beta = bv_0$$
$$cs^\gamma = bv, bv^\gamma = bs, bv_0^\gamma = bs, bs^\gamma = bv$$

dir [20].

Teorem 1.2.30. λ ve μ iki dizi uzayı ve $\eta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olsun. O zaman $\lambda^\alpha \subseteq \lambda^\beta \subseteq \lambda^\gamma$ dir ve $\lambda \subset \mu$ ise $\lambda^\eta \supset \mu^\eta$ dir [55].

Tanım 1.2.31. λ ve μ dizi uzayları verilsin. Eğer $\forall x \in \lambda$ elemanı herhangi bir s reel sayısı için $\lim x$' e s defa A-toplanabilir ise $A \in (\lambda: \mu)$ matrisine s-çarpımsaldır denir. s-çarpımsal bütün matrislerin sınıfı $(\lambda: \mu)_s$ ile gösterilir [5].

1.3. Hemen Hemen Yakınsaklık

Tanım 1.3.1. (Banach Limiti) w üzerinde S operatörü $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(Sx)_n = x_{n+1}$ şeklinde tanımlansın. ℓ_∞ üzerinde tanımlı negatif olmayan(non-negative) L lineer fonksiyoneli

i) $L(Sx) = L(x)$
ii)$L(e) = 1, \qquad e = (1,1,1,\dots)$

şartlarını sağlıyorsa L' ye bir Banach limiti denir [48].

Tanım 1.3.2. (Hemen Hemen(Almost) Yakınsak Dizi) Bir $x = (x_k)$ dizisinin bütün Banach limitleri α ise bu $x = (x_k)$ dizisi genelleştirilmiş α limitine hemen hemen yakınsaktır denir ve $f - \lim x_k = \alpha$ olarak gösterilir. Hemen hemen yakınsak bütün dizilerin uzayı f ile gösterilecektir [48].

Tanım 1.3.3. (Hemen Hemen Yakınsak Seri) Sonsuz bir serinin kısmi toplamlar dizisi hemen hemen yakınsak ise bu seriye hemen hemen yakınsaktır denir. Hemen hemen yakınsak bütün serilerin uzayı fs ile gösterilecektir [48].

Teorem 1.3.4. Sınırlı reel değerli bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$t_{mn}(x) = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}(S^i x)_n = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} x_{i+n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$f - \lim x_k = \alpha$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} t_{mn}(x) = \alpha$ (n' ye göre düzgün) olmasıdır [48].

1.4. Konvekslik ve Modül

Tanım 1.4.1. (Düzgün konveks Uzay) $\forall \varepsilon > 0$ ve $x, y \in S(X)$ için,

$$\|x-y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| < 1-\delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa X Banach uzayına düzgün konveks uzay denir.

Tanım 1.4.2. X bir reel vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlayan $\rho: X \to [0, \infty]$ fonksiyoneline bir modül denir.

i) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $|\alpha| = 1$ olan α skalerleri için $\rho(\alpha x) = \rho(x)$ dir.
iii) $\alpha + \beta = 1$ olan $\forall \alpha, \beta \geq 0$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ dir

Ayrıca aşağıdaki iv) şartını sağlayan ρ modülüne konveks modül denir.

iv) $\alpha + \beta = 1$ olan $\forall \alpha, \beta \geq 0$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$ dir.

Tanım 1.4.3. E bir normlu uzay olsun. $0 \leq \varepsilon \leq 2$ olmak üzere Guarri' nin konvekslik modülü

$$\beta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \|\alpha x + (1-\alpha)y\| : x, y \in S(E), \|x-y\| = \varepsilon\right\}$$

şeklinde tanımlanır [48].

Teorem 1.4.4.
i) $\beta_X(2) = 1$ ise $(X, \|.\|)$ normlu uzayı kesin konvekstir.
ii) $(X, \|.\|)$ düzgün konvekstir $\Leftrightarrow$ $0 < \varepsilon \leq 2$ için $\beta_X(\varepsilon) > 0$ dır.
[28].

1.5. Bazı Geometrik Özellikler

Tanım 1.5.1. $(X,\|.\|)$ bir reel Banach uzayı ve $x \in S(X)$ olsun. X içinde $\|x_n\| \to 1$ $(n \to \infty)$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ şartını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi için $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ oluyorsa x noktasına $B(X)$' in bir H-noktasıdır denir [57].

Tanım 1.5.2. (Schur (H) Özelliği) $(X,\|.\|)$ bir reel Banach uzayı olsun. $S(X)$ içindeki her bir nokta $B(X)$ in bir H-noktası ise X'e (H) yada Schur özelliğine sahiptir denir [57].

Tanım 1.5.3. (Ekstremum Nokta) $(X,\|.\|)$ bir reel Banach uzayı ve $x \in S(X)$ olsun. Herhangi $y,z \in B(X)$ için $2x = y + z$ eşitliği $y = z$ olmasını gerektiriyorsa x noktasına $B(X)$' in ekstremum noktası denir [57].

Tanım 1.5.4. (Rotund Uzay) $\forall x \in S(X)$ noktası $B(X)$' in bir ekstremum noktası olan X Banach uzayına rotund ya da kesin konveks uzay denir [57].

Tanım 1.5.5. $(X,\|.\|)$ bir reel Banach uzayı ve $x \in S(X)$ olsun. $B(X)$ içinde $\|x_n + x\| \to 2$ $(n \to \infty)$ olan herhangi bir (x_n) dizisi için $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ oluyorsa x noktasına $B(X)$' in bir lokal düzgün rotund noktası(LUR-noktası) denir [57].

Tanım 1.5.6. (Lokal Düzgün Rotund Uzay) $\forall x \in S(X)$ noktası $B(X)$' in bir LUR-noktası olan X Banach uzayına lokal düzgün rotund uzay (LUR-uzay) denir [57].

Teorem 1.5.7. X LUR-uzaydır $\Leftrightarrow$ X rotund uzaydır ve (H) özelliğine sahiptir [57].

Tanım 1.5.8. (Banach-Saks Özelliği) X bir Banach uzayı olsun. X içindeki her sınırlı (x_n) dizisi için,

$$\{t_k(z)\} = \left\{\frac{1}{k+1}(z_0 + z_1 + \cdots + z_k)\right\} \; ; \quad (k \in \mathbb{N})$$

dizisi X içindeki norma göre yakınsak olacak şekilde (x_n) dizisinin bir (z_n) alt dizisi varsa X' e Banach-Saks özelliğine sahiptir denir [48].

Tanım 1.5.9. (Zayıf Banach-Saks Özeliği) X bir Banach uzayı olsun. X içinde $x_n \xrightarrow{w} x$ olan herhangi bir (x_n) dizisi verildiğinde

$$\{t_k(z)\} = \left\{\frac{1}{k+1}(z_0 + z_1 + \cdots + z_k)\right\} \;;\;\; (k \in \mathbb{N})$$

dizisi sıfıra kuvvetli yakınsak olacak şekilde (x_n) dizisinin bir (z_n) alt dizisi varsa X' e zayıf Banach-Saks özelliğine sahiptir denir [48].

Tanım 1.5.10. Garcia-Falset tarafından $R(X)$ katsayısı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$R(X) = \sup\left\{\liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\| : (x_n) \subset B(X), x_n \xrightarrow{w} 0, x \in B(X)\right\}$$

[28].

Örnek 1.5.11. $R(c_0) = R(\ell_1) = 1$, $1 \le p < \infty$ için $R(\ell_p) = 2^{1/p}$, $R(c) = 2$ dir [28].

Teorem 1.5.12. $R(X) < 2$ ise X zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir [28].

Tanım 1.5.13. A kümesi, X Banach uzayının alt kümesi olsun. $\forall x, y \in A$ için $\|Ux - Uy\| \le \|x - y\|$ eşitsizliği sağlanıyorsa $U: A \to X$ dönüşümüne genişlemeyen(non-expansive) bir dönüşüm adı verilir.

Tanım 1.5.14. (Zayıf Sabit Nokta Özelliği) X bir Banach uzayı olsun. X' in zayıf kompakt konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlı her genişlemeyen kendine dönüşümün(non-expansive self-mapping) bir sabit noktası varsa X' e zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir denir [48].

Tanım 1.5.15. (p Tipi Banach-Saks Özelliği) X bir Banach uzayı ve $1 < p < \infty$ olsun. Eğer X içinde sıfıra zayıf yakınsak her dizinin bir (x_k) alt dizisi, $\forall n = 1, 2, \ldots$ ve bazı $C > 0$' lar için

$$\|x_k\| \leq Cn^{1/p}$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa X' e p tipi Banach-Saks(Banach-Saks type p) yada (BS_p) özelliğine sahiptir denir [48].

BÖLÜM 2. e_0^r VE e_c^r EULER DİZİ UZAYLARI

2.1. Giriş

E^r Euler matrisi $0 < r < 1$ için regüler matris olduğudan bundan sonra aksi belirtilmedikçe $0 < r < 1$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.1. e_0^r ve e_c^r Euler dizi uzayları

$$e_0^r = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k = 0 \right\}$$

ve

$$e_c^r = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

olarak tanımlanır. Tanım 1.2.23. kullanılarak e_0^r ve e_c^r uzayları

$$e_0^r = (c_0)_{E^r} \text{ ve } e_c^r = c_{E^r}$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir ve $e_0^r \subset e_c^r$ olduğu açıktır.

Bu ve bundan sonraki birkaç bölümde $x = (x_k)$ dizisinin E^r-dönüşümü sık sık kullanılacağı için kolaylık sağlaması açısından bu dönüşüm dizisi $y = (y_k(r))$ dizisi ile gösterilecektir. Yani, $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$y_k(r) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \tag{2.1.1.1}$$

olarak alınacaktır [5].

Teorem 2.1.2. e_0^r ve e_c^r kümeleri koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre lineer uzaylardır ve bu uzaylar $\| x \|_{e_0^r} = \| x \|_{e_c^r} = \| E^r x \|_{\ell_\infty}$ normu ile BK-uzayıdırlar.

İspat: Teoremin ilk kısmının ispatı yani e_0^r ve e_c^r uzaylarının bir lineer uzay olduğunun gösterilmesi kolaydır. Diğer taraftan $E^r = (e_{nk}^r)$ normal matris($\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $k > n$ iken $e_{nk}^r = 0$ ve $e_{nn}^r \neq 0$) ve c, c_0 uzayları üzerlerindeki doğal norma göre BK-uzayı olduğundan Teorem 1.2.26' dan dolayı e_0^r ve e_c^r uzayları BK-uzayıdırlar.

Ayrıca e_0^r ve e_c^r uzaylarının mutlak değer özelliğini sağlamadığını yani e_0^r ve e_c^r uzaylarında en az bir $x = (x_k)$ dizisinin, $\|x\|_{e_0^r} \neq \||x|\|_{e_0^r}$ ve $\|x\|_{e_c^r} \neq \||x|\|_{e_c^r}$ olacak şekilde bulunabileceğini göstermek kolaydır. Bu yüzden e_0^r ve e_c^r uzayları mutlak olmayan(non-absolute) türden dizi uzayıdırlar [5].

Teorem 2.1.3. Mutlak olmayan türden e_0^r ve e_c^r Euler dizi uzayları sırasıyla c_0 ve c uzaylarına lineer izomorfiktirler. Yani $e_0^r \cong c_0$ ve $e_c^r \cong c$ dir.

İspat: $e_0^r \cong c_0$ olduğunu gösterelim. Bunun için e_0^r ve c_0 uzayları arasında bire bir, örten ve normu koruyan bir lineer T dönüşümün varlığının gösterilmesi gerekir. Bu T dönüşümü (2.1.1.1) ile verilen ifade olarak alınsın. Yani

$$T: e_0^r \to c_0, \quad x = (x_k) \to Tx = y = (y_k) = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right)$$

olsun. T' nin lineer olduğu açıktır. $Tx = 0$ ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0 \Rightarrow x = \theta$ olacağından Çek$T = \{0\}$ dır. Teorem 1.1.8. e göre T dönüşümü bire bir dönüşümdür. $y \in c_0$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k(r) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} y_j$$

olacak şekilde $x = \{x_k(r)\}$ dizisi tanımlansın. O zaman

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (E^r x)_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} y_j \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n = 0\end{aligned}$$

olup $x \in e_0^r$' dir. $y \in c_0$ keyfi seçildiğinden T örtendir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\| x \|_{e_0^r} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} y_j \right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \| y \|_{c_0} < \infty\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak T dönüşümü bire bir, örten ve normu koruyan bir lineer dönüşümdür. O halde $e_0^r \cong c_0$ dır. Yukarıdaki ispatta e_0^r ve c_0 yerine sırasıyla e_c^r ve c alınırsa $e_c^r \cong c$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar [5].

Teorem 2.1.4. $c_0 \subset e_0^r$ ve $c \subset e_c^r$ kapsamaları kesin bir şekilde sağlanmasına rağmen e_0^r ve ℓ_∞ uzayları birbirini içermezler .

İspat: Herhangi bir $s \in c_0$ verilsin. $r.$ mertebeden E^r Euler matrisinin regülerliği göz önüne alınırsa $E^r s \in c_0$ yani $s \in e_0^r$ elde edilir. Bu yüzden $c_0 \subset e_0^r$ kapsaması sağlanır.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $u_k(r) = (-r)^{-k}$ şeklinde tanımlanan $u = \{u_k(r)\}$ dizisi verilsin.

$$\lim_{k\to\infty} (E^r u)_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (-r)^{-j}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} \, (-1)^j$$

$$= \lim_{k\to\infty} (1-r-1)^k = \lim_{k\to\infty} (-r)^k = 0$$

olup $E^r u = \{(-r)^k\} \in c_0$ yani $u \in e_0^r$ bulunur.

$$\lim_{k\to\infty} u_k(r) = \lim_{k\to\infty} (-r)^{-k} = -\infty$$

olup $u \notin c_0$ dır. Bu yüzden $u \in (e_0^r - c_0)$ olur. O halde $c_0 \subset e_0^r$ kapsaması kesin bir şekilde sağlanır. Aynı yöntemle $c \subset e_c^r$ kapsamasının kesin bir şekilde sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Şimdi de $x = (1,1,1,\ldots)$ ve $u = \{u_k(r)\}$ dizisi de yukarıda tanımlandığı gibi olsun.

$$\| u \|_{\ell_\infty} = \sup_k |(-r)^{-k}| = \infty \; (0 < r < 1)$$

olup $u \notin \ell_\infty$ dır. Ayrıca yukarıda $u \in e_0^r$ olduğu gösterildiğinden

$$u \in (e_0^r - \ell_\infty) \tag{2.1.4.1}$$

olur. Diğer taraftan

$$\| x \|_{\ell_\infty} = \lim_k |x_k| = 1 \Rightarrow x \in \ell_\infty$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} (E^r x)_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j = 1$$

olup $E^r x = \{(E^r)_k\} \notin c_0 \Rightarrow x \notin e_0^r$ dir. Bu ise

$$x \in (\ell_\infty - e_0^r) \tag{2.1.4.2}$$

demektir.

(2.1.4.1) ve (2.1.4.2) ifadeleri birlikte düşünülürse ℓ_∞ ve e_0^r uzaylarının birbirini içermediği görülür. Bu da ispatı tamamlar [5].

Teorem 2.1.5. $0 < t < r < 1$ ise $e_0^r \subset e_0^t$ ve $e_c^r \subset e_c^t$ dir.

İspat: $x = (x_k) \in e_0^r$ olsun. $y = \{y_k(r)\}$ dizisi (2.1.1.1) ile verilen dizi olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$z_k = \sum_{i=0}^{k} e_{ki}^t x_i = \sum_{i=0}^{k} e_{ki}^t \left(\sum_{j=0}^{i} e_{ij}^{1/r} y_j \right) = \sum_{j=0}^{k} e_{kj}^{t/r} y_j$$

$\left(x_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (r-1)^{i-j} r^{-i} y_j = \sum_{j=0}^{i} e_{ij}^{1/r} y_j \right)$ dir. $0 < t < r < 1$ olduğundan $0 < \frac{t}{r} < 1$ ve Teorem 1.2.21. iv)' e göre $E^{t/r}$ regüler bir matristir. O halde Teorem 1.2.11.' e göre $y = (y_k) \in c_0$ iken $z = (z_k) \in c_0$ ve bu yüzden de $x = (x_k) \in e_0^t$ elde edilir. Bu ise $e_0^r \subset e_0^t$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $e_c^r \subset e_c^t$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 2.1.5. e_0^r uzayında her sabit $k \in \mathbb{N}$ için terimleri

$$b_n^{(k)}(r) = \begin{cases} 0 & (0 \leq n < k) \\ \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} & (n \geq k) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $b^{(k)}(r) = \{b_n^{(k)}(r)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. O zaman $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k(r) = (E^r x)_k$ ve $l = \lim_{k\to\infty} (E^r x)_k$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $\{b^{(k)}(r)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi e_0^r uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in e_0^r$ elemanı

$$x = \sum_k \lambda_k(r) b^{(k)}(r) \qquad (2.1.5.1)$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir.

ii) $\{e, b^{(k)}(r)\}$ kümesi e_c^r uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in e_c^r$ elemanı

$$x = le + \sum_k [\lambda_k(r) - l] b^{(k)}(r)$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir($e = (1,1,1,\dots)$) [5].

2.2. e_0^r ve e_c^r Uzaylarının α-, β-,γ- ve Sürekli Dualleri

ℕ' nin bütün sonlu alt kümelerinin ailesi $\mathcal{F}$ ile gösterilsin.

Lemma 2.2.1. $A \in (c_0: \ell_1) = (c: \ell_1)$=$(\ell_\infty: \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k\in K} a_{nk} \right| < \infty$$

olmasıdır [5].

Lemma 2.2.2. $A \in (c_0: c) = (c: c) = (\ell_\infty: c)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k, \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{2.2.2.1}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty \tag{2.2.2.2}$$

olmasıdır [5].

Lemma 2.2.3. $A \in (c_0: \ell_\infty) = (c: \ell_\infty) = (\ell_\infty: \ell_\infty) \Leftrightarrow$ (2.2.2.2) sağlanır [5].

Teorem 2.2.4. e_0^r ve e_c^r uzaylarının α- duali

$$b_r = \left\{ a = (a_k) \in w\colon \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k\in K} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right| < \infty \right\}$$

kümesidir [5].

Teorem 2.2.5. d_1^r, d_2^r ve d_3^r kümeleri

$$d_1^r = \left\{ a = (a_k) \in w\colon \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| < \infty \right\},$$

$$d_2^r = \left\{ a = (a_k) \in w\colon \text{ her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$d_3^r = \left\{ a = (a_k) \in w\colon \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \text{ mevcut} \right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $\{e_0^r\}^\beta = d_1^r \cap d_2^r$ ve $\{e_c^r\}^\beta = d_1^r \cap d_2^r \cap d_3^r$ dir.

İspat: $a = (a_k) \in w$ olsun ve $T^r = (t_{nk}^r)$ matrisi $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk}^r = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j & (0 \le k \le n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. (2.1.1.1) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} y_j \right] a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right] y_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} t_{nk}^r y_k = (T^r y)_n \end{aligned} \tag{2.2.5.1}$$

elde edilir. $\|x\|_{e_0^r} = \|y\|_{c_0}$ olduğu kullanılarak (2.2.5.1) den

$$x = (x_k) \in e_0^r \text{ iken } ax = (a_k x_k) \in cs \Leftrightarrow y = (y_k) \in c_0 \text{ iken } T^r y \in c$$

yani

$$a = (a_k) \in \{e_0^r\}^\beta \Leftrightarrow T^r \in (c_0 : c)$$

elde edilir. O halde Lemma 2.2.2. kullanılarak (2.2.2.1) ve (2.2.2.2) den

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} t_{nk}^r \text{ mevcut}$$

ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |t_{nk}^r| < \infty$$

olur. Bu ise $\{e_0^r\}^\beta = d_1^r \cap d_2^r$ demektir. Benzer şekilde $\{e_c^r\}^\beta = d_1^r \cap d_2^r \cap d_3^r$ olduğu kolayca gösterilebilir [5].

Teorem 2.2.6. e_0^r ve e_c^r uzaylarının γ- duali d_1^r kümesidir.

İspat: $a = (a_k) \in d_1^r$ ve $x = (x_k) \in e_0^r$ olsun. $y = (y_k)$ dizisi (2.1.1.1) ile verilen dizi olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} y_j\right]\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j\right] y_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n} t_{nk}^r y_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |t_{nk}^r||y_k|
\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n \in \mathbb{N}$ üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_k\right| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} |t_{nk}^r||y_k|\right) \le \| y \|_{c_0} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |t_{nk}^r|\right) < \infty$$

olup $a = (a_k) \in \{e_0^r\}^\gamma$ elde edilir. O halde

$$d_1^r \subset \{e_0^r\}^\gamma \tag{2.2.6.1}$$

dır.

Tersine $a = (a_k) \in \{e_0^r\}^\gamma$ olsun. (2.2.5.1) eşitliğinden $(a_k x_k) \in bs$ ise $\{\sum_{k=0}^{n} t_{nk}^r y_k\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ olduğu elde edilir. Bu ise Teorem 2.2.5. in ispatında tanımlanan $T^r = (t_{nk}^r)$ üçgensel matrisinin $(c_0 : \ell_\infty)$ sınıfına ait olduğunu gösterir. Bu yüzden Lemma 2.2.3. den

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |t_{nk}^r| < \infty$$

olur. Buradan $a = (a_k) \in d_1^r$ elde edilir. O halde

$$\{e_0^r\}^\gamma \subset d_1^r \tag{2.2.6.2}$$

dır. (2.2.6.1) ve (2.2.6.2) ifadeleri birlikte düşünülürse

$$\{e_0^r\}^\gamma = d_1^r$$

elde edilir. Benzer şekilde $\{e_c^r\}^\beta = d_1^r \cap d_2^r \cap d_3^r$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir [5].

Teorem 2.2.7. $\{e_c^r\}^*$ ve $\{e_0^r\}^*$ uzayları ℓ_1 uzayına izometrik izomorfiktir.

İspat: Sadece e_c^r uzayı için ispat verilecektir. $f \in \{e_c^r\}^*$ olsun. Teorem 2.1.5 e göre $\{e, b^{(k)}(r)\}$ kümesi e_c^r uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in e_c^r$ elemanı

$$x = le + \sum_k [\lambda_k(r) - l] b^{(k)}(r) \tag{2.2.7.1}$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir.($b^{(k)}(r)$, Teorem 2.1.5. de tanımlanan dizidir.) f' nin sürekliliği ve lineerliği kullanılarak $\forall x \in e_c^r$ için

$$f(x) = f\left(le + \sum_k [\lambda_k(r) - l] b^{(k)}(r)\right) = lf(e) + \sum_k [\lambda_k(r) - l]\{f(b^{(k)}(r)\}$$

bulunur. $x = \{x_k(r)\} \in e_c^r$ dizisi

$$x_k(r) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} \operatorname{sgn} f\left(b^{(j)}(r)\right) & (0 \leq k \leq n) \\ \sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} \operatorname{sgn} f\left(b^{(j)}(r)\right) & (k > n) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\|x\|_{e_c^r} = 1$ olduğu açıktır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} \operatorname{sgn} f\left(b^{(k)}(r)\right) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(b^{(k)}(r)\right) \operatorname{sgn} f\left(b^{(k)}(r)\right) \right| = \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(b^{(k)}(r)\right) \right| \leq \|f\| \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikten

$$\sum_k \left| f\left(b^{(k)}(r)\right) \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(b^{(k)}(r)\right) \right| \leq \|f\|$$

elde edilir.

$$a = f(e) - \sum_k f\left(b^{(k)}(r)\right) \text{ ve } a_k = f\left(b^{(k)}(r)\right)$$

olmak üzere (2.2.7.1) ifadesi kullanılarak

$$f(x) = al + \sum_k a_k \lambda_k(r)$$

yazılabilir. Burada $\sum_k f\left(b^{(k)}(r)\right)$ serisi mutlak yakınsaktır. $|\lim_{k\to\infty}(E^r x)_k| \leq \|x\|_{e_c^r}$ ($l = \lim_{k\to\infty}(E^r x)_k$) olduğundan

$$|f(x)| \leq \|x\|_{e_c^r}\left(|a| + \sum_k |a_k|\right)$$

ve bu yüzden de

$$\|f\| \leq |a| + \sum_k |a_k| \tag{2.2.7.2}$$

elde edilir. $x = \{x_k(r)\} \in e_c^r$ dizisi, herhangi bir $n \geq 0$ için

$$x_k(r) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} \operatorname{sgn} a_j & 0 \leq k \leq n \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} \operatorname{sgn} a_j + \sum_{j=n+1}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} \operatorname{sgn} a & k > n \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\| x \|_{e_c^r} = 1$ ve $\lim_{k\to\infty}(E^r x)_k = \operatorname{sgn} a$ olduğu açıktır ve buradan

$$|f(x)| = \left| |a| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \operatorname{sgn} a \right| \leq \|f\| \tag{2.2.7.3}$$

elde edilir. $(a_k) \in \ell_1$ (çünkü $\sum_k f\left(b^{(k)}(r)\right)$ serisi mutlak yakınsak) olduğundan $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0, (n \to \infty)$ dır. Bu yüzden (2.2.7.3) ifadesinde $n \to \infty$ iken limite geçilirse

$$|a| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \|f\| \tag{2.2.7.4}$$

elde edilir. (2.2.7.2) ve (2.2.7.4) den

$$\|f\| = |a| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

olur. Bu ise ℓ_1 uzayı üzerindeki normdur.

Şimdi $T: \{e_c^r\}^* \to \ell_1$ dönüşümü $f \mapsto (a, a_0, a_1, \dots)$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$|T(f)| = |a| + |a_0| + |a_1| + \cdots = |f|$$

olacağından $\|T(f)\|$, ℓ_1-normudur. Bu yüzden T dönüşümü normu korur. T dönüşümünün bire bir, örten ve lineer olduğu açıktır. O halde T, $\{e_c^r\}^*$ uzayından ℓ_1 uzayına bir izomorfizmdir. Bu da ispatı tamamlar [5].

2.3. Matris Dönüşümleri

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a(n,k) = \sum_{j=0}^{n} a_{jk} \text{ ve } \tilde{a}_{nk} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_{nj}$$

olarak tanımlansın [5].

Lemma 2.3.1. $1 \le p < \infty$ olsun. O zaman

$$A \in (c : \ell_p) \Leftrightarrow \sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in F} a_{nk} \right|^p < \infty$$

dır [5].

Teorem 2.3.2. $A \in (e_c^r : \ell_p) \Leftrightarrow$

i) $1 \le p < \infty$ için,

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in F} \tilde{a}_{nk} \right|^p < \infty, \tag{2.3.2.1}$$

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \text{ için } \tilde{a}_{nk} \text{ mevcut}, \tag{2.3.2.2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_k \tilde{a}_{nk} \text{ yakınsak}, \tag{2.3.2.3}$$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{j=k}^{m}\binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}a_{nj}\right|<\infty\,,\ \ n\in\mathbb{N}; \tag{2.3.2.4}$$

dir.

ii) $p=\infty$ için (2.3.2.2) ve (2.3.2.4) sağlanır ve ayrıca

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k}|\tilde{a}_{nk}|<\infty \tag{2.3.2.5}$$

şartı da sağlanır.

İspat: i) $\Leftarrow$:) $(2.3.2.1)-(2.3.2.4)$ şartları sağlansın ve herhangi bir $x\in e_c^r$ verilsin. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}\in\{e_c^r\}^{\beta}$ olacağından Ax' in varlığı garantilenmiş olur. $\forall k,n\in\mathbb{N}$ için $b_{nk}=\tilde{a}_{nk}$ alınarak $B=(b_{nk})$ matrisi tanımlansın. Kabulden dolayı

$$\sup_{F\in\mathcal{F}}\sum_{n}\left|\sum_{k\in F}\tilde{a}_{nk}\right|^{p}=\sup_{F\in\mathcal{F}}\sum_{n}\left|\sum_{k\in F}b_{nk}\right|^{p}<\infty$$

olacağından Lemma 2.3.1.'e göre $B\in(c:\ell_p)$ dir. Şimdi $\sum_k a_{nk}x_k$ serisinin m. kısmi toplamı alınarak (2.1.1.1) ifadesi kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{m}a_{nk}x_k=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=k}^{m}\binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}a_{nj}y_k\,,\quad m,n\in\mathbb{N}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $m\to\infty$ iken limite geçilirse

$$\sum_{k}a_{nk}x_k=\sum_{k}\tilde{a}_{nk}y_k\,,\quad n\in\mathbb{N}$$

olur ve ℓ_p-normu alınarak

$$\|Ax\|_{\ell_p}=\|By\|_{\ell_p}$$

elde edilir. O halde $A\in(e_c^r:\ell_p)$' dir.

:⇒) $A \in (e_c^r : \ell_p)$ olsun. e_c^r ve ℓ_p uzayları BK-uzayı olduklarından Teorem 1.2.5. den dolayı bir $K > 0$ reel sayısı $\forall x \in e_c^r$ için

$$\|Ax\|_{\ell_p} \leq K\|x\|_{e_c^r}$$

olacak şekilde vardır. Bu son eşitsizlik e_c^r uzayına ait olan $x = (x_k) = \sum_{K\in\mathcal{F}} b^{(k)}(r)$ dizisi için de sağlanacağından (burada ki $b^{(k)}(r) = \left\{b_n^{(k)}(r)\right\}$ dizisi Teorem 2.1.5. de verilen dizidir.) herhangi bir $F \in \mathcal{F}$ için

$$\|Ax\|_{\ell_p} = \left(\sum_n \left|\sum_{k\in\mathcal{F}} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_{nj}\right|^p\right)^{1/p}$$
$$= \left(\sum_n \left|\sum_{k\in\mathcal{F}} \tilde{a}_{nk}\right|^p\right)^{1/p} \leq K\|x\|_{e_c^r} = K$$

olur ki bu (2.3.2.1)' in gerekliliğidir. Kabulden dolayı A matrisi e_c^r uzayına uygulanabileceğinden (2.3.2.2)-(2.3.2.4) koşullarının gerekliliği açıktır. Bu teoremin i) kısmının ispatını tamamlar. Benzer yol takip edilerek ii) nin de ispatı kolay bir şekilde yapılabilir [5].

Teorem 2.3.3. $A \in (e_c^r : c) \Leftrightarrow$ (2.3.2.2), (2.3.2.4) ve (2.3.2.5) sağlanır ayrıca

$$\text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = \alpha_k \tag{2.3.3.1}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \tilde{a}_{nk} = \alpha \tag{2.3.3.2}$$

şartları da sağlanır [5].

Sonuç 2.3.4. $A \in (e_c^r : c)_s \Leftrightarrow$ (2.3.2.2), (2.3.2.4) ve (2.3.2.5) sağlanır. Ayrıca

$$\text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \sum_k \tilde{a}_{nk} = s$$

şartları da sağlanır [5].

Teorem 2.3.5. $(e_c^r : c)_s$ ve $(e_\infty^r : c)_s$ sınıflarının ikisine birden ait matris yoktur [5].

Sonuç 2.3.6. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $C = (c_{nk})$ matrisi de

$$c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-t)^{n-j} t^j a_{jk}\,, \qquad 0 < t < 1, \qquad n, k \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin $(e_c^r : e_\infty^t)$, $(e_c^r : e_p^t)$, $(e_c^r : e_c^t)$ ve $(e_c^r : e_c^t)_s$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 2.3.2., Teorem 2.3.3. ve Sonuç 2.3.4. den ilgili olan birinde, A matrisinin elemanları yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [5].

Sonuç 2.3.7. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris, $t = (t_k)$ pozitif sayıların bir dizisi ve $C = (c_{nk})$ matrisi de, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ olmak üzere

$$c_{nk} = \frac{1}{T_n} \sum_{j=0}^{n} t_j a_{jk}\,, \qquad k, n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda A matrisinin $(e_c^r : r_\infty^t)$, $(e_c^r : r_p^t)$, $(e_c^r : r_c^t)$ ve $(e_c^r : r_c^t)_s$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 2.3.2., Teorem 2.3.3. ve Sonuç 2.3.4. den ilgili olan birinde, A matrisinin elemanlarının yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir.
r_∞^t ve r_p^t uzayları $t = e$ alınması durumunda sırasıyla mutlak olmayan türden X_∞ ve X_p Cesaro dizi uzaylarına indirgeneceğinden Sonuç 2.3.7. aynı zamanda $(e_c^r : X_\infty)$ ve $(e_c^r : X_p)$ sınıflarının karakterizasyonunu da içerir [5].

Sonuç 2.3.8. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun ve $C = (c_{nk})$ ile $D = (d_{nk})$ matrisleri de $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $c_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ ve $d_{nk} = a_{nk} - a_{n-1,k}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda A matrisinin $(e_c^r : \ell_\infty(\Delta))$, $(e_c^r : c(\Delta))$, $(e_c^r : c(\Delta))_s$ ve $(e_c^r : bv_p)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 2.3.2., Teorem 2.3.3. ve Sonuç 2.3.4. den ilgili olan birinde, A matrisinin elemanlarının yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir($\ell_\infty(\Delta)$ ve $c(\Delta)$ uzayları sırasıyla bütün sınırlı ve yakınsak dizilerin fark uzaylarıdır.) [5].

Sonuç 2.3.9. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $C = (c_{nk})$ matrisi de $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1 + t^j}{1 + n} a_{jk}, \qquad 0 < t < 1,$$

şeklinde tanımlanan bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin $(e_c^r : a_\infty^t)$, $(e_c^r : a_p^t)$, $(e_c^r : a_c^t)$ ve $(e_c^r : a_c^t)_s$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 2.3.2., Teorem 2.3.3. ve Sonuç 2.3.4. den ilgili olan birinde, A matrisinin elemanlarının yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [5].

Sonuç 2.3.10. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $C = (c_{nk})$ matrisi $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $c_{nk} = a(n, k)$ şeklinde tanımlanan bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin $(e_c^r : bs)$, $(e_c^r : cs)$ ve $(e_c^r : cs)_s$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 2.3.2., Teorem 2.3.3. ve Sonuç 2.3.4. den ilgili olan birinde, A matrisinin elemanlarının yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [5].

BÖLÜM 3. $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ VE $e_\infty^r(\Delta)$ EULER FARK DİZİ UZAYLARI

3.1. Giriş

Bu bölümde $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ Euler fark dizi uzayları tanımlanacak ve bu uzayların bazı(Schauder bazı) oluşturulacaktır. Daha sonra $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ uzaylarının α-, β- ve γ- dualleri belirlenecek ve $e_c^r(\Delta)$ uzayından ℓ_∞ ve c uzaylarına olan matris dönüşümleri karakterize edilecektir.

Tanım 3.1.1. $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ Euler fark dizi uzayları

$$e_0^r(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : (x_k - x_{k-1}) \in e_0^r\},$$
$$e_c^r(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : (x_k - x_{k-1}) \in e_c^r\}$$

ve

$$e_\infty^r(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : (x_k - x_{k-1}) \in e_\infty^r\}$$

olarak tanımlanır.

Bu bölümde $x = (x_k)$ dizisinin $(E^r\Delta)$-dönüşümü sıkça kullanılacağı için kolaylık sağlaması bakımından bu dönüşüm dizisi $y = \{y_k(r)\}$ dizi ile gösterilecektir. Yani

$$\nabla_{e_{nk}^r} = e_{nk}^r - e_{n,k+1}^r$$

olmak üzere

$$y_n = (E^r\Delta x)_n = \sum_{k=0}^{n} (\nabla_{e_{nk}^r})\, x_k \qquad (3.1.1.1)$$

olarak alınacaktır [10].

Teorem 3.1.2. $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ lineer uzaydırlar ve $y=(y_k)$ dizisi (3.1.1.1) ile verilen dizi olmak üzere $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ uzayları

$$\|x\|_\Delta = \|y\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k| \tag{3.1.2.1}$$

normu ile birer normlu uzayıdırlar [10].

Teorem 3.1.3. $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ uzayları (3.1.2.1) normu ile birer Banach uzayıdırlar.

İspat: Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $\{x^n\}=\{x_i^n\}=\{x_1^n,x_2^n,\ldots\}\in e_\infty^r(\Delta)$ olmak üzere $\{x^n\}$, $e_\infty^r(\Delta)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\{x^n\}$ Cauchy dizisi olduğundan $\forall\varepsilon>0$ sayısı için bir $n_0=n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı $\forall n,m\geq n_0$ için $\|x^n-x^m\|_\Delta<\varepsilon$ olacak şekilde vardır. Bu yüzden her sabit $k\in\mathbb{N}$ ve $\forall n,m\geq n_0$ için

$$|E^r\Delta(x_k^n-x_k^m)|<\varepsilon \tag{3.1.3.1}$$

dir. Bu ise her sabit $k\in\mathbb{N}$ için $\{(E^r\Delta)x_k^n\}=\{(E^r\Delta)x_k^1,(E^r\Delta)x_k^2,\ldots\}$ dizisinin $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan her bir $k\in\mathbb{N}$ için bu dizi yakınsaktır. Yani her bir $k\in\mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty}(E^r\Delta x^n)_k=(E^r\Delta x)_k$$

dır. (3.1.3.1) ifadesinden $\forall n\geq n_0$ için

$$\lim_{m\to\infty}|E^r\Delta(x_k^n-x_k^m)|=|E^r\Delta(x_k^n-x_k)|\leq\varepsilon$$

olur. Bu ise $\forall n\geq n_0$ için $\|x^n-x\|_\Delta<\varepsilon$ yani $x^n\to x\ (n\to\infty)$ demektir.
Son olarak $x\in e_\infty^r$ olduğu gösterilmelidir.$\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}|(E^r\Delta x)_k| &= |E^r(x_k-x_{k-1})| = |E^r(x_k-x_k^n+x_k^n-x_{k-1}^n+x_{k-1}^n-x_{k-1})|\\ &\leq |E^r(x_k^n-x_{k-1}^n)|+\left|E^r\left((x_k-x_k^n)-(x_{k-1}-x_{k-1}^n)\right)\right|\\ &= |(E^r\Delta x^n)_k|+|(E^r\Delta(x^n-x))_k|\leq\|x^n\|_\Delta+\|x^n-x\|_\Delta=O(1)\end{aligned}$$

dir. Buradan $\{(E^r\Delta x)_k\} \in \ell_\infty \Rightarrow x = (x_k) \in e_\infty^r(\Delta)$ elde edilir. O halde $e_\infty^r(\Delta)$ uzayı (3.1.2.1) ifadesinde ki norma göre bir Banach uzayıdır. $e_0^r(\Delta)$ ve $e_c^r(\Delta)$ uzaylarının $e_\infty^r(\Delta)$ uzayının kapalı alt uzayı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu yüzden $e_0^r(\Delta)$ ve $e_c^r(\Delta)$ uzayları da (3.1.2.1) deki norma göre birer Banach uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Ayrıca $e_\infty^r(\Delta)$ uzayı sürekli koordinatlarla bir Banach uzayı oluğundan yani $\|E^r(x^n - x)\|_\Delta \to 0$ olması her bir $k \in \mathbb{N}$ için $|(E^r\Delta)(\, x_k^n - x_k)| \to 0$ olmasını gerektirdiğinden $e_\infty^r(\Delta)$ uzayı bir BK-uzayıdır [10].

Teorem 3.1.4. $e_\infty^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_0^r(\Delta)$ uzayları sırasıyla ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarına lineer izomorfiktirler. Yani $e_\infty^r(\Delta) \cong \ell_\infty$, $e_c^r(\Delta) \cong c$ ve $e_0^r(\Delta) \cong c_0$ dir [10].

Teorem 3.1.5. $c_0(\Delta) \subset e_0^r(\Delta)$, $c(\Delta) \subset e_c^r(\Delta)$ ve $\ell_\infty(\Delta) \subset e_\infty^r(\Delta)$ kapsamaları kesin bir şekilde sağlanır [10].

Teorem 3.1.6. $0 < t < r < 1$ ise $e_0^r(\Delta) \subset e_0^t(\Delta)$ ve $e_c^r(\Delta) \subset e_c^t(\Delta)$ dir [10].

Teorem 3.1.7. $b^{(k)}(r) = \{b_n^{(k)}(r)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi her sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$b_n^{(k)}(r) = \begin{cases} 0 & (0 \le n < k) \\ \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} (1-r)^{i-k} r^{-i} & (n \ge k) \end{cases}$$

olarak tanımlansın ve $b = (1, 2, 3, 4, \dots)$ olsun.

i) $\{b^{(k)}(r)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $e_0^r(\Delta)$ uzayı için bir bazdır ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k(r) = (E^r\Delta x)_k$ olmak üzere herhangi bir $x \in e_0^r(\Delta)$ elemanı,

$$x = \sum_k \lambda_k(r) b^{(k)}(r) \qquad (3.1.7.1)$$

formunda tek türlü yazılabilir.

ii) $\{b,\ b^{(0)}(r),\ b^{(1)}(r), \dots,\ b^{(k)}(r), \dots\}$ kümesi $e_c^r(\Delta)$ uzayı için bir bazdır ve $l = \lim_{k\to\infty}(E^r\Delta x)_k$ olmak üzere herhangi bir $x \in e_c^r(\Delta)$ elemanı

$$x = lb + \sum_k [\lambda_k(r) - l]b^{(k)}(r)$$

şeklinde tek türlü yazılabilir.

İspat: i)

$$E^r\Delta b^{(k)}(r) = e^{(k)} \in c_0 \subset c_0(\Delta) \subset e_0^r(\Delta) \tag{3.1.7.2}$$

olduğundan $\{\Delta b^{(k)}(r)\} \subset e_0^r(\Delta)$ olduğu açıktır. $x \in e_0^r(\Delta)$ verilsin ve her bir $m \geq 0$ tamsayısı için

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k(r) b^{(k)}(r)$$

olarak tanımlansın. $E^r\Delta$ matrisinin lineerliği ve (3.1.7.2) ifadesi kullanılarak

$$E^r\Delta x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k(r) E^r\Delta b^{(k)}(r) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k(r) e^{(k)}$$

$$= ((E^r\Delta x)_0,\ (E^r\Delta x)_1, \dots,\ (E^r\Delta x)_m, 0, 0, \dots)$$

ve

$$E^r\Delta\big(x - x^{[m]}\big) = (E^r\Delta x - E^r\Delta x^{[m]})$$
$$= (0,0, \dots, 0, (E^r\Delta x)_{m+1}, (E^r\Delta x)_{m+2}, \dots)$$

yani

$$\{E^r\Delta\big(x - x^{[m]}\big)\}_i = \begin{cases} 0, & (0 \leq i \leq m) \\ (E^r\Delta x)_i, & (i > m) \end{cases} \quad ; (i, m \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Şimdi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $x \in e_0^r(\Delta)$ olduğundan bir m_0 tamsayısı $\forall m \geq m_0$ için

$$|(E^r \Delta x)_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde vardır. Bu yüzden $\forall m \geq m_0$ için

$$\| x - x^{[m]} \|_{e_0^r(\Delta)} = \sup_{n \geq m} |(E^r \Delta x)_n| \leq \sup_{n \geq m_0} |(E^r \Delta x)_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

dır. Buradan $\{b^{(k)}(r)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin $e_0^r(\Delta)$ için bir baz olduğu ve $x \in e_0^r(\Delta)$' nin (3.1.7.1) deki gösterimi elde edilir. Şimdi bu gösterimin tek olduğu gösterilmelidir. Aksine $x = \sum_k \mu_k(r) b^{(k)}(r)$ olsun. $E^r \Delta$, $e_0^r(\Delta)$ uzayından c_0 uzayına sürekli lineer bir dönüşüm olduğundan (3.1.7.2) ifadesi kullanılarak

$$(E^r \Delta x)_n = \sum_k \mu_k(r)(E^r \Delta b^{(k)}(r))_n = \sum_k \mu_k(r) e_n^{(k)} = \mu_n(r) \, ; (n \in \mathbb{N})$$

elde edilir ki bu $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n(r) = (E^r \Delta x)_n$ olması ile çelişir. Bu yüzden $x \in e_0^r(\Delta)$ için (3.1.7.1) gösterimi tektir.

ii) $\{\Delta b^{(k)}(r)\} \subset e_0^r(\Delta)$, $b \in e_c^r(\Delta)$ ve $e_0^r(\Delta) \subset e_c^r(\Delta)$ olduğundan $\{b, \Delta b^{(k)}(r)\} \subset e_c^r(\Delta)$ olduğu açıktır. $x \in e_c^r(\Delta)$ verilsin. O zaman $l = \lim_{k\to\infty}(E^r \Delta x)_k$ olacak şekilde bir tek l sayısı vardır. $s = x - lb$ olarak alınırsa $s \in e_0^r(\Delta)$ olup i) de (3.1.7.1) ifadesinin tekliği gösterildiğinden, $x \in e_c^r(\Delta)$ elemanı

$$x = lb + \sum_k [\lambda_k(r) - l] b^{(k)}(r)$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar [10].

3.2. $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ Uzaylarının α-, β- ve γ-Dualleri

Teorem 3.2.1. $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ kümelerinin α- duali

$$b_r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} (r-1)^{i-k} r^{-i} a_n \right| < \infty \right\}$$

kümesidir.

İspat: $a = (a_k) \in w$ olsun ve $B = (b_{nk})$ matrisi $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} (r-1)^{i-k} r^{-i} a_n & (0 \le k \le n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman $y = (y_k)$ dizisi (3.1.1.1) ile verilen dizi olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n x_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} (r-1)^{i-k} r^{-i} a_n \right] y_k = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} y_k = (By)_n \qquad (3.2.1.1)$$

dır. $x \in e_\infty^r(\Delta) \Leftrightarrow y \in \ell_\infty$, $x \in e_c^r(\Delta) \Leftrightarrow y \in c$ ve $x \in e_0^r(\Delta) \Leftrightarrow y \in c_0$ olduğu göz önüne alınarak (3.2.1.1) eşitliğinden

$x \in e_\infty^r(\Delta)$, $x \in e_c^r(\Delta)$ ya da $x \in e_0^r(\Delta)$ iken $ax = (a_n x_n) \in \ell_1 \Leftrightarrow y \in \ell_\infty$, $y \in c$ ya da $y \in c_0$ iken $By \in \ell_1$

yani

$a = (a_k) \in \{e_\infty^r(\Delta)\}^\alpha, \{e_c^r(\Delta)\}^\alpha$ ya da $\{e_0^r(\Delta)\}^\alpha \Leftrightarrow B \in (\ell_\infty : \ell_1), (c : \ell_1)$ ya da $(c_0 : \ell_1)$

elde edilir. O zaman Lemma 2.2.1. den

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} (r-1)^{i-k} r^{-i} a_n \right| < \infty$$

yani $\{e_0^r(\Delta)\}^\alpha = \{e_c^r(\Delta)\}^\alpha = \{e_\infty^r(\Delta)\}^\alpha = b_r$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar [10].

Teorem 3.2.2. $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_i & (0 \le k \le n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

olmak üzere c_1^r, c_2^r, c_3^r ve c_4^r kümeleri

$$c_1^r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |c_{nk}| < \infty \right\},$$

$$c_2^r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \to \infty} c_{nk} \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_3^r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \lim_{n \to \infty} \sum_k |c_{nk}| = \sum_k \left| \lim_{n \to \infty} c_{nk} \right| \right\}$$

ve

$$c_4^r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \lim_{n \to \infty} \sum_k c_{nk} \text{ mevcut} \right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $[e_0^r(\Delta)]^\beta = c_1^r \cap c_2^r$, $[e_c^r(\Delta)]^\beta = c_1^r \cap c_2^r \cap c_4^r$ ve $[e_\infty^r(\Delta)]^\beta = c_2^r \cap c_3^r$ dir [10].

Teorem 3.2.3. $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ uzaylarının γ-duali c_1^r kümesidir [10].

3.3. $e_c^r(\Delta)$ Uzayında Matris Dönüşümleri

Bu bölümde kısalığın hatırına $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{a}_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_{ni}$$

olarak alınacaktır [10].

Teorem 3.3.1. $A \in (e_c^r(\Delta):\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| < \infty\,, \tag{3.3.1.1}$$

$$\forall n,k \in \mathbb{N} \text{ için } \tilde{a}_{nk} \text{ mevcut }, \tag{3.3.1.2}$$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{i=k}^{m} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_{ni} \right| < \infty\,, \qquad (n \in \mathbb{N}\,) \tag{3.3.1.3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{m\to\infty} \sum_k \sum_{i=k}^{m} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j}\, a_{ni} \text{ mevcut} \tag{3.3.1.4}$$

olmasıdır.

İspat: $:\Rightarrow)$ $A \in (e_c^r(\Delta):\ell_\infty)$ olsun. O zaman $\forall x \in e_c^r(\Delta)$ için Ax mevcut ve ℓ_∞ uzayındadır. Yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $(Ax)_n = \sum_n a_{nk}x_k$ mevcut ve $((Ax)_n) \in \ell_\infty$ dir. O halde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{e_c^r(\Delta)\}^\beta$ dir. Teorem 3.2.5. den dolayı $\{e_c^r(\Delta)\}^\beta = c_1^r \cap c_2^r \cap c_4^r$ olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in c_1^r$, c_2^r ve c_4^r dir.

$\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in c_1^r$, $(n \in \mathbb{N})$ ise;
$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_k \left|\sum_{i=k}^{m} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}a_{ni}\right| < \infty$, $(n \in \mathbb{N})$ olup bu (3.3.1.3)' ün gerekliliğidir.

$\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in c_2^r$, $(n \in \mathbb{N})$ ise;
Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}\, a_{ni}$ mevcut yani her bir $k,n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}\, a_{ni} = \tilde{a}_{nk}$ mevcut olup bu (3.3.1.2)' nin gerekliliğidir.

$\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in c_4^r$, $(n \in \mathbb{N})$ ise;
$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} \sum_k \sum_{i=k}^{m} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}\, a_{ni}$ mevcuttur. Bu ise (3.3.1.4) ün gerekliliğidir.

Hipotezden dolayı $\forall x \in e_c^r(\Delta)$ için Ax mevcut ve ℓ_∞ uzayında olduğundan bu durum özel olarak $x = (1, 2, 3, 4, \ldots) \in e_c^r(\Delta)$ dizisi içinde sağlanır. Bu yüzden

$$\|Ax\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_{ni} \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| < \infty$$

olup (3.3.1.1)' in gerekliliği gösterilmiş olur.

$\Leftarrow:)$ $(3.3.1.1) - (3.3.1.4)$ şartları sağlansın ve $x \in e_c^r(\Delta)$ verilsin. $y = (y_k)$ dizisi (3.1.1.1) ile verilen dizi olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} \binom{j}{i} (r-1)^{j-i} r^{-j} y_j \right] a_{nk} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=k}^{m} \left[\sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} \right] a_{ni} y_k, \quad (m, n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

olup bu eşitlikte $m \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\sum_k a_{nk} x_k = \sum_k \tilde{a}_{nk} y_k \,, \quad (n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Sonuç olarak bu son eşitlikten

$$\begin{aligned}\|Ax\|_{\ell_\infty} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_k a_{nk} x_k \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_k \tilde{a}_{nk} y_k \right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}|\, |y_k| \\ &\leq \|y\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| < \infty\end{aligned}$$

yani $Ax \in \ell_\infty$ elde eldir. $x \in e_c^r(\Delta)$ olduğundan $A \in (e_c^r(\Delta) : \ell_\infty)$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar [10].

Teorem 3.3.3. $A \in (e_c^r(\Delta): c) \Leftrightarrow (3.3.1.1) - (3.3.1.4)$ koşulları sağlanır ve ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \tilde{a}_{nk} = \alpha \tag{3.3.3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = \alpha_k\,, \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{3.3.3.2}$$

şartları da sağlanır [10].

Sonuç 3.3.4. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $C = (c_{nk})$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $c_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ şeklinde tanımlanan bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin, $(e_c^r(\Delta): \ell_\infty(\Delta))$ ve $((e_c^r(\Delta): c(\Delta))$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlarlar, Teorem 3.3.1. ve Teorem 3.3.3. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [10].

Sonuç 3.3.5. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $C = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-r)^{n-j} r^j a_{jk}\,, \qquad (n, k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin $(e_c^r(\Delta): e_\infty^s)$ ve $(e_c^r(\Delta): e_c^s)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 3.3.1. ve Teorem 3.3.3. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [10].

Sonuç 3.3.6. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris, $t = (t_k)$ bütün elemanları sıfır olmayan non-negatif(negatif olmayan) sayıların bir dizisi ve $C = (c_{nk})$ matrisi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ olmak üzere

$$c_{nk} = \frac{1}{T_n} \sum_{j=0}^{n} t_j a_{jk}\,, \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin $(e_c^r(\Delta): r_\infty^t)$ ve $(e_c^r(\Delta): r_c^t)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 3.3.1. ve Teorem 3.3.3. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir.(r_∞^t ve r_c^t uzayları, R^t-dönüşümleri sırasıyla ℓ_∞ ve c uzayında olan bütün dizilerin uzayıdırlar.)

$t = e$ olması durumunda r_∞^t uzayı, mutlak olmayan türden X_∞ Cesàro dizi uzayına indirgenebileceğinden Sonuç 3.3.6. aynı zamanda $(e_c^r(\Delta): X_\infty)$ sınıfının karakterizasyonunu da içerir.(X_∞ uzayı, C_1-dönüşümleri ℓ_∞ uzayında olan tüm dizilerin uzayıdır.) [10].

Sonuç 3.3.7. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $C = (c_{nk})$ matrisi, $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $c_{nk} = \sum_{j=0}^{k} a_{jk}$ şeklinde tanımlanan bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin $((e_c^r(\Delta): bs)$ ve $((e_c^r(\Delta): cs)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 3.3.1. ve Teorem 3.3.3. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [10].

BÖLÜM 4. m. MERTEBEDEN BAZI EULER FARK DİZİ UZAYLARI

4.1. Giriş

Bu bölümde m. mertebeden $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$, $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ ve $e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ Euler fark dizi uzayları tanımlanacak ve bu uzayların bazı(Schauder bazı) oluşturulacaktır. Daha sonra bu uzaylarının α-, β- ve γ- dualleri belirlenecek ve $e_c^r(\Delta^{(m)})$ uzayı üzerindeki bazı matris dönüşümleri karakterize edilecektir.

Tanım 4.1.1. $\nu \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olsun. Bu durumda $m = 1, 2, 3, ...$ için $\Delta^m = \Delta^1(\Delta^{m-1}x)$ ve $\Delta^{(m)} = \Delta^{(1)}(\Delta^{(m-1)}x)$ olmak üzere $\Delta^m\nu$ ve $\Delta^{(m)}\nu$ m. mertebeden fark dizi uzayları

$$\Delta^m\nu = \{x = (x_k) \in w: \Delta^m x \in \nu\}$$
$$\Delta^{(m)}\nu = \left\{x = (x_k) \in w: \Delta^{(m)} x \in \nu\right\}$$

olarak tanımlıdır [55].

Tanım 4.1.2. $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$, $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ ve $e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ uzayları, $\Delta^{(m)}$-dönüşümleri sırasıyla e_0^r, e_c^r ve e_∞^r uzayları içinde olan tüm dizilerin uzayıdırlar. Yani

$$e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right) = \left\{x = (x_k) \in w: \Delta^{(m)} x \in e_0^r\right\},$$

$$e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right) = \left\{x = (x_k) \in w: \Delta^{(m)} x \in e_c^r\right\}$$

ve

$$e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right) = \left\{x = (x_k) \in w: \Delta^{(m)} x \in e_\infty^r\right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.23. kullanılarak $e_0^r(\Delta^{(m)})$, $e_c^r(\Delta^{(m)})$ ve $e_\infty^r(\Delta^{(m)})$ uzayları

$$e_0^r(\Delta^{(m)}) = (e_0^r)_{\Delta^{(m)}},\ e_c^r(\Delta^{(m)}) = (e_c^r)_{\Delta^{(m)}} \text{ ve } e_\infty^r(\Delta^{(m)}) = (e_\infty^r)_{\Delta^{(m)}}$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir [55].

Tanım 4.1.3. $B(m,r) = (b_{nk}(m,r))$ matrisi $\forall k,m,n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk}(m,r) = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} \binom{m}{i-k}\binom{n}{i}(-1)^{i-k} r^i (1-r)^{n-i} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matristir.

Bu bölümde $x = (x_k)$ dizisinin $B(m,r)$- dönüşümü sıkça kullanılacağı için kolaylık sağlaması bakımından bu dönüşüm dizisi $y = (y_k)$ dizisi ile gösterilecektir. Yani

$$y_k = (E^r \Delta^{(m)} x)_k = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{k} \binom{k}{i}\binom{m}{i-j}(-1)^{i-j} r^i (1-r)^{k-i} x_k, \qquad (4.1.3.1)$$

olarak alınacaktır [55].

Teorem 4.1.4. $\lambda \in \{e_0^r, e_c^r, e_\infty^r\}$ olsun. O zaman $\lambda(\Delta^{(m)})$ kümesi koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır ve $\|x\|_{\lambda(\Delta^{(m)})} = \|\Delta^{(m)} x\|_\lambda$ normu ile de bir BK-uzayıdır.

$\lambda(\Delta^{(m)})$ uzayında $\|x\|_{\lambda(\Delta^{(m)})} \neq \||x|\|_{\lambda(\Delta^{(m)})}$ olacak şekilde en az bir $x = (x_k)$ dizisi bulunabileceğinden $\lambda(\Delta^{(m)})$ uzayı non-absolute türden bir dizi uzayıdır [55].

Teorem 4.1.5. $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$, $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ ve $e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ uzayları sırasıyla c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarına lineer izomorfiktirler. Yani $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right) \cong c_0$, $e_c^r(\Delta^{(m)}) \cong c$ ve $e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right) \cong \ell_\infty$ dir [55].

Teorem 4.1.6. $0 < t < r < 1$ olsun. O zaman $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right) \subset e_0^t\left(\Delta^{(m)}\right)$, $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right) \subset e_c^t\left(\Delta^{(m)}\right)$ ve $e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right) \subset e_\infty^t\left(\Delta^{(m)}\right)$ kapsamaları sağlanır [55].

Teorem 4.1.7. $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right) \subset e_0^r\left(\Delta^{(m+1)}\right)$, $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right) \subset e_c^r\left(\Delta^{(m+1)}\right)$, $e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right) \subset e_\infty^r\left(\Delta^{(m+1)}\right)$, $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right) \subset e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ ve $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right) \subset e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ kapsamaları kesin bir şekilde sağlanır [55].

Teorem 4.1.8. $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ uzayında her sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$b_n^{(k)}(m,r) = \begin{cases} 0 & (n < k) \\ \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i}(r-1)^{i-k} & (n \geq k) \end{cases} \tag{4.1.8.1}$$

şeklinde tanımlanan $b^{(k)}(m,r) = \left\{b_n^{(k)}(m,r)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. O zaman,

i) $\left\{b^{(k)}(m,r)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ elemanı

$$x = \sum_k \left(E^r \Delta^{(m)} x\right)_k b^{(k)}(m,r)$$

şeklinde tek türlü yazılabilir.

ii) $z = \{z_n(m,r)\}$ dizisi

$$z_n(m,r) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i}(r-1)^{i-k}$$

şeklinde tanımlanan bir dizi ve $l = \lim_{k\to\infty}\left(E^r\Delta^{(m)}x\right)_k$ olmak üzere $\left\{z, b^{(1)}(m,r),\ b^{(2)}(m,r)\,, \ldots\right\}$ kümesi $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ elemanı

$$x = lz + \sum_k \left[\left(E^r\Delta^{(m)}x\right)_k - l\right] b^{(k)}(m,r)$$

formunda tek türlü yazılabilir [55].

4.2. $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$, $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ ve $e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ Uzaylarının α-, β- ve γ-Dualleri

Teorem 4.2.1. $D(m,r) = (d_{nk}(m,r))$ matrisi $\forall k,n \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk}(m,r) = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} \binom{m+n-j-1}{n-j}\binom{j}{k} r^{-j}(r-1)^{j-k} a_n & (0 \le k \le n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir matris ve

$$D = \left\{a = (a_k \in w:\ \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_n \left|\sum_{k\in K} d_{nk}(m,r)\right| < \infty\right\}$$

olsun. O zaman $\left[e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^\alpha = \left[e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^\alpha = \left[e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^\alpha = D$ dir [55].

Teorem 4.2.2. $C(m,r) = (c_{nk}(m,r))$ matrisi $\forall k,n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk}(m,r) = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} \left[\sum_{j=k}^{i} \binom{m+i-j-1}{i-j}\binom{j}{k} r^{-j}(r-1)^{j-k}\right] a_i & (0 \le k \le n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir matris olmak üzere B_1, B_2, B_3 ve B_4 kümeleri

$$B_1=\left\{a=(a_k)\in w:\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |c_{nk}(m,r)|<\infty\right\},$$

$$B_2=\left\{a=(a_k)\in w: \forall k\in\mathbb{N}\text{ için } \lim_{n\to\infty} c_{nk}(m,r)\ \text{mevcut}\right\},$$

$$B_3=\left\{a=(a_k)\in w:\ \lim_{n\to\infty}\sum_k c_{nk}(m,r)\ \text{mevcut}\right\}$$

ve

$$B_4=\left\{a=(a_k)\in w:\ \lim_{n\to\infty}\sum_k |c_{nk}(m,r)|=\sum_k\left|\lim_{n\to\infty} c_{nk}(m,r)\right|\right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $\left[e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^{\beta}=B_1\cap B_2$, $\left[e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^{\beta}=B_1\cap B_2\cap B_3$ ve $\left[e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^{\beta}=B_2\cap B_4$ dir.

İspat: Burada sadece $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ uzayı için ispat verilecektir. Benzer yöntem kullanılarak $\left[e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^{\beta}=B_1\cap B_2\cap B_3$ ve $\left[e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^{\beta}=B_2\cap B_4$ olduğu kolayca gösterilebilir.

$a=(a_k)\in w$ olsun. (4.1.3.1) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k}\binom{m+k-j-1}{k-j}\binom{j}{i} r^{-j}(r-1)^{j-i} a_k y_i\\ &=\sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{i=k}^{n}\left[\sum_{j=k}^{i}\binom{m+i-j-1}{i-j}\binom{j}{k} r^{-j}(r-1)^{j-k}\right]a_i\right\}y_k\\ &=\{C(m,r)y\}_n, \qquad (n\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

elde edilir. $\|x\|_{e_0^r(\Delta^{(m)})}=\|y\|_{c_0}$ olduğu göz önüne alınarak yukarıdaki eşitlikten

$x=(x_k)\in e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ iken $ax=(a_kx_k)\in cs \Leftrightarrow y=(y_k)\in c_0$ iken $C(m,r)y\in c$

yani

$a=(a_k)\in\left[e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^{\beta}\Leftrightarrow C(m,r)\in(c_0:c)$

elde edilir. O halde Lemma 2.2.2. kullanılırsa $a = (a_k) \in \left[e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^\beta \Leftrightarrow$ $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |c_{nk}(m,r)| < \infty$ ve $\forall k \in N$ için $\lim_{n\to\infty} c_{nk}(m,r)$ mevcut elde edilir. Bu ise $\left[e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)\right]^\beta = B_1 \cap B_2$ demektir [55].

Teorem 4.2.3. $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$, $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ ve $e_\infty^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ kümelerinin γ-duali B_1 kümesidir [55].

4.3. $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ Dizi Uzayı Üzerindeki Matris Dönüşümleri

Bu bölümde kısalık sağlaması bakımından $T(m,r) = (t_{nk}(m,r))$ matrisi $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk}(m,r) = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+n-j-1}{n-j} \binom{j}{k} r^{-j} (r-1)^{j-k} a_{nj}$$

olarak alınacaktır [55].

Lemma 4.3.1. $A \in (c : \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k\in F} a_{nk} \right|^p < \infty \tag{4.3.1.1}$$

olmasıdır [55].

Teorem 4.3.2. i) $1 \le p < \infty$ olsun. O zaman $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk}^s(m,r) = \sum_{j=k}^{s} \binom{m+n-j-1}{n-j} \binom{j}{k} r^{-j} (r-1)^{j-k} a_{nj}$$

olmak üzere $A \in \left(e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right) : \ell_p\right)$ olması için gerek ve yeter şartlar herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sup_{s \in \mathbb{N}} \sum_k |t_{nk}^s(m,r)| < \infty,$ (4.3.2.1)

herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{s \to \infty} \sum_k t_{nk}^s(m,r)$ mevcut, (4.3.2.2)

herhangi bir $k, n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \to \infty} t_{nk}^s(m,r) = t_{nk}(m,r)$ mevcut, (4.3.2.3)

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in F} t_{nk}(m,r) \right|^p < \infty \tag{4.3.2.4}$$

olmasıdır.

ii) $A \in (e_c^r(\Delta^{(m)}) : \ell_\infty) \Leftrightarrow (4.3.2.1) - (4.3.2.3)$ sağlanır ve ayrıca

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |t_{nk}(m,r)| < \infty \tag{4.3.2.5}$$

şartı da sağlanır.
[55].

Teorem 4.3.3. $A \in (e_c^r(\Delta^{(m)}) : c) \Leftrightarrow (4.3.2.1) - (4.3.2.3)$ ve $(4.3.2.5)$ sağlanır ve ayrıca

her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \to \infty} t_{nk}(m,r) = \alpha_k$ (4.3.3.1)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_k t_{nk}(m,r) = \alpha \tag{4.3.3.2}$$

şartları da sağlanır [55].

Sonuç 4.3.4. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. O zaman A matrisinin, $(e_c^r(\Delta^{(m)}) : e_\infty^r)$, $(e_c^r(\Delta^{(m)}) : e_p^r)$ ve $(e_c^r(\Delta^{(m)}) : e_c^r)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 4.3.2. ve Teorem 4.3.3. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine E^r Euler matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [55].

Sonuç 4.3.5. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. O zaman A matrisinin, $(e_c^r(\Delta^{(m)}): r_\infty^t)$, $(e_c^r(\Delta^{(m)}): r_p^t)$ ve $(e_c^r(\Delta^{(m)}): r_c^t)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 4.3.2. ve Teorem 4.3.3. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine R^t Riesz matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir(r_p^t uzayı, R^t-dönüşümü ℓ_p uzayında olan tüm dizilerin uzayıdır.).

r_∞^t, r_p^t ve r_c^t uzayları $t = e$ alınması durumunda sırasıyla mutlak olmayan türden X_∞, X_p ve $\tilde{c}$ Cesàro dizi uzaylarına indirgeneceklerinden Sonuç 4.3.5. aynı zamanda $(e_c^r(\Delta^{(m)}): X_\infty)$, $(e_c^r(\Delta^{(m)}): X_p)$ ve $(e_c^r(\Delta^{(m)}): \tilde{c})$ sınıflarının karakterizasyonunu da içerir($\tilde{c}$ uzayı C-dönüşümü c uzayında olan tüm dizilerin uzayıdır.) [55].

Sonuç 4.3.6. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. O zaman A matrisinin $(e_c^r(\Delta^{(m)}): \ell_\infty(\Delta))$, $(e_c^r(\Delta^{(m)}): bv_p)$ ve $(e_c^r(\Delta^{(m)}): c(\Delta))$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 4.3.2. ve Teorem 4.3.3. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine Δ^1 ve $\Delta^{(1)}$ fark matrislerinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [55].

Sonuç 4.3.6. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. O zaman A matrisinin $(e_c^r(\Delta^{(m)}): bs)$ ve $(e_c^r(\Delta^{(m)}): cs)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar Teorem 4.3.2. ve Teorem 4.3.3. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine S toplam(summation) matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [55].

BÖLÜM 5. e_p^r VE e_∞^r EULER DİZİ UZAYLARI

5.1. Giriş

Tanım 5.1.1. e_p^r ve e_∞^r Euler dizi uzayları, E^r-dönüşümleri sırasıyla ℓ_p ve ℓ_∞ uzayları içinde olan tüm dizilerin uzayıdır. Yani

$$e_p^r = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_n \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k\right|^p < \infty\right\} \ (1 \leq p < \infty)$$

ve

$$e_\infty^r = \left\{x = (x_k) \in w : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k\right| < \infty\right\}$$

dır. Tanım 1.2.23. kullanılarak e_p^r ve e_∞^ruzayları

$$e_p^r = (\ell_p)_{E^r} \ (1 \leq p < \infty) \text{ ve } e_\infty^r = (\ell_\infty)_{E^r}$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir [9].

Teorem 5.1.2. $1 \leq p \leq \infty$ için e_p^r uzayı koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır ve $\|x\|_{e_p^r} = \|E^r x\|_{\ell_p}$ normu ile de bir BK-uzayıdır.

$1 \leq p \leq \infty$ için e_p^r uzayında $\|x\|_{e_p^r} = \||x|\|_{e_p^r}$ olacak şekilde en az bir $x = (x_k)$ dizisi bulunabileceğinden e_p^r uzayı non-absolute türden bir dizi uzayıdır ($|x| = (|x_k|)$). Ayrıca $1 \leq p \leq s$ için $\ell_p \subset \ell_s$ ve $\forall x \in e_p^r$ için $\|x\|_{e_p^r} = \|E^r x\|_{\ell_p}$olduğu kullanılarak $e_p^r \subset e_s^r$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir [9].

Teorem 5.1.3. $1 \leq p \leq \infty$ için e_p^r Euler dizi uzayı ℓ_p uzayına lineer izomorfiktir. Yani $e_p^r \cong \ell_p$dir [9].

Teorem 5.1.4. $p = 2$ durumu dışında $1 \leq p < \infty$ için e_p^r uzayı bir iç çarpım uzayı değildir. Dolayısıyla da bir Hilbert uzayı değildir.

İspat: $1 \leq p < \infty$ için e_p^r uzayları içinden sadece e_2^r uzayının bir Hilbert uzayı olduğu gösterilecektir. Teorem 5.1.2. ye göre e_2^r uzayı $\|x\|_{e_2^r} = \|E^r x\|_{\ell_2}$ normu normu ile bir BK-uzayı ve e_2^r uzayının normu bir iç çarpımdan elde edilebileceğinden yani

$$\|x\|_{e_2^r} =< E^r x, E^r x >^{1/2}$$

olduğundan e_2^r uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Şimdi

$$u = \{u_k(r)\} = \left\{\frac{r+k-1}{r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{k-1}\right\} \text{ ve}$$

$$v = \{v_k(r)\} = \left\{\frac{r-k-1}{r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{k-1}\right\}$$

dizileri verilsin.

$$\|u\|_{e_p^r} = \left[\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}r^j\,\frac{r+j-1}{r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{j-1}\right|^p\right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}r^j\left(1-\frac{1}{r}\right)^{j} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}r^j j\,\frac{(1-r)^{j-1}}{r^j}\right|^p\right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}(r-1)^j + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}j(r-1)^{j-1}\right|^p\right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_k \left| (1-r)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j + (1-r)^{k-1} \sum_{j=0}^{k} j \binom{k}{j} (-1)^{j-1} \right|^p \right]^{1/p}$$

$$= \left(1^p + 1^p\right)^{1/p} = 2^{1/p}$$

dir. Benzer şekilde

$$\|v\|_{e_p^r} = 2^{1/p}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan

$$2\left(\|u\|_{e_p^r}^2 + \|v\|_{e_p^r}^2\right) = 4.2^{1/p} \qquad (5.1.4.1)$$

bulunur.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$u_k(r) + v_k(r) = \frac{r+k-1}{r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{k-1} + \frac{r-k-1}{r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{k-1}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{r}\right)^k$$

olup

$$\|u+v\|_{e_p^r} = \left[\sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j 2\left(1-\frac{1}{r}\right)^j \right|^p \right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} 2(r-1)^j \right|^p \right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_k \left| 2(1-r)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \right|^p \right]^{1/p} = \left(2^p\right)^{1/p} = 2$$

dir. Benzer şekilde

$$\|u-v\|_{e_p^r}=2$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan

$$\|u+v\|_{e_p^r}^2+\|u-v\|_{e_p^r}^2=8 \tag{5.1.4.2}$$

bulunur. (5.1.4.1) ve (5.1.4.2)' e göre $p\neq 2$ için

$$\|u+v\|_{e_p^r}^2+\|u-v\|_{e_p^r}^2=8\neq 4.2^{1/p}=2\left(\|u\|_{e_p^r}^2+\|v\|_{e_p^r}^2\right)$$

olup e_p^r normuna göre paralel kenar kuralı sağlanmaz. O halde Teorem 1.1.13.' e göre e_p^r normu bir iç çarpımdan elde edilmez. Bu yüzden $p\neq 2$ iken bir Banach uzayı olan e_p^r bir Hilbert uzayı değildir. Bu da ispatı tamamlar [9].

Teorem 5.1.5. $1\leq p<\infty$ için $\ell_p\subset e_p^r$ kapsaması kesin bir şekilde sağlanır [9].

Teorem 5.1.6. $1\leq p<\infty$ için e_p^r ve ℓ_∞ uzaylarından biri diğerini içermez. Yani $e_p^r\not\subset\ell_\infty$ ve $\ell_\infty\not\subset e_p^r$ dir [9].

Teorem 5.1.7. $1\leq p<\infty$ olsun. e_∞^r uzayı hem ℓ_∞ uzayını hem de e_p^r uzayını kesin bir şekilde kapsar [9].

Teorem 5.1.8. $0<t\leq r<1$ ise $e_p^r\subset e_p^t$ dir [9].

Teorem 5.1.9. $1\leq p<\infty$ olsun. e_p^r uzayında her sabit $k\in\mathbb{N}$ için

$$b_n^{(k)}(r)=\begin{cases}0 & (0\leq n<k)\\ \binom{n}{k}(r-1)^{n-k}r^{-n} & (n\geq k)\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $b^{(k)}(r) = \{b_n^{(k)}(r)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. O zaman $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k(r) = (E^r x)_k$ olmak üzere $\{b^{(k)}(r)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi e_p^r uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in e_p^r$ elemanı

$$x = \sum_k \alpha_k(r)\, b^{(k)}(r)$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir [9].

5.2. e_p^r ve e_∞^r Uzaylarının α-, β- ve γ-Dualeri

Lemma 5.2.1. $1 < p \leq \infty$ olsun. $A \in (\ell_p : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n\in K} a_{nk} \right|^q < \infty$$

olmasıdır($p^{-1} + q^{-1} = 1$) [9].

Lemma 5.2.2. $1 < p < \infty$ olsun. $A \in (\ell_p : c)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$\text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} a_{nk} \text{ mevcut} \tag{5.2.2.1}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}|^q < \infty \tag{5.2.2.2}$$

olmasıdır ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) [9].

Lemma 5.2.3. $A \in (\ell_p : \ell_\infty) \Leftrightarrow$ (5.2.2.2) sağlanır [9].

Teorem 5.2.4. $1 < p \leq \infty$ olsun ve a_q^r ve a_∞^r kümeleri

$$a_q^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n\in K} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right|^q < \infty \right\}$$

$$a_\infty^r = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_n \left| \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $(e_1^r)^\alpha = a_\infty^r$ ve $\left(e_p^r\right)^\alpha = a_q^r$ dir [9].

Teorem 5.2.5. $1 < p, q < \infty$ olsun ve d_1^r, d_2^r, d_3^r ve b_q^r kümeleri

$$d_1^r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \ \text{ mevcut} \right\},$$

$$d_2^r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \sup_{n,k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| < \infty \right\},$$

$$d_3^r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \lim_{n \to \infty} \sum_k \left| \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| = \sum_k \left| \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| \right\}$$

ve

$$b_q^r = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right|^q < \infty \right\}$$

olarak tanımlasın. O zaman $(e_1^r)^\beta = d_1^r \cap d_2^r$, $\left(e_p^r\right)^\beta = d_1^r \cap b_q^r$ ve $(e_\infty^r)^\beta = d_1^r \cap d_3^r$ dir.

İspat: Sadece $1 < p < \infty$ için $\left(e_p^r\right)^\beta = d_1^r \cap b_q^r$ olduğu gösterilecektir. Benzer şekilde $(e_1^r)^\beta = d_1^r \cap d_2^r$ ve $(e_\infty^r)^\beta = d_1^r \cap d_3^r$ olduğu kolayca gösterilebilir.
$a = (a_k) \in w$ olsun ve $T = (t_{nk}^r)$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk}^r = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j & (0 \le k \le n) \\ 0 & (n > k) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $y = (y_k)$ dizisi (2.1.1.1) ile verilen, $x = (x_k)$ dizisi ile ilişkili dizi olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} y_j \right] a_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right] y_k = \sum_{k=0}^{n} t_{nk}^{r} y_k = (T^r y)_n$$

dır. $x \in e_p^r \Leftrightarrow y \in \ell_p$ olduğu kullanılarak yukarıdaki eşitlikten

$x \in e_p^r$ iken $ax = (a_k x_k) \in cs$ dir $\Leftrightarrow y = (y_k) \in \ell_p$ iken $T^r y \in c$ dir.

yani

$$a = (a_k) \in \left(e_p^r\right)^\beta \Leftrightarrow T^r \in (\ell_p : c)$$

elde edilir. Lemma 5.2.2. de A matrisi yerine T^r matrisi alınırsa $\left(e_p^r\right)^\beta = d_1^r \cap b_q^r$ bulunur [9].

Teorem 5.2.5. $1 < p < \infty$ olsun ve b_1^r kümesi

$$b_1^r = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $(e_1^r)^\gamma = d_2^r$, $\left(e_p^r\right)^\gamma = b_q^r$ ve $(e_\infty^r)^\gamma = b_1^r$ dir [9].

5.3. Matris Dönüşümleri

Bu bölümde kolaylık sağlaması bakımından

$$a(n,k,m) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} a_{n+j,k} \quad (n,k,m \in \mathbb{N})$$

olarak alınacaktır. Ayrıca bölüm içinde geçecek olan $a(n,k)$ ve $\tilde{a}_{nk}$ ifadeleri Bölüm 2.3. de tanımlandığı gibidir.

Teorem 5.3.1. i) $A \in (e_1^r : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}} |\tilde{a}_{nk}| < \infty \tag{5.3.1.1}$$

olmasıdır.

ii) $1 < p < \infty$ olsun. O zaman $A \in (e_p^r : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q < \infty, \tag{5.3.1.2}$$

$$\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in b_q^r, \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.3.1.3}$$

olmasıdır($p^{-1} + q^{-1} = 1$).

iii) $A \in (e_\infty^r : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| < \infty, \tag{5.3.1.4}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k \left| \sum_{j=k}^{m} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_{nj} \right| = \sum_k |\tilde{a}_{nk}|, \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.3.1.5}$$

olmasıdır.
[48]

Teorem 5 .3.2. $1 \leq p < \infty$ olsun. O zaman

$$A \in (e_1^r : \ell_p) \Leftrightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_n |\tilde{a}_{nk}|^p < \infty$$

dır [48].

Teorem 5.3.3. i) $A \in (e_1^r : f) \Leftrightarrow$ (5.3.1.1) sağlanır ve

$$f - \lim \tilde{a}_{nk} = \alpha_k, \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{5.3.3.1}$$

dır.

ii) $1 < p < \infty$ olsun. O zaman

$A \in (e_p^r : f) \Leftrightarrow$ (5.3.1.2), (5.3.1.3) ve (5.3.3.1) sağlanır.

iii) $A \in (e_\infty^r : f) \Leftrightarrow$ (5.3.1.4), (5.3.1.5) ve (5.3.3.1) sağlanır ve

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k |\tilde{a}(n,k,m) - \alpha_k| = 0 \ (n'\text{ye göre düzgün})$$

dir.

İspat: (5.3.1.2), (5.3.1.3) ve (5.3.3.1) sağlansın ve $x \in e_p^r$ olsun. Bu durumda Ax mevcuttur. (5.3.3.1) ile Teorem 1.3.4. birlikte düşünülürse

$m \to \infty$ iken $|\tilde{a}(n,k,m)|^q \to |\alpha_k|^q$ (n' ye göre düzgün)

olur ve (5.3.1.2) kullanılarak her bir $k \in \mathbb{N}$ çin

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} |\alpha_j|^q &= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{k} |\tilde{a}(n,j,m)|^q \ \ (n' \text{ e göre düzgün}) \\ &\le \sup_{n,m\in\mathbb{N}} \sum_j |\tilde{a}(n,j,m)|^q = M < \infty\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $(\alpha_k) \in \ell_q$ olduğunu gösterir. $x \in e_p^r$ ve $e_p^r \cong \ell_p$ olduğundan $y \in \ell_p$ dir($y = (y_k)$ dizisi (2.1.1.1) ile verilen dizidir.). Hölder eşitsizliği kullanılarak her bir $y \in \ell_p$ için

$$\sum_k |\alpha_k y_k| \le \left(\sum_k |\alpha_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum_k |y_k|^p\right)^{1/p} < \infty$$

yani $(\alpha_k y_k) \in \ell_1$ elde edilir. Şimdi herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $y \in \ell_p$ olduğundan sabit bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı

$$\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4M^{1/q}}$$

olacak şekilde vardır. O zaman (5.3.2.1)' den dolayı bazı $m_0 \in \mathbb{N}$ sayıları $\forall m \geq m_0$ için, n' ye göre düzgün olarak

$$\left|\sum_{k=0}^{k_0} [\tilde{a}(n,k,m) - \alpha_k] y_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde vardır. Bu yüzden yeterince büyük m' ler için
n' ye göre düzgün olarak

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}(Ax)_{n+i} - \sum_k \alpha_k y_k\right| &= \left|\sum_k [\tilde{a}(n,k,m) - \alpha_k] y_k\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{k_0} [\tilde{a}(n,k,m) - \alpha_k] y_k\right| + \left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} [\tilde{a}(n,k,m) - \alpha_k] y_k\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left\{\sum_{k=k_0+1}^{\infty} [|\tilde{a}(n,k,m)| + |\alpha_k|]^q\right\}^{1/q} \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M^{1/q} \frac{\varepsilon}{4M^{1/q}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu $Ax \in f$ olduğunu gösterir. O halde $A \in (e_p^r : f)$ dir.

Tersine $A \in (e_p^r : f)$ olsun. $f \subset \ell_\infty$ olduğundan $(e_p^r : f) \subset (e_p^r : \ell_\infty)$ dır. Bu yüzden (5.3.1.2) ve (5.3.1.3) in gerekliliği doğrudan Teorem 5.3.1. ii) den elde edilir.
Her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$b_n^{(k)}(r) = \begin{cases} 0 & (n < k) \\ \binom{n}{k}(r-1)^{n-k}r^{-n} & (n \geq k) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $b^{(k)}(r) = \left\{b_n^{(k)}(r)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in e_p^r$ dizisi verilsin. Hipotezden dolayı $\forall x \in e_p^r$ için Ax mevcut ve f uzayında olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$Ab^{(k)}(r) = \left\{\sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k}(1-r)^{j-k}r^{-j}a_{nj}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in f$$

dir. Bu ise (5.3.2.1)' in gerekliliğidir. O halde ispat tamamlanır [48].

Teorem 5.3.3. de f-limit bilinen anlamdaki limitle yer değiştirirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.3.4. i) $A \in (e_1^r : c) \Leftrightarrow$ (5.3.1.1) sağlanır ve

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = \alpha_k, \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{5.3.4.1}$$

dir.

ii) $1 < p < \infty$ olsun. O zaman $A \in (e_p^r : c) \Leftrightarrow$ (5.3.1.2), (5.3.1.3) ve (5.3.4.1) sağlanır.

iii) $A \in (e_\infty^r : c) \Leftrightarrow$ (5.3.1.4), (5.3.1.5), (5.3.4.1) sağlanır ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k |\tilde{a}_{nk} - \alpha_k| = 0$$

dır. [48]

Sonuç 5.3.5. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $C = (c_{nk})$ matrisi de $0 < s < 1$ olmak üzere

$$c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(1-s)^{n-j}s^j a_{jk} \;\; ; \;\; (n, k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan matris olsun. O zaman A matrisinin $(e_1^r: e_\infty^s)$, $\left(e_p^r: e_\infty^s\right)$, $(e_\infty^r: e_\infty^s)$, $\left(e_1^r: e_p^s\right)$ ve $\left(e_p^r: e_c^s\right)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 5.3.1., Teorem 5.3.2. ve Sonuç 5.3.4. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [48].

Sonuç 5.3.6. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris, $t = (t_k)$ pozitif sayıların bir dizisi ve $C = (c_{nk})$ matrisi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ olmak üzere

$$c_{nk} = \frac{1}{T_n}\sum_{j=}^{n} t_j a_{jk}\,, \qquad (n, k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan bir matris olsun. O zaman A matrisinin $(e_1^r: r_\infty^t)$, $(e_p^r: r_\infty^t)$, $(e_\infty^r: r_\infty^t)$, $(e_1^r: r_p^t)$ ve $(e_p^r: r_c^t)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 5.3.1., Teorem 5.3.2. ve Sonuç 5.3.4. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir.
r_∞^t, r_p^t ve r_c^t uzayları, $t = e$ alınması durumunda sırasıyla mutlak olmayan türden X_∞, X_p ve $\tilde{c}$ Cesàro dizi uzaylarına indirgeneceğinden Sonuç 5.3.6. aynı zamanda $(e_1^r: X_\infty)$, $(e_p^r: X_\infty)$, $(e_\infty^r: X_\infty)$, $(e_1^r: X_p)$ ve $(e_p^r: \tilde{c})$ sınıflarının karakterizasyonunu da içerir [48].

Sonuç 5.3.7. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun ve $C = (c_{nk})$ matrisi ile $D = (d_{nk})$ matrisleri de $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $c_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ ve $d_{nk} = a_{nk} - a_{n-1,k}$ şeklinde tanımlansınlar. O zaman A matrisinin $(e_p^r: \ell_\infty(\Delta))$, $(e_1^r: \ell_\infty(\Delta))$, $(e_\infty^r: \ell_\infty(\Delta))$, $(e_1^r: c(\Delta))$, $(e_p^r: c(\Delta))$, $(e_\infty^r: c(\Delta))$ ve $(e_1^r: bv_p)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 5.3.1. , Sonuç 5.3.6. ve Teorem 5.3.2. den ilgili olan birinde A matrisinin elemanlarının yerine C ve D matrislerinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [48].

Sonuç 5.3.8. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $C = (c_{nk})$ matrisi de $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $c_{nk} = a(n, k)$ şeklinde tanımlanan bir matris olsun. A matrisinin $(e_1^r: bs)$, $\left(e_p^r: bs\right)$, $(e_\infty^r: bs)$, $(e_1^r: cs)$, $\left(e_p^r: cs\right)$, $(e_\infty^r: cs)$, $(e_1^r: fs)$, $\left(e_p^r: fs\right)$ ve $(e_\infty^r: fs)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar, Teorem 5.3.1. ,Teorem 5.3.2. , Teorem 5.3.3. ve Sonuç 5.3.6. dan ilgili olan birinde A matrisinin elemanları yerine C matrisinin elemanlarının alınmasıyla elde edilir [48].

5.4. e_p^r Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri

Teorem 5.4.1. e_p^r uzayı p tipi Banach_Saks özelliğine sahiptir.

İspat: $\sum \varepsilon_n \leq 1/2$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi verilsin ve (x_n), $B(e_p^r)$ içinde sıfıra zayıf yakınsak bir dizi olsun.$z_0 = x_0 = 0$ ve $z_1 = x_{n_1} = x_1$ alalım. O zaman bir $s_1 \in \mathbb{N}$ sayısı

$$\left\| \sum_{i=s_1+1}^{\infty} z_1(i)\, e^{(i)} \right\|_{e_p^r} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde vardır. $x_n \xrightarrow{w} 0$ olduğundan bu $x_n \to 0$ (koordinatsal) olmasını gerektirir. Bu yüzden bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall n \geq n_2$ için

$$\left\| \sum_{i=0}^{s_1} x_n(i) e^{(i)} \right\|_{e_p^r} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde vardır. $z_2 = x_{n_2}$ olsun. O zaman bir $s_2 > s_1$ sayısı

$$\left\| \sum_{i=s_2+1}^{\infty} z_2(i)\, e^{(i)} \right\|_{e_p^r} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde vardır. $x_n \to 0$ (koordinatsal) yakınsaması sağlandığından bir $n_3 > n_2$ sayısı $\forall n \geq n_3$ için

$$\left\| \sum_{i=0}^{s_2} x_n(i) e^{(i)} \right\|_{e_p^r} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde vardır. Bu işleme bu şekilde devam edilerek
$\forall n \geq n_{j+1}$ için

$$\left\| \sum_{i=0}^{s_j} x_n(i) e^{(i)} \right\|_{e_p^r} < \varepsilon_j$$

ve $z_j = x_{n_j}$ olmak üzere

$$\left\| \sum_{i=s_j+1}^{\infty} z_j(i)\, e^{(i)} \right\|_{e_p^r} < \varepsilon_j$$

olacak şekilde (s_i) ve (n_i) artan dizileri elde edilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{n} z_j \right\|_{e_p^r} &= \left\| \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{s_j-1} z_j(i) e^{(i)} + \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e^{(i)} + \sum_{i=s_j+1}^{\infty} z_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{e_p^r} \\ &\leq \left\| \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{e_p^r} + 2 \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e^{(i)} \right) \right\|_{e_p^r}^p &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} \left| \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (1-r)^{i-k} r^k z_j(k) \right|^p \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (1-r)^{i-k} r^k z_j(k) \right|^p \leq n \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} z_j \right\|_{e_p^r} \leq n^{1/p} + 1 \leq 2n^{1/p}$$

bulunur. Bu ise e_p^r uzayının p tipi Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu gösterir. [48]

Sonuç 5.4.2. e_p^r ve ℓ_p uzayları lineer izomorfik olduğundan $R(e_p^r) = R(\ell_p) = 2^{1/p}$ dir [48].

Teorem 5.4.3. $1 < p < \infty$ için e_p^r uzayı zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir [48].

Teorem 5.4.4. e_p^r uzayı için Guarri' nin konvekslik modülü $0 \leq \varepsilon \leq 2$ olmak üzere

$$\beta_{e_p^r}(\varepsilon) \leq 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p}$$

dir.

İspat: $s \in e_p^r$ olsun. O zaman

$$\|s\|_{e_p^r} = \|E^r s\|_{\ell_p} = \left[\sum_n |(E^r s)_n|^p\right]^{1/p}$$

dir. $0 \leq \varepsilon \leq 2$ olsun ve

$$u = \left(\left(E^{1/r}\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)\right)^{1/p}, E^{1/r}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), 0, 0, \ldots\right),$$

$$v = \left(\left(E^{1/r}\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)\right)^{1/p}, E^{1/r}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right), 0, 0, \ldots\right)$$

dizileri verilsin. O zaman $\|E^r u\|_{\ell_p} = \|u\|_{e_p^r} = 1$, $\|E^r v\|_{\ell_p} = \|v\|_{e_p^r} = 1$ yani $u, v \in S(e_p^r)$ ve $\|E^r u - E^r v\|_{\ell_p} = \|u - v\|_{e_p^r} = \varepsilon$ dır. O halde $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\|\alpha u + (1-\alpha)v\|_{e_p^r}^p = \|\alpha E^r u + (1-\alpha)E^r v\|_{\ell_p}^p$$
$$= 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p + |2\alpha - 1| \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

olur. Bu yüzden

$$\inf_{0\leq\alpha\leq1} \|\alpha u + (1-\alpha)v\|_{e_p^r}^p = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \tag{5.4.4.1}$$

elde edilir. Sonuç olarak $p \geq 1$ için

$$\beta_{e_p^r}(\varepsilon) \leq 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar [48].

Sonuç 5.4.5. (5.4.4.1) ve Teorem 1.4.5 den aşağıdakiler elde edilir.
i) $\varepsilon = 2$ için $\beta_{e_p^r}(\varepsilon) = 1$ dir. Bu yüzden e_p^r kesin konveks uzaydır.
ii) $0 < \varepsilon \leq 2$ için $0 < \beta_{e_p^r}(\varepsilon) \leq 1$ dir. Bu yüzden e_p^r düzgün konveks uzaydır.
[48].

Teorem 5.4.6. e_1^r uzayı Schur özelliğine sahiptir [48].

BÖLÜM 6. $\boldsymbol{e^r(p)}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ EULER DİZİ UZAYININ BAZI TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde mutlak olmayan türden $e^r(p)$ Euler dizi uzayı tanımlanacak ve bu uzayın α-, β- ve γ- dualleri belirlenecektir. Daha sonra Luxemburg normu ile donatılmış $e^r(p)$ dizi uzayı üzerinde bir modül tanımlanarak bu uzayın bazı geometrik özellikleri verilecektir.

6.1. $\boldsymbol{e^r(p)}$ Euler Dizi Uzayı

l^0 bütün reel dizilern uzayı, (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi, $\sup p_k = H$ ve $M = \max\{1, H\}$ olsun.

Tanım 6.1.1. $\ell(p)$ ve $\ell_\infty(p)$ lineer uzayları,

$$\ell(p) = \left\{x = (x_k) \in l^0 : \sum_k |x_k|^{p_k} < \infty\right\}, \qquad 0 < p_k \leq H < \infty$$

ve

$$\ell_\infty(p) = \left\{x = (x_k) \in l^0 : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^{p_k} < \infty\right\}$$

olarak tanımlıdır ve bu uzaylar sırasıyla

$$g_1(x) = \left(\sum_k |x_k|^{p_k}\right)^{1/M} \quad \text{ve} \quad g_2(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^{1/M}$$

paranormları ile birer paranormlu uzaydırlar.

Tanım 6.1.2. $e^r(p)$ dizi uzayı E^r-dönüşümleri $\ell(p)$ uzayında olan bütün dizilerin uzayıdır. Yani $\forall k$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere

$$e^r(p) = \left\{ x = (x_k) \in l^0 : \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} < \infty \right\}$$

dır.

Tanım 1.2.23. kullanılarak $e^r(p)$ Euler dizi uzayı

$$e^r(p) = (\ell(p))_{E^r}$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir. Ayrıca $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ alınırsa $e^r(p)$ uzayının e_p^r uzayına indirgeneceği açıktır.

Teorem 6.1.3. $e^r(p)$ uzayı, her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere

$$g(x) = \left(\sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} \right)^{1/M}$$

paranormu ile bir tam lineer paranormlu uzaydır.

İspat: $\forall x, y \in e^r(p)$ için

$$\left(\sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (x_j + y_j) \right|^{p_k} \right)^{1/M}$$

$$\leq \left(\sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} \right)^{1/M}$$

$$+ \left(\sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j y_j \right|^{p_k} \right)^{1/M}$$

ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|\alpha|^{p_k} \leq \max\{1, |\alpha|^M\} \tag{6.1.3.1}$$

eşitsizliklerinden, koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $e^r(p)$ uzayının lineer uzay olduğu ve $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ alt toplamsallık özelliğinin sağlandığı kolayca görülür. Ayrıca (6.1.3.1) eşitsizliği kullanılarak

$$g(\alpha x) \leq \max\{1, |\alpha|\}\, g(x)$$

olduğunu görmek kolaydır. $\{x^n\}$, $e^r(p)$ uzayında $g(x_n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$ şartını sağlayan bir dizi olsun ve $\alpha_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir (α_n) skalerler dizi verilsin. O zaman g' nin alt toplamsallık özelliği kullanılarak

$$g(x^n) = g(x^n - x + x) \leq g(x^n - x) + g(x)$$

yazılabilir. $g(x^n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan bu eşitsizlikten $\{g(x^n)\}$ dizisinin sınırlı olduğu görülür. Bu yüzden

$$\begin{aligned} g(\alpha_n x^n - \alpha x) &= \left[\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (\alpha_n x_j{}^n - \alpha x_j)\right|^{p_k}\right]^{1/M} \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| g(x^n) + |\alpha| g(x^n - x) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken sağ tarafın limiti sıfıra gider. Bu g'nin paranorm tanımındaki skalerle çarpmaya göre süreklilik özelliğini sağladığını gösterir. O halde g, $e^r(p)$ üzerinde bir paranormdur. Son olarak $e^r(p)$ uzayının tamlığı gösterilecektir. $\{x^i\} = \{x_0^i, x_1^i, x_2^i, \ldots\}$ olmak üzere $\{x^i\}$ dizisi $e^r(p)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\{x^i\}$ Cauchy dizisi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$g(x^i - x^j) < \varepsilon \tag{6.1.3.2}$$

olacak şekilde vardır. Bu yüzden g' nin tanımı kullanılırsa her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve $\forall i,j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left|\left(E^r x^i\right)_k - \left(E^r x^j\right)_k\right| \leq \left[\sum_k \left|\left(E^r x^i\right)_k - \left(E^r x^j\right)_k\right|^{p_k}\right]^{1/M} < \varepsilon$$

elde edilir. O halde her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $\{(E^r x^0)_k, (E^r x^1)_k, (E^r x^2)_k, \dots\}$ reel sayı dizisi bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $(E^r x^i)_k \to (E^r x)_k$, $(i \to \infty)$ dır. Şimdi bu $(E^r x)_0$, $(E^r x)_1$, $(E^r x^0)_2$,… limitleri kullanılarak $\{(E^r x)_0, (E^r x)_1, (E^r x^0)_2, \dots\}$ dizisi tanımlansın. (6.1.3.2) den her bir $m \in \mathbb{N}$ ve $\forall i,j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\sum_{k=0}^{m} \left|(E^r x^i)_k - (E^r x^j)_k\right|^{p_k} \leq g(x^i - x^j)^M < \varepsilon^M \qquad (6.1.3.3)$$

olur. Herhangi $i \geq n_0(\varepsilon)$ için (6.1.3.3)' de ilk olarak $j \to \infty$ alınıp daha sonra $m \to \infty$ iken limite geçilirse

$$g\left(x^i - x\right) = \left(\sum_k \left|(E^r x^i)_k - (E^r x)_k\right|^{p_k}\right)^{1/M} \leq \varepsilon$$

olup $i \to \infty$ iken $x^i \to x$ elde edilir. Son olarak (6.1.3.3)' de $\varepsilon = 1$ alınsın. $i \geq n_0(\varepsilon)$ olmak üzere g' nin alt toplamsallığı kullanılarak her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left[\sum_{k=0}^{m} |(E^r x)_k|^{p_k}\right]^{1/M} \leq g\left(x^i\right) \leq g\left(x^i - x\right) + g\left(x^i\right) \leq 1 + g(x^i)$$

olup $x \in e^r(p)$ dir. Sonuç olarak $e^r(p)$ uzayının tam olduğu da gösterilmiş olur.
$e^r(p)$ uzayında $g(x) \neq g(|x|)$ olacak şekilde en az bir $x = (x_k)$ dizisi bulunabileceğinden $e^r(p)$ uzayı mutlak olmayan(non-absolute) türden bir dizi uzayıdır.

Teorem 6.1.4. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere mutlak olmayan türden $e^r(p)$ Euler dizi uzayı $\ell(p)$ uzayına lineer izomorfiktir. Yani $e^r(p) \cong \ell(p)$ dir.

İspat: Teoremi ispatlamak için $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere $e^r(p)$ ve $\ell(p)$ uzayları arasında bire bir, örten ve normu koruyan bir lineer T dönüşümünün varlığını göstermemiz gerekir. Bu $T: e^r(p) \to \ell(p)$, $x \to Tx = y$ dönüşümü olarak (2.1.1.1) de verilen ifadeyi alalım. T' nin lineer olduğu açıktır. $Tx = 0$ ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0 \Rightarrow x = \theta$ olacağından Çek$T = \{0\}$ dır. Teorem 1.1.8.' e göre T dönüşümü bire bir dönüşümdür. $y \in \ell(p)$ olsun ve $x = \{x_k(r)\}$ dizisi

$$x_k(r) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} y_j, \qquad (k \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlansın. O zaman

$$\begin{aligned}\left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j\right|^{p_k}\right)^{1/M} &= \left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k} \delta_{kj} y_j\right|^{p_k}\right)^{1/M} \\ &= \left(\sum_k |y_k|^{p_k}\right)^{1/M} = g_1(y) < \infty\end{aligned}$$

olup $x \in e^r(p)$ dir. $y \in \ell(p)$ keyfi seçildiğinden T örtendir. Ayrıca T dönüşümünün normu koruduğu yukarıdaki eşitlikten açıktır. O halde $e^r(p) \cong \ell(p)$ elde edilir.

Teorem 6.1.5. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq s_k$ olsun. O zaman $e^r(p) \subset e^r(s)$ dir.

İspat: Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq s_k$ ise $\ell(p) \subset \ell(s)$ kapsaması sağlanacağından bu bize $e^r(p) \subset e^r(s)$ olduğu sonucunu verir.

6.2. $e^r(p)$ Dizi Uzayının α-, β- ve γ-Dualleri

Lemma 6.2.1. i) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ ve $p_k^{-1} + (p_k')^{-1} = 1$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p): \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in K} a_{nk} \, B^{-1} \right|^{p_k'} < \infty$$

olacak şekilde bir $B > 1$ sayısının bulunmasıdır.

ii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p): \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in K} a_{nk} \right|^{p_k} < \infty$$

olmasıdır.

Lemma 6.2.2. i) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p): \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk} B^{-1}|^{p_k'} < \infty \tag{6.2.2.1}$$

olacak şekilde bir $B > 1$ sayısının bulunmasıdır($p_k^{-1} + (p_k')^{-1} = 1$).

ii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p): \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n,k \in \mathbb{N}} |a_{nk}|^{p_k} < \infty \tag{6.2.2.2}$$

olmasıdır.

Lemma 6.2.3. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p): c) \Leftrightarrow$ (6.2.2.1), (6.2.2.2) sağlanır ve ayrıca

$$k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \to \infty} a_{nk} = \beta_k \tag{6.2.3.1}$$

şartı da sağlanır.

Teorem 6.2.4. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. O zaman $e^r(p)$ uzayının α-duali

$$D_1(p) = \bigcup_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in K} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n B^{-1} \right|^{p'_k} < \infty \right\}$$

kümesidir($p_k^{-1} + (p'_k)^{-1} = 1$).

İspat: $a = (a_k) \in w$ olsun ve $B^r = (b_{nk}^r)$ matrisi $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk}^r = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.$y = (y_k)$ dizisi (2.1.1.1) ile verilen dizi olmak üzere

$$a_n x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n y_k = (B^r y)_n, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

dir. $x \in e^r(p) \Leftrightarrow y \in \ell(p)$ olduğu kullanılarak yukarıdaki eşitlikten

$$x \in e^r(p) \text{ iken } ax = (a_n x_n) \in \ell_1 \Leftrightarrow y \in \ell(p) \text{ iken } B^r y \in \ell_1$$

yani

$$a = (a_k) \in \{e^r(p)\}^\alpha \Leftrightarrow B^r \in (\ell(p): \ell_1)$$

elde edilir. O halde Lemma 6.2.1. i)' de A matrisi yerine B^r matrisi alınırsa $\{e^r(p)\}^\alpha = D_1(p)$ bulunur.

Teorem 6.2.5. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun ve D, $D_2(p)$ kümeleri

$$D = \left\{a = (a_k) \in w \text{: her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \text{ mevcut}\right\}$$

$$D_2(p) = \bigcup_{B>1} \left\{a = (a_k) \in w\text{: } \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j B^{-1} \right|^{p'_k} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $[e^r(p)]^\beta = D \cap D_2(p)$ ve $[e^r(p)]^\gamma = D_2(p)$ dir.

İspat: $a = (a_k) \in w$ olsun ve $T^r = (t^r_{nk})$ matrisi $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$t^r_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $y = (y_k)$ dizisi (2.1.1.1) ile verilen dizi olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (r-1)^{k-j} r^{-k} y_j \right] a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right] y_k = (T^r y)_n, \qquad (6.2.5.1) \end{aligned}$$

dır. $x \in e^r(p) \Leftrightarrow y \in \ell(p)$ olduğu kullanılarak (6.2.5.1) eşitliğinden

$$x = (x_k) \in e^r(p) \text{ iken } ax = (a_n x_n) \in cs \Leftrightarrow y = (y_k) \in \ell(p) \text{ iken } T^r y \in c$$

yani

$$a = (a_k) \in \{e^r(p)\}^\beta \Leftrightarrow T^r \in (\ell(p) : c)$$

elde edilir. Lemma 6.2.3. de A matrisi yerine T^r matrisi alınırsa (6.2.2.1) ve (6.2.3.1) den

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k}\left|\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}a_jB^{-1}\right|^{p_k'}<\infty \text{ ve}$$

$$\text{her bir } k\in\mathbb{N} \text{ için } \sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}a_j \text{ mevcut}$$

bulunur. O halde $[e^r(p)]^\beta = D \cap D_2(p)$ dir.

Tekrar $x \in e^r(p) \Leftrightarrow y \in \ell(p)$ olduğu kullanılarak (6.2.5.1) eşitliğinden

$$x=(x_k)\in e^r(p) \text{ iken } ax=(a_nx_n)\in bs \Leftrightarrow y=(y_k)\in \ell(p) \text{ iken } T^ry\in\ell_\infty$$

yani

$$a=(a_k)\in\{e^r(p)\}^\gamma \Leftrightarrow T^r\in(\ell(p):\ell_\infty)$$

elde edilir. Lemma 6.2.2.' de A matrisi yerine T^r matrisi alınırsa (6.2.2.1)'den

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k}\left|\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}a_jB^{-1}\right|^{p_k'}<\infty$$

bulunur. O halde $[e^r(p)]^\gamma = D_2(p)$ dir.

Teorem 6.2.6. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \le 1$ olmak üzere $D_3(p)$ ve $D_4(p)$ kümeleri

$$D_3(p)=\left\{a=(a_k)\in w:\ \sup_{K\in\mathcal{F}}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{n\in K}\binom{n}{k}(r-1)^{n-k}r^{-n}a_n\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

$$D_4(p)=\left\{a=(a_k)\in w:\ \sup_{n,k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}(r-1)^{j-k}r^{-j}a_j\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $[e^r(p)]^\alpha = D_3(p)$, $[e^r(p)]^\beta = D \cap D_4(p)$ ve $[e^r(p)]^\gamma = D_4(p)$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatı, Teorem 6.2.5. ve 6.2.6.' nın ispatında, Lemma 6.2.1., 6.2.2. ve 6.2.3.' ün ilk kısımları yerine ikinci kısımları alınarak kolaylıkla yapılabilir.

Teorem 6.2.7. $e^r(p)$ uzayında her sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$b_n^{(k)}(r) = \begin{cases} 0 & (0 \leq n < k) \\ \binom{n}{k}(r-1)^{n-k} r^{-n} & (n \geq k) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $b^{(k)}(r) = \{b_n^{(k)}(r)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. O zaman $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k(r) = (E^r x)_k$ olmak üzere $\{b^{(k)}(r)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $e^r(p)$ uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in e^r(p)$ elemanı

$$x = \sum_k \alpha_k(r)\, b^{(k)}(r)$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir.

6.3. $e^r(p)$ Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $p = (p_k)$, $p_k \geq 1$ olan pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere $x \in e^r(p)$ için

$$\rho(x) = \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k}$$

olsun ve $e^r(p)$ üzerinde Luxemburg normu

$$\|x\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 1\right\}, \qquad x \in e^r(p)$$

olarak tanımlansın.

Teorem 6.3.1. ρ fonksiyonu $e^r(p)$ üzerinde konveks modüldür.

İspat: i) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.

$$\rho(x) = \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \text{ için } \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \text{ için } x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

ii) $|\alpha| = 1$ olan $\forall \alpha$ skaleri için $\rho(\alpha x) = \rho(x)$ dir.

$$\rho(\alpha x) = \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (\alpha x_j) \right|^{p_k}$$

$$= \sum_k \left| \alpha \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k}$$

$$= \sum_k |\alpha|^{p_k} \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k}$$

$$= \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} = \rho(x)$$

iii) $\alpha \geq 0, \beta \geq 0; \alpha + \beta = 1$ olsun. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$ dir.

$$\rho(\alpha x + \beta y) = \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (\alpha x_j + \beta y_j) \right|^{p_k}$$

$$= \sum_k \left| \alpha \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j + \beta \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j y_j \right|^{p_k}$$

$$\leq \alpha \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} + \beta \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j y_j \right|^{p_k}$$

$$= \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$$

Teorem 6.3.2. $x \in e^r(p)$ için ρ modülü aşağıdaki özelikleri sağlar.

i) $0 < \alpha < 1$ ise $\alpha^M \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq \rho(x)$ ve $\rho(\alpha x) \leq \alpha\rho(x)$ dir.

ii) $\alpha > 1$ ise $\rho(x) \leq \alpha^M \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ dir.

iii) $\alpha \geq 1$ ise $\rho(x) \leq \alpha\rho(x) \leq \rho(\alpha x)$ dir.

$\left(M = \sup_k p_k\right)$

İspat:

i) $0 < \alpha < 1$ olsun.

$$\rho(x) = \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} = \sum_k \left| \alpha \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j \frac{x_j}{\alpha} \right|^{p_k}$$

$$= \sum_k \alpha^{p_k} \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j \frac{x_j}{\alpha} \right|^{p_k}$$

$$\geq \sum_k \alpha^M \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j \frac{x_j}{\alpha} \right|^{p_k}$$

$$= \alpha^M \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j \frac{x_j}{\alpha} \right|^{p_k} = \alpha^M \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

$(0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha^{p_k} \geq \alpha^M)$

ii) $\alpha > 1$ olsun.

$$\rho(x) = \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} = \sum_k \left| \alpha \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j \frac{x_j}{\alpha} \right|^{p_k}$$

$$= \sum_k \alpha^{p_k} \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j \frac{x_j}{\alpha} \right|^{p_k}$$

dir. $\alpha > 1$ ise $\forall k$ için $\alpha^{p_k} \leq \alpha^M$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$\rho(x) \leq \alpha^M \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j \frac{x_j}{\alpha} \right|^{p_k} = \alpha^M \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

elde edilir.

iii) $\alpha \geq 1$ olsun.
$\alpha \geq 1$ olduğundan $\alpha\rho(x) \geq \rho(x)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\rho(\alpha x) &= \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (\alpha x_j) \right|^{p_k} \\
&= \sum_k \left| \alpha \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} \\
&= \sum_k \alpha^{p_k} \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k}
\end{aligned}$$

olup $\alpha \geq 1$ ise $\forall k$ için $\alpha^{p_k} \geq \alpha$ olacağından yukarıdaki son eşitsizlikten

$$\rho(\alpha x) \geq \alpha \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} = \alpha\rho(x)$$

bulunur.

Önerme 6.3.3. Herhangi bir $x \in e^r(p)$ için

i) $\|x\| < 1$ ise $\rho(x) \leq \|x\|$,
ii) $\|x\| > 1$ ise $\rho(x) \geq \|x\|$,
iii) $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \rho(x) = 1$,
iv) $\|x\| < 1 \Leftrightarrow \rho(x) < 1$,
v) $\|x\| > 1 \Leftrightarrow \rho(x) > 1$,
vi) $0 < \alpha < 1$ ve $\|x\| > a$ ise $\rho(x) > \alpha^M$ ve

vii) $\alpha \geq 1$ ve $\|x\| > \alpha$ ise $\rho(x) < \alpha^M$

özellikleri sağlanır.

İspat: [57] makalesindeki aynı ispat yöntemi kullanılarak yapılır.

Teorem 6.3.4. $e^r(p)$ uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. O zaman

i) $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 1$ ise $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n) = 1$

ii) $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n) = 0$ ise $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$

dır.

İspat:

i) $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 1$ olsun ve $\varepsilon \in (0,1)$ verilsin. O zaman bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall n \geq N$ için $1-\varepsilon < \|x_n\| < 1+\varepsilon$ olacak şekilde vardır. Önerme 6.3.3. vi) ve vii) den $\forall n \geq N$ için $(1-\varepsilon)^M < \rho(x_n) < (1+\varepsilon)^M$ olur. Bu ise $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n) = 1$ olduğunu gösterir.

ii) $\|x_n\| \nrightarrow 0$ olsun. O zaman bir $\varepsilon \in (0,1)$ sayısı ve (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_{n_k}\| > \varepsilon$ olacak şekilde vardır. Önerme 6.3.3. vi)' den $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_{n_k}) > \varepsilon^M$ elde edilir. Bu ise $n \to \infty$ iken $\rho(x_n) \nrightarrow 0$ demektir. O halde istenen elde edilir.

Teorem 6.3.5. $e^r(p)$ uzayı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat: $(x^n) = (x_j^n)$ dizisi $e^r(p)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon \in (0,1)$ verilsin. (x^n) Cauchy dizisi olduğundan bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall n,m \geq N$ için $\|x^n - x^m\| < \varepsilon^M$ olacak şekilde vardır. $\varepsilon < 1$ olduğundan $\varepsilon^M < 1$ olup $\forall n,m \geq N$ için Teorem 6.3.3. i) den

$$\rho(x^n - x^m) \leq \|x^n - x^m\| < \varepsilon^M$$

yani $\forall n, m \geq N$ için

$$\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (x_j^n - x_j^m)\right|^{p_k} < \varepsilon^M \tag{6.3.5.1}$$

elde edilir. O halde her sabit $j \in \mathbb{N}$ ve $\forall n, m \geq N$ için

$$|x_j^n - x_j^m| < \varepsilon$$

dır. Bu durum her bir $j \in \mathbb{N}$ için (x_j^n) reel sayı dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.$\mathbb{R}$ tam olduğundan her bir $j \in \mathbb{N}$ için $m \to \infty$ iken $x_j^m \to x_j$ dir. Bu yüzden her sabit $j \in \mathbb{N}$ ve $\forall n \geq N$ için

$$|x_j^n - x_j| < \varepsilon$$

dır. (6.3.5.1) eşitsizliği kullanılarak $\forall n, m \geq N$ için

$$\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (x_j^n - x_j^m)\right|^{p_k} < \varepsilon$$

yazılabilir. $\forall j \in \mathbb{N}$ için $m \to \infty$ iken $x_j^m \to x_j$ olduğundan $(m \to \infty)$ iken $\rho(x^n - x^m) \to \rho(x^n - x)$ dır. Buradan $m \to \infty$ iken

$$\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (x_j^n - x_j^m)\right|^{p_k} \to \sum_k \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (x_j^n - x_j)\right|^{p_k}$$

elde edilir. O halde $\forall n \geq N$ için

$$\rho(x^n - x) < \varepsilon$$

olup $\forall n \geq N$ için Teorem 6.3.3. i) den dolayı $\|x^n - x\| < \varepsilon$ dir. Bu ise $\|x^n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ demektir. Son olarak $x \in e^r(p)$ olduğu gösterilmelidir. $e^r(p)$ uzayı lineer uzay olduğundan

$$x = (x - x^n) + x^n$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned}
&\sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} \\
&= \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (x_j - x_j^n) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j^n \right|^{p_k} \\
&\leq \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j (x_j - x_j^n) \right|^{p_k} + \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j^n \right|^{p_k} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

dır. Bu yüzden $x \in e^r(p)$ dir. Sonuç olarak $e^r(p)$ dizi uzayı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır.

Lemma 6.3.6. $x \in e^r(p)$ ve $(x_n) \subset e^r(p)$ olsun. $\rho(x_n) \to \rho(x)$ $(n \to \infty)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_n(k) \to x(k)$ $(n \to \infty)$ ise $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ dir.

İspat: [57] makalesindeki aynı ispat yöntemi kullanılarak yapılır.

Teorem 6.3.7. $e^r(p)$ uzayı (H) özelliğine sahiptir.

İspat: $x \in S(e^r(p))$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(e^r(p))$, $x_n \overset{w}{\to} x$ ve $\|x_n\| \to 1$ $(n \to \infty)$ olsun. $x \in S(e^r(p))$ olduğundan $\|x\| = 1$ olup Teorem 6.3.3. iii) den $\rho(x) = 1$ dir ve $(n \to \infty)$ iken $\|x_n\| \to 1$ olduğundan Teorem 6.3.4. i) den $(n \to \infty)$ iken $\rho(x_n) \to 1$ dir. Bu yüzden $(n \to \infty)$ iken $\rho(x_n) \to \|x\|$ bulunur. $x_n \overset{w}{\to} x$ olduğundan $\pi_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan i. koordinat dönüşümü olan $\pi_i: e^r(p) \to \mathbb{R}$ dönüşümü süreklidir. Bu $\forall i \in \mathbb{N}$ için $(n \to \infty)$ iken $x_n(i) \to x(i)$ olmasını gerektirir. O halde Lemma 6.3.6. dan $(n \to \infty)$ iken $x_n \to x$ elde edilir. Bu da $e^r(p)$ uzayının (H) özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Aşağıdaki sonuç direkt olarak Teorem 6.3.7. den elde edilir.

Sonuç 6.3.8. $1 \leq p < \infty$ için $\left(e_p^r, \|.\|_{e_p^r}\right)$ uzayı (H) özelliğine sahiptir.

Sonuç 6.3.9. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ olan $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi için Luxemburg normu ile donatılmış olan $e^r(p)$ uzayı rotund uzay değildir. Bunu görmek için

$$x = x_k(r) = \left\{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^k\right\} \; ve \; y = y_k(r) = \left\{k\frac{(1-r)^{k-1}}{r^k}\right\}$$

dizilerini alınsın ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olsun. Bu durumda $\rho(x) = \rho(y) = 1$ olduğunu görmek kolaydır. O halde Teorem 6.3.3. iii) den $\|x\| = \|y\| = 1$ olup $x, y \in S(e^r(p))$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}r^j\left(\left(1-\frac{1}{r}\right)^j + j\frac{(1-r)^{j-1}}{r^j}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}r^j\left(1-\frac{1}{r}\right)^j + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}r^j j\frac{(1-r)^{j-1}}{r^j}\right| \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \left|(1-r)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j + (1-r)^{k-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}j(-1)^{j-1}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left((1-r)^0\sum_{j=0}^{0}\binom{0}{j}(-1)^j + (1-r)^{1-1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}j(-1)^{j-1} + 0 + \cdots + 0 \ldots\right) \\
&= \frac{1}{2}(1+1) = 1
\end{aligned}$$

dir. O halde yine Teorem 6.3.3. iii) den $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$ olur. x ve y farklı noktalar olduğundan $\frac{x+y}{2}$ noktası ekstremum nokta değildir. Bu ise $e^r(p)$ uzayının rotund uzay olmadığını gösterir. Teorem 1.5.7. kullanılarak $e^r(p)$ uzayının LUR uzay olmadığı da görülür.

BÖLÜM 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde bazı Euler dizi uzaylarının topolojik ve geometrik özellikleri verildi. Tezin orijinal bölümünü ise, $e^r(p)$ genelleştirilmiş Euler dizi uzayının bazı topolojik ve geometrik özellikleri oluşturmaktadır. Bu son bölümde elde edilen temel özellikler sonuçlar halinde verilecektir.

Sonuç 7.1. $e^r(p)$ uzayı, her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere

$$g(x) = \left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j\right|^{p_k}\right)^{1/M}$$

paranormu ile bir tam lineer paranormlu uzaydır.

Sonuç 7.2. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere mutlak olmayan türden $e^r(p)$ Euler dizi uzayı $\ell(p)$ uzayına lineer izomorfiktir. Yani $e^r(p) \cong \ell(p)$ dir.

Sonuç 7.3. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq s_k$ olsun. O zaman $e^r(p) \subset e^r(s)$ dir.

Sonuç 7.4. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere $e^r(p)$ uzayının α-duali

$$D_1(p) = \bigcup_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in K} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n B^{-1} \right|^{p'_k} < \infty \right\}$$

kümesidir($p_k^{-1} + (p'_k)^{-1} = 1$).

Sonuç 7.5. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun ve D, $D_2(p)$ kümeleri

$$D = \left\{ a = (a_k) \in w \text{: her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \text{ mevcut} \right\}$$

$$D_2(p) = \bigcup_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in w\text{: } \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j B^{-1} \right|^{p_k'} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $[e^r(p)]^{\beta} = D \cap D_2(p)$ ve $[e^r(p)]^{\gamma} = D_2(p)$ dir.

Sonuç 7.6. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olmak üzere $D_3(p)$ ve $D_4(p)$ kümeleri

$$D_3(p) = \left\{ a = (a_k) \in w\text{: } \sup_{K \in \mathcal{F}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in K} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right|^{p_k} < \infty \right\}$$

$$D_4(p) = \left\{ a = (a_k) \in w\text{: } \sup_{n,k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right|^{p_k} < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $[e^r(p)]^{\alpha} = D_3(p)$, $[e^r(p)]^{\beta} = D \cap D_4(p)$ ve $[e^r(p)]^{\gamma} = D_4(p)$ dir.

Sonuç 7.7. $e^r(p)$ uzayında her sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$b_n^{(k)}(r) = \begin{cases} 0 & (0 \leq n < k) \\ \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} & (n \geq k) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $b^{(k)}(r) = \{b_n^{(k)}(r)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. O zaman $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k(r) = (E^r x)_k$ olmak üzere $\{b^{(k)}(r)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $e^r(p)$ uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in e^r(p)$ elemanı

$$x = \sum_k \alpha_k(r)\, b^{(k)}(r)$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir.

Sonuç 7.8. $e^r(p)$ uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. O zaman

i) $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 1$ ise $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = 1$

ii) $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$ ise $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$

dır.

Sonuç 7.9. $e^r(p)$ uzayı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır.

Sonuç 7.10. $x \in e^r(p)$ ve $(x_n) \subset e^r(p)$ olsun. $\rho(x_n) \to \rho(x)$ $(n \to \infty)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_n(k) \to x(k)$ $(n \to \infty)$ ise $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ dir.

Sonuç 7.11. $e^r(p)$ uzayı (H) özelliğine sahiptir.

Sonuç 7.12. $1 \leq p < \infty$ için $\left(e_p^r, \|.\|_{e_p^r}\right)$ uzayı (H) özelliğine sahiptir.

Sonuç 7.13. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ olan $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi için Luxemburg normu ile donatılmış olan $e^r(p)$ uzayı rotund uzay değildir.

Sonuç 7.14. $e^r(p)$ uzayının LUR-uzay değildir.

Bu uzayda gösterilen bu topolojik ve geometrik özelliklerin yanı sıra, bu uzay üzerindeki matris dönüşümleri incelenebilir ve Banach uzaylarında var olan diğer geometrik özelliklerin bu uzayda olup olmadığı açık bir problem olarak araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] AHMAD, Z.U., MURSALEEN, M., Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix maps, Publ. Inst. Math., 42:57-61, 1987.

[2] AKHMEDOV, A.M., BAŞAR, F., The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space bv_p, $(1 \leq p < \infty)$, Acta. Math. Sin. Eng. Ser., 23(10):1757-1768, 2007.

[3] ALTAY, B., On the space of p-summable difference sequences of order m, $(1 \leq p < \infty)$, Studia Sci. Math. Hungar., 43(4):387-402, 2006.

[4] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type, Southeast Asian Bull. Math., 26:701-715, 2002.

[5] ALTAY, B., BAŞAR, F., Some Euler sequence spaces of non-absolute type, Ukrainian Math. J., 57(1):1-17, 2005.

[6] ALTAY, B., BAŞAR, F., Some new spaces of double sequences, J. Math. Anal. Appl., 309(1):70-90, 2005.

[7] ALTAY, B., BAŞAR, F., Some paranormed sequence spaces of non-absolute type derived by weighted mean, J. Math. Anal. Appl., 319(2):494-508, 2005.

[8] ALTAY B., BAŞAR F., The fine spectrum and the matrix domain of the difference operator Δ on the sequence space ℓ_p, $(0 < p < 1)$, Commun Math. Anal., 2(2):1-11, 2007.

[9] ALTAY, B., BAŞAR, F., MURSALEEN, M., On the Euler sequence spaces which include the spaces $\ell_p$and ℓ_∞ I, Inform. Sci., 176:1450-1462, 2006.

[10] ALTAY, B., POLAT, H., On some new Euler difference sequence spaces, Southeast Asian Bulletin of Math., 30:209-220, 2006.

[11] AYDIN, C., BAŞAR, F., On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c, Hokkaido Math. J., 33, No:1, 1-16, 2004.

[12] AYDIN, C., BAŞAR, F., Some new difference sequence spaces, Appl. Math. Comput., 157(3):677-693, 2004.

[13] AYDIN, C., BAŞAR, F., Some new paranormed sequence spaces, Inform. Sci., 160:27-40, 2004.

[14] AYDIN, C., BAŞAR, F., Some new sequence spaces which include the spaces $\ell_p$and ℓ_∞, Demonstratio Math., 38(3):641-656, 2005.

[15] BAŞAR, F., Infinite matrices and almost boundedness, Boll. Un. Mat. Ital., A 6(7):395-402, 1992.

[16] BAŞAR, F., Infinite matrices and Cesàro Sequence spaces of non-absolute type, Math. J. Ibaraki Univ., 31:1-12, 1999.

[17] BAŞAR, F., ALTAY B., Matrix mappings on the space $bs(p)$ and its α-, β- and γ-duals, Aligarh Bull. Math., 21(1):79-91, 2002.

[18] BAŞAR, F., ALTAY, B., On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings, Ukrainian Math. J., 55(1):136-147, 2003.

[19] BAŞARIR, M., On some new sequence spaces and related matrix transformations, Indian J. Pure Appl. Math., 26(10):1003-1010, 1995.

[20] BOSS, J., PETER, C., Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, 2000.

[21] CHOUDHARY, B., MİSHRA, S.K., On Köthe-Toeplitz duals of certain sequence spaces and their matrix transformations, Indian J. Pure Appl. Math., 24(5):291-301, 1993.

[22] CHOUDHARY, B., NANDA, S., Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc., New Delhi, 1989.

[23] ÇOLAK, R., ET, M., On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations, Hokkaido Math. J., 26(3):483-492, 1997.

[24] ÇOLAK, R., ET, M., MALKOWSKY, E., Some Topics of Sequence Spaces, Lecture Notes in Mathematics, Fırat Univ. Press, 1-63, Turkey, ISBN: 975-394-0386-6, 2004.

[25] CUI, Y.A., HUDZIK, H., On the Banach-Saks and weak Banach-Saks properties of some Banach sequence spaces, Acta Sci. Math.(Szeged), 65:179-187, 1999.

[26] CUI, Y.A., HUDZIK, H., PLICIENNIK, R., Banach-Saks property in some Banach sequence spaces, Annales Math. Polonici, 65:193-202, 1997.

[27] DIESTEL, J., Geometry of Banach Spaces - Selected Topics, Springer-Verlag, 1984.

[28] FUSTER, L.E., Moduli and Constants: ...What a Show! Avaiable on the internet (accesed in November 2005), May 2005.

[29] GARCİA-FALSET, Stability and fixed points for nonexpansive mappings, Houston J. Math., 20:495-505, 1994.

[30] GARCİA-FALSET, The fixed point property in Banach spaces with NUS-property, J. Math. Anal. Appl. 215(2):532-542, 1997.

[31] GARLİNG, D.J.H., The β and γ duality of sequence spaces, Proc. Camb. Phil. Soc., 63:963-981, 1967.

[32] GROSSE-ERDMANN, K.-G., Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox, J. Math. Anal. Appl., 180:223-238, 1993.

[33] GURARİİ, V.I., On differential properties of the convexity moduli of Banach spaces, Mat. Issled., 2:141-148, 1969.

[34] KAMPTHAN, P.K., GUPTA, M., Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker, New York-Basel, 1981.

[35] KIZMAZ, H., On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull. 24(2):169-176, 1981.

[36] KNAUST, H., Orlicz sequence spaces of Banach-Saks type, Arch. Math., 59:562-565, 1992.

[37] LASCARİDES, C.G., MADDOX, I.J., Matrix transformations between some classes of sequences, Proc. Camb. Phil. Soc., 68:99-104, 1970.

[38] LORENTZ ,G.G., A contribution to the theory of divergent sequences, Acta Math., 80:167-190, 1948.

[39] MADDOX, I.J., On theorems on Steinhaus type, J. London Math. Soc., 42:239-244, 1967.

[40] MADDOX, I.J., Spaces of strongly summable sequences, Quart. J. Math. Oxford, 18(2):345-355, 1967.

[41] MADDOX, I.J., Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices, Proc. Comb. Phil. Soc., 64:335-340, 1968.

[42] MADDOX, I.J., Continuous and Köthe-Toeplitz duals of certain sequence spaces, Proc. Camb. Phil. Soc., 65:431-435, 1969.

[43] MADDOX, I.J., Elements of Functional Analysis, The University Press, 2nd ed., Cambridge, 1988.

[44] MALKOWSKY, E., Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces, Mat. Vesnik, 49:187-196, 1997.

[45] MALKOWSKY, E., FK spaces, matrix transformations and the Hausdorff measure of noncompactness, Seminar,Van, Turkey, 2001.

[46] MALKOWSKY, E., PARASHAR, S.D., Matrix transformations in space of bounded and convergent difference sequence of order m, Analysis, 17:87-97, 1997.

[47] MALKOWSKY ,E., SAVAŞ, E., Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted mean, Appl. Math. Comput. 147:333-345, 2004.

[48] MURSALEEN, M., BAŞAR, F., ALTAY, B., On the Euler sequence spaces which include the spaces $\ell_p$and ℓ_∞ II, Nonlinear Analysis, 65:707-717, 2006.

[49] MUSAYEV, B., ALP, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.

[50] MUSİELAK, J., Orlicz spaces and modular spaces, Lecture Notes in Math, Springer Verlag, 1034, 1983.

[51] NAKANO, H., Modulared sequence spaces, Proc. Japan Acad., 27(2):508-512, 1951.

[52] NANDA, S., Matrix Transformations and Sequence Spaces, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, 1983.

[53] NG, P.-N., Matrix transformations on Cesàro sequence spaces of non-absolute type, Tamkang J. Math. 10(2):215-221, 1979.

[54] NG, P.-N., LEE, P.-Y., Cesàro sequences spaces of non-absolute type, Comment Math. Prace. Mat., 20(2):429-433, 1978.

[55] POLAT, H., BAŞAR, F., Some Euler spaces of difference sequences of order m, Acta Math. Sci., 27B(2):254-266, 2007.

[56] POVELL, R.E., SHAH, S.M., Summability Theory and Its Applications, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1972.

[57] SANHAN, S., SUANTAI, S., Some geometric properties of Cesàro sequences space, KYUNGPOOK Math. J., 43:191-197, 2003.

[58] STIEGLITZ, M., TIETZ, H., Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht, Math. Z., 154:1-16, 1977.

[59] ŞENGÖNÜL, M., BAŞAR, F., Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c, Soochow J. Math., 31(1):107-119, 2005.

[60] ŞUHUBİ, E.S., Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.

[61] WANG, C.-S., On Nörlund sequence spaces, Tamkang J. Math., 9:269-274, 1979.

[62] WILANSKY, A., Summability through Functional Analysis, North-Hoolland Mathematics Studies, vol. 85, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Emrah Evren Kara, 03.08.1982 de Hatay’ da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İskenderun’da tamamladı. 1999-2000 eğitim yılında İskenderun Lisesinden mezun oldu. 2002-2003 eğitim yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki Lisans eğitimini 2005-2006 eğitim yılında bitirdi. 2006 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans eğitimine başladı.