T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zafer YOSMA

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Refik KESKİN**

Haziran 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zafer YOSMA

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 06 / 06 /2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Refik KESKİN	Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR	Doç. Dr. Salih Zeki YILDIZ
Jüri Başkanı	Üye	Üye

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Refik KESKİN'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca Arş. Gör. Bahar DEMİRTÜRK'e, fikir ve düşüncelerini paylaştığı için teşekkür ederim.

Zafer YOSMA

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$a \mid b$	: a , b yi böler.
$a \nmid b$	: a , b yi bölmez.
$\prod$	: Çarpım sembolü
$\sum$	: Toplam sembolü
(a,b)	: a ile b nin ortak böleni
$a \equiv b (\operatorname{mod} m)$	: a nın m ile bölümünden kalan b dir.

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fibonacci sayıları,Lucas sayıları,Binet formülü.

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas Sayıları'nın genel özellikleri incelendi. Birinci bölümde konuyla ilgili temel tanımlar ve teoremler verildi. İkinci bölümde Fibonacci Sayıları'nın rekürans bağıntısı ile birlikte bölünebilme özellikleri ele alındı. Ayrıca Binet Formülü ve Lucas Sayıları ile ilgili bazı teoremler verildi. Üçüncü bölümde bazı Fibonacci Matrisleri'nden bahsedildi. Son bölümde ise Fibonacci ve Lucas Serileri ele alındı.

FİBONACCİ AND LUCAS NUMBERS

SUMMARY

Key Words: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Binet’s formula

In this thesis, the general proporties of Fibonacci and Lucas numbers are examined. Fundamental definitions and theorems concerning with the subject are given in the first chapter. Second chapter is devoted to the divisibility proporties of the Fibonacci numbers. In the third chapter, Binet’s Formula and some theorems related to the Lucas numbers are given. In the fourth chapter, Fibonacci and Lucas matrices are mentioned. Lastly, Fibonacci and Lucas series are investigated in the fifth chapter.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanacağımız temel tanımlar ve toremler verilecektir.

Birinci tümevarım ilkesi: Her n doğal sayısı için $P(n)$ bir önerme olsun.

$a)$ $P(1)$ doğru olsun.

$b)$ $P(n)$ doğru iken $P(n+1)$ de doğru olsun.

Bu taktirde her n için $P(n)$ doğrudur.

İkinci tümevarım ilkesi: Her n doğal sayısı için $P(n)$ bir önerme olsun.

$a)$ $P(1)$ doğru olsun.

$b)$ $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $P(k)$ doğru iken $P(n+1)$ de doğru olsun.

Bu taktirde her n için $P(n)$ doğrudur.

Tanım 1.1: $p > 2$ bir asal sayı ve $p \nmid a$ olsun. $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ sembolüne Legendre Sembolü denir ve

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ p)\, nin\, çözümü\, vardır \\ -1 & x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ p)\, nin\, çözümü\ yoktur \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.1.1: (Quadratic Reciprocity Teoremi) p ve q birbirinden farklı tek asal sayılar iseler $\left(\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{q}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$ dir.

Teorem 1.1.2: $p > 2$ bir asal sayı olsun. $p \mid a^2 + 1$ olacak biçimde bir a tamsayısı varsa $p \equiv 1 (\bmod 4)$ dir.

Teorem 1.1.3: (Fermat Teoremi) p bir asal sayı ve $p \nmid a$ ise $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$ dir.

Teorem 1.1.4: p bir asal sayı olmak üzere $p \equiv 3 (\bmod 4)$, $p \mid a^2 + b^2$ ise $p \mid a$ ve $p \mid b$ dir.

BÖLÜM 2. FİBONACCİ SAYILARI

Tanım 2.1: Her bir terimi, kendinden önceki iki terimin toplamı olan $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55..$ sayılarının dizisi Fibonacci Dizisi olarak bilinir. Bu sayıların her birine Fibonacci Sayıları denir ve $n.$ Fibonacci Sayısı F_n ile gösterilir. Bu sayı dizisi aşağıdaki tavşan probleminden ortaya çıkmıştır.

2.1. Tavşan Problemi

Biri dişi, biri erkek olan yeni doğmuş iki tavşan olduğunu farzedelim;
1) Her çiftin olgun olması için bir ayın aldığı,
2) $2.$aydan sonra, her çiftin, her ay bir çift doğurduğu,
3) Yıl boyunca hiçbir tavşanın ölmediği,
şartları altında bir yılda doğan tavşan çiftlerinin sayısını bulalım.

İlk tavşan çiftinin 1 Ocak'ta doğduğunu farzedelim. Bu ilk tavşan çiftinin olgunlaşması bir ay alır. Bu yüzden 1 Şubat'ta, hâlâ, yalnız bir çift vardır. 1 Mart'ta bu tavşan çifti iki aylıktır. Ve yeni bir çift doğururlar. Toplamda iki çift olur. Bu şekilde devam ederek, 1 Nisan'da 3 çift olacak, 1 Mayıs'ta 5 çift olacak ve böylece şu tablo oluşacaktır:

Tablo 2.1.1 Aylara göre tavşan çiftlerinin sayıları.

Çiftlerin Sayısı	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos
Bebekler	1	0	1	1	2	3	5	8
Yetişkinler	0	1	1	2	3	5	8	13
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	21

2.2. Rekürans Belirleme

$F_1 = F_2 = 1$ (Başlangıç Koşulları)

$n \geq 3$ ise $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (Rekürans Bağıntısı)

Tablo 2.1.1; yetişkin çiftler, bebek çiftler ve toplam çiftler arasında birkaç ilginç bağıntı olduğunu gösterir. Bu bağıntıları görmek için, n. aydaki yetişkin çiftlerin sayısını A_n, bebek çiftlerin sayısını ise B_n ile gösterelim. Burada $n \geq 1$ dir. Açık olarak;

$$A_1 = 0 \text{ ve } A_2 = 1 = B_1$$

dir.

$n \geq 3$ olduğunu varsayalım:

n. aydaki her yetişkin çift, yeni (bebek) bir çift doğuracağı için, n. aydaki bebek çiftlerin sayısı, bundan önceki yetişkin çiftlerin sayısına eşittir.

$$\begin{pmatrix} n.\,aydaki\ yetişkin \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1).\,aydaki\ yetişkin \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n-1).\,aydaki\ bebek \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix}$$

Yani;

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \qquad n \geq 3$$

veya

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} \qquad n \geq 3$$

dir.

Bundan böyle A_n, Fibonacci Rekürans Bağıntısına karşılık gelecek. Burada $A_2 = 1 = A_3$ dir. Sonuç olarak,

$$F_n = A_{n+1} \qquad n \geq 1$$

dir.

$$\begin{pmatrix} n.\,aydaki\ çiftlerin \\ toplam\ sayısı \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n.\,aydaki\ yetişkin \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n.\,aydaki\ bebek \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Yani;

$$n \geq 3 \text{ için, } F_n = A_n + B_n$$

dir. Bundan böyle;

$$n \geq 3 \text{ için, } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dir. Burada $n = 2$ olduğunda $F_2 = F_1 + F_0$ dır. Ve $F_2 = 1 = F_1$ olduğundan $1 = 1 + F_0$ ise $F_0 = 0$ olur.

Şimdi bu bağıntı kullanılarak Fibonacci Sayılarıyla ilgili özellikler gösterilecektir.

2.3. Fibonacci Sayılarının Basit Özellikleri

Teorem 2.1.1: $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ dir.

İspat: Tümevarımla ispatlayalım;

$n = 1$ için $F_1 = F_3 - 1$, $F_1 = 1$ ve $F_3 = 2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ eşitliği doğru olsun.

$\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} - 1 = F_{n+3} - 1$ bulunur.

Dolayısıyla $n+1$ için de iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.2: $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$ dir.

İspat: $n = 1$ için $F_1 = F_2$ bulunur. Dolayısıyla iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$ olsun.

$\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} + F_{2(n+1)-1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.3: $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ dir.

İspat: $n = 1$ için $F_2 = F_3 - 1$ dir. $F_2 = 1$ ve $F_3 = 2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k} + F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 = F_{2n+3} - 1$$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.4: $\sum_{k=1}^{n} F_k^{\ 2} = F_n F_{n+1}$ dir.

İspat: $n = 1$ için $F_1^2 = F_1 F_2 = 1$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} F_k^{\ 2} = F_n F_{n+1}$ olsun.

$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^{\ 2} = \sum_{k=1}^{n} F_k^{\ 2} + F_{n+1}^{\ 2} = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^{\ 2} = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2}$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.5: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ dir.

İspat: Tümevarım uygulanırsa;

$n = 1$ için $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$ dir.

n için $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda,

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n+1} & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

olduğundan her n doğal sayısı için $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ dir.

Sonuç 2.1.1: (Cassini Formülü) $n \geq 1$ için $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2} = (-1)^n$ dir.

İspat: Teorem 2.1.5'e göre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $\det(A) = -1$ dir. Ayrıca $(-1)^n = (\det A)^n = \det(A^n) = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$ olduğundan $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2} = (-1)^n$ bulunur.

Teorem 2.1.6: $n \geq 1$, $m \geq 1$ için $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}$ dir.

İspat: Teorem 2.1.5’e göre $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ise $A^{n+m}=A^nA^m$ olduğundan

$$\begin{aligned}A^nA^m &= \begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{m+1} & F_m\\ F_m & F_{m-1}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}F_{n+1}F_{m+1}+F_nF_m & F_{n+1}F_m+F_nF_{m-1}\\ F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m & F_nF_m+F_{n-1}F_{m-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$A^{n+m}=\begin{pmatrix}F_{n+m+1} & F_{n+m}\\ F_{n+m} & F_{n+m-1}\end{pmatrix}$$

olup buradan $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$ elde edilir.

Sonuç 2.1.2: $F_{2n}=F_{n+1}{}^2-F_{n-1}{}^2$ dir.

İspat: Teorem 2.1.6’da $m=n$ alınırsa

$$\begin{aligned}F_{n+n}=F_{2n} &= F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}=F_n(F_{n-1}+F_{n+1})\\ &=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n-1}+F_{n+1})\\ &=F_{n+1}{}^2-F_{n-1}{}^2\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.1.3: $F_{2n+1}=F_{n+1}{}^2+F_n{}^2$

İspat: Teorem 2.1.6’da $m=n+1$ alınırsa;

$$\begin{aligned}F_{2n+1} &= F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_{n+2}=(F_{n+1}-F_n)F_{n+1}+F_n(F_n+F_{n+1})\\ &=F_{n+1}{}^2-F_nF_{n+1}+F_n{}^2+F_nF_{n+1}\\ &=F_{n+1}{}^2+F_n{}^2\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 2.1.4: $F_{3n}=F_{n+1}{}^3+F_n{}^3-F_{n-1}{}^3$ dir.

İspat: Teorem 2.1.6'da $m = 2n$ alınırsa;

$$F_{3n} = F_{n-1}F_{2n} + F_nF_{2n+1}$$

olur. Sonuç 2.1.2 ve sonuç 2.1.3'den,

$$\begin{aligned} F_{3n} &= F_{n-1}({F_{n+1}}^2 - {F_{n-1}}^2) + F_n({F_{n+1}}^2 + {F_n}^2) \\ &= F_{n-1}{F_{n+1}}^2 - {F_{n-1}}^3 + F_n{F_{n+1}}^2 + {F_n}^3 \\ &= {F_{n+1}}^2(F_{n-1} + F_n) + {F_n}^3 - {F_{n-1}}^3 \\ &= {F_{n+1}}^3 + {F_n}^3 - {F_{n-1}}^3 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.4. Fibonacci Sayılarının Bölünebilme Özellikleri

Teorem 2.1.7: $m \mid n$ ise $F_m \mid F_n$ dir.

İspat: $m \mid n$ ise $n = mk$ olacak şekilde k tamsayısı vardır. Bunun için $F_m \mid F_{km}$ olduğunu gösterelim. k üzerinden tümevarım yöntemi uygulanırsa $k = 1$ ise $F_m \mid F_m$ dir. k için $F_m \mid F_{km}$ olduğunu kabul edelim.
$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$ dir. $F_m \mid F_m$ olduğundan $F_m \mid F_{mk-1}F_m$ dir. Hipotezden $F_m \mid F_{mk}$ olduğundan $F_m \mid F_{mk}F_{m+1}$ dir. Dolayısıyla $F_m \mid F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$ ve böylece $F_m \mid F_{m(k+1)}$ olur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.8: Ardışık herhangi iki Fibonacci Sayısı aralarında asaldır.

İspat: F_n ve F_{n+1} ardışık herhangi iki Fibonacci Sayısı ve $(F_n, F_{n+1}) = d$ olsun. Buradan $d \mid F_n$ ve $d \mid F_{n+1}$ olur. $d \mid F_n$ ise $d \mid F_n^2$ dir. $d \mid F_{n+1}$ ise $d \mid F_{n+1}F_{n-1}$ dir. $d \mid {F_n}^2$ ve $d \mid F_{n+1}F_{n-1}$ ise $d \mid F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2$ olur. Cassini Formülü'nden $d \mid (-1)^n$ bulunur ki $d > 0$ olduğu için $d = 1$ elde edilir.

Teorem 2.1.9: m ve n herhangi iki tamsayı olmak üzere $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ dir.

İspat: $(m, n) = d$ ve $(F_m, F_n) = g$ olsun.

$(m,n)=d$ ise $d\,|\,m$ ve $d\,|\,n$ dir. Teorem 2.1.7'den $F_d\,|\,F_m$ ve $F_d\,|\,F_n$ bulunur ki buradan $F_d\,|\,(F_m,F_n)$ yani $F_d\,|\,g$ olur. Ayrıca $(m,n)=d$ ise $d=mx+ny$ olacak şekilde x ve y tamsayıları vardır. $d,m,n>0$ olduğu için $d=mx+ny$ denkleminde $x\le 0$ veya $y\le 0$ dir. Farzedelim ki $x\le 0$ ve $y>0$ olsun. ($x\le 0$ ve $y\le 0$ aynı anda olamaz çünkü aksi taktirde $d\le 0$ bulunurdu.) O zaman $k\ge 0$ tamsayısı için $x=-k$ yazılabilir. O halde $d=m(-k)+ny$ ise $ny=d+mk$ dir. Buradan,

$$F_{ny}=F_{d+km}=F_{d-1}F_{km}+F_dF_{km+1}$$

bulunur. $(F_m,F_n)=g$ olduğundan $g\,|\,F_m$ yani $g\,|\,F_{mk}$ ve dolayısıyla $g\,|\,F_{d-1}F_{mk}$ dir. $g\,|\,F_n$ ise $g\,|\,F_{ny}$ ve böylece $g\,|\,F_dF_{km+1}$ dir. $g\,|\,F_{mk}$ ve $(F_{mk},F_{mk+1})=1$ olduğundan $(g,F_{mk+1})=1$ dir. Dolayısıyla $g\,|\,F_d$ dir. Böylece $F_d\,|\,g$ ve $g\,|\,F_d$ olduğundan $g=F_d$, yani $(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$ elde edilir.

Teorem 2.1.10: $m\ge 3$ olmak üzere $F_m\,|\,F_n \Leftrightarrow m\,|\,n$ dir.

İspat: Teorem 2.1.7'de $m\,|\,n$ iken $F_m\,|\,F_n$ olduğu gösterilmişti. Diğer taraftan $F_m\,|\,F_n$ iken $m\,|\,n$ olduğunu gösterelim. Teorem 2.1.9'dan $(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$ ve $F_m\,|\,F_n$ ise $(F_m,F_n)=F_m$ olur. O zaman $(F_m,F_n)=F_{(m,n)}=F_m$ olur. $F_{(m,n)}=F_m$ ve $m\ge 3$ olduğundan $(m,n)=m$ olup $m\,|\,n$ bulunur.

Sonuç 2.1.5: Eğer $(m,n)=1$ ise $F_mF_n\,|\,F_{mn}$ dir.

İspat: Teorem 2.1.9'dan dolayı $(F_m,F_n)=F_{(m,n)}=F_1=1$ olduğu açıktır. Ayrıca $m\,|\,mn$ olduğundan $F_m\,|\,F_{mn}$ olur. Benzer biçimde $F_n\,|\,F_{mn}$ olur. $F_m\,|\,F_{mn}$ ve $F_n\,|\,F_{mn}$ ise $(F_m,F_n)=1$ olduğundan $F_mF_n\,|\,F_{mn}$ bulunur.

Lemma 2.1.1: Eğer $m\ge 1$ ve $n\ge 2$ ise o zaman $F_n^{\,2}\,|\,F_{mn-1}-F_{n-1}^{\,m}$ dir.

İspat: m üzerinden tümevarım uygulanırsa;

$F_{n-1}-F_{n-1}=0$ olduğundan $F_n^{\,2}\,|\,F_{n-1}-F_{n-1}$ dir. Dolayısıyla iddia $m=1$ için doğrudur.

m için $F_n^{\,2} \mid F_{mn-1} - F_{n-1}^{\;m}$ olduğunu kabul edelim. Yani $F_{mn-1} \equiv F_{n-1}^{\;m} (\bmod F_n^{\,2})$ olsun. O halde $F_{(m+1)n-1} = F_{mn+n-1} = F_{mn-1}F_{n-1} + F_{mn}F_n$ dir. Hipotezden $F_{mn-1} \equiv F_{n-1}^{\;m} (\bmod F_n^{\,2})$ ise $F_{mn-1}F_{n-1} \equiv F_{n-1}^{\;m+1} (\bmod F_n^{\,2})$ bulunur. Ayrıca $F_n \mid F_{mn}$ dir. Buradan $F_n^{\,2} \mid F_{mn}F_n$ olur. Yani $F_{mn}F_n \equiv 0 (\bmod F_n^{\,2})$ dir. $F_{mn-1}F_{n-1} \equiv F_{n-1}^{\;m+1} (\bmod F_n^{\,2})$ ve $F_{mn}F_n \equiv 0 (\bmod F_n^{\,2})$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned} F_{mn-1}F_{n-1} + F_{mn}F_n &\equiv F_{n-1}^{\;m+1} (\bmod F_n^{\,2}) \\ F_{(m+1)n-1} &\equiv F_{n-1}^{\;m+1} (\bmod F_n^{\,2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $F_n^{\,2} \mid F_{(m+1)n-1} - F_{n-1}^{\;m+1}$ bulunur. Böylece iddia $m+1$ için de doğru olup ispat tamamlanır. Dolayısıyla her m tamsayısı için $F_n^{\,2} \mid F_{mn-1} - F_{n-1}^{\;m}$ dir.

Lemma 2.1.2: Eğer $m \geq 1$ ve $n \geq 2$ ise $F_n^{\,3} \mid F_{mn} - F_{n+1}^{\;m} + F_{n-1}^{\;m}$ dir.

İspat: m üzerinden tümevarım uygulanırsa;

$F_n - F_{n+1} + F_{n-1} = 0$ olduğundan $F_n^{\,3} \mid F_n - F_{n+1} + F_{n-1}$ dir. Dolayısıyla iddia $m = 1$ için doğrudur.

m için $F_n^{\,3} \mid F_{mn} - F_{n+1}^{\;m} + F_{n-1}^{\;m}$ yani $F_{mn} \equiv F_{n+1}^{\;m} - F_{n-1}^{\;m} (\bmod F_n^{\,3})$ olduğunu kabul edelim. $F_{(m+1)n} = F_{mn+n} = F_{mn-1}F_n + F_{mn}F_{n+1}$ dir. Lemma 2.1.1 gereği $F_n^{\,2} \mid F_{mn-1} - F_{n-1}^{\;m}$ ise $F_n^{\,3} \mid F_{mn-1}F_n - F_{n-1}^{\;m}F_n$ dir. Yani $F_{mn-1}F_n \equiv F_{n-1}^{\;m}F_n (\bmod F_n^{\,3})$ dir. Yine hipotez gereği

$$F_{mn} \equiv F_{n+1}^{\;m} - F_{n-1}^{\;m} (\bmod F_n^{\,3})$$

olduğundan $F_{mn}F_{n+1} \equiv F_{n+1}^{\;m+1} - F_{n+1}F_{n-1}^{\;m} (\bmod F_n^{\,3})$ dir. $F_{mn-1}F_n \equiv F_{n-1}^{\;m}F_n (\bmod F_n^{\,3})$ ve $F_{mn}F_{n+1} \equiv F_{n+1}^{\;m+1} - F_{n+1}F_{n-1}^{\;m} (\bmod F_n^{\,3})$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned} F_{mn-1}F_n + F_{mn}F_{n+1} &\equiv F_{n-1}^{\;m}F_n + F_{n+1}^{\;m+1} - F_{n+1}F_{n-1}^{\;m} (\bmod F_n^{\,3}) \\ \Rightarrow\ F_{(m+1)n} &\equiv F_{n-1}^{\;m}(F_n - F_{n+1}) + F_{n+1}^{\;m+1} (\bmod F_n^{\,3}) \\ \Rightarrow\ F_{(m+1)n} &\equiv F_{n-1}^{\;m}(-F_{n-1}) + F_{n+1}^{\;m+1} (\bmod F_n^{\,3}) \\ \Rightarrow\ F_{(m+1)n} &\equiv F_{n+1}^{\;m+1} - F_{n-1}^{\;m+1} (\bmod F_n^{\,3}) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $F_n^{\,3} \mid F_{mn} - F_{n+1}^{\;m} + F_{n-1}^{\;m}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.11: q, F_n nin p den farklı bir asal böleni ise $q \nmid \dfrac{F_{np}}{F_n}$ dir.

İspat: Lemma 2.1.2'de $m = p$ alınırsa $F_n^{\,3} \mid F_{np} - F_{n+1}^{\;p} + F_{n-1}^{\;p}$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{\;p} - F_{n-1}^{\;p} &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1}^{\;p-1} + F_{n+1}^{\;p-2}F_{n-1} + \ldots\ldots + F_{n-1}^{\;p-1}) \\ &= F_n(F_{n+1}^{\;p-1} + F_{n+1}^{\;p-2}F_{n-1} + \ldots\ldots + F_{n-1}^{\;p-1}) \end{aligned}$$

olduğundan $F_n \mid F_{n+1}^{\;p} - F_{n-1}^{\;p}$ dir. Ayrıca $F_n \mid F_{np}$ olduğu açıktır. O halde $F_n^{\,3} \mid F_{np} - F_{n+1}^{\;p} + F_{n-1}^{\;p}$ olduğundan $\dfrac{F_n^{\,3}}{F_n} \mid \dfrac{F_{np} - F_{n+1}^{\;p} + F_{n-1}^{\;p}}{F_n}$ yazılabilir. Buradan

$$F_n^{\,2} \mid \frac{F_{np}}{F_n} - (F_{n+1}^{\;p-1} + F_{n+1}^{\;p-2}F_{n-1} + \ldots\ldots + F_{n-1}^{\;p-1})$$

bulunur. Yani;

$$\frac{F_{np}}{F_n} \equiv (F_{n+1}^{\;p-1} + F_{n+1}^{\;p-2}F_{n-1} + \ldots\ldots + F_{n-1}^{\;p-1}) (\operatorname{mod} F_n)$$

olur. Ayrıca $F_n \mid F_{n+1}^{\;p} - F_{n-1}^{\;p}$ olduğundan $F_{n+1}^{\;p} \equiv F_{n-1}^{\;p} (\operatorname{mod} F_n)$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{F_{np}}{F_n} \equiv (F_{n+1}^{\;p-1} + F_{n+1}^{\;p-2}F_{n-1} + \ldots\ldots + F_{n-1}^{\;p-1}) (\operatorname{mod} F_n)$$

dir. Ayrıca $F_{n+1} \equiv F_{n-1} (\operatorname{mod} F_n)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{F_{np}}{F_n} &\equiv (F_{n+1}^{\;p-1} + F_{n+1}^{\;p-2}F_{n+1} + \ldots\ldots + F_{n+1}^{\;p-1}) (\operatorname{mod} F_n) \\ &\equiv (F_{n+1}^{\;p-1} + F_{n+1}^{\;p-1} + \ldots\ldots + F_{n+1}^{\;p-1}) (\operatorname{mod} F_n) \\ &\equiv pF_{n+1}^{\;p-1} (\operatorname{mod} F_n) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $(\frac{F_{np}}{F_n}, F_n) = (pF_{n+1}{}^{p-1}, F_n)$ dir. Ayrıca $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ise $(F_n, F_{n+1}{}^{p-1}) = 1$ dir. Dolayısıyla $(\frac{F_{np}}{F_n}, F_n) = (pF_{n+1}{}^{p-1}, F_n) = (p, F_n)$ bulunur. Şimdi $q \neq p$ bir asal sayı ve $q \mid F_n$ olsun. Ayrıca $(p, F_n) = 1$ veya p dir. $q \neq p$ olduğundan $q \nmid (p, F_n)$ dir. Aksi taktirde $q \mid 1$ veya $q \mid p$ olacaktı ki bu da $q \neq p$ ile çelişecekti. O halde $q \nmid (p, F_n)$ dir. $(p, F_n) = (\frac{F_{np}}{F_n}, F_n)$ olduğundan $q \nmid (\frac{F_{np}}{F_n}, F_n)$ dir. $q \mid F_n$ olduğundan $q \nmid \frac{F_{np}}{F_n}$ bulunur. Aksi taktirde $q \mid F_n$ ve $q \mid \frac{F_{np}}{F_n}$ olsaydı $q \mid (\frac{F_{np}}{F_n}, F_n)$ olurdu. O halde $q \nmid \frac{F_{np}}{F_n}$ dir.

Teorem 2.1.12: Eğer p, F_n nin bir böleni ise $p \mid \frac{F_{np}}{F_n}$ dir, fakat $p^2 \nmid \frac{F_{np}}{F_n}$ dir.

İspat: $p \mid F_n$ olsun. Teorem 2.1.11'e göre;

$$F_n{}^2 \mid \frac{F_{np}}{F_n} - (F_{n+1}{}^{p-1} + F_{n+1}{}^{p-2} F_{n-1} + ... + F_{n-1}{}^{p-1})$$

ve $p \mid F_n$ olduğundan $p^2 \mid F_n{}^2$ ve böylece

$$p^2 \mid \frac{F_{np}}{F_n} - (F_{n+1}{}^{p-1} + F_{n+1}{}^{p-2} F_{n-1} + ... + F_{n-1}{}^{p-1})$$

bulunur. Şimdi F_{n+1} ve F_{n-1} tamsayılarını p^2 ye bölersek:

$$F_{n+1} \equiv r_1 p + r' (\text{mod } p^2)$$
$$F_{n-1} \equiv r_2 p + r'' (\text{mod } p^2)$$

$0 \leq r_1, r_2, r', r'' < p$ olacak şekilde r_1, r_2, r', r'' tamsayıları mevcut olur. $F_{n+1} - F_{n-1} = F_n$ olduğunu kullanarak bu iki denkliği taraf tarafa çıkartırsak;

$$
\begin{aligned}
& F_{n+1}-F_{n-1} \equiv p(r_1-r_2)+r'-r''(\bmod p^2) \\
\Rightarrow \quad & F_n \equiv p(r_1-r_2)+r'-r''(\bmod p^2) \\
\Rightarrow \quad & F_n \equiv p(r_1-r_2)+r'-r''(\bmod p) \\
\Rightarrow \quad & F_n \equiv r'-r''(\bmod p)
\end{aligned}
$$

bulunur. $p \mid F_n$ olduğundan $F_n \equiv 0(\bmod p)$ olur. Dolayısıyla $r'=r''$ elde edilir. Fakat $r'=r''\neq 0$ dır. Aksi taktirde

$$
\begin{aligned}
& F_{n+1} \equiv r_1 p + r'(\bmod p^2) \\
& F_{n+1} \equiv r_1 p(\bmod p) \\
& F_{n+1} \equiv 0(\bmod p)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani $p \mid F_{n+1}$ olur. Ayrıca $p \mid F_n$ olduğundan $p \mid (F_n, F_{n+1})$ ya da $p \mid 1$ olur. Bu ise p nin asal sayı olmasıyla çelişir. O halde $r'=r''=r\neq 0$ dır.

$\dfrac{F_{np}}{F_n} \equiv ({F_{n+1}}^{p-1} + {F_{n+1}}^{p-2}F_{n-1} + ...+ {F_{n-1}}^{p-1})(\bmod p^2)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{F_{np}}{F_n} &\equiv ((r_1 p + r)^{p-1} + (r_1 p + r)^{p-2}(r_2 p + r) + ...+ (r_2 p + r)^{p-1})(\bmod p^2) \\
\frac{F_{np}}{F_n} &\equiv \sum_{k=1}^{p} (r_1 p + r)^{p-k}(r_2 p + r)^{k-1}(\bmod p^2) \\
\frac{F_{np}}{F_n} &\equiv \sum_{k=1}^{p} \left[\binom{p-k}{0} r^{p-k} \binom{k-1}{0} r^{k-1} + \binom{p-k}{1} r_1 p r^{p-k-1} \binom{k-1}{0} r^{k-1} + r^{p-k}\binom{k-1}{1} r_2 p r^{k-2} \right](\bmod p^2) \\
\frac{F_{np}}{F_n} &\equiv \sum_{k=1}^{p} \left(r^{p-1} + (p-k) p r_1 r^{p-2} + (k-1) p r_2 r^{p-2} \right)(\bmod p^2),
\end{aligned}
$$

$k = 1, 2, ..., p$ için

$\dfrac{F_{np}}{F_n} \equiv pr^{p-1} + \dfrac{p(p-1)}{2} pr_1 r^{p-2} + \dfrac{p(p-1)}{2} pr_2 r^{p-2}(\bmod p^2)$ elde edilir. Eğer $p \neq 2$ ise $\dfrac{p-1}{2}$ bir tamsayıdır. Bundan dolayı $\dfrac{F_{np}}{F_n} \equiv pr^{p-1}(\bmod p^2)$ veya $\dfrac{F_{np}}{F_n} \equiv pr^{p-1}(\bmod p)$ bulunur. Buradan $\dfrac{F_{np}}{F_n} \equiv 0(\bmod p)$ yani $p \mid \dfrac{F_{np}}{F_n}$ elde edilir. Ayrıca giriş bölümündeki

Fermat Teoremi'ne göre $(r,p)=1$ olduğundan $r^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ dir. O halde $\frac{F_{np}}{F_n}\equiv pr^{p-1}(\bmod p^2)$ olduğundan $\frac{F_{np}}{F_n}\equiv p(\bmod p^2)$ bulunur. Bu ise $\frac{F_{np}}{F_n}$ nin p^2 ile bölümünden kalanın p olduğunu gösterir. Yani $p^2 \nmid \frac{F_{np}}{F_n}$ dir.

Sonuç 2.1.6: $4\,|\,F_n$ ise $2\,|\,\frac{F_{2n}}{F_n}$ dir, fakat $4\nmid \frac{F_{2n}}{F_n}$ dir.

İspat: $4\,|\,F_n$ ise $2\,|\,F_n$ dir. Teorem 2.1.12'ye göre $p=2$ alınırsa $2\,|\,F_n$ ise $2\,|\,\frac{F_{2n}}{F_n}$ dir. Fakat $4\nmid \frac{F_{2n}}{F_n}$ dır.

Teorem 2.1.13: n tek sayı olmak üzere F_n nin herhangi bir tek böleni $4t+1$ biçimindedir.

İspat: n pozitif tek tamsayı olsun. Cassini Formülü'nden $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^{\ 2}=(-1)^n=-1$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}-1=F_{n-1}F_{n+1}-F_n^{\ 2}&=F_{n-1}(F_n+F_{n-1})-F_n^{\ 2}\\&=F_{n-1}^{\ 2}+F_{n-1}F_n-F_n^{\ 2}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}F_{n-1}^{\ 2}+1&=F_n^{\ 2}-F_nF_{n-1}\\&=F_n(F_n-F_{n-1})\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $F_n\,|\,F_{n-1}^{\ 2}+1$ olur. x bir tek tamsayı ve $x\,|\,F_n$ olsun. Bununla birlikte p bir asal sayı ve $p\,|\,x$ olsun. Bu durumda p de tektir ve dolayısıyla $p>2$ dir. $p\,|\,x$, $x\,|\,F_n$ ve $F_n\,|\,F_{n-1}^{\ 2}+1$ olduğundan $p\,|\,F_{n-1}^{\ 2}+1$ olur. Şu halde giriş bölümündeki Teorem 1.1.2 ye göre $p\equiv 1(\bmod 4)$ dir. Yani x in her asal böleni $4k+1$ biçimindedir. O halde x de $4t+1$ biçimindedir.

2.5. Binet Formülü

$x^2 - x - 1 = 0$ quadratic denklemin kökleri $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)\big/2$ ve $\beta = \left(1-\sqrt{5}\right)\big/2$ dir. Açık olarak $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ ve $\alpha\beta = -1$ olduğu görülebilir. Diğer taraftan;

$$\alpha = \alpha.1 + 0 = \alpha F_1 + F_0$$
$$\alpha^2 = \alpha(1-\beta) = \alpha - \alpha\beta = \alpha + 1 = \alpha F_2 + F_1$$
$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1 = \alpha F_3 + F_2$$
$$\alpha^4 = \alpha^3\alpha = (2\alpha+1)\alpha = 2\alpha^2 + \alpha = 2(\alpha+1) + \alpha = 3\alpha + 2 = \alpha F_4 + F_3$$

.
.
.

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki teoremler verilebilir.

Lemma 2.1.3: $n > 0$ için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ dir.

İspat: n üzerinden tümevarım uygulanırsa, $n = 1$ için $\alpha = \alpha F_1 + F_0$ olur. Dolayısıyla iddia doğrudur. n için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ eşitliği doğru olsun.

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n &= \alpha(\alpha F_n + F_{n-1}) = \alpha^2 F_n + \alpha F_{n-1} \\ &= (\alpha+1)F_n + \alpha F_{n-1} \\ &= \alpha F_n + \alpha F_{n-1} + F_n \\ &= \alpha(F_n + F_{n-1}) + F_n \\ &= \alpha F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $n+1$ için de iddia doğru olur. Dolayısıyla $n > 0$ için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ dir.

Lemma 2.1.4: $n > 0$ için $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ dir.

İspat: $\alpha\beta = -1$ ise $\beta = \dfrac{-1}{\alpha}$ dir. Buna göre Lemma 2.1.3 ve Cassini Formülü yardımıyla,

$$\beta^n = \frac{(-1)^n}{\alpha^n} = \frac{(-1)^n}{\alpha F_n + F_{n-1}} = \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{(\alpha F_n + F_{n-1})(\beta F_n + F_{n-1})}$$
$$= \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{-F_n^{\ 2} + (\alpha+\beta)F_n F_{n-1} + F_{n-1}^{\ 2}}$$
$$= \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{-F_n^{\ 2} + F_{n-1}(F_n + F_{n-1})}$$
$$= \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{-F_n^{\ 2} + F_{n-1}F_{n+1}}$$
$$= \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{(-1)^n}$$
$$= \beta F_n + F_{n-1}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.14: (BİNET FORMÜLÜ) $x^2 - x - 1 = 0$ quadratic denklemin pozitif kökü α, negatif kökü β olsun. $n \geq 1$ için $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ dir.

İspat: Lemma 2.1.3 ve Lemma 2.1.4'e göre $n \geq 1$ için, $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ ve $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ eşitlikleri yazılabilir. Bu denklemleri taraf tarafa çıkarırsak;

$$\alpha^n - \beta^n = \alpha F_n + F_{n-1} - \beta F_n - F_{n-1}$$
$$= F_n(\alpha - \beta)$$

bulunur. Buradan $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ olur.

Teorem 2.1.15: $F_3 + F_6 + F_9 + ... + F_{3n} = \dfrac{F_{3n+2} - 1}{2}$ dir.

İspat: $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ olduğu kullanılırsa

$$F_3 + F_6 + F_9 + ... + F_{3n} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\alpha - \beta} + ... + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\alpha - \beta}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 + \alpha^6 + ... + \alpha^{3n} - \beta^3 - \beta^6 - ....\beta^{3n})$$

olur. $\alpha^3 = x$, $\beta^3 = y$ alınırsa;

$$
\begin{aligned}
F_3 + F_6 + F_9 + ...+ F_{3n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x + x^2 + ...+ x^n - y - y^2 - ....- y^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[x(1 + x + x^2 + ...+ x^{n-1}) - y(1 + y + y^2 + ...+ y^{n-1}) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[x(\frac{x^n - 1}{x - 1}) - y(\frac{y^n - 1}{y - 1}) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^3(\frac{\alpha^{3n} - 1}{\alpha^3 - 1}) - \beta^3(\frac{\beta^{3n} - 1}{\beta^3 - 1}) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1} \right)
\end{aligned}
$$

bulunur. $\alpha^3 - 1 = 2\alpha$ ve $\beta^3 - 1 = 2\beta$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
F_3 + F_6 + F_9 + ...+ F_{3n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{2\beta} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \alpha^2}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^{3n+2} - \beta^2}{\sqrt{5}} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \beta^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} \right) \\
&= \frac{F_{3n+2} - F_2}{2} \\
&= \frac{F_{3n+2} - 1}{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 2.1.16: k pozitif bir tamsayı olsun. $n \geq k$ için $F_{n+k}F_{n-k} - F_n^{\ 2} = (-1)^{n+k+1}F_k^{\ 2}$ dir.

İspat: $\alpha\beta = -1$ olduğu kullanılırsa

$$F_{n+k}F_{n-k}-F_n^{\ 2}=\left(\frac{\alpha^{n+k}-\beta^{n+k}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-k}-\beta^{n-k}}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$=\frac{\alpha^{2n}-(\alpha^{n+k}\beta^{n-k}+\alpha^{n-k}\beta^{n+k})+\beta^{2n}}{5}-\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{5}$$
$$=\frac{-(\alpha\beta)^n\alpha^k\beta^{-k}-(\alpha\beta)^n\alpha^{-k}\beta^k+2(-1)^n}{5}$$
$$=\frac{-(-1)^n(\alpha\beta)^k\beta^{-2k}-(-1)^n(\alpha\beta)^k\alpha^{-2k}+2(-1)^n}{5}$$
$$=\frac{-(-1)^{n+k}(\alpha^{2k}+\beta^{2k})+2(-1)^n}{5}$$

bulunur. Ayrıca

$$F_k^{\ 2}=\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{\alpha^{2k}+\beta^{2k}-2(\alpha\beta)^k}{5}=\frac{\alpha^{2k}+\beta^{2k}-2(-1)^k}{5}$$

olduğundan $5F_k^{\ 2}+2(-1)^k=\alpha^{2k}+\beta^{2k}$ dir. O halde son eşitlikten,

$$F_{n+k}F_{n-k}-F_n^{\ 2}=\frac{-(-1)^{n+k}\dfrac{\alpha^{2k}+\beta^{2k}}{(\alpha\beta)^{2k}}+2(-1)^n}{5}$$
$$=\frac{(-1)^{n+k+1}(5F_k^{\ 2}+2(-1)^k)+2(-1)^n}{5}$$
$$=(-1)^{n+k+1}F_k^{\ 2}+\frac{2(-1)^{n+2k+1}+2(-1)^n}{5}$$
$$=(-1)^{n+k+1}F_k^{\ 2}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.17: p bir asal sayı olsun. Bu durumda;

i) Eğer p, $5t\pm1$ biçiminde ise $p\,|\,F_{p-1}$ dir.

ii) Eğer p, $5t\pm2$ biçiminde ise $p\,|\,F_{p+1}$ dir.

İspat: i) $p=5t\pm1$ olsun. Binet formulü yardımıyla,

$$F_{p-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}\right]$$
$$=\frac{1}{2^{p-1}\sqrt{5}}\left[1+\binom{p-1}{1}\sqrt{5}+....-1+\binom{p-1}{1}\sqrt{5}-\binom{p-1}{2}\sqrt{5}^2+...-\binom{p-1}{p-1}\sqrt{5}^{p-1}\right]$$

bulunur. Buradan

$$F_{p-1}=\frac{1}{2^{p-1}\sqrt{5}}\left[2\sqrt{5}\left(\binom{p-1}{1}+\binom{p-1}{3}\sqrt{5}^2+....+\binom{p-1}{p-2}\sqrt{5}^{p-3}\right)\right]$$
$$=\frac{2}{2^{p-1}}\left(\binom{p-1}{1}+\binom{p-1}{3}5+\binom{p-1}{5}5^2+....+\binom{p-1}{p-2}5^{\frac{p-3}{2}}\right)$$

elde edilir. Ayrıca $1\leq j\leq p-2$ için $\binom{p-1}{j}\equiv(-1)^j \pmod p$ olduğundan,

$$2^{p-1}F_{p-1}\equiv-2(1+5+5^2+...+5^{\frac{p-3}{2}})\pmod p$$
$$\equiv-2\left(\frac{5^{\frac{p-3}{2}+1}-1}{5-1}\right)\pmod p$$
$$\equiv\frac{1-5^{\frac{p-1}{2}}}{2}\pmod p$$

bulunur. p, $5t\pm1$ biçiminde olduğundan $p\neq2$ dir. Yani $(p,2)=1$ dir. Şu halde giriş bölümünde verilen Fermat Teoremi'nden dolayı $2^{p-1}\equiv1\pmod p$ dir. Dolayısıyla $F_{p-1}\equiv\frac{1-5^{\frac{p-1}{2}}}{2}\pmod p$ veya $2F_{p-1}\equiv1-5^{\frac{p-1}{2}}\pmod p$ bulunur. Ayrıca 5 ve p tek asal sayı olduğundan Quadratic Reciprocity Teoremi'ne göre $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)(-1)^{(\frac{p-1}{2})(\frac{5-1}{2})}$ olduğundan $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)$ dir. p asal sayısı $5t\pm1$ biçiminde ise $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)=\left(\frac{\pm1}{5}\right)=1$ dir. Çünkü $\left(\frac{-1}{5}\right)=(-1)^{\frac{5-1}{2}}=1$ dir. Dolayısıyla

$\left(\frac{p}{5}\right)=5^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p)$ bulunur. Yani $1-5^{\frac{p-1}{2}}\equiv 0(\bmod p)$ dir. O halde $2F_{p-1}\equiv 0(\bmod p)$ dir. $(p,2)=1$ olduğundan $p\,|\,F_{p-1}$ bulunur.

ii) p , $5t\pm 2$ biçiminde olsun. Binet formulü yardımıyla,

$$F_{p+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1}\right]$$
$$=\frac{1}{2^{p+1}\sqrt{5}}\left[1+\binom{p+1}{1}\sqrt{5}+\ldots.-1+\binom{p+1}{1}\sqrt{5}-\binom{p+1}{2}\sqrt{5}^{2}+\ldots-\binom{p+1}{p+1}\sqrt{5}^{p+1}\right]$$

bulunur. Buradan,

$$F_{p+1}=\frac{1}{2^{p+1}\sqrt{5}}\left[2\sqrt{5}\left(\binom{p+1}{1}+\binom{p+1}{3}\sqrt{5}^{2}+\ldots.+\binom{p+1}{p}\sqrt{5}^{p-1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2^{p}}\left(\binom{p+1}{1}+\binom{p+1}{3}5+\binom{p+1}{5}5^{2}+\ldots.+\binom{p+1}{p}5^{\frac{p-1}{2}}\right)$$

elde edilir. Ayrıca
$\binom{p+1}{1}=\binom{p+1}{p}\equiv 1(\bmod p)$ ve $\binom{p+1}{3}\equiv\binom{p+1}{5}\equiv\ldots.\equiv\binom{p+1}{P-2}\equiv 0(\bmod p)$ dir. O halde $2^{p}F_{p+1}\equiv 1+5^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$ olur. p asal sayısı $5t\pm 2$ biçiminde ise $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)=\left(\frac{\pm 2}{5}\right)=-1$ olup $\left(\frac{p}{5}\right)=5^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\bmod p)$, yani $1+5^{\frac{p-1}{2}}\equiv 0(\bmod p)$ elde edilir. Dolayısıyla $2^{p}F_{p+1}\equiv 0(\bmod p)$ olur. $(p,2)=1$ olduğundan $p\,|\,F_{p+1}$ elde edilir.

BÖLÜM 3. LUCAS SAYILARI

Fibonacci rekürans bağıntısı kullanılarak, farklı başlangıç koşulları altında, yeni sayı dizileri elde edilebilir. Örneğin $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ ve $n \geq 3$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ ile tanımlı L_n dizisini ele alalım. Bu dizinin bazı terimleri $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...$ dir.

Tanım 3.1: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ ile tanımlı sayılara Lucas Sayıları denir.

Teorem 3.1.1: $n \geq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$ dir.

İspat: Tümevarım uygulanırsa;

$n = 1$ için $L_1 = 1 = 4 - 3 = L_3 - 3$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$ eşitliği doğru olsun. Buna göre,

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_k = \sum_{k=1}^{n} L_k + L_{n+1} = L_{n+2} + L_{n+1} - 3 = L_{n+3} - 3$$

olduğundan iddia $n+1$ için de doğrudur. Dolayısıyla $n \geq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$ dir.

Teorem 3.1.2: $n \geq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1$ dir.

İspat: Tümevarım uygulanırsa;

$n = 1$ için $L_2 = 3 = 4 - 1 = L_3 - 1$ olduğundan iddia doğrudur. n için $\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1$ eşitliği doğru olsun. Buna göre,

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{2k} = \sum_{k=1}^{n} L_{2k} + L_{2n+2} = L_{2n+1} + L_{2n+2} - 1 = L_{2n+3} - 1$$

olduğundan iddia $n+1$ için doğrudur. Dolayısıyla $n \geq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1$ dir.

Teorem 3.1.3: $n \geq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} L_{2k-1} = L_{2n} - 2$ dir.

İspat: Yukarıdaki ispata benzer ispat yapılır.

Teorem 3.1.4: $n \geq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} L_k^{\ 2} = L_n L_{n+1} - 2$ dir.

İspat: Tümevarım uygulanırsa;

$n = 1$ için $L_1^{\ 2} = 1 = 1.3 - 2 = L_1 L_2 - 2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} L_k^{\ 2} = L_n L_{n+1} - 2$ eşitliği doğru olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} L_k^{\ 2} = L_{n+1}^{\ 2} + \sum_{k=1}^{n} L_k^{\ 2} &= L_{n+1}^{\ 2} + L_n L_{n+1} - 2 \\
&= L_{n+1}(L_{n+1} + L_n) - 2 \\
&= L_{n+1} L_{n+2} - 2
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla $n \geq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} L_k^{\ 2} = L_n L_{n+1} - 2$ dir.

Teorem 3.1.5: $n \geq 2$ için $L_{n+1}^{\ 2} - L_n^{\ 2} = L_{n-1} L_{n+2}$ dir.

İspat: $n \geq 2$ için $L_{n+1}^{\ 2} - L_n^{\ 2} = (L_{n+1} - L_n)(L_{n+1} + L_n) = L_{n-1} L_{n+2}$ elde edilir.

Teorem 3.1.6:(BİNET FORMULÜ) $n \geq 1$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$ dir.

İspat: $n = 1$ için $L_1 = \alpha + \beta = 1$ dir.

$n = 2$ için $L_2 = 3 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$ bulunur.

$n \geq 3$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$, $L_{n-1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ ve $L_{n-2} = \alpha^{n-2} + \beta^{n-2}$ olmak üzere $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ olduğu gösterilmelidir. Buna göre,

$$\begin{aligned} L_{n-1}+L_{n-2} &= \alpha^{n-1}+\beta^{n-1}+\alpha^{n-2}+\beta^{n-2} \\ &= \alpha^{n-2}(\alpha+1)+\beta^{n-2}(\beta+1) \\ &= \alpha^{n-2}\alpha^{2}+\beta^{n-2}\beta^{2} \\ &= \alpha^{n}+\beta^{n} \\ &= L_n \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.7: $n>1$ için $F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ dir.

İspat: $\alpha\beta=-1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_{n-1}+F_{n+1} &= \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{-(\alpha\beta)\alpha^{n-1}+(\alpha\beta)\beta^{n-1}+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha^{n}(-\beta+\alpha)+\beta^{n}(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{(\alpha^{n}+\beta^{n})(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} \\ &= \alpha^{n}+\beta^{n}=L_n \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.8: $n>2$ için $F_{n+2}-F_{n-2}=L_n$ dir.

İspat: $(\alpha\beta)^2=1$ ve $\alpha+\beta=1$ olduğundan

$$\begin{aligned} F_{n+2}-F_{n-2} &= \frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}-\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}-(\alpha\beta)^{2}\alpha^{n-2}+(\alpha\beta)^{2}\beta^{n-2}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha^{n}(\alpha^{2}-\beta^{2})+\beta^{n}(\alpha^{2}-\beta^{2})}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{(\alpha^{n}+\beta^{n})(\alpha^{2}-\beta^{2})}{\alpha-\beta} \\ &= (\alpha^{n}+\beta^{n})(\alpha+\beta) \\ &= L_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.9: $n \geq 2$ için $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$ dir.

İspat: $\alpha^2 + 1 = \alpha\sqrt{5}$ ve $\beta^2 + 1 = -\beta\sqrt{5}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_{n+1} + L_{n-1} &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\
&= \alpha^{n-1}(\alpha^2 + 1) + \beta^{n-1}(\beta^2 + 1) \\
&= \alpha^{n-1}\alpha\sqrt{5} - \beta^{n-1}\beta\sqrt{5} \\
&= \sqrt{5}(\alpha^n - \beta^n) \\
&= \frac{5(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}} = 5F_n
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.10: $F_{2n} = F_n L_n$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
F_n L_n &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\left(\alpha^n + \beta^n\right) \\
&= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.1: $m \geq 1$ için $F_{2^m} = \prod_{k=1}^{m} L_{2^{k-1}}$ dir.

İspat: Teorem 3.1.10'dan,

$$\begin{aligned}
F_{2^m} &= F_{2.2^{m-1}} = L_{2^{m-1}} F_{2^{m-1}} = L_{2^{m-1}} F_{2.2^{m-2}} \\
&= L_{2^{m-1}} L_{2^{m-2}} F_{2^{m-2}} \\
&= L_{2^{m-1}} L_{2^{m-2}} L_{2^{m-3}} F_{2^{m-3}} \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&= L_{2^{m-1}} L_{2^{m-2}} L_{2^{m-3}} \ldots\ldots L_4 L_3 L_2 L_1 = \prod_{k=1}^{m} L_{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Teorem 3.1.11: $5F_n^{\,2} = L_n^{\,2} - 4(-1)^n$ dir.

İspat: $\alpha\beta = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} L_n^{\,2} - 4(-1)^n &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - 4(-1)^n \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n - 4(-1)^n \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(-1)^n \\ &= (\alpha^n - \beta^n)^2 \\ &= 5F_n^{\,2} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem3.1.12: $L_n^{\,2} = L_{2n} + 2(-1)^n$ dir.

İspat: $\alpha\beta = -1$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} L_{2n} + 2(-1)^n &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(-1)^n \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n \\ &= \left(\alpha^n + \beta^n\right)^2 \\ &= L_n^{\,2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.13: $m > n$ olmak üzere,

$$F_{m+n} + F_{m-n} = \begin{cases} L_m F_n & , n \ tek \\ L_n F_m & , n \ çift \end{cases}$$

dir.

İspat: n tek olsun. n tek ise $(\alpha\beta)^n = -1$ dir. Binet Formülü yardımıyla,

$$F_{m+n}+F_{m-n}=\frac{\alpha^{m+n}-\beta^{m+n}+\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^m(\alpha^n+\alpha^{-n})-\beta^m(\beta^n+\beta^{-n})}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^m\left(\dfrac{\alpha^{2n}+1}{\alpha^n}\right)-\beta^m\left(\dfrac{\beta^{2n}+1}{\beta^n}\right)}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{\alpha^m((\alpha\beta)^n\alpha^n+\beta^n)}{(\alpha\beta)^n}-\dfrac{\beta^m((\alpha\beta)^n\beta^n+\alpha^n)}{(\alpha\beta)^n}}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^m(\alpha^n-\beta^n)+\beta^m(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{(\alpha^m+\beta^m)(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}$$
$$=L_mF_n$$

bulunur. Eğer n çift ise $(\alpha\beta)^n=1$ dir ve yine Binet Formülü yardımıyla,

$$F_{m+n}+F_{m-n}=\frac{\dfrac{\alpha^m((\alpha\beta)^n\alpha^n+\beta^n)}{(\alpha\beta)^n}-\dfrac{\beta^m((\alpha\beta)^n\beta^n+\alpha^n)}{(\alpha\beta)^n}}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^m(\alpha^n+\beta^n)-\beta^m(\alpha^n+\beta^n)}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{(\alpha^n+\beta^n)(\alpha^m-\beta^m)}{\alpha-\beta}$$
$$=L_nF_m$$

elde edilir.

Teorem 3.1.14: $m>n$ olmak üzere,

$$F_{m+n}-F_{m-n}=\begin{cases}L_nF_m & ,n\ tek\\ L_mF_n & ,n\ çift\end{cases}$$

dir.

İspat: n tek olsun. n tek ise $(\alpha\beta)^n=-1$ dir. Binet Formulü yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
F_{m+n} - F_{m-n} &= \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n} - \alpha^{m-n} + \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^m(\alpha^n - \alpha^{-n}) - \beta^m(\beta^n - \beta^{-n})}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^m\left(\dfrac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^n}\right) - \beta^m\left(\dfrac{\beta^{2n} - 1}{\beta^n}\right)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\dfrac{\alpha^m((\alpha\beta)^n\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha\beta)^n} - \dfrac{\beta^m((\alpha\beta)^n\beta^n - \alpha^n)}{(\alpha\beta)^n}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^m(-\alpha^n - \beta^n) - \beta^m(-\alpha^n - \beta^n)}{-(\alpha - \beta)} \\
&= \frac{(\alpha^n + \beta^n)(\alpha^m - \beta^m)}{\alpha - \beta} \\
&= L_n F_m
\end{aligned}
$$

bulunur. n çift olsun. Bu durumda $(\alpha\beta)^n = 1$ dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
F_{m+n} - F_{m-n} &= \frac{\dfrac{\alpha^m((\alpha\beta)^n\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha\beta)^n} - \dfrac{\beta^m((\alpha\beta)^n\beta^n - \alpha^n)}{(\alpha\beta)^n}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^m(\alpha^n - \beta^n) - \beta^m(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^m + \beta^m)}{\alpha - \beta} \\
&= L_m F_n
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.2: $m > n$ olmak üzere, $2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m$ dir.

İspat: Teorem 3.1.13 ve Teorem 3.1.14 yardımıyla;

$$F_{m+n} + F_{m-n} + F_{m+n} - F_{m-n} = 2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m$$

bulunur.

Teorem 3.1.15: $m > n$ olmak üzere,

$$L_{m+n}+L_{m-n}=\begin{cases}5F_mF_n & ,n \text{ tek}\\ L_mL_n & ,n \text{ çift}\end{cases}$$

dir.

İspat: n tek olsun. n tek ise $(\alpha\beta)^n=-1$ dir. $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ olduğu kullanılarak Binet Formulü yardımıyla

$$\begin{aligned}
L_{m+n}+L_{m-n}&=\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}+\alpha^{m-n}+\beta^{m-n}\\
&=\alpha^m(\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n})+\beta^m(\beta^n+\frac{1}{\beta^n})\\
&=\alpha^m\left(\frac{\alpha^{2n}+1}{\alpha^n}\right)+\beta^m\left(\frac{\beta^{2n}+1}{\beta^n}\right)\\
&=\frac{\alpha^m((\alpha\beta)^n\alpha^n+\beta^n)}{(\alpha\beta)^n}+\frac{\beta^m((\alpha\beta)^n\beta^n+\alpha^n)}{(\alpha\beta)^n}\\
&=\frac{\alpha^m(-\alpha^n+\beta^n)+\beta^m(-\beta^n+\alpha^n)}{-1}\\
&=(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^m-\beta^m)\\
&=5\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\sqrt{5}}\right)\\
&=5F_mF_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

n çift olsun. Bu durumda $(\alpha\beta)^n=1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
L_{m+n}+L_{m-n}&=\frac{\alpha^m((\alpha\beta)^n\alpha^n+\beta^n)}{(\alpha\beta)^n}+\frac{\beta^m((\alpha\beta)^n\beta^n+\alpha^n)}{(\alpha\beta)^n}\\
&=\alpha^m(\alpha^n+\beta^n)+\beta^m(\beta^n+\alpha^n)\\
&=(\alpha^m+\beta^m)(\alpha^n+\beta^n)\\
&=L_mL_n
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.16: $m>n$ olmak üzere,

$$L_{m+n}-L_{m-n}=\begin{cases}L_mL_n & ,n \text{ tek}\\ 5F_mF_n & ,n \text{ çift}\end{cases}$$

dir.

İspat: n tek olsun. n tek ise $(\alpha\beta)^n = -1$ dir. Binet Formulü yardımıyla,

$$\begin{aligned}
L_{m+n} - L_{m-n} &= \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} - \alpha^{m-n} - \beta^{m-n} \\
&= \alpha^m (\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}) + \beta^m (\beta^n - \frac{1}{\beta^n}) \\
&= \alpha^m \left(\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^n} \right) + \beta^m \left(\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^n} \right) \\
&= \frac{\alpha^m ((\alpha\beta)^n \alpha^n - \beta^n)}{(\alpha\beta)^n} + \frac{\beta^m ((\alpha\beta)^n \beta^n - \alpha^n)}{(\alpha\beta)^n} \\
&= \frac{\alpha^m (-\alpha^n - \beta^n) + \beta^m (-\beta^n - \alpha^n)}{-1} \\
&= (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) \\
&= L_m L_n
\end{aligned}$$

bulunur. n çift olsun. Bu durumda $(\alpha\beta)^n = 1$ dir. Buradan da

$$\begin{aligned}
L_{m+n} - L_{m-n} &= \frac{\alpha^m ((\alpha\beta)^n \alpha^n - \beta^n)}{(\alpha\beta)^n} + \frac{\beta^m ((\alpha\beta)^n \beta^n - \alpha^n)}{(\alpha\beta)^n} \\
&= \alpha^m (\alpha^n - \beta^n) + \beta^m (\beta^n - \alpha^n) \\
&= (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n - \beta^n) \\
&= 5\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{5}} \right)\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \right) \\
&= 5F_m F_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.3: $m > n$ olmak üzere, $2L_{m+n} = L_m L_n + 5F_m F_n$ dir.

İspat: Teorem 3.1.15 ve Teorem 3.1.16’dan,

$$(L_{m+n} + L_{m-n}) + (L_{m+n} - L_{m-n}) = 2L_{m+n} = L_m L_n + 5F_m F_n$$

bulunur.

Teorem 3.1.17: $L_{n+k} \equiv (-1)^{k+1} L_{n-k} (\operatorname{mod} L_n)$ dir.

İspat: k üzerinden tümevarım uygulanırsa, $k=1$ için $L_{n+1}-L_{n-1}=L_n$ olduğundan $L_{n+1}\equiv L_{n-1}(\operatorname{mod} L_n)$ olup iddia doğrudur. $1<i\leq k$ için $L_{n+k}\equiv(-1)^{k+1}L_{n-k}(\operatorname{mod} L_n)$ olduğu kabul edilsin. $L_{n+k+1}=L_{n+k}+L_{n+k-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned}L_{n+k+1}&\equiv(-1)^{k+1}L_{n-k}+(-1)^{k}L_{n-k+1}(\operatorname{mod} L_n)\\&\equiv(-1)^{k+2}(L_{n-k+1}-L_{n-k})(\operatorname{mod} L_n)\\&\equiv(-1)^{k+2}L_{n-k-1}(\operatorname{mod} L_n)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece iddia $k+1$ için de doğru olur. Yani

$$L_{n+k}\equiv(-1)^{k+1}L_{n-k}(\operatorname{mod} L_n)$$

dir.

Teorem 3.1.18: $L_{n+m}=F_{m+1}L_n+F_mL_{n-1}$ dir.

İspat: m üzerinden tümevarım uygulanırsa, $m=1$ için

$$L_{n+1}=L_n+L_{n-1}=F_2L_n+F_1L_{n-1}$$

olduğundan iddia doğru olur. $1<k\leq m$ için hipotez doğru olsun. O zaman

$$\begin{aligned}L_{n+k+1}&=L_{n+k}+L_{n+k-1}\\&=F_{k+1}L_n+F_kL_{n-1}+F_kL_n+F_{k-1}L_{n-1}\\&=(F_{k+1}+F_k)L_n+(F_k+F_{k-1})L_{n-1}\\&=F_{k+2}L_n+F_{k+1}L_{n-1}\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.19: $n\geq 2$ olsun. Bu durumda $L_n\mid L_m\Leftrightarrow m=(2k+1)n$ olacak biçimde $k\geq 0$ tamsayısı vardır.

İspat: $(\Rightarrow:)$ $L_n\mid L_m$ olsun. Şu halde $n\leq m$ dir. Eğer $m=n$ ise $k=0$ alındığında $m=(2k+1)n$ olur. Şimdi de $n<m$ olsun. Önce $m\geq 2n$ olduğunu kanıtlayalım. Tersine $m<2n$ olsun. O zaman Teorem 3.1.17'den

$$L_m = L_{n+(m-n)} \equiv (-1)^{m-n+1} L_{n-(m-n)} (\text{mod}\, L_n)$$
$$L_m \equiv (-1)^{m-n+1} L_{2n-m} (\text{mod}\, L_n)$$

olarak bulunur. $L_n \mid L_m$ olduğundan $L_n \mid L_{2n-m}$ dir. Buradan $n \le 2n-m$ yani $m \le n$ bulunur. Halbuki $n < m$ idi. O halde $m < 2n$ değil, $m \ge 2n$ dir. Şimdi tümevarımla n nin m yi böldüğünü ve bölümün tek sayı olduğunu gösterelim.

$m = 2$ için $L_n \mid L_2$ yani $L_n \mid 3$ ise $n = 1$ veya $n = 2$ dir. $n \ge 2$ olduğundan $n = 2$ ve $\frac{m}{n} = \frac{2}{2} = 1$ tektir.

$2 < k < m$ için $L_n \mid L_k$ ve $\frac{k}{n}$ nin tek olduğunu kabul edelim. Acaba $k = m$ için $\frac{m}{n}$ tek mi? Buna göre $m \ge 2n$ olduğu için Teorem 3.1.17'den

$$L_m = L_{(m-n)+n} \equiv (-1)^{n+1} L_{(m-n)-n} (\text{mod}\, L_n)$$
$$\equiv (-1)^{n+1} L_{m-2n} (\text{mod}\, L_n)$$

dir. O halde $L_n \mid L_m$ olduğundan $L_n \mid L_{m-2n}$ ve $m-2n < m$ olduğundan kabulden $\frac{m-2n}{n}$ tektir. Yani $\frac{m}{n} - 2$ tektir. O halde $\frac{m}{n}$ tektir. Yani $m = (2k+1)n$ dir.

Tersine $m = (2k+1)n$ olsun. $m = (2k+1)n = 2kn + n$ ise Teorem 3.1.18'den $L_m = L_{n+2kn} = F_{2kn+1}L_n + F_{2kn}L_{n-1}$ dir. Burada $L_n \mid F_{2kn+1}L_n$ dir. $F_{2n} = F_nL_n$ olduğundan $L_n \mid F_{2n}$ dir. Ayrıca $F_{2n} \mid F_{2kn}$ olduğu dikkate alınırsa $L_n \mid F_{2kn}$ olur. Şu halde $L_n \mid F_{2kn+1}L_n$ ve $L_n \mid F_{2kn}L_{n-1}$ olduğundan $L_n \mid F_{2kn+1}L_n + F_{2kn}L_{n-1}$ yani $L_n \mid L_m$ bulunur.

Teorem 3.1.20:

a) $n \equiv 0 (\text{mod}\, 3) \Leftrightarrow L_n \equiv 0 (\text{mod}\, 2)$ dir.

b) $n \equiv 2 (\text{mod}\, 4) \Leftrightarrow L_n \equiv 0 (\text{mod}\, 3)$ dir.

c) Eğer $n \equiv 0 (\text{mod}\, 2)$ ve $n \not\equiv 0 (\text{mod}\, 3)$ ise $L_n \equiv 3 (\text{mod}\, 4)$ dir.

d) $k \equiv 0 (\text{mod}\, 2)$ ve $k \not\equiv 0 (\text{mod}\, 3)$ ise $L_{n+2k} \equiv -L_n (\text{mod}\, L_k)$ dir.

e) $k \equiv 0 (\text{mod}\, 2)$ ve $k \not\equiv 0 (\text{mod}\, 3)$ ise $F_{n+2k} \equiv -F_n (\text{mod}\, L_k)$ dir.

f) $L_{n+12} \equiv L_n (\text{mod}\, 8)$ dir.

İspat: a) ($\Rightarrow$:) $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ ise $F_3 \mid F_n$ dir. Yani $2 \mid F_n$ dir. Teorem 3.1.11'e göre $2 \mid F_n$ ise $L_n^2 - 4(-1)^n \equiv 0 (\text{mod } 2)$ dir. Buradan $L_n^2 \equiv 0 (\text{mod } 2)$ olur. $2 \mid L_n^2$ ve 2 asal sayı olduğundan $2 \mid L_n$ dir. Yani $L_n \equiv 0 (\text{mod } 2)$ bulunur.

($\Leftarrow$:) $L_n \equiv 0 (\text{mod } 2)$ olsun. O halde $L_n^2 - 4(-1)^n \equiv 0 (\text{mod } 2)$ dir. Yani $5F_n^2 \equiv 0 (\text{mod } 2)$ ve $5 \equiv 1 (\text{mod } 2)$ ise $F_n^2 \equiv 0 (\text{mod } 2)$ dir. Buradan $2 \mid F_n^2$ ise $2 \mid F_n$ bulunur. $F_3 = 2$ ise $F_3 \mid F_n$ olur. Teorem 2.1.10'a göre $3 \mid n$ olur. Dolayısıyla $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dir.

b) ($\Rightarrow$:) $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ olsun. Bu durumda $n = 4k + 2$ olacak şekilde k tamsayısı vardır. $n = 4k + 2 = 2(2k+1)$ dir. Teorem 3.1.19' a göre $n = (2k+1)m \Leftrightarrow L_m \mid L_n$ dir. Buna göre $n = 2(2k+1)$ ise $L_2 \mid L_n$ dir. Buradan $3 \mid L_n$ yani $L_n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ bulunur.

($\Leftarrow$:) $L_n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ ise $3 \mid L_n$ veya $L_2 \mid L_n$ yazılır. Yine Teorem 3.1.19 gereği $L_2 \mid L_n$ ise $n = 2(2k+1) = 4k + 2$ olacak şekilde k tamsayısı vardır. Buradan $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ bulunur.

c) $n \equiv 0 (\text{mod } 2)$ ve $n \not\equiv 0 (\text{mod } 3)$ olsun. Bu durumda $n = 3k + 1$ veya $n = 3k + 2$ biçimindedir. Ayrıca $n \equiv 0 (\text{mod } 2)$ olduğundan n çifttir.

I.Durum: $n = 3k + 1$ ve n çift tamsayı ise k tek tamsayı olmak zorundadır. $k = 2x + 1$ biçiminde yazılırsa $n = 6x + 4$ biçiminde olur. Bu durumda

$$L_n = L_{4+6x} = F_{6x+1} L_4 + F_{6x} L_3$$

olur. Buradan

$$L_n = L_{4+6x} = 7F_{6x+1} + 4F_{6x} \equiv 3F_{6x+1} (\text{mod } 4)$$

bulunur. $F_{6x+1} \equiv 1 (\text{mod } 4)$ olduğu tümevarımla gösterilebilir. Dolayısıyla $L_n \equiv 3 (\text{mod } 4)$ bulunur.

II.Durum: $n = 3k + 2$ ve n çift sayı ise k çift tamsayı olmalıdır. $k = 2x$ biçiminde yazılırsa $n = 6x + 2$ olur. Bu durumda $F_{6x+1} \equiv 1 (\text{mod } 4)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_n &= L_{2+6x} = F_{6x+1}L_2 + F_{6x}L_1 \\ &= 3F_{6x+1} + F_{6x} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $L_n \equiv 3 + F_{6x} (\text{mod}\, 4)$ elde edilir. $F_{6x} \equiv 0(\text{mod}\, 4)$ olduğu tümevarımla gösterilebilir. Dolayısıyla $L_n \equiv 3(\text{mod}\, 4)$ olur.

d) $k \equiv 0(\text{mod}\, 2)$ ve $k \not\equiv 0(\text{mod}\, 3)$ olsun. Sonuç 3.1.3'den $2L_{n+2k} = L_n L_{2k} + 5F_n F_{2k}$ ve Teorem 3.1.10 ile Teorem 3.1.12'den $2L_{n+2k} = L_n (L_k^{\,2} + 2(-1)^{k-1}) + 5F_n F_k L_k$ yazılabilir. Buradan $2L_{n+2k} \equiv 2L_n (-1)^{k-1} (\text{mod}\, L_k)$ bulunur. k çift tamsayı olduğundan

$$2L_{n+2k} \equiv -2L_n (\text{mod}\, L_k)$$

olur. Buradan $L_k \mid 2(L_{n+2k} + L_n)$ elde edilir. Ayrıca $k \equiv 0(\text{mod}\, 2)$ ve $k \not\equiv 0(\text{mod}\, 3)$ olduğundan (c) şıkkından $L_k \equiv 3(\text{mod}\, 4)$ yazılabilir. Dolayısıyla $(L_k, 2) = 1$ dir. O halde $L_k \mid (L_{n+2k} + L_n)$ yani $L_{n+2k} \equiv -L_n (\text{mod}\, L_k)$ bulunur.

e) Sonuç 3.1.2'den $2F_{n+2k} = F_n L_{2k} + F_{2k} L_n$ olur. Ayrıca Teorem 3.1.10 ve Teorem 3.1.12'den

$$2F_{n+2k} = F_n (L_k^{\,2} + 2(-1)^{k-1}) + F_k L_k L_n$$

yazılabilir. Buradan $2F_{n+2k} \equiv 2F_n (-1)^{k-1} (\text{mod}\, L_k)$ bulunur. $k \equiv 0(\text{mod}\, 2)$ ise k çift tamsayıdır. Dolayısıyla $F_{n+2k} \equiv -F_n (\text{mod}\, L_k)$ elde edilir.

f) Sonuç 3.1.3'den

$$\begin{aligned} 2L_{n+12} &= L_n L_{12} + 5F_n F_{12} = 322L_n + 5.144F_n \\ L_{n+12} &= 161L_n + 360F_n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $L_{n+12} = L_n (\text{mod}\, 8)$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.21: p bir tek asal sayı ise $L_p \equiv 1(\text{mod}\, p)$ ve $F_p \equiv \left(\dfrac{p}{5}\right)(\text{mod}\, p)$ dir.

İspat: Binet Formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{1}{2^p}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^p + \left(1-\sqrt{5}\right)^p\right] \\ &= \frac{1}{2^p}\left(1+\binom{p}{1}\sqrt{5}+\ldots+\binom{p}{p}\left(\sqrt{5}\right)^p + 1-\binom{p}{1}\sqrt{5}+\ldots-\binom{p}{p}\left(\sqrt{5}\right)^p\right) \\ &= \frac{2}{2^p}\left(1+\binom{p}{2}5+\binom{p}{4}5^2+\ldots+\binom{p}{p-1}5^{\frac{p-1}{2}}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer $\binom{p}{2}5+\binom{p}{4}5^2+\ldots+\binom{p}{p-1}5^{\frac{p-1}{2}} = kp$ olarak alınırsa $2^{p-1}L_p = 1+kp$ olur. O halde $2^{p-1}L_p \equiv 1 (\bmod p)$ bulunur. Ayrıca p tek asal sayı olduğundan $(p,2)=1$ olup giriş bölümündeki Fermat Teoremi'nden $2^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$ yazılabilir. Dolayısıyla $L_p \equiv 1(\bmod p)$ bulunur. Aynı şekilde,

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p\right] \\ &= \frac{1}{2^p\sqrt{5}}\left(1+\binom{p}{1}\sqrt{5}+\ldots+\binom{p}{p}\left(\sqrt{5}\right)^p - 1+\binom{p}{1}\sqrt{5}-\ldots+\binom{p}{p}\left(\sqrt{5}\right)^p\right) \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{2^p\sqrt{5}}\left[\binom{p}{1}+\binom{p}{3}5+\binom{p}{5}5^2+\ldots+\binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{2^{p-1}}\left[\binom{p}{1}+\binom{p}{3}5+\binom{p}{5}5^2+\ldots+\binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}}\right] \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yine $\binom{p}{1}+\binom{p}{3}5+\binom{p}{5}5^2+\ldots+\binom{p}{p-2}5^{\frac{p-3}{2}} = kp$ olarak alınırsa $2^{p-1}F_p = kp+\binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}} = kp+5^{\frac{p-1}{2}}$ bulunur. Dolayısıyla $2^{p-1}F_p \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} (\bmod p)$ dir. $2^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$ olduğundan ve Quadratic Reciprocity Teoremi'ne göre $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{p}{5}\right)(\bmod p)$ olduğundan $F_p \equiv \left(\frac{p}{5}\right)(\bmod p)$ elde edilir.

Teorem 3.1.22: p bir tek asal sayı olsun. O zaman

$$F_{p-1} = \frac{1-\left(\frac{p}{5}\right)}{2} \pmod p \text{ ve } F_{p+1} = \frac{1+\left(\frac{p}{5}\right)}{2} \pmod p$$

dir.

ispat: Teorem 3.1.7'den $L_p = F_{p+1} + F_{p-1} = F_p + 2F_{p-1} = 2F_{p+1} - F_p$ dir. Buradan $F_{p-1} = \frac{L_p - F_p}{2}$ ve $F_{p+1} = \frac{L_p + F_p}{2}$ bulunur. Teorem 3.1.21 den $F_{p-1} = \frac{1-\left(\frac{p}{5}\right)}{2} \pmod p$ ve $F_{p+1} = \frac{1+\left(\frac{p}{5}\right)}{2} \pmod p$ elde edilir.

Sonuç 3.1.4: p asal sayı olsun. O zaman $p \mid F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)}$ dir.

İspat: Legendre Formülü'ne göre $\left(\frac{p}{5}\right) = 1$ ve $\left(\frac{p}{5}\right) = -1$ gibi iki durum vardır.

I.<u>Durum:</u> $\left(\frac{p}{5}\right) = 1$ ise Teorem 3.1.22'ye göre $F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)} = F_{p-1} \equiv \frac{1-\left(\frac{p}{5}\right)}{2} \equiv 0 \pmod p$ dir. Dolayısıyla $p \mid F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)}$ olur.

II.<u>Durum:</u> $\left(\frac{p}{5}\right) = -1$ ise yine Teorem 3.1.22 gereği

$$F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)} = F_{p+1} \equiv \frac{1+\left(\frac{p}{5}\right)}{2} \equiv 0 \pmod p$$

olduğundan $p \mid F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)}$ dir.

Sonuç 3.1.5: $p > 3$ bir asal sayı olsun ve q, F_p nin bir asal böleni olsun. O zaman

$$q \equiv \left(\frac{q}{5}\right) (\text{mod } p) \text{ ve } q \equiv 1 (\text{mod } 4)$$

dir.

İspat: $p > 3$ ve $q \mid F_p$ olsun. Sonuç 3.1.4'e göre $q \mid F_{q-\left(\frac{q}{5}\right)}$ dir. $q \mid F_p$ olduğundan $q \mid (F_{q-\left(\frac{q}{5}\right)}, F_p)$ ve Teorem 2.1.9'dan dolayı $q \mid F_{\left(p, q-\left(\frac{q}{5}\right)\right)}$ olur. $(p, q-\left(\frac{q}{5}\right)) = 1$ veya p dir. Çünkü $q \mid F_p$ dir. $(p, q-\left(\frac{q}{5}\right)) = p$ olmak zorundadır. O halde $p \mid q-\left(\frac{q}{5}\right)$ dir. Buradan $q \equiv \left(\frac{q}{5}\right) (\text{mod } p)$ olur. Ayrıca Teorem 2.1.13'e göre $q \mid F_p$ ise q, $4t+1$ biçimindedir. Dolayısıyla $q \equiv 1 (\text{mod } 4)$ olur.

Teorem 3.1.23: Tam kare olan Lucas Sayıları sadece 1 ve 4 tür.

İspat: x tamsayı olmak üzere $L_n = x^2$ olsun. n çift ise $n = 2r$ yazılabilir. O zaman $L_n = L_{2r} = L_r^{\,2} \pm 2$ olur (Teo.3.1.12). Ancak $L_r^{\,2} \pm 2$ bir tam kare değildir. Çünkü bir sayının karesi $4k$ veya $4k+1$ biçimindedir. O halde n çift değildir. Bu durumda n tek olur. Dolayısıyla $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$ veya $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$ dir. $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$ olsun. Eğer $n = 1$ ise $L_1 = 1$ olur ki L_n bir tam kare olur. $n > 1$ ve $n = 1 + 2.3^i.k$ olsun. Burada k, 3 ile bölünmeyen bir çift sayıdır. Bu durumda Teorem 3.1.18 (c) ve (d) şıkları gereği $L_k \equiv 3 (\text{mod } 4)$ ve $L_n \equiv -L_1 \equiv -1 (\text{mod } L_k)$ olur. $L_n = x^2$ ise $x^2 \equiv -1 (\text{mod } L_k)$ yani $L_k \mid x^2 + 1$ olur. $L_k = p_1 p_2 ..... p_r$ olsun. $x^2 \equiv -1 (\text{mod } L_k)$ olduğundan L_k nın tüm asal bölenleri $4k+1$ biçimindedir. Ayrıca $4k+1$ biçimindeki sayıların çarpımı yine $4k+1$ biçimindedir. Ancak L_k, $4k+3$ biçiminde olduğundan $L_n = x^2$ olamaz. O halde $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$ dir. Eğer $n = 3$ ise $L_n = L_3 = 4$ olur. Yani L_n tam karedir. $n > 3$ ve $n = 3 + 2.3^i.k$ olsun. Yine k, 3 ile bölünmeyen bir çift sayıdır. Bu durumda $L_k \equiv 3 (\text{mod } 4)$ ve $L_n \equiv -L_3 \equiv -4 (\text{mod } L_k)$ olur. Yani $L_k \mid L_n + 4$ dir. Eğer $L_n = x^2$ yani $L_k \mid x^2 + 2^2$ olsaydı, $L_k = p_1 p_2 ..... p_r$ olmak üzere L_k nın asal bölenlerinin bir kısmı $4k+1$, bir kısmı $4k+3$ biçiminde olurdu. (Hepsi birden $4k+1$ biçiminde olamaz. Çünkü $L_k \equiv 3 (\text{mod } 4)$ idi.) O halde $p_1 = 4k+3$ olsun. Bu durumda

Teorem1.1.4 kullanılırsa $p_1 \mid x^2+2^2$ yani $p_1 \mid x$ ve $p_1 \mid 2$ elde edilir. Ancak $p_1 \mid 2$ olamaz. O halde L_k nın asal bölenleri $4k+3$ biçiminde olamaz. Aynı zamanda $4k+1$ biçiminde de olamayacağından $L_n = x^2$ olamaz. Böylece $L_n = 1$ ve $L_n = 4$ dışında tamkare olan Lucas Sayıları yoktur.

3.1. F_{-n} ve L_{-n} Sayıları

$$\begin{array}{l} ......, F_{-4}, F_{-3}, F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, ... \\ ......, -3, \quad 2, -1, \quad 1, \quad 0, \ 1, \quad 1, \ 2, \ 3, ... \end{array}$$

Aslında $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ formülünde n ye azalan değerler verildiğinde

$$\begin{array}{l} F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 \\ F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1 \\ F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 2 \\ F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = -3 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \end{array}$$

elde edilir ve $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ olduğu görülür. Bunun yanısıra $n \geq 1$ için $L_{-n} = F_{-n+1} + F_{-n-1}$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.24: $n \geq 1$ için $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ dir.

İspat: Binet formülü yardımıyla

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\sqrt{5}} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\sqrt{5}(\alpha\beta)^n} = \frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}(-1)^n} = (-1)^{n+1} F_n$$

bulunur.

Teorem 3.1.25: $n \geq 1$ için $L_{-n} = (-1)^n L_n$ dir.

İspat: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ formülünde n yerine $-n$ alınıp ve Teorem 3.1.24 kullanıldığında

$$\begin{aligned} L_{-n} &= F_{-n-1} + F_{-n+1} \\ &= F_{-(n+1)} + F_{-(n-1)} \\ &= (-1)^{n+2} F_{n+1} + (-1)^n F_{n-1} \\ &= (-1)^n (F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= (-1)^n L_n \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Binet Formülü'nde n yerine $-n$ yazılırsa $L_{-n} = (-1)^n L_n$ olduğu görülür.

Sonuç 3.1.6: n tek ise $F_n = F_{-n}$, n çift ise $L_n = L_{-n}$ dir.

Teorem 3.1.26: x bir tamsayı olmak üzere $L_n = 2x^2$ ve $n \geq 0$ olsun. O zaman $n = 0$ veya $n = 6$ dır.

İspat: $x^2 \equiv 0,1,4 (\mathrm{mod}\, 8)$ olduğu için $L_n = 2x^2 \equiv 0,2 (\mathrm{mod}\, 8)$ dir. L_n çift olduğundan Teorem 3.1.18 (a) şıkkından $3 | n$ dir. n tek olsun. n ye bölme algoritmasını uygularsak, $n = 12q + r$, $0 \leq r < 12$ olacak şekilde q ve r tamsayıları mevcuttur. $3 | n$ ve n tek olduğundan $r = 3$ veya $r = 9$ dur. $n = 12q + 3$ ise Teorem 3.1.18 gereği $L_n = L_{12q+3} \equiv L_3 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 8)$ olur ki $L_n \equiv 0,2 (\mathrm{mod}\, 8)$ olduğundan $n = 12q + 3$ biçiminde değildir. Aynı şekilde $n = 12q + 9$ biçiminde de değildir. O halde n tek değildir. O zaman n çifttir. Bu durumda $3 | n$ olduğundan $r = 0$ veya $r = 6$ dır. $r = 0$ ise $L_n = L_{12q} \equiv L_0 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 8)$ olur ki buradan $n = 0$ olduğu görülür. $r = 6$ ise $L_n = L_{12q+6} \equiv L_6 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 8)$ olduğundan $n = 6$ olur.

Teorem 3.1.27: $F_n = x^2$ bir tamkare ve $n \geq 0$ ise $n = 0,1,2$ veya 12 dir.

İspat: n tek olsun. O zaman $n \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ olur. $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ olsun. $n = 1$ ise $F_1 = 1$ bir tamkaredir. $n > 1$ ise $n = 1 + 2.3^i.k$ olup k, 3 ile bölünmeyen bir çift sayıdır. Buradan $F_n \equiv -F_1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, L_k)$ bulunur. Teorem 3.1.21 deki gibi F_n nin tamkare olamayacağı görülür. n çift yani $n = 2s$ olsun. $F_n = F_{2s} = F_s L_s = x^2$ olur. $3 | n$ olduğu varsayılırsa $F_3 | F_n$ veya $2 | F_n$ olur. $F_n = F_s L_s = x^2$ olduğundan

$F_s = 2y^2$ ve $L_s = 2z^2$ olacak şekilde y ve z tamsayıları vardır. $L_s = 2z^2$ ise Teorem 3.1.24 gereği $\frac{n}{2} = s = 0,6$ dır. Buradan $n = 0$ veya $n = 12$ bulunur. $n = 0$ ise $F_s = F_0 = 2.0^2$ dir. $n = 12$ ise $F_s = F_6 = 8 = 2.2^2$ dir. Dolayısıyla $n = 0$ veya $n = 12$ dir. $3 \nmid n$ olduğu varsayılırsa F_n tek olur. O zaman $F_s = y^2$ ve $L_s = z^2$ olacak şekilde y ve z tamsayıları vardır. Teorem 3.1.21 gereği $L_s = z^2$ ise $\frac{n}{2} = s = 1$ veya 3 tür. Buradan $n = 2$ veya $n = 6$ bulunur. $n = 2$ ise $F_s = F_1 = 1^2$ dir. Ancak $n = 6$ ise $F_s = F_3 = 2$ bir tamkare olamaz. Sonuç olarak $F_n = x^2$ bir tamkare ise $n = 0,1,2$ veya 12 dir.

Teorem 3.1.28: x bir tamsayı olmak üzere $F_n = 2x^2$ ve $n \geq 0$ ise $n = 0,3$ veya 6 dır.

İspat: n tek olsun. O zaman $n \equiv \pm 1 (\bmod 4)$ olur. İlk olarak $n \equiv -1 \equiv 3 (\bmod 4)$ olsun. $n = 3$ ise $F_n = F_3 = 2.1^2$ dir. $n \neq 3$ ise $n = 3 + 2.3^i.k$ olarak yazılabilir. Burada k, 3 ile bölünmeyen bir çift sayıdır. Dolayısıyla $2F_n = 2F_{2.3^i.k+3} \equiv -2F_3 \equiv -4 (\bmod L_k)$ dır. $F_n = 2x^2$ olduğundan $2.2x^2 \equiv -4 (\bmod L_k)$ ise $x^2 \equiv -1 (\bmod L_k)$ olur. Dolayısıyla L_k nın bütün bölenleri $4m+1$ biçimindedir. Halbuki k, 3 ile bölünmeyen bir çift sayı olduğundan Teorem 3.1.20 nin (c) şıkkına göre $L_k \equiv 3 (\bmod 4)$ dir. O halde $n = 3$ dir. İkinci olarak $n \equiv 1 \equiv -3 (\bmod 4)$ yani $-n \equiv 3 (\bmod 4)$ olsun. Az önceki tartışmaya göre bu mümkün değildir. Çünkü $-n \equiv 3 (\bmod 4)$ den $-n = 3$ yani $n = -3$ olur. Bu $n \geq 0$ olmasıyla çelişir. n çift yani $n = 2s$ olsun. O zaman $F_n = F_{2s} = F_s L_s = 2x^2$ dir. Bu yüzden $F_s = y^2$ ve $L_s = 2z^2$ veya $F_s = 2y^2$ ve $L_s = z^2$ olacak şekilde y ve z tamsayıları vardır. $F_s = y^2$ ve $L_s = 2z^2$ ise Teorem 3.1.24 ve 3.1.25 den $s = 0$ olur. Yani $n = 0$ dır. $F_s = 2y^2$ ve $L_s = z^2$ ise Teorem 3.1.21 gereği $s = 1$ veya $s = 3$ dir. $s = 1$ ise $F_s = F_1 = 1 \neq 2y^2$ dir. O halde $s = 1$ olamaz. $s = 3$ ise $F_s = F_3 = 2 = 2.1^2$ olduğundan $\frac{n}{2} = s = 3$ dolayısıyla $n = 6$ bulunur.

Teorem 3.1.29: $n \geq 0$ için $F_{n+1}m^n + F_n m^{n+1} \equiv 1(\bmod m^2 + m - 1)$ ve $L_{n+1}m^n + L_n m^{n+1} \equiv 1 + 2m(\bmod m^2 + m - 1)$ dir.

İspat: n üzerinden tümevarım uygulanırsa, $n = 0$ için $F_1 + F_0 m \equiv 1(\bmod m^2 + m - 1)$ olduğundan iddia doğrudur. $n = 1$ için $F_2 m + F_1 m^2 \equiv m + m^2 \equiv 1(\bmod m^2 + m - 1)$ olduğundan iddia doğrudur. $1 < k \leq n$ için verilen ifadenin doğru olduğu kabul edelim. O zaman iddianın $n+1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_{n+2}m^{n+1} + F_{n+1}m^{n+2} &= (F_n + F_{n+1})m^{n+1} + (F_{n-1} + F_n)m^{n+2} \\ &= m(F_{n+1}m^n + F_n m^{n+1}) + m^2(F_n m^{n-1} + F_{n-1}m^n) \end{aligned}$$

olur. Kabulden dolayı

$$F_{n+1}m^n + F_n m^{n+1} \equiv 1(\bmod m^2 + m - 1)$$

ve

$$F_n m^{n-1} + F_{n-1}m^n \equiv 1(\bmod m^2 + m - 1)$$

dir. O halde

$$F_{n+2}m^{n+1} + F_{n+1}m^{n+2} \equiv m + m^2 \equiv 1(\bmod m^2 + m - 1)$$

bulunur. Aynı şekilde

$$L_{n+1}m^n + L_n m^{n+1} \equiv 1 + 2m(\bmod m^2 + m - 1)$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $n \geq 0$ için $F_{n+1}m^n + F_n m^{n+1} \equiv 1(\bmod m^2 + m - 1)$ ve $L_{n+1}m^n + L_n m^{n+1} \equiv 1 + 2m(\bmod m^2 + m - 1)$ dir.

Teorem 3.1.30: $m \geq 2$ ve $n \geq 0$ için $F_{n-1} - mF_n \equiv (-1)^n m^n (\bmod m^2 + m - 1)$ dir.

İspat: n üzerinden tümevarım uygulanırsa,

$n = 0$ için $F_{-1} - mF_0 = 1 - 0 \equiv (-1)^0 m^0 (\bmod m^2 + m - 1)$ olduğundan iddia doğrudur.

$n = 1$ için $F_0 - mF_1 = 0 - m \equiv -m(\bmod m^2 + m - 1)$ olduğundan iddia doğrudur.

$1 < k \leq n$ için verilen ifade doğru olsun. O zaman $n+1$ için

$$\begin{aligned} F_n - mF_{n+1} &= (F_{n-1} + F_{n-2}) - m(F_{n-1} + F_n) \\ &= F_{n-2} - mF_{n-1} + F_{n-1} - mF_n \end{aligned}$$

olarak bulunur. Kabulden

$$\begin{aligned} F_n - mF_{n+1} &\equiv (-1)^{n-1} m^{n-1} + (-1)^n m^n (\operatorname{mod} m^2 + m - 1) \\ &\equiv (-1)^{n-1} m^{n-1} (1-m) (\operatorname{mod} m^2 + m - 1) \\ &\equiv (-1)^{n-1} m^{n-1} m^2 (\operatorname{mod} m^2 + m - 1) \\ &\equiv (-1)^{n-1} m^{n+1} (\operatorname{mod} m^2 + m - 1) \\ &\equiv (-1)^{n+1} m^{n+1} (\operatorname{mod} m^2 + m - 1) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $m \geq 2$ ve $n \geq 0$ için $F_{n-1} - mF_n \equiv (-1)^n m^n (\operatorname{mod} m^2 + m - 1)$ dir.

Sonuç 3.1.7: $L_n \equiv (-1)^n 2^{n+1} \equiv 2.3^n (\operatorname{mod} 5)$ dir.

İspat: Teorem 3.1.28 de $m = 2$ alınırsa $F_n - 2F_{n+1} \equiv (-1)^{n+1} 2^{n+1} (\operatorname{mod} 5)$ olur. Ayrıca

$$F_n - 2F_{n+1} = F_n - F_{n+1} - F_{n+1} = -(F_{n-1} + F_{n+1}) = -L_n$$

olduğundan $L_n \equiv -(-1)^{n+1} 2^{n+1} (\operatorname{mod} 5)$ yani $L_n \equiv (-1)^n 2^{n+1} (\operatorname{mod} 5)$ bulunur. Ayrıca $(-1)^n 2^{n+1} \equiv 2(-2)^n \equiv 2.3^n (\operatorname{mod} 5)$ dir. Buradan $L_n \equiv (-1)^n 2^{n+1} \equiv 2.3^n (\operatorname{mod} 5)$ olur.

Sonuç 3.1.8: $L_{4n} \equiv 2 (\operatorname{mod} 5)$, $L_{4n+1} \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$, $L_{4n+2} \equiv 3 (\operatorname{mod} 5)$ ve $L_{4n+3} \equiv 4 (\operatorname{mod} 5)$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned} 2^4 \equiv 1 (\operatorname{mod} 5) \Rightarrow 2^{4n} &\equiv 1 (\operatorname{mod} 5) \\ \Rightarrow 2^{4n+1} &\equiv 2 (\operatorname{mod} 5) \\ \Rightarrow 2^{4n+2} &\equiv 4 (\operatorname{mod} 5) \\ \Rightarrow 2^{4n+3} &\equiv 3 (\operatorname{mod} 5) \end{aligned}$$

dir. Sonuç 3.1.7 den n yerine sırasıyla $4n, 4n+1, 4n+2$ ve $4n+3$ yazıldığında

$$
\begin{aligned}
L_{4n} &\equiv (-1)^{4n} 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod 5 \\
L_{4n+1} &\equiv (-1)^{4n+1} 2^{4n+2} \equiv -4 \equiv 1 \pmod 5 \\
L_{4n+2} &\equiv (-1)^{4n+2} 2^{4n+3} \equiv 3 \pmod 5 \\
L_{4n+3} &\equiv (-1)^{4n+3} 2^{4n+4} \equiv -1 \equiv 4 \pmod 5
\end{aligned}
$$

bulunur.

Teorem 3.1.31: p bir asal sayı olsun. O zaman $F_{np} \equiv F_n F_p \pmod p$ ve $L_{np} \equiv L_n L_p \equiv L_n \pmod p$ dir.

İspat: n üzerinden tümevarım uygulanırsa,

$n = 0$ için $F_0 = 0$ olduğundan $F_0 \equiv F_0 F_p \pmod p$ yani iddia doğrudur.

$n = 1$ için $F_1 = 1$ olduğundan $F_p \equiv F_1 F_p \pmod p$ yani iddia doğrudur.

$1 < k \leq n$ için verilen ifade doğru olsun. Ayrıca $F_{r+s} = F_r L_s + (-1)^{s+1} F_{r-s}$ olduğu kullanılırsa, $F_{(n+1)p} = F_{np+p} = F_{np} L_p + (-1)^{p+1} F_{np-p} = F_{np} L_p + F_{np-p}$ olur. Teorem 3.1.21 de $L_p \equiv 1 \pmod p$ olduğu gösterilmişti. Bu yüzden $F_{(n+1)p} \equiv F_{np} + F_{np-p} \pmod p$ olur. Kabulden dolayı

$$
\begin{aligned}
F_{(n+1)p} &\equiv F_{np} + F_{np-p} \pmod p \\
&\equiv F_n F_p + F_{n-1} F_p \pmod p \\
&\equiv (F_n + F_{n-1}) F_p \pmod p \\
&\equiv F_{n+1} F_p \pmod p
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Dolayısıyla iddia $n+1$ için de doğru olur. Böylece her n için $F_{np} \equiv F_n F_p \pmod{p}$ dir. Aynı şekilde tümevarımla ve $L_p \equiv 1 \pmod{p}$ olduğu kullanılarak $L_{np} \equiv L_n L_p \equiv L_n \pmod{p}$ olduğu gösterilebilir.

BÖLÜM 4. FİBONACCİ MATRİSLERİ

Q-Matrisi

Matrislerin özellikleri kullanılarak, Fibonacci Sayıları ve matrisler arasında bir ilişki kurulabilir. Gerçekten de $2.$ Bölümde $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ iken

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ Q^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ Q^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğu ve daha genel olarak $n \geq 1$ için $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ olduğu verilmiştir.

Sonuç 4.1.1:

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n \\ F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \\ F_{m+n} &= F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n \\ F_{m+n-1} &= F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{aligned}$$

dir.

İspat: $Q^{m+n} = Q^m Q^n$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n & F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \\ F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. İki matrisin eşitliğinden istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2: $L_{m+n} = F_{m+1}L_n + F_m L_{n-1}$ dir.

İspat: Sonuç 4.1.1 de, birinci eşitlikte n yerine $n+1$ alınırsa ve ikinci eşitlikle birlikte taraf tarafa toplanırsa, yani

$$\begin{aligned} F_{m+n+2} &= F_{m+1}F_{n+2} + F_m F_{n+1} \\ F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned} F_{m+n+2} + F_{m+n} &= F_{m+1}(F_{n+2} + F_n) + F_m(F_{n+1} + F_{n-1}) \\ L_{m+n+1} &= F_{m+1}L_{n+1} + F_m L_n \end{aligned}$$

bulunur. n yerine $n-1$ alınırsa $L_{m+n} = F_{m+1}L_n + F_m L_{n-1}$ elde edilir.

M-Matrisi

$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $M^3 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$, $M^3 = \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{bmatrix}$ olduğu gözükür.

Teorem 4.1.1: $n \geq 1$ için $M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$ dir.

İspat: n üzerine tümevarım uygulanırsa

$n=1$ için $M = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$ olsun. O halde $n+1$ için

$$\begin{aligned} M^{n+1} = M^n M &= \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2n-1} + F_{2n} & F_{2n-1} + 2F_{2n} \\ F_{2n} + F_{2n+1} & F_{2n} + 2F_{2n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2n+1} & F_{2n+2} \\ F_{2n+2} & F_{2n+3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $n \geq 1$ için $M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$ dir.

4.1. Karakteristik Denklem

$A = (a_{ij})_{nxn}$ ve I_{nxn} lik matrisler olsun. $|A - Ix| = 0$, A matrisinin karakteristik denklemidir. Denklemin kökleri, A matrisinin karakteristik kökleridir. Buna göre Q^n nin köklerini bulmak için, onun karakteristik denklemini bulalım. Açık olarak

$$\begin{aligned} |Q^n - Ix| &= \begin{vmatrix} F_{n+1} - x & F_n \\ F_n & F_{n-1} - x \end{vmatrix} \\ &= (F_{n+1} - x)(F_{n-1} - x) - F_n^{\ 2} \\ &= x^2 - x(F_{n+1} + F_{n-1}) + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^{\ 2} \\ &= x^2 - L_n x + (-1)^n \end{aligned}$$

olur. Böylece karakteristik denklem $x^2 - L_n x + (-1)^n = 0$ dir. Bu denklemin kökleri $x = \dfrac{L_n \pm \sqrt{L_n^{\ 2} - 4(-1)^n}}{2}$ dir. Teorem 3.1.11 gereği $L_n^{\ 2} - 4(-1)^n = 5F_n^{\ 2}$ olduğundan $x = \dfrac{L_n \pm F_n\sqrt{5}}{2}$ bulunur. Ayrıca $L_n = \alpha^n + \beta^n$ ve $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ olduğundan $\alpha^n = \dfrac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta^n = \dfrac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2}$ dir. Böylece şu teorem verilebilir.

Teorem 4.1.2: Q^n nin karakteristik kökleri α^n ve β^n dir.

Sonuç 4.1.3: Q nun karakteristik kökleri α ve β dir.

İspat: Teorem 4.1.2 de n=1 alınırsa Q nun karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ olur. Bu denklemin kökleri de α ve β dir. Ayrıca $Q^2 - Q - I = 0$ olduğundan Q kendi karakteristik denklemini sağlar. Böylece Q matrisi kullanılarak Fibonacci sayılarıyla ilgili bazı özellikler gösterilebilir.

Örneğin $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ olduğu gösterilebilir. Matematiksel indüksiyon yöntemiyle $(I + Q + Q^2 + ... + Q^n)(Q - I) = Q^{n+1} - I$ olduğu gösterilebilir. Buna göre $|Q - I| = \begin{vmatrix} 1-1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ olduğundan $(Q - I)$ matrisi terslenebilirdir. $Q^2 - Q - I = 0$ olduğundan $Q^2 - Q = I$ yani $Q(Q - I) = I$ dir. O halde Q, $(Q - I)$ nin tersi olur. O zaman $Q(Q - I) = I$ olduğu kullanılarak

$$(I + Q + Q^2 + ... + Q^n)(Q - I)Q = (Q^{n+1} - I)Q$$
$$(I + Q + Q^2 + ... + Q^n) = Q^{n+2} - Q$$

yazılabilir. Son eşitlikte matrisler yerine yazılırsa $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ olduğu görülür.

R-Matrisi

$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $L_{n+1} = F_{n+1} + 2F_n$, $L_n = 2F_{n+1} - F_n$, $5F_{n+1} = L_{n+1} + 2L_n$, $5F_n = 2L_{n+1} - L_n$ eşitlikleri kullanılarak

$$RQ^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\det(RQ^n) = \det(R)\det(Q^n)$ olduğundan $\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$ ise Cassini Formülü'nden

$$\begin{aligned} L_{n+1}L_{n-1} - L_n^{\,2} &= -5(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^{\,2}) \\ &= -5(-1)^n \\ &= 5(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

bulunur.

4.2. Lamda Fonksiyonu

$A=(a_{ij})_{nxn}$ ve $A^*=(a_{ij}+1)_{nxn}$ olsun. Böylece A^* matrisi, A matrisinin her elemanına 1 eklenmesiyle oluşur. $\lambda(A)$ değeri ise bu iki matrisin determinantları farkına eşittir. Yani $\lambda(A)=|A^*|-|A|$ dır. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere $A^*=\begin{bmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d+1 \end{bmatrix}$ dir. Buna göre $|A^*|=\begin{vmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d+1 \end{vmatrix}=(ad-bc)+(a+d-b-c)$ ve $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ olduğundan $\lambda(A)=|A^*|-|A|=a+d-b-c$ bulunur. A matrisinin her elemanına k sayısı eklenirse $|A^*|=\begin{vmatrix} a+k & b+k \\ c+k & d+k \end{vmatrix}=(ad-bc)+k(a+d-b-c)$ olur ki $|A^*|=|A|+k\lambda(A)$ bulunur. Özellikle $A=Q^n$ olarak alınırsa $|(Q^n)^*|=|Q^n|+k\lambda(Q^n)$ dir. Ayrıca

$$|Q^n|=\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}=F_{n+1}F_{n-1}-F_n{}^2=(-1)^n$$

ve

$$|(Q^n)^*|=\begin{vmatrix} F_{n+1}+k & F_n+k \\ F_n+k & F_{n-1}+k \end{vmatrix}=(F_{n+1}F_{n-1}-F_n{}^2)+k(F_{n+1}+F_{n-1}-2F_n)$$

olduğundan $\lambda(Q^n)=F_{n+1}+F_{n-1}-2F_n=F_{n-1}-F_{n-2}=F_{n-3}$ bulunur. O halde $|(Q^n)^*|=|Q^n|+k\lambda(Q^n)=(-1)^n+kF_{n-3}$ olur. Burada $k=F_n$ alınırsa;

$$\begin{aligned}|(Q^n)^*|&=\begin{vmatrix} F_{n+1}+F_n & F_n+F_n \\ F_n+F_n & F_{n-1}+F_n \end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix} F_{n+2} & 2F_n \\ 2F_n & F_{n+1} \end{vmatrix}\\&=(-1)^n+F_nF_{n-3}\end{aligned}$$

ve buradan $F_{n+1}F_{n+2}-4F_n^{\ 2}=(-1)^n+F_nF_{n-3}$ ya da $4F_n^{\ 2}=F_{n+1}F_{n+2}-F_nF_{n-3}+(-1)^{n+1}$ eşitliği bulunur.

P-Matrisi

$P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$ olmak üzere $P^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&4\\1&2&4\end{bmatrix}$, $P^3=\begin{bmatrix}1&2&4\\4&7&12\\4&6&9\end{bmatrix}$ ve $P^4=\begin{bmatrix}4&6&9\\12&19&30\\9&15&25\end{bmatrix}$ dir. Bu şekilde devam ederek P^n tahmin edilebilri mi? Bu matrisler Fibonacci Sayıları yardımıyla yazılırsa;

$$P=\begin{bmatrix}F_0^{\ 2}&F_0F_1&F_1^{\ 2}\\2F_0F_1&F_2^{\ 2}-F_0F_1&2F_1F_2\\F_1^{\ 2}&F_1F_2&F_2^{\ 2}\end{bmatrix},\ P^2=\begin{bmatrix}F_1^{\ 2}&F_1F_2&F_2^{\ 2}\\2F_1F_2&F_3^{\ 2}-F_1F_2&2F_2F_3\\F_2^{\ 2}&F_2F_3&F_3^{\ 2}\end{bmatrix}$$

$$P^3=\begin{bmatrix}F_2^{\ 2}&F_2F_3&F_3^{\ 2}\\2F_2F_3&F_4^{\ 2}-F_2F_3&2F_3F_4\\F_3^{\ 2}&F_3F_4&F_4^{\ 2}\end{bmatrix}$$

olur. O halde Matematiksel İndüksiyon Yöntemiyle P^n nin

$P^n=\begin{bmatrix}F_{n-1}^{\ 2}&F_{n-1}F_n&F_n^{\ 2}\\2F_{n-1}F_n&F_{n+1}^{\ 2}-F_{n-1}F_n&2F_nF_{n+1}\\F_n^{\ 2}&F_nF_{n+1}&F_{n+1}^{\ 2}\end{bmatrix}$ olduğu gösterilebilir. Eğer $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ olursa $\lambda(A)=\begin{vmatrix}a+e-b-d&b+f-c-e\\d+h-g-e&e+i-h-f\end{vmatrix}$ olarak bulunur. Özel olarak $A=P^n$ alınırsa;

$$
\begin{aligned}
\lambda(P^n) &= \begin{vmatrix} F_{n-1}{}^2 + F_{n+1}{}^2 - F_{n-1}F_n - F_{n-1}F_n - 2F_{n-1}F_n & F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} - F_n{}^2 - F_{n+1}{}^2 + F_{n-1}F_n \\ 2F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} - F_n{}^2 - F_{n+1}{}^2 + F_{n-1}F_n & F_{n+1}{}^2 - F_{n-1}F_n + F_{n+1}{}^2 - F_nF_{n+1} - 2F_nF_{n+1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} F_{n-1}{}^2 + F_{n+1}{}^2 - 4F_{n-1}F_n & 2F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} - F_n{}^2 - F_{n+1}{}^2 \\ 3F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} - F_n{}^2 - F_{n+1}{}^2 & 2F_{n+1}{}^2 - 3F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} F_{2n-3} & F_{2n-2} \\ -F_{n-2}{}^2 & (-1)^n - F_{n-2}F_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= F_{2n-3}[(-1)^n - F_{n-2}F_{n-1}] + F_{2n-2}F_{n-2}{}^2 \\
&= (-1)^n (F_{n-1}{}^2 - F_{n-3}F_{n-2}) \\
&= (-1)^n
\end{aligned}
$$

olur.

BÖLÜM 5. FİBONACCİ SERİLERİ

Aşağıdaki bazı teoremlerde şu toplam formülleri kullanılacaktır.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+1}\right) = a_1 - a_{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+2}\right) = (a_1 + a_2) - (a_{n+1} + a_{n+2})$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+3}\right) = (a_1 + a_2 + a_3) - (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3})$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+4}\right) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4})$$

Teorem 5.1.1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n} = 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1} F_{n+2}}$ dir.

İspat: Cassini Formülü'nden $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2} = (-1)^n$ olduğu kullanılırsa,

$$\frac{1}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2}}{F_n F_{n-1} F_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1} F_{n+1}}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafından toplam alınırsa

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{F_k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{F_k}{F_{k-1}F_{k+1}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{F_k} - \frac{F_k}{F_{k-1}F_{k+1}}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{F_{k-1}F_{k+1} - F_k^{\ 2}}{F_k F_{k-1} F_{k+1}}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{F_k F_{k-1} F_{k+1}}\right)$$

olur. Diğer taraftan

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}}-\frac{1}{F_{n+1}}\right)$$

olur. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{F_{k-1}}-\frac{1}{F_{k+1}}\right)$ dir. $a_k=\frac{1}{F_{k-1}}$ ve $a_{k+2}=\frac{1}{F_{k+1}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{k=2}^{n}\left(a_k-a_{k+2}\right)&=(a_2+a_3)-(a_{n+1}+a_{n+2}) \\ &=(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2})-(\frac{1}{F_n}+\frac{1}{F_{n+1}}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. $n\to\infty$ iken limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}S_n=1+1=2$ olur. Böylece

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_n}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_n}-2=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}F_{n+1}}\right)$$

olur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_1}-2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_n}-3=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}F_{n+1}}\right)$$

ve böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}=3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$$

olarak bulunur.

Teorem 5.1.2: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}=1$ dir.

İspat:

$$\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}=\frac{F_n}{F_{n-1}F_nF_{n+1}}=\frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_nF_{n+1}}=\frac{1}{F_{n-1}F_n}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}$$

olduğundan kısmi toplamlar dizisi

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{F_{k-1}F_k}-\frac{1}{F_kF_{k+1}}\right)$$

olup $a_k=\dfrac{1}{F_{k-1}F_k}$ ve $a_{k+1}=\dfrac{1}{F_kF_{k+1}}$ olarak alınırsa

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\left(a_k-a_{k+1}\right)=a_1-a_{n+1}=\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}$$

olur. Buradan $n\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{F_nF_{n+1}}\right)=1$$

bulunur. Yani $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}=1$ dir.

Teorem 5.1.3: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}{}^2F_{n+3}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}{}^2F_{n+3}}=\frac{1}{2}$ dir.

İspat: Kısalık olsun diye $a=F_n$, $b=F_{n+1}$, $c=F_{n+2}$, $d=F_{n+3}$ alınırsa $a+b=c$ ve $b+c=d$ olduğu açıktır. Eşitliğin sol yanındaki ifade

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ac^2d}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ab^2d}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{ac^2d}+\frac{1}{ab^2d}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{abc^2d}+\frac{c}{ab^2cd}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c-a}{abc^2d}+\frac{d-b}{ab^2cd}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{abcd}-\frac{1}{bc^2d}+\frac{1}{ab^2c}-\frac{1}{abcd}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{ab^2c}-\frac{1}{bc^2d}\right)$$

olur. a, b, c ve d nin değerleri yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_nF_{n+1}{}^2F_{n+2}}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}{}^2F_{n+3}}\right)$$

elde edilir. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{F_kF_{k+1}{}^2F_{k+2}}-\frac{1}{F_{k+1}F_{k+2}{}^2F_{k+3}}\right)$ olup

$a_k=\frac{1}{F_kF_{k+1}{}^2F_{k+2}}$ ve $a_{k+1}=\frac{1}{F_{k+1}F_{k+2}{}^2F_{k+3}}$ olarak alınırsa

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-a_{k+1}\right)=a_1-a_{n+1}=\frac{1}{F_1F_2{}^2F_3}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}{}^2F_{n+3}}$$

olur. Buradan $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F_1F_2{}^2F_3}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}{}^2F_{n+3}}\right)=\frac{1}{2}$ olarak bulunur. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}{}^2F_{n+3}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}{}^2F_{n+3}}=\frac{1}{2}$$

dir.

Lemma 5.1.1: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Altın Oran sayısı olsun. O zaman her pozitif k tamsayısı için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+k}}{F_n} = \alpha^k$ dır.

İspat: Binet Formülü yardımıyla

$$\frac{F_{n+k}}{F_n} = \frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\alpha^n - \beta^n} = \frac{\alpha^{n+k}\left[1 - \frac{\beta^{n+k}}{\alpha^{n+k}}\right]}{\alpha^n\left[1 - \frac{\beta^n}{\alpha^n}\right]} = \frac{\alpha^k\left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k}\right]}{\left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right]}$$

olarak bulunur. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğundan $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ dir. Dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k} = 0$ dır. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+k}}{F_n} = \alpha^k$ dir.

Sonuç 5.1.1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$ dir.

İspat: Lemma 5.1.1 de $k=1$ alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$ olduğu görülür.

Teorem 5.1.4:

a) $F_{n+1} = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{F_{i-1}}{F_i}\right)$

b) $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i}{F_i F_{i-1}}$

c) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{F_i F_{i-1}}$

dir.

İspat: a) $F_{n+1}=\dfrac{F_{n+1}F_nF_{n-1}....F_2}{F_nF_{n-1}F_{n-1}....F_1}=\prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{F_{i+1}}{F_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{F_i+F_{i-1}}{F_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{F_{i-1}}{F_i}\right)$ olarak bulunur.

b) Cassini formülü kullanılırsa,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}-\frac{F_n}{F_{n-1}}\right)+\left(\frac{F_n}{F_{n-1}}-\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}\right)+...+\left(\frac{F_3}{F_2}-\frac{F_2}{F_1}\right)+1$$
$$=1+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{F_{i+1}}{F_i}-\frac{F_i}{F_{i-1}}\right)=1+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{F_{i+1}F_{i-1}-F_i^{\,2}}{F_iF_{i-1}}\right)=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{F_iF_{i-1}}$$

olur.

c) $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}=1+\sum_{i=2}^{n}\dfrac{(-1)^i}{F_iF_{i-1}}$ eşitliğinde $n\to\infty$ iken limit alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}=1+\sum_{i=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^i}{F_iF_{i-1}}$ elde edilir. Sonuç 5.1.1'den $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\sum_{i=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^i}{F_iF_{i-1}}$ olarak bulunur.

Teorem 5.1.5: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}F_{n+2}}=1$ dir.

İspat: $\dfrac{F_n}{F_{n+1}F_{n+2}}=\dfrac{F_{n+2}-F_{n+1}}{F_{n+1}F_{n+2}}=\dfrac{1}{F_{n+1}}-\dfrac{1}{F_{n+2}}$ dir. Eşitliğin iki tarafından toplam alınırsa;

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}F_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{F_{n+1}}-\dfrac{1}{F_{n+2}}\right)$ olur. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi S_n ise $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{F_{k+1}}-\dfrac{1}{F_{k+2}}\right)$ olur. $a_k=\dfrac{1}{F_{k+1}}$ ve $a_{k+1}=\dfrac{1}{F_{k+2}}$ olarak alınırsa

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-a_{k+1}\right)=a_1-a_{n+1}=\frac{1}{F_2}-\frac{1}{F_{n+2}}=1-\frac{1}{F_{n+2}}$$

bulunur. Her iki taraftan $n\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{F_{n+1}}\right)=1$$

elde edilir. O halde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}F_{n+2}}=1$ dir.

Teorem 5.1.6: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+3}}=\frac{5}{4}$ dir.

İspat: $F_{n+1}=F_{n+3}-F_{n+1}-F_n$ ve dolayısıyla $2F_{n+1}=F_{n+3}-F_n$ dir. Böylece $F_{n+1}=\frac{1}{2}\left(F_{n+3}-F_n\right)$ olduğu kullanırsa;

$$\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{F_{n+3}-F_n}{F_nF_{n+3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+3}}\right)$$

elde edilir. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+3}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+3}}\right)$$

dir. Dolayısıyla $S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{F_k}-\frac{1}{F_{k+3}}\right)$ olur. $a_k=\frac{1}{F_k}$ ve $a_{k+3}=\frac{1}{F_{k+3}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-a_{k+3}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(a_1+a_2+a_3\right)-\left(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_3}\right)-\left(\frac{1}{F_{n+1}}+\frac{1}{F_{n+2}}+\frac{1}{F_{n+3}}\right)\right]\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_3}\right)-\left(\frac{1}{F_{n+1}}+\frac{1}{F_{n+2}}+\frac{1}{F_{n+3}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(1+1+\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$$

bulunur. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n F_{n+3}} = \frac{5}{4}$ dir.

Teorem 5.1.7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+2}}{F_n F_{n+4}} = \frac{17}{6}$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= F_{n+1} + F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+4} - F_{n+2} \\ &= F_{n+4} - \left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+4} - F_n \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\frac{L_{n+2}}{F_n F_{n+4}} = \frac{F_{n+4} - F_n}{F_n F_{n+4}} = \frac{1}{F_n} - \frac{1}{F_{n+4}}$$

olur. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+2}}{F_n F_{n+4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_n} - \frac{1}{F_{n+4}}\right)$ dir. Böylece $a_k = \frac{1}{F_k}$ ve $a_{k+4} = \frac{1}{F_{k+4}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+4}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+4}\right) \\ &= \left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right) - \left(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_3}+\frac{1}{F_4}\right) - \left(\frac{1}{F_{n+1}}+\frac{1}{F_{n+2}}+\frac{1}{F_{n+3}}+\frac{1}{F_{n+4}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_3}+\frac{1}{F_4}\right)-\left(\frac{1}{F_{n+1}}+\frac{1}{F_{n+2}}+\frac{1}{F_{n+3}}+\frac{1}{F_{n+4}}\right)\right]$$
$$=\left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_3}+\frac{1}{F_4}\right)$$
$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{17}{6}$$

bulunur. Yani $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{n+2}}{F_nF_{n+4}}=\frac{17}{6}$ dir.

Teorem 5.1.8: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{F_{2n}}{F_{n+2}^{\;2}F_{n-2}^{\;2}}=\frac{85}{108}$ dir.

İspat: $F_{2n}=\frac{1}{3}\left(F_{n+2}^{\;2}-F_{n-2}^{\;2}\right)$ olduğu kullanılırsa

$\frac{F_{2n}}{F_{n+2}^{\;2}F_{n-2}^{\;2}}=\frac{\frac{1}{3}\left(F_{n+2}^{\;2}-F_{n-2}^{\;2}\right)}{F_{n+2}^{\;2}F_{n-2}^{\;2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{F_{n-2}^{\;2}}-\frac{1}{F_{n+2}^{\;2}}\right)$ elde edilir. Her iki taraftan toplam alınırsa $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{F_{2n}}{F_{n+2}^{\;2}F_{n-2}^{\;2}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{F_{n-2}^{\;2}}-\frac{1}{F_{n+2}^{\;2}}\right)$ bulunur. Ayrıca serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{F_{k-2}^{\;2}}-\frac{1}{F_{k+2}^{\;2}}\right)$ olur. $a_{k-2}=\frac{1}{F_{k-2}^{\;2}}$ ve $a_{k+2}=\frac{1}{F_{k+2}^{\;2}}$ olarak alınırsa

$$S_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{3}(a_{k-2}-a_{k+2})=\frac{1}{3}\left[\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)-\left(a_{n-1}+a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{F_1^2}+\frac{1}{F_2^2}+\frac{1}{F_3^2}+\frac{1}{F_4^2}\right)-\left(\frac{1}{F_{n-1}^{\;2}}+\frac{1}{F_n^{\;2}}+\frac{1}{F_{n+1}^{\;2}}+\frac{1}{F_{n+2}^{\;2}}\right)\right]$$

olur. $n\to\infty$ iken limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\left(1+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)=\frac{85}{108}$ olarak bulunur. Yani $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{F_{2n}}{F_{n+2}^{\;2}F_{n-2}^{\;2}}=\frac{85}{108}$ dir.

Lemma 5.1.2: $n \geq 1$ için $F_n L_n - F_{n+1} L_{n-1} = (-1)^n$ dir.

İspat: n üzerinden tümevarım uygulanırsa;

$n = 1$ için $F_1 L_1 - F_2 L_0 = 1 - 2 = -1$ olduğundan iddia doğrudur. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere her k tamsayısı için iddia doğru olsun. Yani $F_n L_n - F_{n+1} L_{n-1} = (-1)^n$ olsun. Buna göre iddianın $n+1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
F_{n+1} L_{n+1} - F_{n+2} L_n &= F_{n+1}(L_n + L_{n-1}) - L_n(F_n + F_{n+1}) \\
&= F_{n+1} L_n + F_{n+1} L_{n-1} - L_n F_n - L_n F_{n+1} \\
&= -(L_n F_n - F_{n+1} L_{n-1}) \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla her $n \geq 1$ için $F_n L_n - F_{n+1} L_{n-1} = (-1)^n$ dir.

Teorem 5.1.8: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{L_{n-1} L_n} = \frac{\sqrt{5}}{10}$ dir.

İspat: Lemma 5.1.2 den

$$
\frac{(-1)^{n-1}}{L_{n-1} L_n} = -\frac{(-1)^n}{L_{n-1} L_n} = \frac{F_n L_n - F_{n+1} L_{n-1}}{L_{n-1} L_n} = -\left(\frac{F_n}{L_{n-1}} - \frac{F_{n+1}}{L_n} \right)
$$

elde edilir. Buradan toplam alınırsa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{L_{n-1} L_n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_n}{L_{n-1}} - \frac{F_{n+1}}{L_n} \right)$ olur. Ayrıca kısmi toplamlar dizisi $S_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_k}{L_{k-1}} - \frac{F_{k+1}}{L_k} \right)$ dir. Burada $a_k = \dfrac{F_k}{L_{k-1}}$ ve $a_{k+1} = \dfrac{F_{k+1}}{L_k}$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
S_n &= -\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = -(a_1 - a_{n+1}) = -\left(\frac{F_1}{L_0} - \frac{F_{n+1}}{L_n} \right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{F_{n+1}}{L_n}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ olduğundan,

$$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{F_{n+1}}{L_n} = -\frac{1}{2} + \frac{F_{n+1}}{F_{n-1} + F_{n+1}} = -\frac{1}{2} + \frac{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n-1}}}{1 + \dfrac{F_{n+1}}{F_{n-1}}}$$

olur. $n \to \infty$ iken limit alınırsa ve Lemma 5.1.1 deki eşitlik de kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n-1}}}{1 + \dfrac{F_{n+1}}{F_{n-1}}} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

olarak bulunur. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{L_{n-1}L_n} = \frac{\sqrt{5}}{10}$ dir.

Lemma 5.1.3: $n \geq 1$ için $F_{n-1}F_{n+3} - F_nF_{n+2} = 2(-1)^n$ dir.

İspat: n üzerine tümevarım uygulanırsa;

$n = 1$ için $F_0F_4 - F_1F_3 = -2 = 2(-1)$ olduğundan iddia doğrudur.

$1 \leq k \leq n$ olmak üzere her k tamsayısı için iddia doğru olsun. Yani $F_{n-1}F_{n+3} - F_nF_{n+2} = 2(-1)^n$ olsun. O halde iddiayı $n+1$ için ispatlayalım.

$$\begin{aligned} F_nF_{n+4} - F_{n+1}F_{n+3} &= F_n(F_{n+3} + F_{n+2}) - (F_n + F_{n-1})F_{n+3} \\ &= F_nF_{n+3} + F_nF_{n+2} - F_nF_{n+3} - F_{n-1}F_{n+3} \\ &= -(F_{n-1}F_{n+3} - F_nF_{n+2}) \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

olur. Yani $n \geq 1$ için $F_{n-1}F_{n+3} - F_nF_{n+2} = 2(-1)^n$ dir.

Teorem 5.1.9: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+3}} = \frac{6\alpha - 9}{4}$ dir.

İspat: Lemma 5.1.3 den,

$$\frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+3}}=-\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+3}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{F_{n-1}F_{n+3}-F_nF_{n+2}}{F_nF_{n+3}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}-\frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}\right)$$

elde edlir. Serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{F_{k-1}}{F_k}-\frac{F_{k+2}}{F_{k+3}}\right)$ olur. $a_k=\frac{F_{k-1}}{F_k}$ ve $a_{k+3}=\frac{F_{k+2}}{F_{k+3}}$ olarak alınıp $n\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}S_n&=-\frac{1}{2}\left[\left(a_1+a_2+a_3\right)-\left(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{F_0}{F_1}+\frac{F_1}{F_2}+\frac{F_2}{F_3}\right)-\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}+\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}+\frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}}+\frac{1}{\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}}+\frac{1}{\frac{F_{n+3}}{F_{n+2}}}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{\alpha}\right]\\
&=\frac{6\alpha-3\alpha}{4\alpha}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ değeri yerine yazıldığında $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+3}}=\frac{6\alpha-9}{4}$ elde edilir.

Teorem 5.1.10: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{F_{2n-1}F_{2n+3}}=\frac{1}{6}$ dir.

İspat: Öncelikle

$$
\begin{aligned}
3F_{2n+1} &= F_{2n+1} + F_{2n+1} + F_{2n+1} \\
&= F_{2n+1} + F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n-1} \\
&= F_{2n+1} + F_{2n+2} + F_{2n-1} \\
&= F_{2n+3} + F_{2n-1}
\end{aligned}
$$

dir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1)^{n-1}}{F_{2n-1}F_{2n+3}} &= \frac{(-1)^{n-1}F_{2n+1}}{F_{2n-1}F_{2n+1}F_{2n+3}} = \frac{1}{3}\frac{(-1)^{n-1}(F_{2n-1}+F_{2n+3})}{F_{2n-1}F_{2n+1}F_{2n+3}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{3}\left[\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} - \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}\right]
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca kısmi toplamlar dizisi

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{3}\left[\frac{1}{F_{2k-1}F_{2k+1}} - \frac{1}{F_{2k+1}F_{2k+3}}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{F_1F_3}+\frac{1}{F_3F_5}\right) - \left(\frac{1}{F_3F_5}+\frac{1}{F_5F_7}\right) + \left(\frac{1}{F_3F_5}+\frac{1}{F_5F_7}\right) - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} - \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{F_1F_3} + \frac{(-1)}{F_{2n+1}F_{2n+3}}\right]
\end{aligned}
$$

dir. $n \to \infty$ iken limit alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{3F_1F_3} = \dfrac{1}{6}$ elde edilir. Yani $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{F_{2n-1}F_{2n+3}} = \dfrac{1}{6}$ dir.

Lemma 5.1.3: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}$ dir.

İspat: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{F_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}+F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n} + \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \alpha = -\beta + \alpha = \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{L_n}{F_n}=\sqrt{5}$ dir.

Teorem 5.1.11: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}L_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=1$ dir.

İspat: $L_{n+1}=F_n+F_{n+2}$ eşitliği kullanılarak,

$\dfrac{(-1)^{n-1}L_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=\dfrac{(-1)^{n-1}(F_{n+2}+F_n)}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{F_nF_{n+1}}+\dfrac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}\right]$ elde edilir. Böylece

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[\dfrac{1}{F_kF_{k+1}}+\dfrac{1}{F_{k+1}F_{k+2}}\right]$ olur ve bu toplam hesaplanırsa

$S_n=\dfrac{1}{F_1F_2}+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$ elde edilir. $n\to\infty$ iken limit alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{F_1F_2}=1$

bulunur. Yani $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}L_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=1$ dir.

Teorem 5.1.12: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}L_{2n+2}}{F_nF_{n+1}L_{n+1}L_{n+2}}=\dfrac{1}{3}$ dir.

İspat: Teorem 3.1.17 kullanılarak $L_{2n+2}=F_{n+1}L_{n+2}+F_nL_{n+1}$ elde edilir. Dolayısıyla,

$\dfrac{(-1)^{n-1}L_{2n+2}}{F_nF_{n+1}L_{n+1}L_{n+2}}=\dfrac{(-1)^{n-1}(F_{n+1}L_{n+2}+F_nL_{n+1})}{F_nF_{n+1}L_{n+1}L_{n+2}}=(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{F_nL_{n+1}}+\dfrac{1}{F_{n+1}L_{n+2}}\right]$ olur. Buradan

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[\dfrac{1}{F_kL_{k+1}}+\dfrac{1}{F_{k+1}L_{k+2}}\right]=\dfrac{1}{F_1L_2}+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{F_{n+1}L_{n+2}}$ elde edilir. $n\to\infty$ iken limit

alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{F_1L_2}=\dfrac{1}{3}$ bulunur. Yani $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}L_{2n+2}}{F_nF_{n+1}L_{n+1}L_{n+2}}=\dfrac{1}{3}$ dir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayıları ele alınıp bunlarla ilgili temel özellikler incelendi. Benzer özellikler $k-$Fibonacci sayıları için incelenebilir. Burada $k-$Fibonacci sayıları $k \geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $U_n = kU_n + U_{n-1}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan sayılardır. Ayrıca Fibonacci sayılarının Diophant denklemlerinin çözümlerinde kullanıldığı bilinmektedir. Bu çalışmada bu konuya girilmemiştir. Bu konuyla ilgili olarak $[8]$ nolu kaynağa bakılabilir.

KAYNAKLAR

[1] KOSHY, T., Fibonacci and Lucas Numbers With Applications, John Wiley, New York, 2001.

[2] Vorobiev, N., Fibonacci Numbers, Translated From The Russian By Mircea Martin, Birkhauser Basel, 2003.

[3] Nguyen, T., Fibonacci and Lucas Series With Elliptic Functions, In Partial Fulfillment Of the Requirements For The Degree Masters Of Arts, San Jose State University, Agust 2005.

[4] YÜCEL, G., Aspect Of Fibonacci Numbers, In Partial Fulfillment Of the Requirements For The Degree Masters Of Science, Bilkent University, 1994.

[5] ŞAKAR, İ., Fibonacci Sayıları ve Fibonacci Grupları, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1997.

[6] ADLER, A., COURY J. E., The Theory Of Numbers, Jones and Bertlett Publishers, 1995.

[7] ZHİ-HONG SUN, Congruences For Fibonacci Numbers, Lecture Notes; http://www.hytc.cn/xsjl/szh.Confn.Pdf, 2003

[8] VAJDA, S., Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Sections, Ellis Horwood Limited Publ., England, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

Zafer Yosma, 14.03.1984’ de İstanbul’ da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sultanbeyli’de tamamladı. 2001 yılında Sultanbeyli Ticaret Meslek Lisesi’nden mezun oldu. 2001 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünü 2005 yılında bitirdi. 2005 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı.