T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURMIAN DİZİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şerife KAÇMAZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI

Haziran 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURMIAN DİZİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şerife KAÇMAZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 12 / 06 /2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Y. Doç. Dr. Serpil HALICI	Prof. Dr. Metin BAŞARIR	Doç. Dr. İbrahim OKUR
Jüri Başkanı	Üye	Üye

Bu tez Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyon Başkanlığı (BAPK) tarafından 2008-50-01-003 numaralı proje olarak desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada elemanları $A=\{a,b\}$ alfabesi üzerinde tanımlı olan Sturmian diziler üzerinde duruldu. Düzlemdeki doğruların eğimleriyle Sturmian dizi, karakteristik dizi, kesilmiş dizi ilişkilendirildi. Sturmian diziler ile Fibonacci dizisi arasındaki bağlantılar ortaya konuldu. Sturmian dizilerin bazı özelliklerine ışık tutulmaya çalışıldı.

Tezin hazırlanmasının her aşamasında, yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI ve bana destek olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ…..... ii
İÇİNDEKİLER iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ..... v
ŞEKİLLER LİSTESİ vi
TABLOLAR LİSTESİ vii
ÖZET..... viii
SUMMARY..... ix

BÖLÜM 1.
STURMIAN DİZİLERİNE GİRİŞ…….. 1
1.1 Temel Tanım ve Kavramlar……. 1

BÖLÜM 2.
STURMIAN KELİMELER……... 6
2.1. Giriş..... 6
2.2. Sonsuz Sturmian Kelimeler..... 6
2.3. Sturmian Kelimelerin Alt Kelimeleri……... 23
2.4. Karakteristik Kelimeler…… 25
2.5. Sonlu Sturmian Kelimeler……. 27
2.6. Sturmian Morfizmaları…….. 30
2.7. Standart Kelimeler…… 31

BÖLÜM 3.
STURMIAN DİZİLERİN KOMBİNASYONEL ÖZELLİKLERİ……... 35

BÖLÜM 4.
STURMIAN DİZİLERİN FARKLI BİR GÖSTERİMİ …..……. 39

BÖLÜM 5.
SONSUZ KELİMELERİN FAKTORIZASYONU……... 57
5.1. Giriş..... 57
5.2. Crochemore ve Ziv-Lempel Faktorizasyonu …….. 61
5.3. Fibonacci Kelime……. 62
5.4. Standart Kelime……... 62

BÖLÜM 6.
STURMIAN KELİMELERİN İNDEKSİ…….. 65

BÖLÜM 7.
SONUÇ VE ÖNERİLER ……. 76

KAYNAKLAR…….. 78
ÖZGEÇMİŞ…….…….. 79

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A^* : Sonlu küme

A^∞ : Sonsuz küme

c_β : Kesilmiş dizi

$c(x)$: x kelimesinin Crochomore faktorizasyonu

d_n : c_α'nın yönlendirici dizisi

F : Fibonacci dizisi

$N_a(x)$: x dizisinde a harfinin görülme sayısı

$P_x(n)$: x'in n uzunluğundaki çarpanlarının sayısı

$\Re$: Standart ikililerin ailesi

s_n : c_α'nın standart dizisi

s_α : Karakteristik dizi

$Sub(w)$: w'nın sonlu çarpanlarının kümesi

$z(x)$: x kelimesinin Ziv-Lempel faktorizasyonu

$|x|$: x dizisinin uzunluğu

$x[i]$: x dizisindeki i. harf

$x[1]$: x dizisinin en soldaki harfi

$x[|x|]$: x dizisinin en sağdaki harfi

ε : Boş dizi

x^R : x kelimesinin tersi

x^N : x kelimesinin tümleyeni

$\lfloor\ \rfloor$: Zemin fonksiyonu

π : Tanımlı dizi

PER : Merkezi kelimelerin kümesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Kesilmiş dizinin negatif görüntüsü……... 16

Şekil 2.2. $y = 1/\sqrt{3}x$ ‘in grafiği…… 18

Şekil 2.3. $y = \sqrt{3}x$ ’in grafiği…… 19

Şekil 2.4. $y = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) x$ ’in grafiği……. 20

Şekil 2.5. $y = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) x$ ’in grafiği…….. 22

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1. Fibonacci dizisinin alt dizileri ve minimum karmaşıklık özelliği.. 9

Tablo 2.2. Fibonacci dizisinin özel kelimeleri…… 24

Tablo 3.1. Fibonacci dizisinin özel kelimeleri ve alt dizileri…….. 35

Tablo 3.2. Karakteristik Fibonacci dizisinin önekleri ile özel kelimeler…… 36

Tablo 4.1. Fibonacci dizisini üreten α - dual iterasyonu…… 55

Tablo 4.2. Sturmian dizisinin kombinasyonel modelleri…… 56

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Kelime, Dizi, Sturmian, Fibonacci Dizisi

x, elemanları özel kurulmuş ve alfabe olarak adlandırılan harflerin bir dizisidir. Bu noktada harflerin kelimeyi, kelimelerin de diziyi oluşturduğu görülmektedir.

$A=\{a,b\}$ şeklinde iki uzunluğunda, ikili alfabe üzerinde durularak Sturmian diziler tanımlanır. $A=\{a,b\}$ alfabesi üzerinde tanımlı olan bir x dizisinin Sturmian dizi olması için gerek ve yeter şart x'in dengeli olması ve sonunda periyodik olmamasıdır.

Sonsuz Sturmian dizisinin boştan farklı sonlu bir alt dizisine sonlu Sturmian dizi denir. Fibonacci dizileri, Sturmian dizilerinin en iyi bilinen özel bir durumudur. Sturmian diziler, düzlemdeki doğrularla da ilişkilidirler.

Merkezi kelimelerin kümesi *PER* şeklinde gösterilir ve her Sturmian kelime *PER* deki kelimenin alt dizisidir. Bu yüzden *PER* Sturmian kelimelerin çekirdeğidir. Bu noktada *PER*'den yararlanarak Sturmian dizilerin kombinasyonel özellikleri hakkında bilgi sahibi olunabilir.

Sturmian diziyi açıklamak ve tanımlamak için farklı yollar bu tezde çalışılmıştır.

STURMIAN STRINGS

SUMMARY

Key Words: Word, String, Sturmian, Fibonacci Strings

A string x is a sequence of letters which are the elements of a specified set called alphabet. At this point we can see letters generate the word, words generate the string obviously.

Sturmian Strings are defined on binary alphabet which is called $A=\{a,b\}$ and size 2. x string, which is difined on $A=\{a,b\}$ alphabet, can be Sturmian String if and only if x is balanced and not ultimately periodic.

A finite Sturmian string is any finite non-empty substring of an infinite Sturmian string. A Fibonacci string is a special case of a sturmian string that is well-known. Sturmian strings are related to straight lines.

Set of all central words denote by *PER* and every Sturmian word is a substring of a word in *PER.* Hence the set *PER* is a kernel of the Sturmian words. At this point it can be make knowledge about combinational properties of the Sturmian strings by using the *PER.*

In this thesis, it is worked on different ways for defined and explaining of Sturmian string.

BÖLÜM 1. STURMIAN DİZİLERİNE GİRİŞ

1.1 Temel Tanım ve Kavramlar

x, elemanları özel kurulmuş ve alfabe olarak adlandırılan harflerin bir dizisidir. Bu dizi sınırlı iken, sınırlı dizi olarak adlandırılır. Diğer taraftan dizi sağdan sınırsız da olabilir. Sırasıyla A^* ve A^∞, A alfabesi üzerindeki sonlu ve sonsuz dizilerin kümesini gösterir. Bu çalışmada $A=\{a,b\}$ şeklindeki iki uzunluğunda, ikili (binary) alfabe üzerinde durulacaktır.

Sonlu bir x dizisinin uzunluğu $|x|$ ile gösterilir. Bu bir dizideki harflerin sayısının kaç tane olduğu anlamına gelir. $[x_i]=x_i$ gösterimi ise, x dizilimindeki i. harfi simgeler. Buna göre; x_1 ya da $x[1]$ en soldaki harfi ve $x_{|x|}$ ya da $x[|x|]$ en sağdaki harfi gösterir. Hiç harf bulundurmayan diziye de boş dizi denir. Boş dizi ε ile gösterilir. Boş dizinin uzunluğu sıfırdır. $N_k(x)$, sonlu bir x dizisindeki k'nın görülmesi sayısıdır.

Sonlu, ikili x dizisi için, $\{a,b\}$ alfabesinde $N_b(x)$, x dizisinin ağırlığı olarak adlandırılır. İki uzunluğundaki bir alfabede çalışılıyorsa, $(k,k')=(a,b)$ ya da $(k,k')=(b,a)$ için;

$$N_k(x) = |x| - N_{k'}(x)$$

olur. Ayrıca x dizisinin ağırlığı, $N_a(x)$ olarak da gösterilebilir. Sonlu dizilim için kelime, sonsuz dizilim için ise dizi ifadeleri kullanılır.

u ve v, A alfabesi üzerinde sonlu ya da sonsuz iki dizi olmak üzere u ile v arasındaki sözlüksel ilişki aşağıdaki gibidir:

1) $u = v$ ise, u ve v eşit dizilerdir.
2) $u < v$ ya da $v > u$ ise, u sözlükçe v'den azdır ya da v'nin sözlüğü u'dan büyüktür.
3) $u \leq v$ ya da $v \geq u$ ise, u sözlükçe v'den küçük ya da eşittir, ya da v sözlükçe u'dan büyük ya da eşittir.

Aynı alfabe üzerinde, sıralanmış sonlu ya da sonsuz herhangi iki x ve y dizisinin eşit olması için gerek ve yeter şart $|x| = |y|$ (x ve y herhangi iki kelime iken) ve $i = 1,...,|x|$ için (x sonlu ise) ya da i'nin tüm pozitif değerleri için $x[i] = y[i]$ olmasıdır.

x dizisinin y'den sözlükçe küçük olması için (benzer olarak y'nin x'den sözlükçe büyük olması için) gerek ve yeter şart; aşağıdaki koşulların doğru olmasıdır:

1) x, $y \in \{a,b\}^*$ ve $|x| < |y|$,
2) $x \in \{a,b\}^*$ ve $y \in \{a,b\}^\infty$,
3) $x, y \in \{a,b\}^*$ ve $|x| = |y|$ ve

$$\left(\exists\ i \in [1,|x|]\ (x[i] < y[i] \text{ ve } \forall\ j \in [1, i-1]\ x[j] = y[j])\right)$$

4) $x, y \in \{a,b\}^\infty$ ve

$$\left(\exists\ i \geq 1\ (x[i] < y[i] \text{ ve } \forall\ j \in [1, i-1]\ x[j] = y[j])\right).$$

$>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $=$ ifadeleri, sayı sistemindekine benzer olarak diziler arasındaki sözlüksel ilişki için kullanılır. $\{a,b\}^*$ kümesi üzerindeki sözlüksel sıralamanın başlangıç kısmında, $\{a,b\}$ alfabesi üzerindeki tüm olası kelimeler şöyledir:

$$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, ...$$

Birbirine bağlanma (birleşim), diziler üzerinde tanımlı olan ikili operasyondur. Sonlu x dizisi ve sonlu ya da sonsuz bir y dizisi verilsin. $u = x\ y$, ifadesine x ve y'nin birbirine bağlanması denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

a) Eğer y sonlu ise x ve y nin birleşimi $|u| = |x| + |y|$'dir ve tüm $i = 1..|x|$, $j = 1..|y|$ için $u[i] = x[i]$, $u[|x| + j] = y[j]$.

Örneğin; $x = aab$, $y = baab$, $u = aabbaab$ $(|u| = |x| + |y|)$

$u[3] = x[3] = b$ 'dir.
$u[3+2] = y[2] = a$ 'dır

b) u sonsuz ve $u[i] = x[i]$, tüm $i = 1..|x|$ ve $j \in [1, \infty)$ tamsayısı için $u[|x| + j] = y[j]$'dir.

Örneğin; $x = aab$, $y = baabbbbbb...$ ve $u = aabbaabbbbbbb...$

$u[3] = x[3] = b$ 'dir.
$u[3+9] = y[9] = b$ 'dir.

Birbirine bağlanma operasyonunun birim elemanı boş dizidir. Yani;

$$x\varepsilon = \varepsilon x = x$$

Örneğin $x = ab$ ise, $ab\varepsilon = \varepsilon ab = ab$ olur. Birbirine bağlanma işlemi değişme özelliğini sağlamaz. Örneğin; $x = a$, $y = ab$ olsun. Bu durumda; $xy = aab$, $yx = aba$ olur ki burada $xy \neq yx$. Yani değişme özelliği yoktur.

Belli y ve z dizileri için $x = yz$ ise, y'ye x'in öneki denir (z boştan farklı ise uygun önek denir). z'ye x'in soneki denir (y boştan farklı ise uygun sonek denir). Belli p ve q dizilimleri için, u sonlu ya da sonsuz olmak üzere $x = puq$ yazılımında u, x'in alt dizisi (çarpanı) olur. xu yazılımında u alt dizisine, x'in uygun alt dizisi denir. $x[i...j]$ notasyonu; x'in u alt dizisini, $u[1] = x[i],\ u[|u|] = x[j]$, şeklinde tanımlamak için kullanılır:

$x = abaababa,\ u = baba$ olsun. $u[1] = x[5] = b,\ u[|4|] = x[8] = a$'dır.

$x = aba$ dizisi için ε, a, ab ve aba x'in önekleridir. ε, a, ba, aba x'in sonekleridir. Her sonek ya da önek bir alt dizidir.

x kelimesinin tersi ya da ayna görüntüsü x^R ile gösterilir. $x^R = x_{|x|}x_{|x|-1}x_{|x|-2}...x_1$'dir ve x ile aynı uzunluktadır. Şayet $x = x^R$ oluyorsa x kelimesine palindrom denir. Boş küme palindromdur. Örneğin; $x = aba$ olsun. $x^R = aba$ olup $x = x^R$ olduğundan x palindrom kelimedir. $x = abab,\ x^R = baba$ olup, $x \neq x^R$ olduğundan, x palindrom kelime değildir.

$x \in \{a,b\}^*$ olmak üzere, x'in negatif görüntüsü ya da tümleyeni x^N ile gösterilir. x^N, x'deki a ve b harflerinin birbiriyle değişmesi sonucunda oluşur ve x kelimesiyle eşit uzunluktadır. Örneğin; $x = abaababa$ iken, $x^N = babbabab$ olur.

$k > 1$ ve $k \in Z$ olmak üzere u^k, u'nun kendini k defa birbirine bağlamasıdır. Örneğin $u = ab$ ve k=5 olsun. Bu durumda, $u^k = (ab)^5 = abababababab$ olur. $x = u^k$'ya tekrarlama ya da k. mertebeden periyodiktir denir. Burada $k = 1$ olması durumunda u'nun kendisi tekrarlanma olmadıkça u^1'e tekrarlanma denilemez. Burada k sayısı 1'den büyük rasyonel sayı da olabilir: $k = r\frac{p}{q}$, $r, p, q \in Z^+, p < q, r \geq 1$ ve $q' = |u|$ ve pozitif tamsayı iken $p/q = p'/q'$ dır, burada

$q' = |u|$ ve p' pozitif tamsayıdır. Bu durumda $x = u^{r\frac{p}{q}} = u^{r\frac{p'}{q'}}$, $vu[1...p']$'ye eşittir. Burada v, u kelimesinin kendisini r defa birbirine bağlamasıyla oluşmuştur.

u'ya üreteç, $|u|$'ya da periyot denir. Tekrar içermeyen sonlu ya da sonsuz diziye ilkel dizi denir. Üretecin kendisinin ilkel olduğu tekrara ilkel tekrar denir.

Boştan farklı y kelimesi ve her x kelimesi için xy^{∞} formundaki kelimeye sonunda periyodik denir. Yani kelimenin periyodik soneki vardır. Örneğin, *baaaa...* periyodik değildir. Kendini sonsuz kere tekrar eden soneki olduğundan, sonunda periyodiktir[3].

Örnek1.1: *abbbb...* ilkel dizidir. u^k biçiminde yazılamadığından periyodik değildir. Kendini sonsuz kere tekrar eden soneki olduğundan, sonunda periyodiktir.

Örnek 1.2: $aabaabaabaab = (aab)^4$ 4. mertebeden ilkel tekrardır. Üreteci *aab'* dir. Periyodu 3'tür.

Örnek 1.3: $aabaabaa = (aab)^{\frac{8}{3}}$, $8/3$ mertebeden ilkel tekrardır. Periyodu 3'tür. Üreteci *aab'*dir.

BÖLÜM 2. STURMIAN KELİMELER

2.1. Giriş

Tanım 2.1.1: $N_+ = \{1,2,3,...\}$ ve $A = \{a, b\}$ olmak üzere,

$$x : N_+ \longrightarrow A$$

biçiminde tanımlanan, yani her bir pozitif tamsayıyı a ya da b harfine dönüştüren dönüşüme sonsuz kelime denir[8].

Tanım 2.1.2: $f : A^* \longrightarrow A^*$ bir morfizma yani yapı koruyan dönüşüm ve $a \to f(a)$ olsun. $f(a)$, a harfi ile başlar. $f^{n+1}(a) = f^n(a) f(a)$ olup $f^{n+1}(a)$, $f^n(a)$ ile başlar. $\{f^n(a) \mid n \geq 0\}$ kümesi sonsuzsa, her bir $f^n(a)$ x'in öneki olacak şekilde bir tek sonsuz x kelimesi vardır. x kelimesine, f iterasyonu tarafından üretilmiştir denir. Sonsuz x kelimesi morfizmanın tekrarıyla üretilmişse, morfiktir. x'i üreten morfizmaya üreteç denir[8].

2.2. Sonsuz Sturmian Kelimeler

Bu kısımda, Sturmian kelimelerin üç denk tanımı verilecektir. Bunlar;

i) Minimal karmaşıklıklı aperiyodik kelimeler
ii) Dengeli kelimeler
iii) Ayrılmış düz doğrular

şeklindedir.

Tanım 2.2.1: Sonsuz bir x kelimesinin karmaşıklık fonksiyonu P_x ile gösterilir ve $P_x(n)$; x'in, n uzunluğundaki çarpanlarının sayısı olarak tanımlanır.

Örnek 2.2.1: Fibonacci dizisinin karmaşıklık fonksiyonu P_F olsun. Fibonacci dizisinin n uzunluklu çarpanları ve bu çarpanların sayıları;

$n=0$ ise, 0 uzunluklu çarpan ε olup, $P_F(0)=1$,
$n=1$ ise, 1 uzunluklu çarpanlar a,b olup, $P_F(1)=2$,
$n=2$ ise, 2 uzunluklu çarpanlar aa,ab,ba olup, $P_F(2)=3$,
$n=3$ ise, 3 uzunluklu çarpanlar; aab,aba,baa,bab olup, $P_F(3)=4$,

şeklindedir.

x sonsuz kelimesi, $n\geq 0$ için, $P_x(n) \leq n$ iken, x sonunda periyodik olur. Böylece periyodik olmayan herhangi bir x kelimesi, her tamsayı için $P_x(n)\geq n+1$'i sağlayan bir karmaşıklık fonksiyonuna sahiptir. Bu Sturmian kelimenin ilk tanımına yol açar.

Tanım 2.2.2: Her n sayısı için,

$$P_x(n)=n+1$$

oluyorsa, x kelimesine Sturmian kelime denir. Bu eşitlikte $n=1$ alınırsa $P_x(1)=2$ olup Sturmian kelime, bu şartı sağlayan ikili dizidir. Sturmian kelime iki harf üzerindedir. Bu tanımdan kastedilen aa ve bb alt dizilerinden birinin var olma durumudur. Yani, a ya da b den biri, Sturmian dizide tekrar edebilir. Bu tez boyunca genelliği bozmadan b'den ziyade a tekrar eden harf olarak alınacaktır.

Örnek 2.2.2: Fibonacci dizisi, Sturmian kelime için en iyi bilinen örnektir.

$$h(a)=ab$$
$$h(b)=a$$

morfizması, Fibonacci dizisini üretir. Bu morfizma, a harfi üzerine sonsuz kere uygulandığında Fibonacci dizisi meydana gelir[4]:

$$h^2(a) = h(h(a)) = h(ab) = aba$$
$$h^3(a) = h(h(h(a))) = h(h(ab)) = h(aba) = abaab$$
$$h^4(a) = h(h(h(h(a)))) = h(h(h(ab))) = h(h(aba)) = h(abaab) = abaababa$$
$$\vdots$$

Aşağıdaki iterasyon da, Fibonacci dizisini üretmenin bir diğer yoludur. Her bir basamakta, bir Fibonacci kelimesi oluşur:

$$F_0 = b$$
$$F_1 = a$$
$$F_i = F_{i-1}F_{i-2}$$

Buna göre;

$$F_0 = b$$
$$F_1 = a$$
$$F_2 = ab$$
$$F_3 = aba$$
$$F_4 = abaab$$
$$F_5 = abaababa$$
$$F_6 = abaababaabaab$$
……

yazılır[3].

Örnek 2.2.3: Aşağıdaki tabloda Fibonacci dizisi için, minimum karmaşıklık özelliği verilmiştir. $\{a,b\}^*$ içindeki n uzunluklu olası 2^n kelime dışında, aralarından sadece $n+1$ tanesi Fibonacci dizisinin alt dizisidir. Fakat dizi hala sonunda periyodik değildir.

Tablo 2.1. Fibonacci dizisinin alt dizileri ve minimum karamaşıklık özelliği. F'nin n uzunluğunda verilen alt dizilerinin sayısı n+1'dir.

n	A^*'daki n uzunluklu kelimeler	F'nin n uzunluklu alt dizileri	$P_F(n)$
0	ε	ε	1
1	a, b	a, b	2
2	aa, ab, ba, bb	aa, ab, ba	3
3	$aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$	aab, aba, baa, bab	4
4	$aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba,$ $abbbbaaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab,$ $bbba, bbbb$	$aaba, abaa, abab, baab,$ $baba$	5
…	…	…	…

Tanım 2.2.3: Sonlu ya da sonsuz w kelimesi için, $w \in A^{\infty}$ olsun. $Sub(w)$, w'nın sonlu çarpanlarının kümesini gösterir [8].

Tanım 2.2.4: Aynı uzunluktaki u, v kelime çifti için,

$$\delta(u,v) = \left| |u|_a - |v|_a \right| = \left| |u|_b - |v|_b \right|$$

eşitliği, bu iki kelimenin dengesi olarak tanımlanır [8].(Burada $|w|_a$, w kelimesindeki a harflerinin sayısıdır.)

Tanım 2.2.5: $|u| = |v|$ olmak üzere, herhangi $u, v \in Sub(w)$ için,

$$\delta(u,v) \leq 1$$

oluyorsa, $w \in A^{\infty}$ kelimesine dengelidir denir. Böylece a ve b gibi iki harf üzerinde tanımlı dengeli bir kelimede harflerin oluşumu düzgün dağılır. Özel olarak ardı ardına gelen iki a arasındaki b'lerin sayısı sadece iki değer alabilir.

Sturmian diziler, düzlemdeki düz doğrularla da yakından alakalıdırlar. Bu özelliğe, mekanik özellik denir. Bu özellik şöyle açıklanabilir: $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere $\alpha, \rho \in R$ olsun.

$$a_n = \begin{cases} a; \ \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor \\ b; \ \textit{aksi taktirde.} \end{cases}$$

ve

$$b_n = \begin{cases} a; \ \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil = \lceil \alpha n + \rho \rceil \\ b; \ \textit{aksi taktirde.} \end{cases}$$

eşitlikleri tarafından tanımlanan,

$$s_{\alpha,\rho} = a_1 ... a_n ..., \qquad s'_{\alpha,\rho} = b_1 ... b_n ...$$

sonsuz kelimelerini ele alalım. Bunların ikisi de, ayrık düz doğrulardır. $y = \alpha x + \rho$ doğrusuna bakalım. Bu doğruyla ilgili iki tam nokta kümesi vardır. Bunlar: $L_n = (n, \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)$ ve $U_n = (n, \lceil \alpha n + \rho \rceil)$'dır. Doğrunun kodlanması şudur: $[L_n, L_{n+1}]$ (ya da $[U_n, U_{n+1}]$) doğru parçası yatay iken a, diğer hallerde b ile kodlanır. $\alpha < 1$ ise, $\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ açılımı 0 ya da 1 değerlerini alır.

$$f_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$$

alınırsa, $f_{\alpha,\rho}(n) = 0$ ise; $s_n = a$

$f_{\alpha,\rho}(n) = 1$ ise; $s_n = b$

olur. $\alpha > 1$ olursa, $\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ açılımı, sadece iki değer alır. $\alpha > 1$ için iki formülasyonla karşılaşılır. Bunlardan biri 0 ya da 1 değerleriyle $\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$ fonksiyonudur. Diğeri ise k ve $k+1$ fonksiyonun iki

değeri olmak üzere $\{k, k+1\}$ alfabesi üzerindeki kelimelerdir[8].

$0 < \alpha < 1$ durumuna geri dönelim. $s_{\alpha,\rho}$ ve $s'_{\alpha,\rho}$ sonsuz kelimelerinin, bazı n' ler için, $\alpha n + \rho$ tamsayı olması durumu hariç, eşit oldukları görülür. Eğer bu olursa,

$$a_{n-1}a_n = ba$$
$$b_{n-1}b_n = ab$$

olur. Bu $n = 0$ için özel durumunda gerçekleşir. Burada $\rho = 0$ dır. Aşağıdaki teorem üç temel tanımı verir:

Teorem 2.2.1: x sonsuz bir kelime olsun. Aşağıdaki durumlar denktir;

i) x Sturmian kelimedir.
ii) x dengelidir ve sonunda periyodik değildir.
iii) α irrasyonel sayı $(0 < \alpha < 1)$ ve ρ reel sayı olmak üzere $x = s_{\alpha,\rho}$ ya da $x = s'_{\alpha,\rho}$ olur[8].

Örnek 2.2.4: $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$ olsun. $s_{\alpha,\rho}$ ve $s'_{\alpha,\rho}$ fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$f_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(1) = \left\lfloor 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right\rfloor - \left\lfloor 1\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right\rfloor = 2 - 1 = 1 \Rightarrow s_1 = b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(2) = \left\lfloor 3\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right\rfloor - \left\lfloor 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right\rfloor = 3 - 2 = 1 \Rightarrow s_2 = b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(3) = \left\lfloor 4\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right\rfloor - \left\lfloor 3\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right\rfloor = 3 - 3 = 0 \Rightarrow s_3 = a$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(4) = \left\lfloor 5\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right\rfloor - \left\lfloor 4\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right\rfloor = 4 - 3 = 1 \Rightarrow s_4 = b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(5)=\left\lfloor 6\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor-\left\lfloor 5\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor=5-4=1\ \Rightarrow s_5=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(6)=\left\lfloor 7\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor-\left\lfloor 6\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor=5-5=0\ \Rightarrow s_6=a$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(7)=\left\lfloor 8\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor-\left\lfloor 7\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor=6-5=1\ \Rightarrow s_7=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(8)=\left\lfloor 9\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor-\left\lfloor 8\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor=7-6=1\ \Rightarrow s_8=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(9)=\left\lfloor 10\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor-\left\lfloor 9\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rfloor=8-7=1\ \Rightarrow s_9=b$$

$$s_{\alpha,\rho}=bbabbabbb...$$

$$f_{\alpha,\rho}(n)=\lceil\alpha(n+1)+\rho\rceil-\lceil\alpha n+\rho\rceil$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(1)=\left\lceil 2\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 1\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=3-2=1\ \Rightarrow s_1=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(2)=\left\lceil 3\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 2\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=4-3=1\ \Rightarrow s_2=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(3)=\left\lceil 4\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 3\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=4-4=0\ \Rightarrow s_3=a$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(4)=\left\lceil 5\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 4\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=5-4=1\ \Rightarrow s_4=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(5)=\left\lceil 6\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 5\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=6-5=1\ \Rightarrow s_5=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(6)=\left\lceil 7\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 6\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=6-6=0\ \Rightarrow s_6=a$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(7)=\left\lceil 8\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 7\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=7-6=1\ \Rightarrow s_7=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(8)=\left\lceil 9\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 8\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=8-7=1 \Rightarrow s_8=b$$

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}},1}(9)=\left\lceil 10\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil-\left\lceil 9\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\rceil=9-8=1 \Rightarrow s_9=b$$

$$s'_{\alpha,\rho}=bbabbabbb...$$

$s_{\alpha,\rho}=s'_{\alpha,\rho}$ elde edilir.

Örnek 2.2.5: $y=\sqrt{2}x+1$ olsun. Burada $\alpha>1$'dir. Bu durumda; $f_{\alpha,\rho}(n)=\lfloor\alpha(n+1)+\rho\rfloor-\lfloor\alpha n+\rho\rfloor-\lfloor\alpha\rfloor$ alınırsa;

$$f_{\sqrt{2},1}(1)=\lfloor 2\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=3-2-1=0$$
$$f_{\sqrt{2},1}(2)=\lfloor 3\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor 2\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=5-3-1=1$$
$$f_{\sqrt{2},1}(3)=\lfloor 4\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor 3\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=6-5-1=0$$
$$f_{\sqrt{2},1}(4)=\lfloor 5\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor 4\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=8-6-1=1$$
$$f_{\sqrt{2},1}(5)=\lfloor 6\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor 5\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=9-8-1=0$$
$$f_{\sqrt{2},1}(6)=\lfloor 7\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor 6\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=10-9-1=0$$
$$f_{\sqrt{2},1}(7)=\lfloor 8\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor 7\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=12-10-1=1$$
$$f_{\sqrt{2},1}(8)=\lfloor 9\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor 8\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=13-12-1=0$$
$$f_{\sqrt{2},1}(9)=\lfloor 10\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor 9\sqrt{2}+1\rfloor-\lfloor\sqrt{2}\rfloor=15-13-1=1$$

Tanım 2.2.6: Belli irrasyonel α $(0<\alpha<1)$ sayıları için $x=s_{\alpha,0}$ ise, yani $\rho=0$ ise x Sturmian kelimesi karakteristiktir. O halde $s_{\alpha,0}=s'_{\alpha,0}$'dır. Bu durumda $c_\alpha=s_{\alpha,0}$ olarak yazılır. α sayısı, x'in eğimidir ve x, α sayısı için karakteristiktir. Tanımdan, eğim, $|u|_b/|u|$ bölümünün limitidir. u, x'in öneki üzerinde sıralanır ve $|u|_b$, u'daki b'lerin sayısıdır.

Bazen karakteristik kelimelerin değişimleri ortaya çıkar. s karakteristik kelime iken as ve bs kelimelerine Christoffel kelimeleri denir. Christoffel kelimeler indis 0 ile başladığında ayrık düz doğrulardır. En iyi bilinen karakteristik kelime ise

$$f = abaababaabaab...$$

şeklindeki Fibonacci kelimedir ve;

$$a \longrightarrow ab$$
$$b \longrightarrow a$$

morfizması tarafından üretilmiştir. Bu dizinin eğimi $1/\phi^2$ olup, ϕ altın orandır. Önceki teoremden s Sturmian kelimesi için as ya da bs kelimelerinden birinin Sturmian kelime olduğu görülür.

Karakteristik kelimeler genellikle şu şekilde tanımlanır:

Önerme 2.2.1: s Sturmian kelimesinin karakteristik olması için gerek ve yeter şart as ve bs'nin Sturmian olmasıdır [8].

Örneğin; $s = abaabaab$ kelimesi için; $as = aabaabaab$; $bs = babaabaab$ alınırsa, bunlar sonunda periyodik değildirler.

$$\left| |as|_a - |bs|_a \right| = 1 \leq 1, \quad \left| |as|_b - |bs|_b \right| = 1 \leq 1$$

olup, dengelidirler. Yani as ve bs kelimeleri Sturmian kelime olurlar. Buna göre, $s = abaabaab$ kelimesi karakteristiktir.

Eğer s karakteristik ise, as ve bs Christoffel kelimeleri olur ve bas ve abs Sturmian olur. Karakteristik kelimeler genelde homojen spektra ve Sturmian kelimeler de inhomojen spektra olarak adlandırılırlar.

Tanım 2.2.7: $c_\beta = c_1 c_2 c_3 ...$ Sturmian dizisine kesilmiş dizi denir ve c_β ile gösterilir.

$$c_i = \begin{cases} \text{ışın dikey çizgide kesiliyorsa}; & a \\ \text{ışın yatay çizgide kesiliyorsa}; & b \end{cases}$$

değerlerini alır.

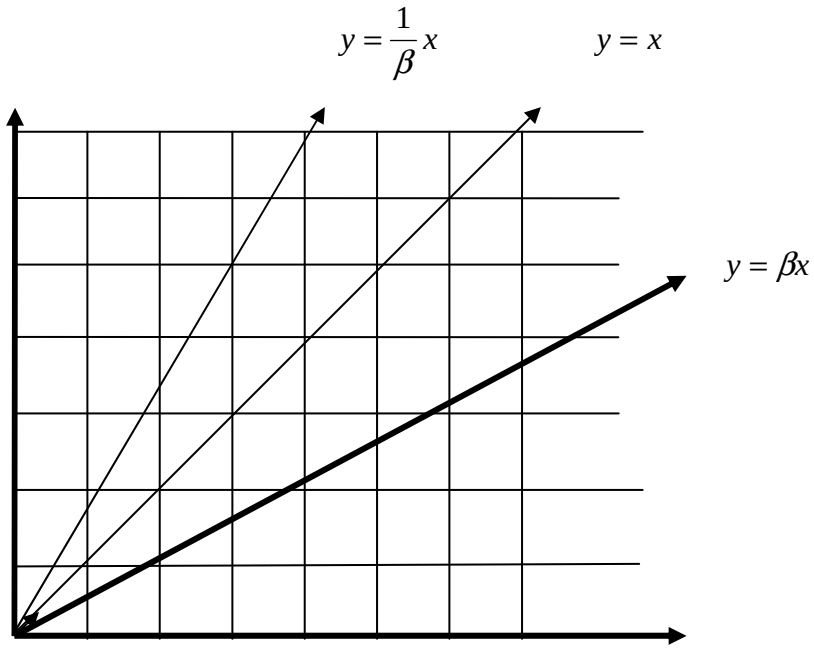
Kesilmiş diziyi elde etmek için birinci bölgede tamsayılara karşılık gelen noktalar boyunca dik kesişen yatay ve dikey doğruların oluşturduğu yatay ve dikey hatlar sistemi ele alınır. β pozitif irrasyonel iken, $y = \beta x$ doğrusu; dikey çizgileri kesiyorsa a ile, yatay çizgileri kesiyorsa b ile eşlenir. Dizinin sınıflandırılması orijinden başlayarak yapılır. $y = \beta x$ ışını,

$$c_\beta = c_1 c_2 c_3 ...$$

Sturmian dizisini verir. $y = \beta x$ ışını β'nın irrasyonel değerleri için asla köşede kesişmez[3]. Aşağıdaki önerme karakteristik kelimelerle kesilmiş dizi arasındaki ilişkiyi gösterir.

Önerme 2.2.2: α irrasyonel ve $0 < \alpha < 1$ olsun. $\beta = \alpha/(1-\alpha)$ iken $c_\beta = s_{\beta/\beta+1}$ (ya da $s_\alpha = c_{\alpha/(1-\alpha)}$) olur[3].

Doğrunun eğimi irrasyonel sonuçlar vermeye başladığında dizi periyodik bir soneke sahip olamaz. Ayrıca c_β içinde a'nın tekrar harfi olması için gerek ve yeter şart $\beta > 1$ olmamasıdır (yani α (0,0.5) değer aralığında ise) yukarıdaki şartların toplamından, açı 45° den daha büyük iken yatay çizgiler dikey çizgilerden daha fazla kesilir[3].



Şekil 2.1 Kesilmiş dizinin negatif görüntüsü c_β ve $c_{\beta'}$ birbirinin negatif görüntüsüdür($\beta = 1/\beta'$)

Kesilmiş dizilere tekrar bakılırsa, yatay ve dikey doğruların ayırdığı parçaların değişmesi hariç, 1. çeyrekte aynı rotada gidildiğinde $y = x$ ekseni civarında simetrik oldukları görülür. Bunun anlamı, eğimleri biri diğerinin tersi olan doğru ikililerinin birbirinin negatif görüntüsü olmasıdır. Yani karakteristik s_α ve $s_{1-\alpha}$ dizileri birbirlerinin negatif görüntüleridir ($s_\alpha = c_{\beta=\alpha/(1-\alpha)}$ ve $s_{1-\alpha} = c_{\beta'=(1-\alpha/\alpha)}$ önerme 2.2.2 de yerine koyulursa, her zaman $\beta\beta' = 1$ i verir)[3].

Örnek 2.2.6: α irrasyonel sayı $(0 < \alpha < 1)$ ve $\alpha = 1/\left(\sqrt{3}+1\right)$ olsun. Bu takdirde

$$\beta = \alpha/(1-\alpha)$$

$$\beta = \frac{1/\left(\sqrt{3}+1\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$\beta = 1/\sqrt{3}$$

elde edilir.

$$s_{(1/(\sqrt{3}+1))} = c_{1/\sqrt{3}}$$

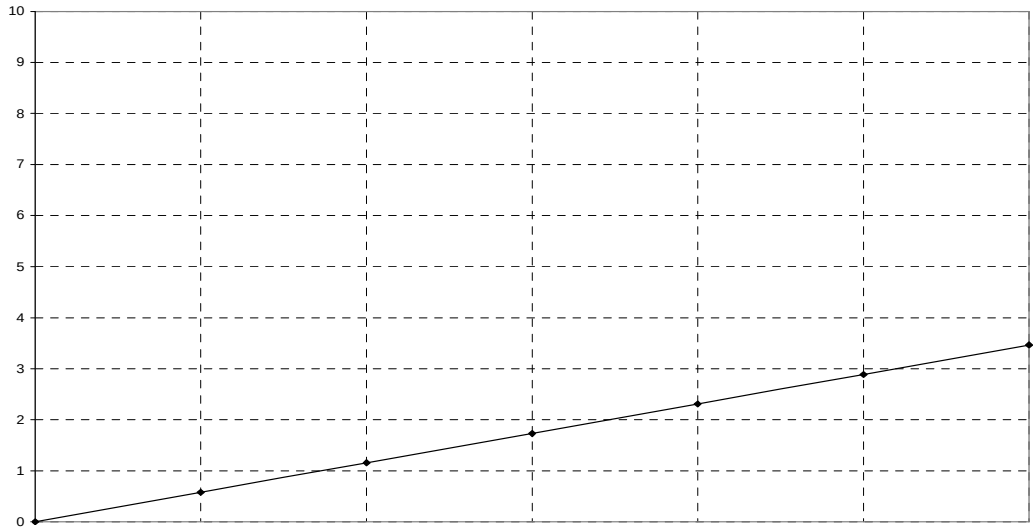
olur.

$\alpha < 1$ iken $\lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ açılımı 0 ya da 1 değerlerini alır:

$$f_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor \qquad (\rho = 0)$$

$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(1) = \lfloor 2.(1/(\sqrt{3}+1)) \rfloor - \lfloor 1.(1/\sqrt{3}+1) \rfloor = 0 - 0 = 0$$
$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(2) = \lfloor 3.(1/(\sqrt{3}+1)) \rfloor - \lfloor 2.(1/\sqrt{3}+1) \rfloor = 1 - 0 = 1$$
$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(3) = \lfloor 4.(1/(\sqrt{3}+1)) \rfloor - \lfloor 3.(1/\sqrt{3}+1) \rfloor = 1 - 1 = 0$$
$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(4) = \lfloor 5.(1/(\sqrt{3}+1)) \rfloor - \lfloor 4.(1/\sqrt{3}+1) \rfloor = 1 - 1 = 0$$
$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(5) = \lfloor 6.(1/(\sqrt{3}+1)) \rfloor - \lfloor 5.(1/\sqrt{3}+1) \rfloor = 2 - 1 = 1$$
$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(6) = \lfloor 7.(1/(\sqrt{3}+1)) \rfloor - \lfloor 6.(1/\sqrt{3}+1) \rfloor = 2 - 2 = 0$$

$$s_1 = a$$
$$s_2 = b$$
$$s_3 = a$$
$$s_4 = a$$
$$s_5 = b$$
$$s_6 = a$$



Şekil 2.2. $y = 1/\sqrt{3}x$ 'in grafiği

$$c_1 = a$$
$$c_2 = b$$
$$c_3 = a$$
$$c_4 = a$$
$$c_5 = b$$
$$c_6 = a$$
$$\vdots$$

$$s_{(1/(\sqrt{3}+1))} = c_{1/\sqrt{3}}$$

Örnek 2.2.7: Şimdi de $c_\beta = s_{\beta\beta+1}$ olup olmadığına bakalım. ($\beta = \sqrt{3}$)

$$c_{\sqrt{3}} = s_{\sqrt{3}/\sqrt{3}+1}$$

$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(1) = \lfloor 2\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1) \rfloor - \lfloor 1\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1) \rfloor = 1 - 0 = 1$$
$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(2) = \lfloor 3\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1) \rfloor - \lfloor 2\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1) \rfloor = 1 - 1 = 0$$
$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(3) = \lfloor 4\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1) \rfloor - \lfloor 3\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1) \rfloor = 2 - 1 = 1$$
$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(4) = \lfloor 5\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1) \rfloor - \lfloor 4\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1) \rfloor = 3 - 2 = 1$$

$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(5)=\lfloor 6\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 5\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor=3-3=0$$

$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(6)=\lfloor 7\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 6\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor=4-3=1$$

$c_1 = b$ $\quad$ $s_1 = b$

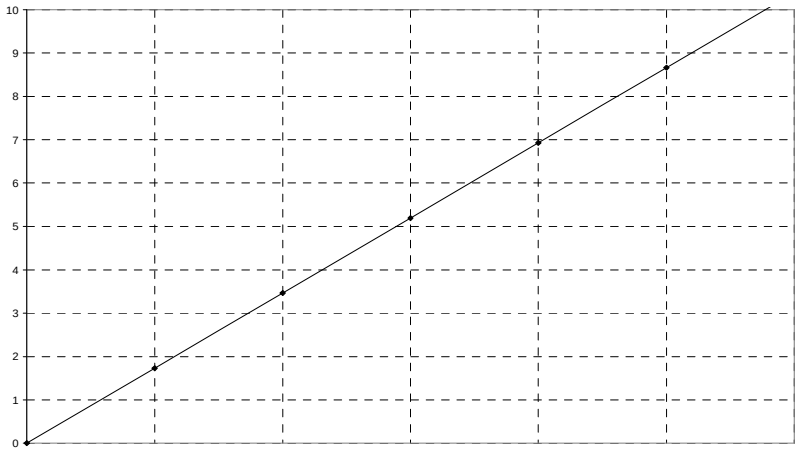
$c_2 = a$ $\quad$ $s_2 = a$

$c_3 = b$ $\quad$ $s_3 = b$

$c_4 = b$ $\quad$ $s_4 = b$

$c_5 = a$ $\quad$ $s_5 = a$

$c_6 = b$ $\quad$ $s_6 = b$



Şekil 2.3. $y=\sqrt{3}x$ 'in grafiği

$c_{\sqrt{3}} = s_{\sqrt{3}/\sqrt{3}+1}$ eşitliği sağlanmış oldu.

Böylece, karakteristik s_α ve $s_{1-\alpha}$'nın birbirinin negatif görüntüsü olduğu görülür.

Örnek 2.2.8: $\alpha = 1/\left(\sqrt{3}+1\right)$ ve $\alpha/(1-\alpha)=1/\sqrt{3}=\beta$ olmak üzere s_α ve $s_{1-\alpha}$ değerleri aşağıdaki gibidir.

$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(1)=\lfloor 2.1/\left(\sqrt{3}+1\right)\rfloor-\lfloor 1.1/\left(\sqrt{3}+1\right)\rfloor=0-0=0\Rightarrow s_1=a$$

$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(2)=\lfloor 3.1/\left(\sqrt{3}+1\right)\rfloor-\lfloor 2.1/\left(\sqrt{3}+1\right)\rfloor=1-0=1\Rightarrow s_2=b$$

$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(3)=\lfloor 4.1/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 3.1/(\sqrt{3}+1)\rfloor=1-1=0\Rightarrow s_3=a$$

$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(4)=\lfloor 5.1/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 4.1/(\sqrt{3}+1)\rfloor=1-1=0\Rightarrow s_4=a$$

$$f_{1/(\sqrt{3}+1)}(5)=\lfloor 6.1/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 5.1/(\sqrt{3}+1)\rfloor=2-1=1\Rightarrow s_5=b$$

…

$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(1)=\lfloor 2.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 1.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor=1-0=1\Rightarrow s_1=b$$

$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(2)=\lfloor 3.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 2.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor=1-1=0\Rightarrow s_2=a$$

$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(3)=\lfloor 4.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 3.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor=2-1=1\Rightarrow s_3=b$$

$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(4)=\lfloor 5.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 4.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor=3-2=1\Rightarrow s_4=b$$

$$f_{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}(5)=\lfloor 6.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor-\lfloor 5.\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)\rfloor=3-3=0\Rightarrow s_5=a$$

Böylece s_α ve $s_{1-\alpha}$ 'nın birbirinin negatif görüntüsü olduğu görülür.

Örnek 2.2.9: c_β kesilmiş dizisi $\beta=(\sqrt{5}-1)/2$ iken Fibonacci dizisidir. $s_{\beta/\beta+1}=c_\beta$ da $\beta=(\sqrt{5}-1)/2$ yi yerine koyarsak $s_\alpha=s_{(3-\sqrt{5})/2}$ yi yani Fibonacci dizisinin karakteristik dizisini verir.

$\beta=(\sqrt{5}-1)/2$ iken $s_{(3-\sqrt{5})/2}=c_{(\sqrt{5}-1)/2}$'dir.

$$f_{(3-\sqrt{5})/2}(1)=\lfloor 2.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor-\lfloor 1.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor=0-0=0\Rightarrow s_1=a$$

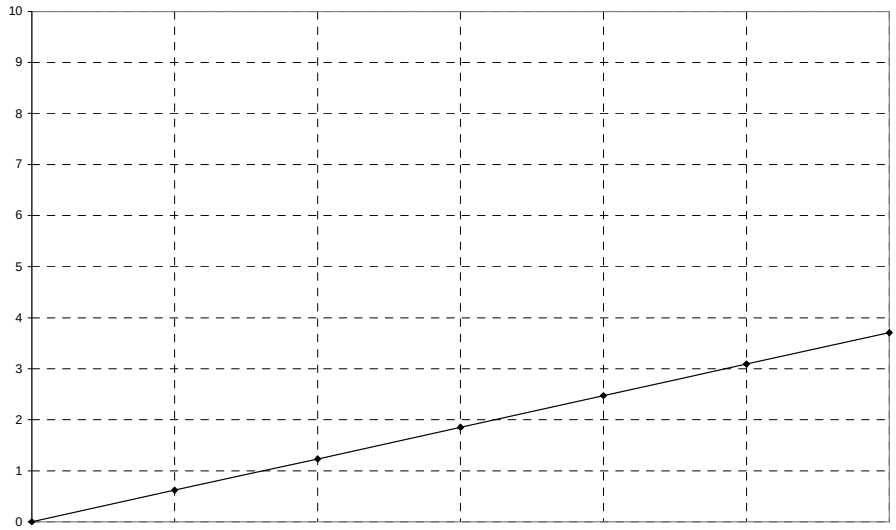
$$f_{(3-\sqrt{5})/2}(2)=\lfloor 3.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor-\lfloor 2.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor=1-0=1\Rightarrow s_2=b$$

$$f_{(3-\sqrt{5})/2}(3)=\lfloor 4.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor-\lfloor 3.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor=1-1=0\Rightarrow s_3=a$$

$$f_{3-\sqrt{5}/2}(4)=\lfloor 5.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor-\lfloor 4.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor=1-1=0\Rightarrow s_4=a$$

$$f_{3-\sqrt{5}/2}(5)=\lfloor 6.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor-\lfloor 5.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor=2-1=1\Rightarrow s_5=b$$

$$f_{3-\sqrt{5}/2}(6)=\lfloor 7.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor-\lfloor 6.(3-\sqrt{5}/2)\rfloor=2-2=0\Rightarrow s_6=a$$



Şekil 2.4. $y = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) x$ 'in grafiği

$$c_{(\sqrt{5}-1)/2}(1) = a$$

$$c_{(\sqrt{5}-1)/2}(2) = b$$

$$c_{(\sqrt{5}-1)/2}(3) = a$$

$$c_{(\sqrt{5}-1)/2}(4) = a$$

$$c_{(\sqrt{5}-1)/2}(5) = b$$

$$c_{(\sqrt{5}-1)/2}(6) = a$$

$s_\alpha = s_{(3-\sqrt{5})/2}$ Fibonacci dizisinin karakteristik dizisidir.

Negatif görüntülere bakalım. $c_{1/\beta} = s_{1/\beta+1}$ dizisi β altın oran iken, negatif görüntüyü verir. Kesilmiş dizi, (β) eğim altın oranın tersi iken Fibonacci dizisinin negatif görüntüsünü verir ki bu da $\alpha = 2/(\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5}-1)/2$ iken s_α karakteristik dizisine eşittir. Yani;

$$c_{(\sqrt{5}+1)/2} = s_{(\sqrt{5}-1)/2}$$

$$f_{\sqrt{5}-1/2}(1)=\lfloor 2.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor-\lfloor 1.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor=1-0=1\Rightarrow s_{\sqrt{5}-1/2}(1)=b$$

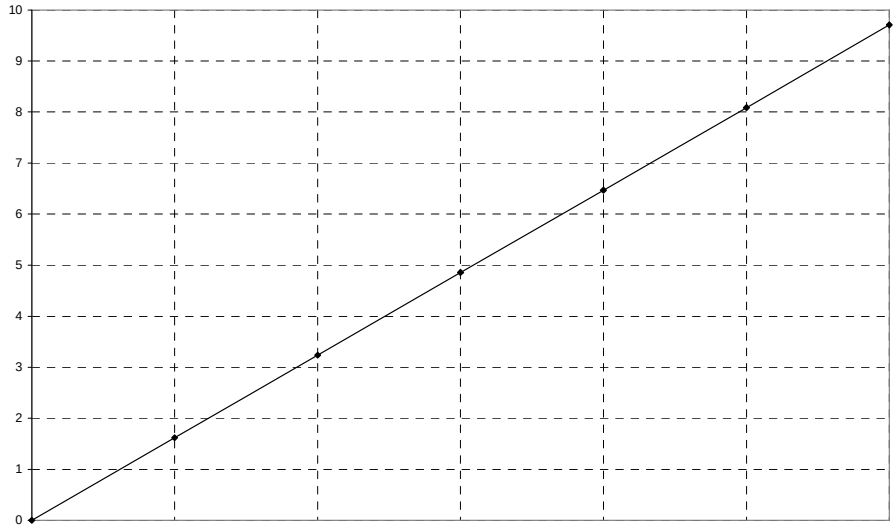
$$f_{\sqrt{5}-1/2}(2)=\lfloor 3.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor-\lfloor 2.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor=1-1=0\Rightarrow s_{\sqrt{5}-1/2}(2)=a$$

$$f_{\sqrt{5}-1/2}(3)=\lfloor 4.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor-\lfloor 3.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor=2-1=1\Rightarrow s_{\sqrt{5}-1/2}(3)=b$$

$$f_{\sqrt{5}-1/2}(4)=\lfloor 5.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor-\lfloor 4.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor=3-2=1\Rightarrow s_{\sqrt{5}-1/2}(4)=b$$

$$f_{\sqrt{5}-1/2}(5)=\lfloor 6.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor-\lfloor 5.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor=3-3=0\Rightarrow s_{\sqrt{5}-1/2}(5)=a$$

$$f_{\sqrt{5}-1/2}(6)=\lfloor 7.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor-\lfloor 6.(\sqrt{5}-1/2)\rfloor=4-3=1\Rightarrow s_{\sqrt{5}-1/2}(6)=b$$



Şekil 2.5. $y=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)x$ ' in grafiği

$$c_{\sqrt{5}+1/2}(1)=b$$

$$c_{\sqrt{5}+1/2}(2)=a$$

$$c_{\sqrt{5}+1/2}(3)=b$$

$$c_{\sqrt{5}+1/2}(4)=b$$

$$c_{\sqrt{5}+1/2}(5)=a$$

$$c_{\sqrt{5}+1/2}(6)=b$$

…

$\beta = \sqrt{5}+1/2$ iken c_β ya da $\alpha = \sqrt{5}-1/2$ Fibonacci dizisinin negatif görüntüsünü verir. ($babbab...$) α Altın oran iken s_α ve c_α birbirlerinin negatif görüntüsüdür. Bu yüzden izomorfiktirler. Yani negatif görüntü olma durumu, izomorfizmadır.

2.3. Sturmian Kelimelerin Alt Kelimeleri

Sturmian kelimeler ve dinamik sistemler arasındaki ilişki açısından, Sturmian kelimelerin alt kelimeleri önemlidir. Dinamik sistem, kaydırma operatörü (ilk harfin yerini değiştiren operatör) altında, her biri kapalı olan sonsuz kelimelerin kümesidir ve topolojik olarak kapalıdır (topolojide uzun bir ortak öneki paylaşan iki kelimeye kapalıdır denir) x ve y sonsuz kelimeleri ancak ve ancak aşağıdaki gibi ise aynı dinamik sistemi üretir:

$$sub(x) = sub(y).$$

Önerme 2.3.1: Sturmian kelimelerin dinamik sistemleri minimaldir$[8]$.

Bir sistem tam olarak başka bir sistemi içermiyorsa minimaldir**.** Minimal sistemlerin ilginç bir kombinatoryel karakterizasyonu vardır; minimal sistemler kesinlikle düzgün olarak tekrar eden kelimeler tarafından üretilmişlerdir. Yani x sonsuz kelimeleri şöyledir; x'in N uzunluğundaki herhangi bir alt kümesi x'in n uzunluğundaki tüm alt kelimelerini kapsayacak şekilde bir $N > 0$ tamsayısı vardır.

Sturmian kelimelerdeki alt kelimelerinin kümeleri, sadece eğime bağlıdır.

Önerme 2.3.2: s ve t Sturmian kelime olsunlar.

i) s ve t aynı eğime sahipse, $sub(s) = sub(t)$ olur.
ii) s ve t farklı eğime sahipse, $sub(s) \cap sub(t)$ sonludur $[7]$.

Özellikle herhangi bir ρ için $sub(s_{\alpha,\rho}) = sub(c_\alpha)$ dır. s herhangi bir Sturmian kelime iken n uzunluklu tam olarak $n+1$ alt kelime vardır ki; her bir n için, n uzunluklu alt kelimelerin biri $n+1$ uzunluklu alt kelimelerin içine iki yolla genişletilebilir. w kelimesine, eğer wa ve $wb \in sub(s)$ ise, s için özel kelimedir denir. Sturmian kelime içinde her n için n uzunluklu kesinlikle bir tek özel kelime vardır. Özel kelimeler F. Mignosi tarafından tanımlanmıştır [7].

Örnek 2.3.1: Fibonacci dizisi için özel kelimeleri bulalım.

Tablo 2.2. Fibonacci dizisinin özel kelimeleri ve alt dizileri

n	Alt diziler	Özel Kelime
0	ε	ε
1	a, b	a
2	aa, ab, ba	ba
3	aab, aba, baa, bab	aba
4	$aaba, abaa, abab, baab, baba$	$aaba$
5	$aabaa, aabab, abaab, ababa, baaba, babaa$	$baaba$
6	$aabaab, aababa, abaaba, ababaa, baabaa, baabab, babaab$	$abaaba$
…		…

Önerme 2.2.3: $s_{\alpha,\rho}$ Sturmian kelimesinin özel alt kelimeleri, tam olarak karakteristik $c_\alpha = s_{\alpha,0}$ kelimesinin öneklerinin tersidir [8].

Örnek 2.3.2: Karakteristik Fibonacci dizisinin öneklerini ve özel kelimelerini bulalım.

abaababaabaab....

Karakteristik Fibonacci dizisi idi.

$n=1$ için özel kelime 1 uzunluğundaki önek a'nın tersi a'dır.

$n=2$ için özel kelime 2 uzunluğundaki önek ab'nin tersi ba'dır.

$n=3$ için özel kelime 3 uzunluğundaki önek aba'nın tersi aba'dır.

$n=4$ için özel kelime 4 uzunluğundaki önek $abaa$'nın tersi $aaba$'dır.

2.4. Karakteristik Kelimeler

Tanım 2.4.1: α, $0<\alpha<1$ irrasyonel sayı olmak üzere $\alpha=[0,z_1,z_2,...]$ biçimindeki ifadeye sürekli kesir denir. Burada tüm i'ler için z_i değerleri pozitif tamsayıdır.

$$\alpha=\cfrac{1}{z_1+\cfrac{1}{z_2+\cfrac{1}{z_3+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

formunda da gösterilebilir. (0,1) aralığındaki her irrasyonel sayı yukarıdaki sürekli kesir formunda gösterilebilir. Ayrıca aşağıdaki rekürsiyon, α'nın karakteristik dizisini verir.

$$X_0=a$$
$$X_1=a^{z_1-1}b,$$
$$X_i=X_{i-1}^{z_i}X_{i-2}$$

Burada $|X_i|=q_i$'dir ve q_i değerleri,

$$q_0=1, \qquad q_1=z_1, \qquad q_i=z_iq_{i-1}+q_{i-2}$$

iterasyonundan elde edilir. α_i, α'nın $i.$ yakınsaklığı olup,

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha_i = [0, z_1, z_2, ...z_i]$$

dir. Bu durumda;

$$s_\alpha = \lim_{n\to\infty} X_n$$

olur$[3]$.

Karakteristik kelimelerin eğimlerinin, sürekli kesir açılımıyla ilişkili olan birçok özellikleri vardır. Bunlardan biri, aşağıdaki önermeyle verilebilir:

Önerme 2.4.1: $\alpha = [0;1+d_1, d_2, ...]$ irrasyonel α'nın $(0<\alpha<1)$ sürekli kesir açılımı olsun. (s_n) dizisi $n \geq -1$ için,

$$s_{-1} = b$$
$$s_0 = a \text{ ve}$$
$$s_n = s_{n-1}^{d_n} s_{n-2}$$

kelimeleri ile tanımlansın. $n \geq 1$ için her s_n, c_α'nın önekidir ve

$$c_\alpha = \lim_{n\to\infty} s_n$$

dır $[8]$.

$(d_n)_{n\geq 1}$ dizisi c_α'nın yönlendirici dizisidir ve $(s_n)_{n\geq -1}$ dizisi c_α'nın standart dizisidir.

Örnek 2.4.1: φ altın oran olmak üzere; $1/\varphi^2 = [0;2,1,1,1,...]$ Fibonacci dizisi iken yönlendirici dizi $d_n = (1,1,1,...)$ dir ve standart dizi sonlu Fibonacci kelimelerinin dizisidir.

$s_{-1} = b$

$s_0 = a$

$s_1 = s_0^{d_1} s_{-1} = ab$

$s_2 = s_1^{d_2} s_0 = aba$

$s_3 = s_2^{d_3} s_1 = abaab$

$s_4 = s_3^{d_4} s_2 = abaababa$

$s_5 = s_4^{d_5} s_3 = abaababaabaab$

$s_6 = s_5^{d_6} s_4 = abaababaabaababaababa$

…

Örnek 2.4.2: $1/\varphi = [0;1,1,1,...]$ ye karşılık gelen standart dizi $s_0 = a,\ s_{-1} = b$ olmak üzere,

$s_1 = s_0^{d_1} s_{-1} = b$

$s_2 = s_1^{d_2} s_0 = ba$

$s_3 = s_2^{d_3} s_1 = bab$

$s_4 = s_3^{d_4} s_2 = babba$

$s_5 = s_4^{d_5} s_3 = babbabab$

$s_6 = s_5^{d_6} s_4 = babbababbabba$

…

Bu dizi, bilinen Fibonacci dizisindeki a ve b 'lerin yer değiştirmesiyle elde edilmiştir.

Örnek 2.4.3: $\alpha = \left(\sqrt{3}-1\right)/2 = [0;2,1,2,1,...]$ göz önüne alalım. Yönlendirici dizi $(1,1,2,1,2,1,2,1,...)$ ve standart dizi

$s_1 = s_0^{d_1} s_{-1} = ab$

$s_2 = s_1^{d_2} s_0 = aba$

$s_3 = s_2^{d_3} s_1 = abaabaab$

$s_4 = s_3^{d_4} s_2 = abaababaaba$

$s_5 = s_4^{d_5} s_3 = abaabaababaabaabaab$

…

$c_{(\sqrt{3}-1)/2} = abaabaababaabaabaababaabaabaab...$

Önerme 2.2.2 deki gibi irrasyonel $\beta = \alpha/(1-\alpha)$ sayısını ve $\beta = [e_0; e_1, ...]$ açılımını düşünelim. $d_1 > 0$ ise,

$$\begin{cases} \alpha < \dfrac{1}{2} \text{ ise; } e_n = d_n,\ e_0 = 0,\ n \geq 1 \\ \alpha > \dfrac{1}{2} \text{ ise; } e_n = d_{n+2},\ n \geq 0 \end{cases}$$

ve

$$t_{-2} = a, \quad t_{-1} = b, \quad t_n = t_{n-1}^{e_n} t_{n-2} \quad (n \geq 0)$$

dir. Bu durumda $t_n = s_n$ ya da $t_n = s_{n+2}$ ve $c_\alpha = s_\beta = \lim t_n$ dir. t_n dizisinin yapısı ve β için sürekli kesrin bütün uygunluğu nedeniyle ikinci ifade bazen tercih edilir[8].

Önerme 2.4.2: İrrasyonel α'nın $(0 < \alpha < 1)$ sürekli kesir açılımı $\alpha = [0; 1 + d_1, d_2, ...]$ olsun. $(u_n)_{n \geq -1}, (v_n)_{n \geq -1}$ ve $(w_n)_{n \geq -1}$ dizileri,

$$u_{-1} = v_{-1} = w_{-1} = b, \qquad u_0 = v_0 = w_0 = a$$

kelimeleri yardımıyla

$$u_{2n} = u_{2n-2}(u_{2n-1})^{d_{2n}} \quad n \geq 1 \qquad v_{2n} = (v_{2n-1})^{d_{2n}} v_{2n-2} \quad n \geq 1$$

$$u_{2n+1} = (u_{2n})^{d_{2n+1}} u_{2n-1} \quad n \geq 0 \qquad v_{2n+1} = v_{2n-1}(v_{2n})^{d_{2n+1}} \quad n \geq 0$$

$w_n = w_{n-2}(w_{n-1})^{d_n}$ $\quad n \geq 1$ olsun. Bu durumda,

$$ac_\alpha = \lim_{n\to\infty} u_n \qquad bc_\alpha = \lim_{n\to\infty} v_n$$

$$abc_\alpha = \lim_{n\to\infty} w_{2n} \qquad bac_\alpha = \lim_{n\to\infty} w_{2n+1}.$$

Bu kelimelerin dizileri birbiriyle ilgilidirler ve bunlar palindrom dizi olarak adlandırılan daha temel bir diziden türetilebilirler[8].

2.5. Sonlu Sturmian Kelimeler

Sonlu Sturmian kelimeler (sonsuz) Sturmian kelimelerin sonlu alt kümeleri olarak tanımlanırlar. Sonlu kelimeler için sağlanan Sturmian kelimelerin karakterizasyonlarından biri aşağıdaki gibidir:

Önerme 2.5.1: w kelimesinin sonlu Sturmian kelime olması için gerekli ve yeter şart dengeli olmasıdır[8].

Tanım 2.5.1: n pozitif tamsayı olmak üzere Euler ϕ_n fonksiyonu, n'ye eşit veya n'den küçük ve n ile asal olan pozitif tamsayıların sayısıdır.

Örnek 2.5.1: $\phi(4) = 3$ ve $\phi(5) = 4$'tür.

Teorem 2.5.1: ϕ Euler fonksiyonu olmak üzere n uzunluklu sonlu Sturmian kelimelerinin sayısı,

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \phi(i)(n - i + 1)$$

dir[8].

2.6. Sturmian Morfizmaları

Tanım 2.6.1: A özel bir alfabe olduğunda, h morfizması A'dan A^*'a bir dönüşümdür:

$$h:(a,b)\to(w_a,w_b)$$

Burada,

$$h(a)=w_a$$
$$h(b)=w_b$$

gösterimi ikili alfabe üzerindeki morfizmayı tanımlamak için kullanılır.

A'dan A^*'a tanımlı morfizma, A^*'dan A^*'a kelime homomorfizmasına, A^*'dan alınan her u kelimesi için şu şekilde genişletilebilir:

$$h(u)=h(u_1)h(u_2)...h(u_{|u|})$$

Bu tanımlama, dizi homomorfizmasına;

$$h(u)=\lim_{n\to\infty}h(u[1...n])$$

yardımıyla

$$h:\{a,b\}^{\infty}\to\{a,b\}^{\infty}$$

şeklinde genişletilebilir[3].

Tanım 2.6.2: Tüm Sturmian kelimeler için, $f(x)$ Sturmian iken $f:A^*\to A^*$ morfizması, Sturmian morfizma olarak adlandırılır.

Sturmian morfizma, sturmian özelliğini korur. f_1 ve f_2 Sturmian morfizması ise $f_1 \circ f_2$ Sturmian morfizmasıdır.

Teorem 2.6.1: Her Sturmian morfizması, aşağıdaki üç morfizmanın bileşimidir[8]:

i) $E: a \to b$ $\quad b \to a$ ii) $D: a \to ab$ $\quad b \to a$ iii) $G: a \to ba$ $\quad b \to a$

Örnek 2.6.1: D morfizması, a harfi üzerine uygulandığına Fibonacci dizisini üretir.

Teorem 2.6.2: Eğer belli sonlu x Sturmian kelimeleri için, $f(x)$ Sturmian ise, f morfizması Sturmiandır[8].

Teorem 2.6.3: c_α ve c_β karakteristik kelimeler olsunlar. Eğer $c_\alpha = f(c_\beta)$ ise, f morfizması E ve D'nin bileşkesidir[8].

f, Sturmian morfizması E ve D'nin bileşimi ise, bu Sturmian morfizmasına standart morfizma denir. Tersine böyle her morfizma, karakteristik dizileri korur [3]. Sturmian morfizmaları ile serbest grupların öz yapı dönüşümü arasındaki ilişki Wen and Wen tarafından [8] de incelenmiştir.

2.7. Standart Kelimeler

Tanım 2.7.1: $A^* \times A^*$'da

$$\gamma(u,v) = (u, uv), \qquad \delta(u,v) = (vu, v)$$

biçiminde tanımlanan iki fonksiyonu ele alalım.

Standart çiftlerin ailesi $\Re$,

i) $(a,b)\in \Re$;

ii) $\Re$, γ ve δ altında kapalıdır.

i ve ii şartlarını sağlayan kelime çiftlerinin en küçük kümesine standart çiftlerin ailesi denir ve $\Re$ ile gösterilir.

Standart çiftlerin bileşenlerine standart kelime denir ve standart kelimelerin kümesi S ile gösterilir. Bir standart çiftin iki bileşeni daima farklı harflerle biter. Standart kelimelerin S kümesi, standart dizilerde görülen tüm s_n kelimelerinin kümesidir. Kısaca aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 2.7.1: $\alpha=[0;1+d_1,d_2,...]$ ifadesi α'nın $(0<\alpha<1)$ sürekli kesir açılımı olsun ve $(s_n)_{n\geq -1}$ α'nın standart dizisi olsun. $n\geq 0$ için (s_{2n-1},s_{2n}) ve (s_{2n+1},s_{2n}) standart ikililerdir ve;

$$\gamma^{d_{2n+2}}(s_{2n+1},s_{2n})=(s_{2n+1},s_{2n+2})$$

$$\delta^{d_{2n+1}}(s_{2n-1},s_{2n})=(s_{2n+1},s_{2n})$$

dır [8].

Örnek 2.7.1: $\alpha=(\sqrt{3}-1)/2=[0;2,1,2,1,...]$ olmak üzere;

$$s_1=s_0{}^{d_1}s_{-1}=ab$$
$$s_2=s_1{}^{d_2}s_0=aba$$
$$s_3=s_2{}^{d_3}s_1=abaabaab$$
$$s_4=s_3{}^{d_4}s_2=abaabaababa$$
$$s_5=s_4{}^{d_5}s_3=abaabaababaabaabaababaabaabaab$$
…

$n=0$ için $\gamma^{d_2}(s_1,s_0)=(s_1,s_2)$

$$\gamma^1(ab,a)=(ab,aba)$$

$n=1$ için $\gamma^{d_4}(s_3,s_2)=(s_3,s_4)$

$$\gamma^1(abaabaab,aba)=(abaabaab,abaabaababa)$$

$n=2$ için $\gamma^{d_6}(s_5,s_4)=(s_5,s_6)$

$$\gamma^1(abaabaababaabaabaababaabaabaab,abaabaababa)=\begin{pmatrix} abaabaababaabaabaab \\ aababaabaabaab,abaa \\ baababaabaabaababa \\ abaabaababaabaababa \end{pmatrix}$$

$n=0$ için $\delta^{d_1}(s_{-1},s_0)=(s_1,s_0)$

$$\delta^1(b,a)=(ab,a) \quad .$$

$n=1$ için $\delta^{d_3}(s_1,s_2)=(s_3,s_2)$

$$\delta^2(ab,aba)=(abaabaab,aba)$$

$n=2$ için $\delta^{d_5}(s_3,s_4)=(s_5,s_4)$

$$\delta^2(abaabaab,abaabaababa)=(abaabaababaabaabaababaabaabaab,abaabaababa)$$

Standart kelimeler ve standart çiftler birçok özelliğe sahiptir. Standart ikililer ve Sturmian morfizması arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile açıklanabilir:

Önerme 2.7.2: $f:A^*\to A^*$ bir morfizma olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir [8].

i) f morfizması (E ve D ile üretilen) standarttır.

ii) $(f(a), f(b))$ kümesi veya $(f(b), f(a))$ kümesi standart ikilidir.

iii) f morfizması, standart kelimeleri korur.

iv) f morfizması, karakteristik kelimeleri korur.

BÖLÜM 3. STURMIAN DİZİLERİN KOMBİNASYONEL ÖZELLİKLERİ

$s_{\theta,\rho}$ ve $s_{\theta,\rho'}$, her bir reel ρ ve ρ' ikili değerleri için, aynı alt dizi kümesine sahiptirler. ρ=0 olması durumunda karakteristik s_θ Sturmian dizisini verir. Karakteristik diziler kendi özelliklerini ispatlarlar. s dizisinin karakteristik olması için gerek ve yeter şart as ve bs dizilerinin ikisinin de Sturmian olmasıdır. as_θ ve bs_θ dizileri sözlüksel sıralamaya göre iki duruma dönüşür. Yani θ sabit iken ρ'nun her değeri için $s_{\theta,\rho}$ dizisi $as_\theta < s_{\theta,\rho} < bs_\theta$ şeklindedir.

as_θ dizisi sözlüksel olarak kendisinin tüm uygun soneklerinden daha küçüktür ve bs_θ ise sözlüksel olarak kendisinin uygun soneklerinin hepsinden daha büyüktür [3].

Tablo 3.1. Fibonacci dizisinin özel kelimeleri ve alt dizileri

n	Alt diziler	Özel Kelime
0	ε	ε
1	a, b	a
2	aa, ab, ba	ba
3	aab, aba, baa, bab	aba
4	$aaba, abaa, abab, baab, baba$	$aaba$
5	$aabaa, aabab, abaab, ababa, baaba, babaa$	$baaba$
6	$aabaab, aababa, abaaba, ababaa, baabaa, baabab, babaab$	$abaaba$
…		…

Sturmian dizilerin minimum karmaşıklık özelliğinden dolayı mümkün her n değeri için $P_x(n) = n+1$'dir. Özel kelime olarak adlandırılan n uzunluğundaki alt dizilerden tam olarak bir tanesi aynı dizide $n+1$ uzunluğunda farklı iki tane alt diziye genişletilebilir. Yani $|w| = n$ uzunluğunda bir tek özel kelime vardır burada w_a ve w_b bir s Sturmian dizisinin alt dizileridir[3].

Tablo 3.2. Karşılıklı biri diğerinin ayna görüntüsü olan karakteristik Fibonacci dizisinin önekleri ile özel kelimeler

n	Özel kelime	Fibonacci dizisinin karakteristik önekleri
1	*a*	*abaababaabaab...*
2	*ba*	*abaababaabaab...*
3	*aba*	*abaababaabaab...*
4	*aaba*	*abaababaabaab...*
5	*baaba*	*abaababaabaab...*
6	*abaaba*	*abaababaabaab...*
. . .	. . .	…

Sonuç: Mignosi, verilen bir $s_{\theta,\rho}$ Sturmian dizisinin özel kelimelerinin kümesinin, karakteristik s_θ dizisinin öneklerinin, ayna görüntülerinin kümesi olduğunu buldu[7].

Aşağıda ise, De Luca ve Mignosi'nin yaptığı üç bulgu vardır[1]:

Tanım 3.1: w kelimesi sonsuz bir Sturmian kelimenin palindromik öneki ise, w kelimesine merkezidir denir. w kelimesinin merkezi olması için gerek ve yeter şart; w'nın aralarında asal olan p ve q gibi iki periyodunun olması ve $|w| = p+q-2$ olmasıdır. Tüm merkezi kelimelerin kümesi PER şeklinde gösterilir.

Tüm kelimeleri $\{a,b\}^*$ kümesinden alınan p ve q gibi iki periyotlu olan (p ve q 1'den başka böleni olmayan sayılardır) ve $|w| = p+q-2$ olan PER kümesini düşünelim. a,b,ε PER'in elemanıdır.

1.Önerme: w, PER'de bir kelime olsun. s bir standart kelime olduğunda $w = s[1..|s|-2]$ olsun. Karşıt olarak, uzunluğu 1'den büyük olan verilen bir s standart kelimesi s'nin $s[1..|s|-2]$ öneki PER'dedir.

Her Sturmian kelime, PER'deki kelimenin alt dizisidir. Bu yüzden PER, Sturmian kelimelerin çekirdeğidir.

2.Önerme: 1'den daha büyük uzunluklu standart kelimeler, şu şekilde ayrışabilen kelimelerdir.

$$s = P_1xy = P_2P_3$$

P_1, P_2, P_3 palindromdur ve $x, y \in \{a,b\}, x \neq y$'dir.

Örnek 3.1: $s = abaabaababa$ olsun.

$$P_1 = aba, x = abaaba, y = ba$$

$$P_2 = abaaba, P_3 = ababa$$

olacak şekilde ayrıştıralım. Bu takdirde;

$$s = P_1xy = P_2P_3$$

olarak yazılabilir. Burada P_1, P_2, P_3 palindromdur ve $x, y \in \{a,b\}^*, x \neq y$'dir.

Bu iki önermeden dolayı PER'in bütün elemanları palindromdur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Sturmian dizilerinin sonlu alt dizilerinin kümesi ayna görüntülerine göre simetriktir. x kelimesi, s Sturmian dizisinin sonlu alt dizisi ise x^R, s'nin alt dizisidir. Farz edelim ki, x kelimesi özel bir Sturmian dizisinin alt dizisi olsun. Birinci önermeden dolayı x, PER'deki kelimenin alt dizisidir. x^R'nin tersi 2. önermeden w palindrom iken w'nın alt dizisidir.

3.Önerme: PER'deki w kelimesinin palindrom olması için gerek ve yeter şart awa awb, bwa, bwb'nin Sturmian olmasıdır.

De Luca'ya göre eğer w kelimesi PER'de ve $N_a(w), N_b(w) > 0$ ise, w şu şekilde ayrıştırılabilir:

$$w = P_1xy = P_2yxP_1$$

P_1, P_2 palindrom ve $|P_1|+2$ ile $|P_2|+2$ aralarında asal sayılar ve $x, y \in \{a,b\},\ x \neq y$'dir.

Bu ayrışmada genelliği bozmadan $|P_2| > |P_1|$ alınabilir.

i) P_2, w nin maksimum uzunluklu uygun palindrom sonekidir.
ii) w, P_1xy üreteçli ilkel tekrardır. w;

$$w = (P_1xy)^k U$$

formundadır. U, P_1xy'nin uygun önekidir ve $k > 1$'dir. Buna göre;

$$P_2 = (P_1xy)^{k-1} U$$

olur.

Bu bulgulara dayanarak De Luca; eğer w kelimesi PER'de ise en küçük palindrom kelimeler olan aw ve bw'nın sonek olarak PER'de olduğunu gösterdi. Bu da PER üzerinde epey doğru bir yol olan aşağıdaki rekürsiyonun yorumuna sebep olur:

$$R_0 = \{\varepsilon\}$$
$$R_{i+1} = \left\{(aR_i)^{(-)}, (bR_i)^{(-)}\right\}$$
$$PER = Y_{i\geq 0} R_i$$

(-) w kelimesi ile sonek olarak en küçük palindrom w kelimesine sahip olan $w^{(-)}$ kelimesini birleştiren birli operatördür [1].

BÖLÜM 4. STURMIAN DİZİLERİNİN FARKLI BİR GÖSTERİMİ

Bu bölümde morfizmlerin bir sınıfı üzerine dayanan Sturmian dizilerin yeni bir gösterimi verilecektir. Burada morfizmler aşağıda tanımlanacağı gibi bloklar denen belli kelimelere dönüşür. Bloklar yardımıyla Sturmian dizinin temel özellikleri verilecektir.

Lemma 4.1: s Sturmian dizisi olsun. $ba^{x}b$ formundaki her bir alt dizi , p pozitif tamsayısı için $p \le x \le p+1$ eşitsizliğini sağlar. Ayrıca $ba^{p}b$ ve $ba^{p+1}b$ her ikisi de s'nin alt dizileridir. $p_{\min} = p$ ve $p_{\max} = p+1$ yazılabilir[3].

İspat: s Sturmian dizisinde ardı ardına gelen iki b arasındaki tekrar eden a harfinin minimum sayısı p olsun. Yani $ba^{p}b$, s'nin alt dizisidir ve $ba^{p-1}b$, s'nin alt dizisi değildir. a^{p+2} kelimesi, $ba^{p}b$ ile aynı uzunluktadır fakat 2 ağırlığı olan $ba^{p}b$'den farklıdır. Bu yüzden a^{p+2}, s'nin alt dizisi olamaz. s'de $ba^{p'}b$ değeri var olduğunda p' değeri $p+1$ tarafından sınırlandırılır. Diğer taraftan, $ba^{p}b$ kelimesi s'de var olmuşsa s, $a^{p}b$ üreteciyle sonunda periyodik olur. Bu da ispatı tamamlar.

$a^{p_{\max}}b$'ye uzun blok $a^{p_{\min}}b$'ye kısa blok denir. Uzun ya da kısa bloktan birine vurgu için tam blok denir. Sadece blok dediğimizde tam bloğu ima ederiz. Bloğun alt dizilerine de kısmi blok denir. Sturmian dizileri, tam bloğun uygun soneki olan kısmi bloktan önce gelebilen tam blokların birbirine bağlanmasıdır.

Lemma 4.2: s bir Sturmian dizi olsun. $a^{p_{\max}}b$ veya $a^{p_{\min}}b$ bloklarından tam olarak biri s'de tekrar eder[3].

İspat: Farz edelim ki $a^{p_{\max}}b$ ve $a^{p_{\min}}b$ den hiçbiri tekrar etmesin. Bu durumda dizi $a^{p_{\max}}b$ ve $a^{p_{\min}}b$ bloklarının biri diğerinin ardında birbirine bağlanmasıyla oluşur. Bu nedenle $a^{p_{\max}}ba^{p_{\min}}b$ kelimesi sonekinde kendini sonsuz kere tekrar eder ki bu da sonunda periyodik olma durumudur. Eğer her ikisi de tekrar ederse $u = a^{p_{\max}}ba^{p_{\max}}$ ve $v = ba^{p_{\min}}ba^{p_{\min}}b$ alt dizilerinin ikisi de s'de bulunur. Önekte $a^{p_{\min}}b$ kısa bloğu bir kısmi blok olabildiğinde $a^{p_{\min}}b\,a^{p_{\min}}b$ ile dizinin başlama durumunu ihmal ediyoruz. Bu yüzden ispat için sınırlama yoktur. u ve v'ye baktığımızda bunların dengeli olma şartını sağlamadığını görürüz. $|u| = |v|$ iken

$$N_b(v) - N_b(u) = 3 - 1 = 2$$

dir.

Halbuki s, Sturmian dizi ise dengeli olmak zorundadır. Bu yüzden $a^{p_{\max}}b$ ve $a^{p_{\min}}b$ bloklarının her ikisi birden s'de tekrar etmeyebilir.

$p_{\min} > 0$ olmak üzere $p_{\max} - p_{\min} = 1$ eşitliğini sağlayan $p_{\max}$ ve $p_{\min}$ değerleri varsa s dizisine 4.1 özelliğini sağlar deriz. Böylece s, $a^{p_{\max}}b$ uzun bloğu ve $a^{p_{\min}}b$ kısa bloğunun birbirine bağlanmasıdır ve $a^{p_{\max}}b$ ile $a^{p_{\min}}b$'den biri kesinlikle tekrar eder. Eğer bir kelime 4.1 özelliğini sağlayan dizinin sonlu alt dizisi ise, bu kelimeye 4.1 özelliğini sağlıyor denir. Sturmian dizisinin 4.1'i sağladığını gördük. Fakat bu durumun tersi doğru değildir. Yani bu özelliği sağlayan bütün diziler Sturmian değildir.

Örnek 4.1: $abaab(ab)^{\infty}$ 4.1 özelliğini sağlar fakat sonunda periyodik olduğundan Sturmian değildir.

Sturmian diziyi oluşturan uzun ve kısa bloklar aynı diziyi oluşturan a ve b harfleri gibi aynı şekilde devam ederler. Yani tam olarak içlerinden biri tekrar eder. α olarak adlandırdığımız morfizma sayesinde tekrar bloğunu tekrar harfe, tekrarsız bloğu tekrarsız harfe eşleyelim.

$$\alpha_{(p,p')}(a) = a^{p}b$$
$$\alpha_{(p,p')}(b) = a^{p'}b$$

olsun. Bunun yerine;

$$\alpha_{(p,p')} : (a,b) \to \left(a^{p}b, a^{p'}b\right)$$

yazılımı da tercih edilebilir. Burada $p, p' \geq 1$ ve $(p, p') = (p_{\max}, p_{\min})$ ya da $(p, p') = (p_{\min}, p_{\max})$ olup $|p - p'| = 1$'i sağlar.

Şimdi (p, p') değer çiftiyle sağlanan yukarıdaki morfizmanın Sturmian olup olmadığını dengelilik ve sonunda periyodiklik özelliklerini koruyup korumadığına bakarak kontrol edelim.

$$\alpha^{-1} : A_F \to \{a,b\}^{\infty} \cup \{a,b\}^{*}$$

fonksiyonu tanımlanıyor. Burada;

$A_F = \{ x \mid x \in \{a,b\}^{\infty} \cup \{a,b\}^{*}$ ve x, 4.1 özelliğini sağlar ve x tam blokların birbirine bağlanmasıdır$\}$

A_F tanım kümesi sadece tam bloklardan oluşan sonlu ve sonsuz tüm Sturmian dizilerini kapsar. Ancak α^{-1}'in tanım kümesi içindeki dizilerin hepsi Sturmian değildir.

Örnek 4.2: $u = aababaababababab$ ve $v = aababaabaaabab(ab)^{\infty}$ olsun. Her ikisi de A_F'nin elemanıdır. Fakat Sturmian değildirler. Çünkü u dengeli değildir ve v'de sonunda periyodiktir.

Her A_F dizisi 4.1 özelliğini sağladığı için A_F'nin her sonsuz x dizisi sadece bir tanesi tekrar eden uzun ve kısa bloklardan oluşur. Bundan dolayı uygulanan özel bir

(p, p') değer ikilisi vardır ve bu değerlerin ikilisi x'den bir tek şekilde türetilebilir. Başka bir ifadeyle α^{-1}'in, sonsuz x dizisi üzerinde tanımlanmış olması (p, p') değerlerinin x'den bir tek şekilde türetilmesi anlamına gelir.

α^{-1}'in tanım kümesi içindeki x sonlu dizisi için, kesinlikle aşağıdaki durumlardan birisi doğrudur.

i) x dizisi uzun ve kısa bloklardan birinin tekrar etme şartıyla, blokların ikisinden de oluşur. Bu durumda x için başvurulan (p, p') değer çifti tektir ve x'den türetilebilir. Örneğin; $x = aababaabaabab$.

ii) x hiçbiri tekrarlanmamak üzere uzun ve kısa bloklardan oluşur. Bu durumda x için yalnız $p_{\min}$ ve $p_{\max}$ değerleri bilinir. Fakat bu uzun ve kısa bloklardan hangisinin tekrar ettiğini bilmek için bir yol değildir. $(p, p') = (p_{\min}, p_{\max})$ ya da $(p, p') = (p_{\max}, p_{\min})$'dir. Örneğin; $x = aababaababaab$.

iii) x blokların sadece bir türüne bağlıdır. Belli bir pozitif k sayısı için $a^k b$ bloğunun tekrar ediyor olduğunu söyleyebiliriz. Başka bir deyişle $n > 1$ iken, pozitif k ve n tamsayıları için $x = (a^k b)^n$'dir. Bu durumda $a^k b$ tekrar bloğu iken $p = k$'dır. x kelimesinden p''nün değerini söylemenin bir yolu yoktur fakat eksiksiz kelime, tekrarlayan a harfi ile $a^k b$ tekrarlı bloğu bir tek şekilde eşleştirilerek indirgenebildiğinde bu bilgi önemsiz olur.

iv) x, bloğun yalnız bir tipine bağlıdır. Bu, k pozitif tamsayı iken $a^k b$'dir ve bu blok tekrarsızdır. Diğer bir deyişle k pozitif tam sayısı için $x = a^k b$'dir. Bu da $a^k b$'nin tekrar bloğu ya da tekrarsız blok olup olmadığını bilmek için bir yol değildir. Bu nedenle $a^k b$, ya a ile, ya da b ile eşleştirilebilir.

α^{-1}'in parametreleri için yukarıdaki ihtimaller dikkate alınarak yapılan aşağıdaki tanımlama, tam olarak A_F tanım kümesi içindeki bir fonksiyonu belirtir.

a) Eğer x sonsuz dizi ya da tekrarlayan bloğa sahip kelime ise o zaman; her tekrar bloğu a harfi ile ve her tekrarsız blok b harfi ile yer değiştirir.

b) Eğer x tekrarlanmayan kısa ve uzun bloklara sahip bir kelime ise o zaman her uzun blok a harfi ile ve her kısa blok b harfi ile yer değiştirir.

c) Eğer x kelimesi tek bir bloktan oluşuyorsa o zaman x, a harfi ile yer değiştirir.

Buna göre, her $x \in A_F$ için α^{-1} fonksiyonunda kullanılmış olan değer çiftleri (p, p') olmak üzere;

$$\alpha_{(p,p')}\left(\alpha^{-1}(x)\right) = x \qquad \forall x \in A_F$$

dir.

α'yı bir fonksiyonun uygulaması olarak kullandığımızda, α morfizmasının sınıfındaki herhangi keyfi bir fonksiyonu anlayacağız. Yani bazı özel değerlere bakmaksızın geçerli (p, p') değerine bakılacaktır.

Lemma 4.3: s dizisinin sonunda periyodik olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$'nin sonunda periyodik olmasıdır.

İspat : s'nin g üreteciyle sonunda periyodik olduğunu varsayalım. Yani belli u kelimesi ve boştan farklı g kelimesi için $s = ug^{\infty}$ olsun.

$$\alpha(s) = \alpha(ug)^{\infty} = \alpha(u)\alpha\left(g^{\infty}\right) = \alpha(u)\alpha(g)^{\infty}$$

Böylelikle $\alpha(s)$, $\alpha(g)$ üreteciyle sonunda periyodik olur.

Tersine farz edelim ki; $\alpha(s)$, g üreteciyle sonunda periyodik olsun. O zaman belli u kelimeleri ve boştan farklı g kelimesi için;

$$\alpha(s) = ug^{\infty}$$

yazılabilir. g^2, $\alpha(s)$'nin alt dizisidir. s üzerinde uygulanan α morfizmasından dolayı, $\alpha(s)$ tam blokların birleşimidir. P_p ve P_s sırasıyla tam blokların uygun öneki ve soneki olduğunda $g = P_p F P_s$ olduğunu farz edelim ve F boş dizi ya da tam blokların birleşimi olsun. $g^2 = P_p F P_s P_p F P_s$, $\alpha(s)$'nin alt dizisi iken ve $\alpha(s)$ tam blokların birleşimi iken $P_s P_p$ bir tam blok formunda oluşturulmalıdır. Bu nedenle; $g = P_p F P_s$, $g' = F P_s P_p$ tam bloklarının birleşiminin bir dönmesidir. Yani tam blokların birleşimi olan bazı g' kelimeleri için; $g = g'[i+1..|g'|]g'[1..i]$'dir. Diğer bir deyişle $\alpha(s)$, g üreteciyle sonunda periyodik olduğunda, g' üreteciyle de sonunda periyodik olur. Burada g' tam blokların birleşimidir. O zaman bu durumda $s = \alpha^{-1}(\alpha(s))$, $\alpha^{-1}(g')$ üreteçli sonunda periyodik olur.

Aşağıdaki lemma, $\alpha_{(p,p')}(s)$'deki bazı bloklarla belirli bir s dizisindeki harfleri birleştirmek için kullanışlı bir özellik belirtir. Üstelik Lemma 4.5 'in basit bir ispatını da verir.

Lemma 4.4: u, $\{a,b\}$ üzerinde bir diziyi göstersin. O zaman herhangi geçerli (p, p') değerleri için;

$$N_b\left(\alpha_{(p,p')}(u)\right) = |u|$$

olur[3].

İspat : u'daki her harf, b'yi kesinlikle bir kez bulunduran $\alpha_{(p,p')}(u)$ içindeki bir blokta ortaya çıkar.

Belirtmek gerekir ki, $s \in \{a,b\}^*$ dizisinin dengeli olmaması için gerek ve yeter şart 2-dengesiz olmasıdır. Yani s'nin u ve v alt dizileri vardır. Burada $N_b(u') - N_b(v') = 2$ ve $|u'| = |v'|$ dir, böyle her dizi u ve v kesin alt dizileriyle iken burada;

$$\left(N_b(u) - N_b(v) \geq 2,\ |u| = |v|\right)$$

u ve v'nin alt dizileri olan eşit uzunluklu u' ve v' alt dizileri olmak zorundadır ki bu u' ve v' dizileri

$$N_b(u') - N_b(v') = 2$$

şartını sağlar. Aynı düşünceyle, sadece dizinin 2- dengesiz olup olmadığını kontrol için dengesizlik şartına bakmak yeterlidir.

Lemma 4.5: s dizisinin dengeli olması için gerek ve yeter şart; $\alpha(s)$'nin dengeli olmasıdır$[3]$.

İspat: Tersine s'nin dengesiz olduğunu farz edelim. O zaman s'nin $|u| = |v|$ ve $N_b(u) - N_b(v) = 2$ özelliğini sağlayan u ve v alt dizileri vardır. $\alpha(u)$ ve $\alpha(v)$'ye bakılırsa $|u| = |v|$ iken her ikisi de tam blokların eşit sayıda birleşimidir. Her blok b'yi bir defa bulundurduğu için ve Lemma 4.4'den

$$N_b(\alpha(u)) = N_b(\alpha(v))$$

olur. $N_b(u)$ ve $N_b(v)$ arasında 2 fark olduğundan $\alpha(u)$ ve $\alpha(v)$ arasındaki uzun ya da kısa blokların farkı da 2 olur. Bu nedenle,

$$\left||\alpha(u)| - |\alpha(v)|\right| = 2$$

dir. Genelliği bozmadan $|\alpha(u)| = |\alpha(v)| - 2$ olduğu varsayılırsa $b\alpha(u)$ ve $\alpha(v)[1..|\alpha(v)|-1]$ dizilerinin her ikisi de aynı uzunluktadır ve 2- dengesizdirler. Böylece $\alpha(s)$ dengesiz olur.

İspatın geri kalan kısmına başlamadan önce a harfinin dizisi olan a-dizi tanımını düşünelim. Bir a-dizisi, b harfinin ardışık iki oluşumundan önce ve sonra gelince tam olarak adlandırılır. Aksi takdirde kısmi olarak adlandırılır.

İspatın devamı için [3] e bakınız.

Teorem 4.1: $|p - p'| = 1$ i sağlayan herhangi $p, p' > 0$ değeri için

$$\alpha_{(p,p')} : (a,b) \to (a^p b, a^{p'} b)$$

morfizması Sturmiandır[4].

Burada yazılan Teorem 4.1'in bir sonucu şudur: E, D ve G morfizmalarının bir birleşimi olan α morfizması test kelimelerinin ilkel olma ve dengelilik özelliğini korur.

Bu sonuca ilişkin bir diğer sonuç da; α^{-1}, A_F içindeki tüm s durumları içinde Sturmian fonksiyondur. $\alpha^{-1}(s)$ nin Sturmian olması için gerek ve yeter şart s'nin Sturmian olmasıdır.

Anlaşılan o ki Teorem4.1'in sonucuna yol gösteren ispatlar α'nın sağ ya da sol rotasyonuna genişletilebilir. Yani;

$$R_{i,(p,p')} : \alpha_{i,(p,p')}(a) = a^{p-i} b a^i, \alpha_{i,(p,p'')}(b) = a^{p'-i} b a^i$$

sağ rotasyon ve benzer olarak;

$$L_{i,(p,p')} : \alpha_{i,(p,p')}(a) = a^i b a^{p-i}, \alpha_{i,(p,p')}(b) = a^i b a^{p'-i}$$

ise sol rotasyondur. $L_{i,(p,p')}$ ve $R_{i,(p,p')}$, $p, p' \geq i \geq 0$ için Sturmian morfizması olur.

Diğer taraftan Teorem 4.1'in mevcut bir sonucu α morfizmasının (p, p') parametreleriyle sağlanan her bir bileşiminin Sturmian morfizması olduğudur.

$$\pi = \left\{\left(p_1, p_1'\right), \left(p_2, p_2'\right), ..., \left(p_n, p_n'\right)\right\}$$

yazılımını, (p, p') değerlerinin dizisini göstermek için dikkate alalım. α morfizmasının bileşimleri için parametreler olan (p, p') değerleri

$$\alpha_\pi = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ ... \circ \alpha_n$$

deki gibidir. Burada $\alpha_i = \alpha_{\left(p_i, p_i'\right)}$'dir. π dizisini tanımlı dizi olarak adlandıralım.

$$\pi = \left\{\left(p_1, p_1'\right), \left(p_2, p_2'\right), ..., \left(p_n, p_n'\right)\right\}$$

Tanımlı diziyi içeren, aslında α gibi benzer bir metot olan, α morfizmasının duali, α - dual iterasyonunu dikkate alalım. Bu iterasyon aşağıdaki gibidir[3]:

$$X_0 = a, \qquad Y_0 = b,$$
$$X_i = X_{i-1}^{p_i} Y_{i-1}, \qquad Y_i = X_{i-1}^{p_i'} Y_{i-1} \qquad \forall i > 0.$$

Örnek 4.3: $\pi = \{(1,2),(1,2),...\}$ olsun. Bu takdirde;

$$X_0 = a \qquad Y_0 = b$$
$$X_1 = X_0^{p_1} Y_0 = ab \qquad Y_1 = X_0^{p_1'} Y_0 = aab$$

$X_2 = X_1{}^{p_2} Y_1 = abaab$ $\quad Y_2 = X_1{}^{p_2'} Y_1 = ababaab$

$X_3 = X_2{}^{p_3} Y_2 = abaababababaab$ $\quad Y_3 = X_2{}^{p_3'} Y_2 = abaababaababababaab$

…

π tanımlanmış dizisi üzerinde α dual iterasyonundan elde edilen X_n ve Y_n kelimeleri X_π ve Y_π ile gösterilsin. Burada π'nin büyüklüğü n'dir.

X_π'ye bakalım. X_π, $a^{p_1} b$ tekrar ediyorken $a^{p_1} b$ ve $a^{p_1'} b$ bloklarının birleşimidir. Bu nedenle $\alpha^{-1}(p_1, p_1')$, $x = \alpha^{-1}(p_1, p_1')(X_\pi)$'yi vermesi için X_π üzerinde tanımlıdır. x kelimesi, aynı π tanımlı dizisi üzerindeki α dual iterasyonunun dışındaki kelimeye eşittir. π nin içinden (p_1, p_1') atılarak ikinci değer çiftinden iterasyon başlar. Yani;

$$x = X_{\pi_{n,2}}$$

dir. Burada;

$$X_{\pi_{n,2}} = \left\{ (p_2, p_2'), (p_3, p_3'), \ldots, (p_n, p_n') \right\}$$

olur. Bu yüzden;

$$\alpha^{-1}(p_1, p_1')(X_\pi) = X_{\pi_{n,2}}$$

ve

$$\alpha^{-1}(p_1, p_{1'})(X_{\pi_{n,2}}) = X_\pi$$

dir. Aynı şekilde $X_{\pi_{n,2}}$'nin içine bakarsak

$$\alpha^{-1}_{(p_2,p_2')}(X_{\pi_{n,2}}) = \alpha^{-1}_{(p_2,p_2')} \circ \alpha^{-1}_{(p_1,p_1')}(X_\pi) = X_{\pi_{n,3}}$$

ve

$$\alpha_{(p_1,p_1')} \circ \alpha_{(p_2,p_2')}(X_{\pi_{n,3}}) = X_\pi$$

olur. Böylece;

$$\alpha^{-1}_{(p_i,p_i')} \circ \ldots \circ \alpha^{-1}_{(p_2,p_2')} \circ \alpha^{-1}_{(p_1,p_1')}(X_\pi) = X_{\pi'}$$

ve

$$\alpha_{(p_1,p_1')} \circ \alpha_{(p_2,p_2')} \circ \ldots \circ \alpha_{(p_i,p_i')}(X_{\pi'}) = X_\pi$$

$i = 0,1,\ldots,n$ için. Burada

$$\pi' = \{(p_{i+1}, p'_{i+1}), (p_{i+2}, p'_{i+2}), \ldots, (p_n, p'_n)\}.$$

olur. Sonuç olarak;

$$\alpha_\pi(a) = X_\pi$$

ifadesi tüm π tanımlı dizileri için geçerlidir. Benzer olarak

$$\alpha_\pi(b) = Y_\pi$$

dir. Bu sonuçlar bize tanımlı dizi üzerindeki α dual iterasyonunun her bir basamağında elde edilen her X_i ve Y_i'nin Sturmian kelime olduğunu gösterir.

Tanımlı diziler için verilen tanımlamayı, aşağıdaki gibi (p, p') değerlerini sağlayan sonsuz dizileri örtmek için genişletelim:

$$\pi = \left\{\left(p_1, p_1{}'\right), \left(p_2, p_2{}'\right), \ldots\right\}.$$

Aşağıdaki teorem,

$$X_\pi = \lim_{n\to\infty} X_n$$

limit durumunda Sturmian dizi üreten her sonsuz tanımlı dizi üzerindeki α- dual iterasyonunu belirtir.

Teorem 4.2: $\pi = \left\{\left(p_1, p_1{}'\right), \left(p_2, p_2{}'\right), \ldots\right\}$ olsun. Bu durumda

$$X_\pi = \lim_{n\to\infty} X_n$$

limiti mevcuttur$[3]$.

İspat: α dual iterasyonuna baktığımızda $\left|X_{i+1}\right| > \left|X_i\right|$ dir ve her X_{i+1} tüm $i \geq 0$ için önekleri olan, X_i kelimelerini korur. Tüm $i \geq 0$ için X_i kelimesi tüm $j \geq i$ iterasyonlarının öneki olarak kalır ispatı kanıtlamak için. Böylece;

$$X_\pi = \lim_{n\to\infty} X_n$$

olur.

Şimdi de tüm Sturmian dizilerin α dual iterasyonu ile birleştirilen tanımlı dizi tarafından ifade edilip edilemeyeceğine bakalım. Bunun için π sonsuz tanımlı dizi iken her Sturmian dizi bazı X_π'lerin soneki midir bunu araştıralım.

$s = s_i (i = 0)$ olarak verilen Sturmian dizisi için, s_i' tam blokların birleşimi olan s_i'nin en uzun soneki olsun. α^{-1}, s_i' Sturmian iken ve kısmi bloğa sahip

değilken, s_i' üzerinde tanımlıdır. s_i''den türetilen p, p' değerleri (p_{i+1}, p'_{i+1}) olsun. $(p_{i+1}, p'_{i+1}) = (p_{\max}, p_{\min})$ ya da $(p_{i+1}, p'_{i+1}) = (p_{\min}, p_{\max})$ olabilir. Burada s_i''de tekrar eden $a^{p_{i+1}}b$ ile $a^{p_{i+1}}b$ ve $a^{p'_{i+1}}b$ bloklarıdır.

Teorem 4.1'den, uygun (p, p') değerleri ile tam blokların birleşimi olan onun en uzun soneki üzerinde tanımlı olan α^{-1} üzerinde $s_{i+1} = \alpha^{-1}_{(p_{i+1}, p'_{i+1})}(s_i')$ Sturmian diziye döner. Ardışık $i = 1,2,...$ değerleri için bu ifadenin sonsuz kere tekrarı bize şu tanımlı diziyi verir:

$$\pi = \left\{\left(p_1, p_1'\right), \left(p_2, p_2'\right), ...\right\}$$

Burada (p_j, p_j'), bu ifadenin j. iterasyonundaki diziden türetilen (p, p') değer ikilisidir. Böylece π geçerli tanımlı dizi olduğunda, her Sturmian dizinin bazı X_π'lerin soneki olduğu söylenebilir. Bu nedenle Sturmian diziler, α morfizmalarının sınıfına dayandırılan α - dual iterasyonu tarafından ifade edilebilir.

Örnek 4.4: $\pi = \left\{[(1,2),(2,3),(4,3)]^{\infty}\right\}$ olsun. Bu tanımlı dizi üzerindeki α - dual iterasyonunun başlangıç basamaklarını bulalım.

$$X_0 = a$$

$$Y_0 = b$$

$$X_1 = X_o{}^{p_1} Y_0 = ab$$

$$Y_1 = X_0{}^{p_1'} Y_0 = aab$$

$$X_2 = X_1{}^{p_2} Y_1 = (ab)^2 aab = ababaab$$

$$Y_2 = X_1{}^{p_2'} Y_1 = (ab)^3 aab = abababaab$$

$$X_3 = X_2{}^{p_3} Y_2 = (ababaab)^4 abababaab$$

$$Y_3 = X_2{}^{p_3'} Y_2 = (ababaab)^3 abababaab$$

$$X_4 = X_3{}^{p_4} Y_3 = (ababaab)^4 abababaab(ababaab)^3 abababaab$$

$$Y_4 = X_3^{p'_4} Y_3 = (ababaab)^4 abababaab(ababaab)^4 abababaab(ababaab)^3 abababaab$$
$$\vdots$$

Şimdi de α morfizmasının birleşimini tanımlamak için α'_π yazılımına bakalım:

$$\alpha'_\pi = ...\alpha_{(p_{n+1}, p'_{n+1})} \circ \alpha_{(p_n, p'_n)} \circ ... \circ \alpha_{(p_1, p'_1)}(a)$$

Bu da π tanımlı dizisinin ters yönünü gösterir. Her $i \geq 1$ için sabit $(p_i, p'_i) = (p, p')$ değer çiftine sahip olan,

$$\pi = \left\{\left(p_1, p_1'\right), \left(p_2, p_2'\right), ...\right\}$$

düzenli tanımlı dizi için, $\alpha'_{\pi(a)}$ dizisi üzerinde duralım.

$$\alpha'_\pi(a) = \lim_{n\to\infty} \alpha_{(p_n, p'_n)} \circ ... \circ \alpha_{(p_2, p'_2)} \circ \alpha_{(p_1, p'_1)}(a) = \lim_{n\to\infty} \alpha^n{}_{(p,p')}(a) \ .$$

Bu limit $\alpha_{(p,p')}(a) = au$ iken mevcuttur. Burada $u = a^{p-1}$'dir ve bu nedenle

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{(p,p')}{}^n(a) = au\alpha_{(p,p')}(u)\alpha^2{}_{(p,p')}(u)\alpha^3{}_{(p,p')}(u)...$$

dir. Buradan ve 4.1 eşitliğinden,

$$\alpha'_\pi(a) = X_\pi$$

elde edilir.

Örnek 4.5: Tanımlı dizinin Fibonacci dizisini oluşturduğunu gösterelim.

Fibonacci dizisinde uzun ve kısa bloklar aab ve ab, ve tekrar bloğu aab'dir. Böylece $\left(p_1, p_1'\right) = (2,1)$ olur. Morfizmalar da belirtildiği gibi $h(a,b) \to (ab, a)$

Fibonacci dizisini üreten morfizmadır. Bu morfizma değişen p, p' parametrelerini α dual iterasyonunun diğer basamaklarına taşıyamaz. Çünkü $h(a)$ ve $h(b)$ kelimelerinde tek bir b harfi vardır böylelikle morfizmanın her bir uygulama basamağında (p, p') parametre çifti tek bir değer alabilir. Diğer taraftan, $h(a,b) \to (ab, a)$ morfizması, dizinin onunla üretildiğini göstermek için, düzenli tanımlı dizi belirtir. (p, p')=(2,1) alındığında h'nın her uygulamasının sağlandığını ve bunun Fibonacci dizisinin düzenli tanımlı dizisi olduğunu görebiliriz. Bu nedenle Fibonacci dizisinin tanımlı dizisi;

$$\pi_F = \{(2,1),(2,1),...\}$$

dir ve Fibonacci dizisi, X_{π_F}'nin son ekidir ya da denk olarak $\alpha'_{\pi_F}(a) = \lim_{n\to\infty} \alpha^n_{(2,1)}(a)$'nın sonekidir.

$$X_i = \alpha^i{}_{(2,1)}(a)$$
$$X_0 = \alpha^1_{(2,1)}(a) = a$$
$$X_1 = \alpha^1{}_{(2,1)}(a) = aab$$
$$X_2 = \alpha^2{}_{(2,1)}(a) = aabaabab$$
$$X_3 = \alpha^3{}_{(2,1)}(a) = (aabaabab)^2\, aabab = aabaababaabaababaabab$$
$$X_4 = \alpha^4{}_{(2,1)}(a) = aabaababaabaababaababaabaababaabaababaababaabaababaabab$$

Örnek 4.6: $\pi_M = \{(2,1),(2,1),...\}$

Düzenli tanımlı dizisi $X_{\pi_M} = \alpha'_{\pi_M}(a)$ minimal Sturmian dizisini üretir. Minimal durumda dizi, olası en küçük a olduğunda, tekrar harfi ab ile eşlenerek, olası en küçük blok olur ve b, tekrarsız harf aab ile eşlenerek bir sonraki olası en kısa blok iterasyon tarafından elde edilir.

Tablo 4.1. Fibonacci dizisini üreten α - dual iterasyonu

i	$X_i = \alpha^i{}_{(1,2)}(a)$
0	*a*
1	*ab*
2	*abaab*
3	*abaababababaab*
4	*abaababababaababaababaababababaab*
5	*abaababababaababaababaababababaababaababaababababaababaababababaababaabab

Tablo 4.2. Sturmian dizilerin kombinasyonel modelleri

	Sturmian dizi
i . seviye	$...P...$
$i-1$. seviye	$...\alpha_{i-1}(P)...$
$i-2$. seviye	$...\alpha_{i-2} \circ \alpha_{i-1}(P)...$
$i-3$. seviye	$...\alpha_{i-3}(P) \circ \alpha_{i-2}(P) \circ \alpha_{i-1}(P)...$
…	
1. seviye	$\alpha_1 \circ ...\alpha_{i-3} \circ \alpha_{i-2} \circ \alpha_{i-1}(P).$

α ve tanımlı dizi kullanılarak Sturmian dizilerin kombinasyonel modellerinin çizilmesi. i . Seviyede doğan P modeli yerleştirildiğinde, onun α morfizmasından yansımaları α dualinin önceki seviyelerinde ve son olarak 1. seviyede, en son seviye, rahatlıkla hesaplanabilir [3].

BÖLÜM 5. SONSUZ KELİMELERİN FAKTORİZASYONU

5.1. Giriş

M.-P Schützenberger kombinetaryal objelerin arasındaki doğal eşlemelere dayanan kombineteryal özdeşliklerin çalışması için bir yaklaşım öne sürdü. Özdeşliklerin basit ve zengin bir ailesi Fibonacci sayılarıyla ilgilidir. Bunun gibi düzinelerce özdeşlik vardır. Bu onlardan yalnızca birisidir. (n. Fibonacci sayısı için F_n yazılır ve $F_0 = 1,\ F_1 = 2$ terimleriyle başlar.)

$$F_{n+2} = 2 + F_0 + F_1 + ... + F_n \qquad (1)$$

dir. Şimdi de (sonlu) Fibonacci kelimelerini tanımlayalım

$$f_0 = a$$
$$f_1 = ab$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} f_n$$

dir. Bu durumda

$$f_0 = a$$
$$f_1 = ab$$
$$f_2 = aba$$
$$f_3 = abaab$$
$$f_{4=} = abaababa$$
$$f_5 = abaababaabaab$$

olacaktır. Ayrıca $F_n = |f_n|$ ‘dir.

(1) ‘ i ispatlamak için f_{n+2}’nin çarpanlarına ayrılmasına (faktorizasyonuna) bakarız. Bunlardan üç tanesi şöyledir [9];

1) $f_{n+2} = abf_0 f_1 ... f_n$

2) $f_{n+2} = \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 ... \tilde{f}_n (ab)^n$

3) $f_{n+2} = aw_0 w_1 w_2 ... w_n (b)^{(n)}$

Burada;
$$(w)^{(n)} = \begin{cases} w & ; n \text{ tek iken} \\ \overline{w} & ; n \text{ çift iken} \end{cases}$$

$\overline{w}$; w’nın tersidir ve w’daki a ve b’lerin yer değiştirmesiyle elde edilir.

Örneğin; $w = aba$ ise $\overline{w} = bab$’dir.

Burada;

$w_0 = b$
$w_1 = aa$
$w_2 = bab$
$w_3 = aabaa$
...

Fibonacci kelimesinin tekil çarpanlarıdır. Yukarıda yazdığımız üç çarpanlara ayrılma yani tekil çarpanlarına ayrılma Wen and Wen tarafından ortaya çıkartılmıştır. Yukarıdaki üç çarpanlarına ayrılmaya birer örnek ile bakalım:

Örnek 5.1.1: $f_{n+2} = abf_0 f_1 ... f_n$ dir.

$n = 0 \Rightarrow f_2 = f_1 f_0 = abf_0 = aba$

$n=1 \Rightarrow \ f_3 = f_2 f_1 = abf_0 f_1 = abaab$

$n=2 \Rightarrow \ f_4 = f_3 f_2 = abf_0 f_1 f_2 = abaababa$

$n=3 \Rightarrow \ f_5 = f_4 f_3 = abf_0 f_1 f_2 f_3 = abaababaabaab$

Örnek 5.1.2: $f_{n+2} = \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 ... \tilde{f}_n (ab)^{(n)}$

$n=0, \ f_2 = \tilde{f}_0 (ab)^0 = aba$

$n=1, \ f_3 = \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 (ab)^1 = abaab$

$n=2, \ f_4 = \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 (ab)^2 = abaababa$

$n=3, \ f_5 = \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \tilde{f}_3 (ab)^3 = abaababaabaab$

Örnek 5.1.3: $f_{n+2} = aw_0 w_1 w_2 ... w_n (b)^{(n)}$

$n=0, \ f_2 = aw_0 (b)^{(0)} = aba$

$n=1, \ f_3 = aw_0 w_1 (b)^{(1)} = abaab$

$n=2, \ f_4 = aw_0 w_1 w_2 (b)^{(2)} = abaababa$

$n=3, \ f_5 = aw_0 w_1 w_2 w_3 (b)^{(3)} = abaababaabaab$

Tekil çarpanlarına ayırma Fibonacci kelimelerinin Lyndon çarpanlarına ayrılmasıyla yakından ilgilidir.

$f_8 = abaababaabaababaababaabaababaababaabaababaaaababaabaa...$

$= aw_0 w_1 w_2 ... w_8 a$

$= l_1 l_3 l_5 l_7 l_9 a$

$l_1 = ab = aw_0$

$l_3 = aabab = w_1 w_2$

$l_5 = aabaababaabab = w_3 w_4$

ve daha genel olarak;

$$l_{2n+1} = w_{2n-1}w_{2n}$$

dir[9].

Yeni ufuklar açan bir çalışmada, Ziv ve Lempel metin eşleme ve bilişim kuramı ile ilgili sonlu kelimelerin birçok çarpanlarına ayrılmasını tanımladı. Sonra, kare serbestsizliği için kelimeleri kontrol eden lineer algoritmanın tasarımında bir alet anahtarı gibi kelimelerin benzer çarpanlarına ayrılmasını ortaya koydu. Kelimelerin Ziv-Lempel çarpanlarına ayrılması, tamamen farklı şartlarda tekil çarpanlarına ayrılma olarak gösterilecektir.

Ziv-Lempel ve Crochemore çarpanlara ayrılma benzer özelliklere sahiptir. Her ikisi de kelimenin son ek ağacının önişlemi tarafından doğrusal zamanlı hesaplanır. Ayrıca her iki çarpanlara ayrılmada çarpanların sayısı kapalı olarak ilişkilidir. Crochemore çarpanlara ayrılmada çarpanlarının sayısı Ziv-Lempel çarpanlarına ayırma çarpanlarının sayısından en çok 2 fazladır. Buna rağmen, anlamlı bir şekilde birçok defalar sınırsızca farklı olan çarpanlarına ayrılmanın örnekleri vardır.

Bu bölümde, karakteristik Sturmian kelimeleri, Thue-Morse kelimesi ve periyot katlı dizi gibi bazı en iyi bilinen kelimelerin sınıflarının Crochemore çarpanlara ayrılmanın davranışını çalışacağız. Ayrıca Ziv-Lempel çarpanlarına ayrılmaya da değineceğiz.

Görülüyor ki bu çarpanlara ayrılmalar bazı anlamlı örneklerdeki formül tarafından ifade edilebilir. Bu formüllerin ispatı, dikkate alınan sonsuz kelimelerin kombinasyonel yapısındaki bazı bilgileri gerektirir.

Özel sonsuz kelimelerin Crochemore çarpanlarına ayrılması (c-faktorizasyon) kesin olarak tanımlanabilir ve bu, bu kelimelerin yapısını gösterir.

x kelimesinin c- faktorizasyonu $c(x)$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

5.2. Crochemore ve Ziv-Lempel Faktorizasyonu

Tanım 5.2.1: x kelimesinin Crochemore faktorizasyonu;

$$c(x) = (x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ...)$$

dir.

Burada x_m; $x_1 x_2 ... x_m$ içinde iki kez var olan $x_m x_{m+1} ...$ 'in en uzun önekidir ya da $x_1 ... x_{m-1}$ içinde a hiç var olmamış ise x_m a harfidir [9].

Örneğin; $x = ababaab$ 'nin c-faktorizasyonu (a, b, aba, ab) 'dir. $ababa$ 'da, aba iki kez görülmüştür.

Kelimenin c-faktorizasyonu iyi bilinen Ziv-Lempel çarpanlara ayrılmadan biraz farklıdır. Böylece bu iki çarpanlara ayırma genelde karşılaştırılamaz.

Tanım 5.2.2: x kelimesinin Ziv-Lempel faktorizasyonu;

$$Z(x) = (y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}, ...)$$

dır. Burada y_m; $y_1, y_2, ... y_m$ kelimesinin içinde bir kez oluşan $y_m y_{m+1}, ...$ 'in en kısa önekidir [9].

Örneğin; $x = ababaab$ olsun. x 'in z-faktorizasyonu $(a, b, abaa, b)$ 'dir.

Örnek 5.2.1: $x = aabaaccbaabaabaa$ kelimesi olsun.

$$c(x) = (a, a, b, aa, c, c, baa, baabaa)$$
$$z(x) = (a, ab, aac, cb, aabaab, aa)$$

Bu çarpanlara ayırmalar arasındaki ilişki ayrıntılı olarak tartışılabilir.

5.3. Fibonacci Kelime

Fibonacci kelime $f_{-1} = b,\ f_0 = a$ ve $f_{n+2} = f_{n+1} f_n$ dizisinin limiti olarak tanımlanmıştı. Fibonacci kelimesinin c- faktorizasyonu;

$$c(f) = (a, b, a, aba, baaba, ...) = (a, b, a, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, ...)$$

şeklindedir. İlk üçü hariç her bir çarpan Fibonacci kelimesinin tersidir. Fibonacci kelimesinin üç çarpanlara ayrılması aşağıdaki gibidir.

$$h : |a|b|a|ab|aba|abaab|...$$
$$w : a|b|aa|bab|aabaa|...$$
$$c : a|b|a|aba|baaba|...$$

Bu çarpanlara ayrılmalar arasındaki ilişki şu şekildedir. w ve c'nin çarpanları;

$aw_{2i} = \tilde{f}_{2i} b$ ve $bw_{2i+1} = \tilde{f}_{2i+1} a$'yı sağlarken,

h ve w'nın çarpanları;

$bf_{2i} = w_{2i} a$ ve $af_{2i+1} = w_{2i+1} b$'yi sağlar [9].

5.4. Standart Kelime

Tanım 5.4.1: Standart kelime d_i pozitif ve tüm $i > 0$ için;

$$s_{-1} = b$$
$$s_0 = a$$
$$s_n = s_{n-1}^{d_n} s_{n-2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Standart kelimenin c-faktorizasyonu aşağıdaki teorem yardımıyla ifade edilir.

Teorem 5.4.1: s bir standart kelime olmak üzere;

$$c(s) = (a, a^{d_1-1}, b, a^{d_1}\tilde{s}_1^{\,d_2-1}, \tilde{s}_2^{\,d_3}, \tilde{s}_3^{\,d_4}, ..., \tilde{s}_n^{\,d_{n+1}}, ...)$$

dır$[2]$.

Periyot katlı ve Thue – Morse gibi bilinen diğer sonsuz kelimeler için benzer sonuçlar mevcuttur.

Tanım 5.4.2: τ ; $\tau(a) = ab$ ve $\tau(b) = ba$ ile tanımlanmış olan iki harf üzerindeki Thue – Morse morfizması olsun. Thue – Morse kelimesi;

$$t_0 = a$$
$$t_n = \tau(t_{n-1})$$

dizisinin limiti ile tanımlanmış

$$t = abbabaabbaababba...$$

kelimesidir.

t 'nin c – faktorizasyonu içindeki her bir çarpanı bir önceki çarpandan, τ morfizması uygulanarak elde edilebilir.

$$c(t) = (c_1, c_2, ...)$$
$$c_{n+2} = \tau(c_n) \qquad (n > 6) \text{ için;}$$

$$c(t) = a, b, b, ab, a, abba, aba, bbabaab, abbaab, babaabbaababba, ...$$

şeklindedir.[12].

Tanım 5.4.3: δ morfizması iki harf üzerinde tanımlı olan

$$\delta(a) = ab$$
$$\delta(b) = aa$$

olsun.

$$q_0 = a$$
$$q_{n+1} = \delta(q_n)$$

dizisinin limiti periyot katlı diziyi verir.

Standart Sturmian dizinin özel bir durumu da periyot katlı dizidir. Periyot katlı dizi için

$$q = \tilde{q}_0 \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \ldots$$

dir.

q'nun c- faktorizasyonu;

$$c(q) = (a, b, a, aa, ba, baba, aaba, \ldots) = (\tilde{q}_0, \tilde{q}_0', \tilde{q}_0, \tilde{q}_1', \tilde{q}_1, \tilde{q}_2', \tilde{q}_2, \ldots)$$

şeklindedir. Burada; q_n', q_n'in son harfinin tersinin alınmasıyla elde edilir. Ayrıca,

$$q_{n+1} = q_n q_n'$$

dir[12].

Bilinen diğer sonsuz kelimeler için benzer sonuçlar mevcuttur. Fakat otomatik kelimelerin c faktorizasyonunun tam bir karakterizasyonu henüz bulunamamıştır.

6. BÖLÜM. STURMIAN KELİMELERİN İNDEKSİ

Sturmian kelimeler $n \geq 0$ olmak üzere n uzunluklu $(n+1)$ tane çarpanlı, ikili alfabe üzerindeki sonsuz kelimelerdir. Sturmian kelime tanımlamanın farklı yolları vardır. Önceki bölümlerde bunlardan bazılarına değinilmiştir. Bu bölümde Sturmian kelimelerin indeksleri üzerinde durulacaktır.

x sonsuz bir kelime ve $F(x)$ de x'in çarpanlarının kümesi olsun. $w \in F(x)$ için, x içindeki w'nın indeksi $w^d \in F(x)$ şeklindeki en büyük d tamsayısıdır. Böyle bir d tamsayısı yoksa w sonsuz indekse sahiptir.

x'in boştan farklı her çarpanı d'ye eşit ya da d'den küçük indekse sahip ise, x sonsuz kelimesinin sınırlı indeksi vardır.

Teorem 6.1: Bir Sturmian kelimenin sınırlı indekse sahip olması için gerek ve yeter şart eğiminin sürekli kesir açılımının sınırlı kısmi bölümlere sahip olmasıdır[10].

Tanım 6.1: $w = (xy)^n x$ formundaki bir kelime $w = u^r$ şeklinde yazılabilir. Burada $u = xy$ ve $r = n + |x|/|u|$'dur. r rasyonel sayısına u'nun üssü denir ve w'ya kesirsel kuvvet denir. Eğer u ilkel ise, r, w kesirsel kuvvetinin köküdür[10].

Tanım 6.2: x sonsuz kelime olsun. $w \in F(x)$ için, x içindeki w'nın indeksi

$$ind(w) = \sup\left\{ r \in Q \;\middle|\; w^r \in F(x) \right\}$$

eşitliğini sağlayan sayıdır. Böyle bir sayı bulunamazsa, w sonsuz indekse sahiptir[6].

Tanım 6.3: x'in öneki olan w^r'deki en büyük r tamsayısına önek indeks denir ve $pind(w)$ şeklinde gösterilir[2].

Önek indeks daima sonludur. x'in ilk harfi ile w'nın ilk harfi farklı ise önek indeks sıfırdır.

Önerme 6.1: s Sturmian kelimesinin boştan farklı her çarpanı s'de sonlu indekse sahiptir[10].

İspat: Tersini kabul edelim. s Sturmian kelime ve s'nin boştan farklı çarpanı u olsun. Her $n \geq 1$ için u^n, s'nin çarpanı olsun. Sonuç olarak u^w periyodik kelimesi s tarafından üretilen dinamik sistemdedir. Çünkü bu sistem minimal olduğundan $F(s) = F(u^w)$ olur.

x'in boştan farklı her çarpanı d'den küçük veya d'ye eşit olacak biçimde bir d sayısı varsa, x sonsuz kelimesi sınırlı indekse sahiptir.

Eğer x sınırlı indekse sahipse, en üst sınır irrasyonel olabilir. Örneğin, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere Mignosi ve Prillo, Fibonacci kelimesinin sınırını $2+\tau$ olarak hesaplamıştır[10].

$(s_n)_{n\geq -1}$, $\alpha = [0,1+d_1,d_2,...]$ olmak üzere c_α karakteristik kelimesinin standart dizisi olsun.

$n \geq 3$ için ($d_1 \geq 1$ ise $n = 2$ için)

$$t_n = s_{n-1}^{d_{n-1}} s_{n-2} s_{n-1}$$

ve $n \geq 0$ için;

$$p_n = s_{n-1}{}^{d_n} s_{n-2}{}^{d_{n-1}} ... s_0{}^{d_1}$$

kümeleri tanımlansın. Özel olarak $p_0 = \varepsilon$'dur. $s_{-1} = b,\ s_0 = a,\ s_n = s_{n-1}^{d_n} s_{n-2},\ n \geq 1$ eşitsizliklerinden t_n kelimesi s_n'nin eşleniği olur. Bunu aşağıdaki lemmada ifade edebiliriz.

Lemma 6.1: i) $n \geq 3$ için;

$$s_n s_{n-1} = s_{n-1} t_n \ ,\ s_{n-1} s_n = s_n t_{n-1}$$

dir. Ayrıca $d_1 \geq 1$ ise $n = 2$ için.

ii) $n \geq 0$ için;

$$s_n s_{n-1} = \begin{cases} p_n ba & \text{n tek ise} \\ p_n ab & \text{n çift ise} \end{cases}$$

$$s_{n-1} s_n = \begin{cases} p_n ab & \text{n tek ise} \\ p_n ba & \text{n çift ise} \end{cases}$$

İspat: i)

$$s_n s_{n-1} = s_{n-1}^{d_n} s_{n-2} s_{n-1} = s_{n-1} t_n$$
$$s_{n-1} s_n = s_{n-1}^{d_n} s_{n-1} s_{n-2} = s_{n-1}^{d_n} s_{n-2} t_{n-1} = s_n t_{n-1}$$

ii) $s_0 = 0$ ve $s_{-1} = 1$ iken, eşitlikler $n = 0$ için sağlanır.

$$s_1 s_0 = s_0^{d_0} ba = p_0 ba \ ,\ s_0 s_1 = s_0^{d_0} ab = p_0 ab$$

çift ve $n \geq 2$ için,

$$s_n s_{n-1} = s_{n-1}^{d_n} s_{n-1} s_{n-2} = s_{n-1}^{d_n} p_{n-1} ab$$

ve $p_n = s_{n-1}^{d_n} p_{n-1}$ iken ilk formül elde edilir. Diğer eşitlikler de aynı yolla doğrulanabilir[10].

Sonuç 1: s_n ve t_n kelimeleri birbirlerinden son iki harfleriyle ayrılırlar.

İspat: Önceki lemmaya göz atılırsa;

$$s_{n+1} = s_n^{\,d_{n+1}-1} s_n s_{n-1} = s_n^{\,d_{n+1}-1} p_n ab$$
$$t_{n+1} = s_n^{\,d_{n+1}-1} s_{n-1} s_n = s_n^{\,d_{n+1}-1} p_n ba$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 6.1: $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = [0;2,1,2,1...]$ ve yönlendirici dizi $(1,1,2,1,2,1,.....)$'dir.

	$s_o = a$	$p_0 = \varepsilon$
$d_1 = 1$	$s_1 = ab$	$p_1 = a$
$d_2 = 1$	$s_2 = aba$	$p_2 = aba$
$d_3 = 2$	$s_3 = abaabaab$	$p_3 = abaabaaba$
$d_4 = 1$	$s_4 = abaabaababa$	$p_4 = abaabaababaabaaba$
$d_5 = 2$	$s_5 = abaabaababaabaabaababaabaabaab$	

$q_{-1} = q_0 = 1$, $q_{n+1} = d_{n+1} q_n + q_{n-1}$

şeklinde tanımlanan tamsayıların dizisi olan (q_n), s_n'nin uzunluğudur.

Önerme 6.2: p_{n+1} kelimesi standart c_α kelimesinin öneki olan s_n'nin, en büyük rasyonel kuvvetidir. s_n'nin önek indeksi $1 + d_{n+1} + \left(\dfrac{q_{n-1}-2}{q_n}\right)$'dir[10].

İspat: $s_{n+1}s_n$ karakteristik c_α kelimesinin önekidir.

$$s_{n+1}s_n = s_n^{\,d_{n+1}} s_{n-1}s_n = s_n^{\,1+d_{n+1}} t_{n-1}$$

iken $s_n^{\,1+d_{n+1}}$ kelimesi c_α'nın önekidir. Ayrıca t_{n-1}, s_n'nin öneki değildir. s_n'nin öneki olan s_{n-1} kelimesi ve t_{n-1} ile aynı uzunluğa sahiptir. t_{n-1}'in en uzun ortak öneki h_n dir ve s_{n-1}'in uzunluğu $q_{n-1}-2$'dir ve

$$s_{n+1}s_n = s_n^{\,1+d_{n+1}} t_{n-1} = p_{n+1}ab$$

iken c_α'nın öneki olan s_n'nin en uzun kuvveti p_{n+1}'dir.

$|p_{n+1}| = q_{n+1}+q_n-2 = (d_{n+1}+1)q_n + q_{n-1} - 2$ iken s_n'nin üstü $1+d_{n+1}+(q_{n-1}-2)/q_n$ dir[10].

Örnek 6.2: $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = [0;2,1,2,1...]$ ve yönlendirici dizi $(1,1,2,1,2,1,.....)$'dır.

	$s_o = a$	$p_0 = \varepsilon$
$d_1 = 1$	$s_1 = ab$	$p_1 = a$
$d_2 = 1$	$s_2 = aba$	$p_2 = aba$
$d_3 = 2$	$s_3 = abaabaab$	$p_3 = abaabaaba$
$d_4 = 1$	$s_4 = abaabaababa$	$p_4 = abaabaababaabaaba$
$d_5 = 2$	$s_5 = abaabaababaabaaba....$	

$q_{-1} = q_0 = 1$, $q_{n+1} = d_{n+1}q_n + q_{n-1}$ idi. Buna göre;

$q_1 = 1.1+1 = 2$
$q_2 = 1.2+1 = 3$
$q_3 = 2.3+2 = 8$
$q_4 = 1.8+3 = 11$
...

$n=3$ için $s_3 = abaabaab$ kelimesi c_α karakteristik dizisinin önekidir.

$$p_{3+1} = p_4 = abaabaababaabaaba$$

s_3'ün en büyük rasyonel kuvvetidir. s_3'ün önek indeksi yukarıdaki önerme yardımıyla hesaplanırsa;

$$1+d_{n+1}+\left(\frac{q_{n-1}-2}{q_n}\right)=1+d_{3+1}+\left(\frac{q_{3-1}-2}{q_3}\right)$$

$$=1+1+\left(\frac{3-2}{8}\right)$$

$$=2+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{17}{8}$$

olur.

$n=4$ için $s_4 = abaabaababa$ olup;

$$p_5 = abaabaababaabaabaababaabaabaababaabaaba$$

s_4'ün önek indeksi

$$1+d_{n+1}+\left(\frac{q_{n-1}-2}{q_n}\right)=1+d_5+\left(\frac{q_3-2}{q_4}\right)$$

$$=1+2+\left(\frac{8-2}{11}\right)$$

$$=3+\frac{6}{11}=\frac{39}{11}$$

olur. Diğer terimler içinde bu formül kullanılarak hesaplamalar yapılabilir.

Önerme 6.3: Her Sturmian kelime küpler içerir. Karakteristik c_α kelimesinin içindeki çarpan olan s_n'nin indeksi en az $1+d_{n+1}+(q_{n-1}-2)/q_n$'dir[10].

İspat: $\delta_n = 1+d_{n+1}+(q_{n-1}-2)/q_n$. s_{n+4}'ün s_n'nin $1+\delta_n$ üstünün kuvvetini içerdiğini göstermeliyiz.

$$s_{n+4} = s_{n+3}^{d_{n+4}-1} s_{n+3} s_{n+2} = s_{n+3}^{d_{n+4}-1} s_{n+2} t_{n+3}$$

s_{n+4}'ün $s_{n+2}t_{n+3}$ soneki istenen kuvveti içerir. Gerçekten s_{n+2}, s_n ile sonlanır ve t_{n+3}, s_{n+3} ile $q_{n+3}-2$ uzunluklu öneki paylaşır. Şimdi p_{n+1}, $q_{n+1}+q_n-2$ uzunluklu c_α'nın önekidir ve $q_{n+1}+q_n < q_{n+3}$ iken, $s_{n+2}t_{n+3}$'ün çarpanı $s_n p_{n+1}$'dir, ve s_{n+4}'ün de çarpanıdır.

Önerme 6.4: $c = c_\alpha$'da ilkel çarpan w olsun ve $ind(w) \geq 4$ olduğunu farz edelim. w'nın eşlenikleri boyunca maksimal indekse sahip olduğunu kabul edelim. w, s_n için bir tanedir[10].

İspat: $1+d = ind(w)$ kümesi, $w = za$ kümesi a harfi ile w^{d+1}'in oluşumundan önceki harf b olsun. $a \neq b$ iken aksi taktirde az eşleniği en büyük indekse sahip olur. Böylece aw^d ve bw^d c'nin çarpanlarıdır. w^d sol özel çarpandır ve bu nedenle w^d c'nin önekidir.

s_n, w^2'nin öneki iken n en büyük tamsayı olsun $(2 \leq d)$. s_n ilkel iken, $s_n \neq w^2$'dir. s_n'nin öneki w ise ya $w = s_n$'dir ve önerme ispatlanır ya da boş olmayan u, v için $w = uv$ faktorizasyonu vardır. Burada $s_n = wu$'dur. Sonra s_n w, w^3'ün önekidir. Böylece bazı z kelimeleri için $s_n wz = w^3$ olur. $s_n wz = wuuvz$ ve $w^3 = wuvuv$'dir ki $uv = vu$'dur. w ilkel olduğundan bu olabilir.

Böylece s_n, w'nın uygun önekidir. w^2, s_{n+1}'in ve p_{n+1}' in uygun önekidir. Böylece bazı $k > 2$ için $w^2 z = s^k$'dır. w ve s_n aynı kelimelerin kuvvetleridir ve ilkel olduklarında eşittirler.

İspat (Teorem 6.1): Bir Sturmian kelime aynı eğimli karakteristik kelime gibi aynı çarpanlara sahip iken sonucun karakteristik kelimeler için ispatı yeterlidir. $\alpha = [0,1+d_1,d_2,...]$ eğimli karakteristik kelime c olsun. $(s_n)_{n\geq -1}$ birleştirilmiş standart dizi olsun.

Her bir $n \geq 1$ için $s_n^{d_{n+1}}$, c'nin önekidir. Bu, durumu ispatlamak için yeterlidir. Sonuç olarak eğer kısmi bölümlerin (d_n) dizisi sınırsız ise, sonsuz c kelimesi keyfi en büyük indeksli çarpanlara sahiptir.

Tersine, farz edelim ki, c sınırsız indekse sahip olsun. Bu durumda keyfi yüksek indeksli w kelimeleri mevcuttur. Önceki önermeden, standart dizi içinde, keyfi yüksek indeksli s_n kelimeleri vardır. s_n'nin önek indeksi $1+d_{n+1}+(q_{n-1}-2)/q_n$ iken d_{n+1} kısmi bölümleri sınırsızdır. Bu ispatı tamamlar[10].

Teorem 6.2: α eğimli s Sturmian dizisinin indeksi

$$ind(s) = \max\left\{a_1, 2+\sup_{n\in N}\{a_{n+1}+(q_{n-1}-2)/q_n\}\right\}$$

dir[6].

Örnek 6.3: Fibonacci dizisinin indeksi $2+(\sqrt{5}+1)/2$'dir[6].

$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = [1,1,1,1,1,1,...]$ olmak üzere;

$$q_0 = 1$$
$$q_1 = 1$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

dır.

$q_0 = 1$	$q_{11} = 144$	$q_{21} = 17711$	$q_{31} = 2178359$	$q_{41} = 267920396$
$q_1 = 1$	$q_{12} = 233$	$q_{22} = 28657$	$q_{32} = 3524658$	$q_{42} = 422504307$
$q_2 = 2$	$q_{13} = 377$	$q_{23} = 46368$	$q_{33} = 5703017$	$q_{43} = 701424703$
$q_3 = 3$	$q_{14} = 610$	$q_{24} = 75025$	$q_{34} = 9227675$	$q_{44} = 1134929010$
$q_4 = 5$	$q_{15} = 987$	$q_{25} = 121393$	$q_{35} = 14930692$	$q_{45} = 1836353713$
$q_5 = 8$	$q_{16} = 1597$	$q_{26} = 196418$	$q_{36} = 24158367$	$q_{46} = 2971282723$
$q_6 = 13$	$q_{17} = 2584$	$q_{27} = 317821$	$q_{37} = 39089059$	$q_{47} = 4807636436$
$q_7 = 21$	$q_{18} = 4181$	$q_{28} = 514239$	$q_{38} = 63247426$	$q_{48} = 7778919159$
$q_8 = 34$	$q_{19} = 6765$	$q_{29} = 832060$	$q_{39} = 102336485$	$q_{49} = 12586555595$
$q_9 = 55$	$q_{20} = 10946$	$q_{30} = 1346299$	$q_{40} = 165583911$	$q_{50} = 20365474754$
$q_{10} = 89$				

$n = 1$ için $a_2 + \dfrac{(q_0 - 2)}{q_1} = 1 + \dfrac{1-2}{1} = 0$

$n = 2$ için $a_3 + \dfrac{(q_1 - 2)}{q_2} = 1 + \dfrac{1-2}{2} = 1 + \dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$n = 3$ için $a_4 + \dfrac{(q_2 - 2)}{q_3} = 1 + \dfrac{2-2}{3} = 1$

$n = 4$ için $a_5 + \dfrac{(q_3 - 2)}{q_4} = 1 + \dfrac{3-2}{5} = 1 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{6}{5}$

$n = 5$ için $a_6 + \dfrac{(q_4 - 2)}{q_5} = 1 + \dfrac{5-2}{8} = \dfrac{11}{8}$

$n = 6$ için $a_7 + \dfrac{(q_5 - 2)}{q_6} = 1 + \dfrac{8-2}{13} = \dfrac{19}{13}$

$n = 7$ için $a_8 + \dfrac{(q_6 - 2)}{q_7} = 1 + \dfrac{13-2}{21} = \dfrac{32}{21} \cong 1{,}52$

$n = 8$ için $a_9 + \dfrac{(q_7 - 2)}{q_8} = 1 + \dfrac{21-2}{34} = \dfrac{53}{34} \cong 1{,}558$

$n=9$ için $a_{10}+\dfrac{(q_8-2)}{q_9}=1+\dfrac{34-2}{55}=\dfrac{87}{55}\cong 1{,}5818$

$n=10$ için $a_{11}+\dfrac{(q_9-2)}{q_{10}}=1+\dfrac{55-2}{89}=\dfrac{142}{89}\cong 1{,}595$

$n=11$ için $a_{12}+\dfrac{(q_{10}-2)}{q_{11}}=1+\dfrac{89-2}{144}=\dfrac{231}{144}\cong 1{,}604$

$n=12$ için $a_{13}+\dfrac{(q_{11}-2)}{q_{12}}=1+\dfrac{144-2}{233}=\dfrac{375}{233}\cong 1{,}609$

$n=13$ için $a_{14}+\dfrac{(q_{12}-2)}{q_{13}}=1+\dfrac{233-2}{377}=\dfrac{608}{377}\cong 1{,}6127$

$n=14$ için $a_{15}+\dfrac{(q_{13}-2)}{q_{14}}=1+\dfrac{377-2}{610}=\dfrac{985}{610}\cong 1,6147$

….

$n=17$ için $a_{18}+\dfrac{(q_{16}-2)}{q_{17}}=1+\dfrac{1597-2}{2584}=\dfrac{4179}{610}\cong 1{,}61726$

$n=18$ için $a_{19}+\dfrac{(q_{17}-2)}{q_{18}}=1+\dfrac{2584-2}{4181}=\dfrac{6763}{4181}\cong 1{,}61726$

…

$n=28$ için $a_{29}+\dfrac{(q_{27}-2)}{q_{28}}=1+\dfrac{317821-2}{514239}=\dfrac{317819}{514239}\cong 1{,}61803752$

$n=46$ için $a_{47}+\dfrac{(q_{45}-2)}{q_{46}}=1+\dfrac{1836353713-2}{2971282723}=\dfrac{1836353711}{2971282723}\cong 1{,}618033988077$

$n=50$ için

$$a_{51}+\frac{(q_{49}-2)}{q_{50}}=1+\frac{125865555595-2}{203365474754}=\frac{125865555593}{203365474754}\cong 1{,}618033988700$$

…..

Hesaplamalara göre $a_{n+1}+(q_{n-1}-2)/q_n$ değeri 1,6180339887498… = $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ye yaklaşmaktadır. $a_{n+1}+(q_{n-1}-2)/q_n$ ifadesi üstten sınırlıdır. Bu üst sınırların en küçüğü 1,6180339887498… = $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ olduğundan $\sup_{n\in N}\{a_{n+1}+(q_{n-1}-2)/q_n\}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

alınırsa, $ind(s) = \max\left\{a_1, 2 + \sup_{n \in N}\{a_{n+1} + (q_{n-1} - 2)/q_n\}\right\}$ olmak üzere;

$ind(s) = \max\left\{1, 2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$ yani; Fibonacci dizisinin indeksi $2 + (\sqrt{5}+1)/2$ olur.

BÖLÜM 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma Sturmian dizilerinin adlanımları üzerine kuruldu. Sturmian dizilerinin özelliklerine bakıldı. Ayrıca Sturmian dizilerinin çarpanlarına ayrılması ve indeksi üzerinde duruldu.

Düzlemdeki doğrular ile Sturmian dizilerinin ilişkisi kuruldu. Sturmian dizilerinin geometrik bir yorumu yapılarak $y = \beta x$ ışınının β' nın irrasyonel değerleri için asla köşelerde kesişmeyeceği ve açının 45° den büyük olması durumunda yatay çizgilerin dikey çizgilerden daha fazla kesildiği sonuçları elde edildi.

4. bölümde sonlu durumlarda α morfizmalarının bileşimleri üzerinde duruldu.

$$\pi = \{(p_1, p_1'), (p_2, p_2'), \ldots\}$$

Tanımlı dizisi tarafından karakterize edilen

$$\alpha_{\pi}' = \ldots \circ \alpha_{(p_n, p_n')} \circ \ldots \circ \alpha_{(p_2, p_2')} \circ \alpha_{(p_1, p_1')}$$

Bileşimi üzerine çeşitli düşünceleri içeren aşağıdaki gibi bazı kabullere sahibiz.

i) π üzerindeki (p, p') değer ikililerinin üzerinde sınırlama olmamakla beraber her sonsuz tanımlı π dizisi için α_{π}' Sturmian dizi üretir.

ii) π tanımlı dizisi kesin bir noktadan sonra aynı (p, p') değer ikililerine sahiptir bu nedenle

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{(p_n,p'_n)} \circ \ldots \circ \alpha_{(p_2,p'_2)} \circ \alpha_{(p_1,p'_1)}(a)$$

limiti mevcuttur ve bu nedenle α'_π Sturmian dizi üretir. Bazı noktalardan sonra tekrar eden (p, p') değer ikililerinin sonlu dizisine sahip olan sonsuz tanımlı bir dizi üzerine araştırmamızı genişlettik. Böylece $\alpha'_{\pi_p}(a)$' nın Sturmian dizi tanımladığını söyleme imkânımız oldu[3].

5. bölümde bazı Sturmian kelimelerin faktorizasyonu üzerinde duruldu. Bilinen diğer sonsuz kelimeler için benzer sonuçlar mevcuttur. Fakat otomatik kelimelerin *c* faktorizasyonunun tam bir karakterizasyonu henüz bulunamamıştır. Bu çalışmamız temel alınarak diğer kelimelerin faktorizasyonları da araştırılabilir.

6. bölümde ise Sturmian dizilerinin indeksi üzerine duruldu. İndeks hesaplamasıyla ilgili önemli bir teorem verildi. Bu çalışmanın devamı niteliğinde olan başka bir çalışmada, bu teoremin ispatı ve diziler üzerine uygulamaları yapılabilir.

Çalışmamız tanımlı dizi ile verilen Sturmian dizinin bir algoritmasının formülasyonu için ya da Sturmian dizilerin burada verilen formülasyonu ile diğer formülasyonları arasındaki ilişkinin analizi için gelecek çalışmalara yol gösterebilir.

Bu tezin Sturmian dizileriyle ilgili olan yeni sonuçlara ayrıca diğer kelimelerinin faktorizasyonlarına ve Lyndon faktorizasyonu gibi diğer konulara ilişkin araştırmalara bir zemin hazırlayabileceği düşünülebilir.

KAYNAKLAR

[1] DE LUCA, A., MIGNOSI, F., Some Combinatorial Properties of Sturmian Words. Theoritical Computer Science, Vol.136, pp.361-385, 1994.

[1] GLEN, A., On Sturmian and Episturmian words, and related topics. Doctor of Philosophy, School of Mathematical Sciences Dicipline of pure Mathematics. The University of Adelaida, Australia, 2006.

[2] KARAMAN, A., Representations of Sturmian strings.Master of Science, McMaster University, 1998.

[3] KARAMAN, A., SMYTH, W-F., A Representation of Sturmian strings. McMaster University, 1998.

[4] KARAMAN, A., SMYTH, W-F., FRANEK, F., Repetitions in Sturmian strings. McMaster University, 1998.

[5] DAMANIK, D., LENZ, D., The index of Sturmian sequences. Preprint(2000).http://citeseer.ist.psu.edu/damanik00index.html, Nisan 2008

[6] MIGNOSI, F., On The Number of Factors of Sturmian Words. Theoretical Computer Science, Vol. 82, pp.71-84, 1991.

[7] BERSTEL, J., Recent results in Sturmian words. Developments in Language Theory, World Scientific. 13-24, 1996.

[9] BERSTEL, J., Factorizations of infinite words. www.tucs.fi/publications/attachment.php?fname=G43.pdf , Mart, 2008.

[10] BERSTEL, J., On the index of Sturmian words. In Jewels are forever, Berlin, 287-294, 1999.

[11] BERSTEL, J., Recent Results on Extensions of Sturmian Words. İnt. J. Algebra Comput. 371-385, 2002.

[12] BERSTEL, J., SAVELLİ, A., Crochemore Factarization of Infinite Words http://lonati.dsi.unimi.it/miurvarese06/talks/savelli.pdf, Mart, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Şerife KAÇMAZ, 18.10.1982'de Antalya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Antalya'da tamamladı. 2000 yılında Aksu Anadolu Öğretmen Lisesi, Sayısal Bölümünden mezun oldu. 2000 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü 2005 yılında bitirdi. 2005 yılında KPSS sınav sonuçlarına dayanarak MEB tarafından Sakarya'nın Akyazı ilçesine matematik öğretmeni olarak atandı. 2006 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'ne yüksek lisans öğrencisi olarak başladı. Şu anda Tekirdağ Çerkezköy Halit Narin METEM'de Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.