T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MÖBİÜS DÖNÜŞÜMLERİ İLE SÜREKLİ KESİRLERİN İLİŞKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fuat ÇINAR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. SERPİL HALICI

Eylül 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MÖBİÜS DÖNÜŞÜMLERİ İLE SÜREKLİ KESİRLERİN İLİŞKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fuat ÇINAR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 09 / 09 /2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Doç. Dr.**	**Doç. Dr.**
Serpil HALICI	**Halim ÖZDEMİR**	**Mehmet BEKTAŞOĞLU**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Sürekli kesirler sayılar teorisinin önemli bir konusudur. Sonsuz sürekli kesirler (periyodik veya değil); cebirsel veya transandantal sayıların yaklaşık değerlerinin hesaplanmasında sıkça kullanılmaktadır. Möbiüs dönüşümleri yardımıyla sürekli kesirlerin yaklaşık değerlerini daha pratik bir şekilde hesaplayabiliriz.

Bu çalışmanın amacı; sürekli kesirler ile Möbiüs dönüşümleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır.

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen hocam; Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI ya şükran ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, desteklerini her zaman yanımda hissettiğim değerli eşime ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ…………………….. ii
İÇİNDEKİLER iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ... v
ÖZET.. vi
SUMMARY.. vii

BÖLÜM 1.
GİRİŞ VE SÜREKLİ KESİRLER…….. 1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler.. 1
1.2. Sonlu Sürekli Kesirler... 3
1.3. Sonsuz Sürekli Kesirler….. 20
1.4. Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler….. 34

BÖLÜM 2.
MÖBİÜS DÖNÜŞÜMLERİ.. 40
2.1. Möbiüs Dönüşümleri ……….. 40
2.2. Özel Möbiüs Dönüşümleri………... 42
2.3. Bir Möbiüs Dönüşümünün Sabit Noktaları..................................... 51
2.4. Doğrusal Dönüşümler ve Çemberler…….. 57
2.5. Çapraz Oran………………………….. 60
2.6. Sembolik Gösterim……………………….. 60

BÖLÜM 3.
MÖBİÜS DÖNÜŞÜMLERİ İLE SÜREKLİ KESİRLER ARASINDAKİ İLİŞKİ…………………………………………………………………… 64
3.1. Möbiüs Dönüşümlerinin Bileşimi Olarak Sürekli Kesirler 64

3.2. Möbiüs Dönüşümleri ve Matrisler.. 66

BÖLÜM 4.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER………………………………………………... 76

KAYNAKLAR……………………………………………………………….. 82
ÖZGEÇMİŞ…………………………………………….………………….. 83

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
∞	: Sonsuz
$\perp$	: Belirsiz
$[\ ]$	: Sürekli kesir
$\mathbb{R}_{\perp}^{*}$	: Genişletilmiş reel sayılar
C_n	: Sonsuz sürekli kesrin n. inci yakınsaklığı
$a \mid b$	: a böler b
$\lvert\ \rvert$	: Mutlak değer
$[\![\ ]\!]$	: Tam değer
$\in$	: Elemanıdır

ÖZET

Anahtar kelimeler: Öklid Algoritması, Sürekli Kesirler, Sonsuz Sürekli Kesirler, Sürekli Kesirlerin Yaklaşımları, Periyodik Sürekli Kesirler, Möbiüs Dönüşümleri

Bu çalışmada, sürekli kesirlerin önemli özellikleri incelenerek Möbiüs Dönüşümü ile ilişkisi araştırıldı.

Birinci bölümde, Öklid Algoritması yardımıyla, rasyonel sayıların, sonlu sürekli kesir biçiminde yazılması incelendi. Buradan da her rasyonel sayının, sonlu sürekli kesir olarak ifade edilebileceği gösterildi.Ayrıca, sonsuz sürekli kesirler ve alt konusu olan periyodik sürekli kesirler incelendi. Herhangi bir irrasyonel sayının sonsuz sürekli kesir biçiminde yazılabileceği ve sonsuz sürekli kesirlerinde bir irrasyonel sayı olduğu gösterildi. Aynı zamanda, irrasyonel sayılara en iyi yaklaşımın nasıl olması gerektiği incelendi.

İkinci bölümde, möbiüs dönüşümleri, özel möbiüs dönüşümleri, bir möbiüs dönüşümünün sabit noktalarının bulunması konuları işlendi.

Üçüncü bölümde ise, birinci ve ikinci bölümde temel tanım ve teoremleri verilen, sürekli kesirler ile möbiüs dönüşümleri arasındaki ilişki incelendi.

Dördüncü bölümde de, bu üç bölümden çıkan sonuçlar gösterildi.

THE RELATİONSHIP BETWEEN CONTİNOUS FRACTIONS AND THE MOBIUS TRANSFORMATİONS

SUMMARY

Key Words: Euclid Algorithm, Continous Fractions, Infinite Contınous Fractions, Convergence of Continous Fractions, Periodic Continous Fractions, Mobius Transformations.

In this study, some important specialities of continous fractions are analysed and their relationshıp with the Mobius Transormations are examined.

In the first section, with the help of Euclid Algorithm, the way of how rational numbers can be written as finite continous fractions are examined. From this approach, it is shown that every rational number can be defined as finite continous fraction.

In the second section, infinite continous fractions and periodic continous fractions are analysed. Here, it is tried to show that any irrational number can be written as infinite continous fraction and infinite continous fractions are also irrational numbers. At the same time, how the best approach be for irrational numbers is also examined.

In the third section, the relationship between continous fractions and the Mobius Transormations is analysed.

In the fourth and the last section, the findings are summed up and the results are shown.

BÖLÜM 1. GİRİŞ VE SÜREKLİ KESİRLER

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Sürekli kesirler sayılar teorisinin önemli bir konusudur. Sonsuz sürekli kesirler (periyodik veya değil); cebirsel veya transandantal sayıların yaklaşık değerlerinin hesaplanmasında sıkça kullanılmaktadır. Möbiüs dönüşümleri yardımıyla sürekli kesirlerin yaklaşık değerleri daha pratik bir şekilde hesaplanabilir.

Bu çalışmanın amacı; sürekli kesirler ile Möbiüs dönüşümleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır.

Bu bölümde; konunun açıklanmasında yardımcı olacak bazı önemli tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. a, b tamsayı olmak üzere $b = a \cdot k$ olacak biçimde bir k tamsayısı varsa a, b yi böler denir ve bu durum $a \mid b$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.1.

(i) $a \mid b$ ise $a \mid b.c$

(ii) $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$

(iii) $a \mid b$ ise $|a| \le |b|$

(iv) $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $\forall\ x,y \in \mathbb{Z}$ için $a \mid bx+cy$

(v) $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise $a = \pm b$

dir.

Önerme 1.1.2. $\forall$ a,b $\in$ $\mathbb{Z}$, $b \neq 0$ için $a = qb + r$ ve $0 \leq r < |b|$ olacak şekilde tek türlü yazılabilen q,r $\in$ $\mathbb{Z}$ vardır.

Tanım 1.1.2. a,b $\in$ $\mathbb{Z}$ olsun.

(i) $d \mid a$ ve $d \mid b$ ise d ye, a ile b nin ortak böleni denir.

(ii) d, a ve b nin pozitif ortak böleni olsun. Eğer a ve b nin, her c ortak böleni için $c \mid d$ ise; d ye, a ve b nin en büyük ortak böleni denir. $d = (a, b)$ ile gösterilir.

a, b ve kalanları ile aşağıdaki işlemler yapılırsa;

$$
\begin{array}{lcl}
a = q_1 b + r_1 & , & 0 < r_1 < b \\
b = q_2 r_1 + r_2 & , & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = q_3 r_2 + r_3 & , & 0 < r_3 < r_2 \\
 & \vdots & \\
r_{k-1} = q_{k+1} r_k + r_{k+1} & , & 0 < r_{k+1} < r_k \\
r_k = q_{k+2} r_{k+1} + 0 & &
\end{array}
$$

elde edilir. Son işlem, kalan 0 olunca biter. Burada kalanlar giderek küçüldüğünden dolayı yani;

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

olduğundan sonlu adım sonunda, kalan 0 olarak elde edilir.

Teorem 1.1.1. Öklid(Euclid) Algoritması: Yukarıda yapılan işlemlerde, 0 dan farklı olan en son kalan, a ve b nin en büyük ortak bölenidir. Buradan;

$$r_{k+1} = (a, b)$$

yazılır[1].

Önerme 1.1.3. $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ ve bölme algoritması

$$a = q_1 b + r_1 \quad , \quad 0 < r_1 < b$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad , \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad , \quad 0 < r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

ise, $\frac{a}{b}$ kesirli ifadesi;

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ddots}}}$$

biçiminde yazılır[5].

1.2. Sonlu Sürekli Kesirler

Tanım 1.2.1. $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ve ilk terim a_0 hariç hepsi pozitif olmak üzere;

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

biçiminde yazılabilen ifadeye sonlu sürekli kesir denir. $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ reel sayılarına sürekli kesrin kısmi bölümleri denir. $a_0 \in \mathbb{Z}^+$ ve $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ ise bu sürekli kesre basit sürekli kesir denir. Sürekli kesirlerin bu şekilde alt alta tamamının yazılması uzun olduğundan $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ biçimde gösterilir. Bu bölümde sadece basit sürekli kesirlere yer verileceğinden; sürekli kesir ifadesi ile basit ve pozitif terimli olanlar kast edilecektir.

Sonlu sürekli kesirler aşağıdaki biçimde gösterilir;

$$[a_0] = a_0$$

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$\vdots$$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right] \quad , \qquad n \geq 2$$

Öklid Algoritması yardımıyla kesirli(rasyonel) sayılar sonlu sürekli kesir olarak gösterilebilir. Örneğin Öklid Algoritması kullanılarak $\frac{715}{83}$ kesri;

$$715 = 83 \cdot 8 + 51 \quad , \qquad \frac{715}{83} = 8 + \frac{51}{83} = 8 + \frac{1}{\frac{83}{51}}$$

$$83 = 51 \cdot 1 + 32 \quad , \qquad \frac{83}{51} = 1 + \frac{32}{51} = 1 + \frac{1}{\frac{51}{32}}$$

$$51 = 32 \cdot 1 + 19 \quad , \qquad \frac{51}{32} = 1 + \frac{19}{32} = 1 + \frac{1}{\frac{32}{19}}$$

$$32 = 19 \cdot 1 + 13 \quad , \qquad \frac{32}{19} = 1 + \frac{13}{19} = 1 + \frac{1}{\frac{19}{13}}$$

$$19 = 13 \cdot 1 + 6 \quad , \quad \frac{19}{13} = 1 + \frac{6}{13} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{6}}$$

$$13 = 6 \cdot 2 + 1 \quad , \quad \frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{\frac{6}{1}}$$

$$6 = 1 \cdot 6$$

şeklinde yazılır. Buradan da;

$$\frac{715}{83} = 8 + \frac{1}{\frac{83}{51}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{51}{32}}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{19}{13}}}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{6}}}}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}}$$

sürekli kesri elde edilir.

Teorem 1.2.1. Her sonlu basit sürekli kesir bir rasyonel sayı gösterir[4].

İspat: Tümevarım yöntemi ile ispatlanabilir;

n=1 için,

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

ifadesi bir rasyonel sayıdır.

İlk terimi olan a_0 tamsayısı dışında kalan diğer $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ terimleri pozitif tamsayı ve k pozitif tamsayısı için; $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k]$ sürekli kesrinin bir rasyonel sayı olduğu kabul edilir.

$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}]$ sürekli kesrinin bir rasyonel sayı olduğu gösterilmelidir:

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1} \in \mathbb{Z}$ ve $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}$ pozitif olsun.

$[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}]$ sürekli kesri Tanım1.2.1. e göre bir rasyonel sayıdır. O halde $q \neq 0$ olmak üzere, $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}] = \frac{p}{q}$ olacak şekilde p ve q tamsayıları vardır. O halde;

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}]} = a_0 + \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{a_0 \cdot p + q}{p}$$

rasyonel sayısı elde edilir.

Teorem 1.2.2. Her rasyonel sayı, sonlu basit sürekli kesir olarak gösterilebilir[8].

İspat: b>0 ve $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x = \frac{a}{b}$ olsun. $a = r_0$, $b = r_1$ alınsın. Öklid Algoritması yardımıyla, x in açılımı yapılırsa;

$$\begin{array}{lcl}
r_0 = q_1 r_1 + r_2 & , & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = q_2 r_2 + r_3 & , & 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 = q_3 r_3 + r_4 & , & 0 < r_4 < r_3 \\
 & \vdots & \\
r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n & , & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = q_n r_n + 0 & &
\end{array}$$

elde edilir. Burada $q_2, q_3, \ldots, q_n$ pozitif tamsayılardır. Her bir ifade kesir şeklinde yazılırsa,

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

$$\frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}}$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n$$

elde edilir. İkinci denklemde $\frac{r_1}{r_2}$ nin değeri birinci denklemde ve benzer şekilde diğer oranlarda sırasıyla yeni elde edilen sürekli kesirde yerine yazılırsa,

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\frac{r_3}{r_4}}}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

elde edilir. Buradan da, $\frac{a}{b}$ kesrinin $[q_1;q_2,q_3,\ldots,q_n]$ şeklinde bir sürekli kesir ifadesi elde edilir. Bu da her rasyonel sayının sonlu basit sürekli kesir olarak yazılabileceğini gösterir.

Bir rasyonel sayının sürekli kesirlere açılımı farklı şekillerde de bulunabilir;

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$$

ifadesinden devam edilirse,

$$[a_0;a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n] = [a_0;a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n - 1,1]$$

elde edilir. Burada $a_n = 1$ alınırsa,

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1$$

Bulunur. Buradan da,

$$[a_0;a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n] = [a_0;a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1} + 1]$$

elde edilmiş olur.

Önerme 1.2.1. $1 \le k \le n$ olmak üzere,

(i) $[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n] = [a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},[a_k;a_{k+1},\ldots,a_n]]$

(ii) $[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n] = a_0 + \dfrac{1}{[a_1;a_2,\ldots,a_n]}$

dır[6].

İspat: İfadelerin doğruluğu sürekli kesir tanımından kolaylıkla görülebilir. (ii) ifadesi, (i) ifadesinin $k = 1$ için özel halidir[1].

Örnek 1.2.1. Öklid algoritması kullanılarak $\frac{24}{7}$ kesrinin sürekli kesir açılımı;

$$24=3.7+3 \quad , \quad \frac{24}{7}=3+\frac{3}{7}=3+\frac{1}{\frac{7}{3}}$$

$$7=2.3+1 \quad , \quad \frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$$

olur, bu bölümler birleştirilirse;

$$\frac{24}{7}=3+\frac{3}{7}=3+\frac{1}{\frac{7}{3}}=3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$$

veya,

$$\frac{24}{7}=3+\frac{3}{7}=3+\frac{1}{\frac{7}{3}}=3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}=3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}$$

olur. Burada kısmi bölümler, 3, 2, 3 veya 3, 2, 2, 1 dir. O halde,

$$\frac{24}{7}=[3;2,3]=[3;2,2,1] \text{ şeklinde bulunur.}$$

Örnek 1.2.2. $-\frac{67}{42}$ kesrinin sürekli kesir açılımı;

$$-\frac{67}{42}=-2+\frac{17}{42}=-2+\frac{1}{\frac{42}{17}}=-2+\frac{1}{2+\frac{8}{17}}=-2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{17}{8}}}$$

$$=-2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{8}}}=-2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{7+\frac{1}{1}}}}$$

$$-\frac{67}{42}=[-2;2,2,8]=[-2;2,2,7,1]$$

Örnek 1.2.3. $\frac{6}{41}$ kesrinin sürekli kesir açılımı;

$$\frac{6}{41}=0+\frac{1}{\frac{41}{6}}=0+\frac{1}{6+\frac{5}{6}}=0+\frac{1}{6+\frac{1}{\frac{6}{5}}}=0+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$$

$$\frac{6}{41}=[0;6,1,5]=[0;6,1,4,1]$$

bulunur.

Teorem 1.2.3. a_0 dışında bütün terimleri pozitif, $(a_n)_{n=0}^{\mathbb{N}}$ sonlu ($\mathbb{N}$ doğal sayı) veya sonsuz $(\mathbb{N}=\infty)$ reel sayı dizisi olsun. k=0,1,2,… olacak şekilde,

$$p_{-1}=1 \quad , \quad q_{-1}=0$$

$$p_0=a_0 \quad , \quad q_0=1$$

$$p_1=a_1a_0+1 \quad , \quad q_1=a_1$$

$$\vdots$$

$$p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2} \quad , \quad q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2} \tag{1.1}$$

olarak tanımlansın.

$$C_k=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_k]$$

ise bu takdirde, $C_k=\frac{p_k}{q_k}$ dır[7].

İspat: Tümevarım yönteminden,

k=0 için, $C_0 = [a_0] = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{p_0}{q_0}$

k=1 için, $C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \dfrac{p_1}{q_1}$

olur. Bu durumda k=0 ve k=1 için teorem doğrudur.

Şimdi, $2 \le k$ olan k tamsayısı için;

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \tag{1.2}$$

ifadesini doğru kabul edelim. p_i, q_i lerin tanımından dolayı, $p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2}$ reel sayıları $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ bölümlerine bağlıdır. C_{k+1} i elde etmek için, (1.2) eşitliğinde, a_k yerine $a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$ yazılabilir. Şu halde;

$$C_{k+1} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, [a_k; a_{k+1}]]$$

$$C_{k+1} = \left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right]$$

$$C_{k+1} == \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1} + q_{k-2}}, \qquad C_{k+1} = \frac{a_{k+1}\overbrace{(a_k p_{k-1} + p_{k-2})}^{p_k} + p_{k-1}}{a_{k+1}\underbrace{(a_k q_{k-1} + q_{k-2})}_{q_k} + q_{k-1}}$$

$$C_{k+1} = \frac{\overbrace{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}^{p_{k+1}}}{\underbrace{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}_{q_{k+1}}}, \qquad C_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

elde edilir. k+1 içinde doğru olduğundan teorem doğru olduğu görülür.

Tanım 1.2.2. k=0,1,2,… ve $k \leq n$ olmak üzere, $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ sürekli kesrine, $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sürekli kesrinin k. yıncı yaklaşımı denir. k. yıncı yaklaşım C_k ile gösterilir[2].

Örnek 1.2.4. $\frac{187}{57} = [3;3,1,1,3,2]$ sürekli kesrinde, k=0,1,2,3,4,5 için p_k ve q_k terimleri,

$p_0 = a_0 = 3$, $q_0 = 1$

$p_1 = a_0 a_1 + 1 = 3.3 + 1 = 10$, $q_1 = a_1 = 3$

$p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 1.10 + 3 = 13$, $q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 1.3 + 1 = 4$

$p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 1.13 + 10 = 23$, $q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 1.4 + 3 = 7$

$p_4 = a_4 p_3 + p_2 = 3.23 + 14 = 82$, $q_4 = a_4 q_3 + q_2 = 3.7 + 4 = 25$

$p_5 = a_5 p_4 + p_3 = 2.82 + 23 = 187$, $q_5 = a_5 q_4 + q_3 = 2.25 + 7 = 57$

bulunur. Bu sürekli kesrin yaklaşımları;

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1} = 3$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{10}{3} = 3{,}33333...$$

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{13}{4} = 3{,}25$$

$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{23}{7} = 3{,}28571...$$

$$C_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{82}{25} = 3{,}28$$

$$C_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{187}{57} = 3{,}28070...$$

Teorem 1.2.4. a_0 dışında bütün terimleri pozitif, $(a_n)_{n=0}^{\mathbb{N}}$ sonlu ($\mathbb{N}$ doğal sayı) veya sonsuz $(\mathbb{N} = \infty)$ reel sayı dizisi olsun. k=0,1,2,… olacak şekilde,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

dir.

İspat: Tümevarım yönteminden,

k=1 için, $\quad p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1).1 - a_0 a_1 = 1$

olduğundan eşitik doğrudur.

Şimdi, $1 \leq k$ olan k tamsayısı için;

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

olsun.

$$p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k$$

olduğu gösterilirse;

$$p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (a_{k+1} p_k + p_{k-1}).q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1})$$

$$p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} = -(-1)^{k-1} = (-1)^k$$

bulunur. Tümavarım yöntemi ile ispat tamamlanmış olur.

Örnek 1.2.5. $[2;3,5,10]$ sürekli kesri için,

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = 7.1 - 2.3 = 1$$

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 37.3 - 7.16 = -1$$

$$p_3q_2 - p_2q_3 = 377.16 - 37.163 = 1$$

elde edilir.

Teorem 1.2.5. Teorem 1.2.3. de tanımlanan p_k ve q_k tamsayıları aralarında asaldır[1].

İspat: $d = (p_k, q_k)$ olsun. Teorem 1.2.4. ten $p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k = (-1)^{k-1}$ dır. $d = (p_k, q_k)$ ise $d \mid p_k$ ve $d \mid q_k$ olur. Buradan $d \mid p_kq_{k-1}$ ve $d \mid q_kp_{k-1}$ olup Önerme 1.1.2. de (iv) den, $d \mid (p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k)$ elde edilir. Buradan da $d \mid (-1)^{k-1}$ bulunur. Bu ise d=1 olmasını gerektirir. En büyük ortak bölenleri 1 olduğundan p_k ve q_k tamsayıları aralarında asaldırlar ve teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 1.2.1. $C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ olmak üzere $k \geq 1$ için,

$$C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_kq_{k-1}}$$

dir. Ayrıca $\forall\ k \geq 2$ tamsayısı için,

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_kq_{k-2}}$$

dir.

İspat: Teorem 1.2.4. ten $p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k = (-1)^{k-1}$ yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı q_kq_{k-1} ile bölünürse,

$$C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_kq_{k-1}}$$

bulunur. Bu da birinci eşitliğin ispatıdır.Eğer;

$$C_k - C_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}}$$

yazılırsa,

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

eşitliklerini kullanarak,

$$p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (a_k p_{k-1} + p_{k-2}).q_{k-2} - p_{k-2}(a_k q_{k-1} + q_{k-2})$$

$$= a_k (p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1})$$

bulunur. Teorem 1.2.4. ten $p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1} = (-1)^{k-2}$ yazılabilir. O halde,

$$= a_k (-1)^{k-2} = a_k (-1)^k$$

bulunur. Buradan;

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}}$$

bulunur ki, bu da ikinci eşitliğin ispatıdır.

Teorem 1.2.6. a_0 dışında bütün terimleri pozitif, $(a_n)_{n=0}^{\mathbb{N}}$ sonlu ($\mathbb{N}$ doğal sayı) veya sonsuz $(\mathbb{N} = \infty)$ reel sayı dizisi olsun. k=0,1,2,… olacak şekilde,

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

olsun. O halde;

a) $C_0 < C_2 < C_4 < \ldots < C_{2m} < \ldots$

b) $C_1 > C_3 > C_5 > \ldots > C_{2m-1} > \ldots$

c) $C_{2i-1} > C_{2j}$

dir[1].

İspat: Teorem 1.2.4. ten

$$C_{k-2} - C_k = (C_{k+2} - C_{k+1}) + (C_{k+1} - C_k)$$

$$= \left(\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) + \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k+2}q_{k+1}} + \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k}$$

$$= \frac{(-1)^k (q_{k+2} - q_k)}{q_k q_{k+1} q_{k+2}}$$

elde edilir. $\forall \ i \geq 0$ için $q_i > 0$ ve Teorem 1.2.4. ten $q_{k+2} - q_k > 0$ olup $C_{k-2} - C_k$ in işareti $(-1)^k$ nın işareti ile aynı olacaktır. Şu halde $k = 2j$ gibi bir çift tam sayı ise,

$$C_{2j+2} > C_{2j}$$

elde edilir. Böylece,

$$C_0 < C_2 < C_4 < \ldots < C_{2j} < C_{2j+2} < \ldots$$

yazılabilir.

Benzer biçimde, $k = 2i - 1$ gibi bir tek tam sayı ise, bu durumda,

$$C_{2i+1} < C_{2i-1}$$

elde edilir. Böylece,

$$C_1 > C_3 > C_5 > \ldots > C_{2i-1} > C_{2i+1} > \ldots$$

yazılabilir. Her $C_{2i-1} > C_{2j}$ olduğundan,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

eşitliğinde her iki taraf $q_k q_{k-1}$ ile bölünürse,

$$C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$$

elde edilir. k=2j alınırsa, $(-1)^{2j-1} < 0$ olacağından $C_k < C_{k-1}$ bulunur. Bu da $C_{2j+1} < C_{2j-1}$ olur ki buradan da,

$$C_{2j} < C_{2j+2i} < C_{2i+2j+1} < C_{2i-1}$$

bulunup istenen ispat elde edilmiş olur.

Örnek 1.2.6. $[2;3,1,1,2,4]$ sonlu sürekli kesrinde,

$$C_0 = \frac{2}{1} = 2$$

$$C_1 = \frac{7}{3} = 2,3333...$$

$$C_2 = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$C_3 = \frac{16}{7} = 2,2857...$$

$$C_4 = \frac{41}{18} = 2,2777...$$

$$C_5 = \frac{180}{79} = 2,2784...$$

yaklaşımlarında,

$$C_0 < C_2 < C_4$$

$$2 < 2,25 < 2,2777...$$

ve,

$$C_1 > C_3 > C_5$$

$$2,333... > 2,2857... > 2,2784...$$

olduğu görülmektedir.

Önerme 1.2.2. Eğer $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k]$ sürekli kesrinin k. yıncı yaklaşımı $C_k = \frac{p_k}{q_k}$, ve $a_0 > 0$ ise;

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, ..., a_1, a_0]$$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, ..., a_2, a_1]$$

dir[3].

İspat: $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ve $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ eşitliklerinden,

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad ; \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a_k + \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}}$$

$$p_{k-1} = a_{k-1} p_{k-2} + p_{k-3} \quad ; \quad \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} = a_{k-1} + \frac{p_{k-3}}{p_{k-2}}$$

$$p_{k-2} = a_{k-2} p_{k-3} + p_{k-4} \quad ; \quad \frac{p_{k-2}}{p_{k-3}} = a_{k-2} + \frac{p_{k-4}}{p_{k-3}}$$

$$\vdots$$

$$p_2 = a_2 p_1 + p_0 \quad ; \quad \frac{p_2}{p_1} = a_2 + \frac{p_0}{p_1}$$

$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} \quad ; \quad \frac{p_1}{p_0} = a_1 + \frac{p_{-1}}{p_0}$$

$$p_0 = a_0$$

olur ve bu eşitliklerden,

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a_k + \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}} = a_k + \cfrac{1}{\cfrac{p_{k-1}}{p_{k-2}}} = a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{p_{k-3}}{p_{k-2}}}$$

$$= a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{\cfrac{p_{k-2}}{p_{k-3}}}}$$

$$= a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_{k-2} + \ddots + \cfrac{}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}}$$

bulunur. O halde;

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \left[a_k; a_{k-1,} \ldots, a_1, a_0\right]$$

dır. Diğer eşitlikte,

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

yardımıyla benzer şekilde bulunur ve

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \left[a_k; a_{k-1,} \ldots, a_2, a_1\right]$$

yazılır.

1.3. Sonsuz Sürekli Kesirler

Aşağıdaki teorem sonsuz bir dizinin, iki özel durumda da aynı limite gittiğini gösterir.

Teorem 1.3.1.

a) (x_n) monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi ise, $\lim(x_n)$ vardır.

b) (x_n) monoton azalan ve alttan sınırlı bir dizi ise, $\lim(x_n)$ vardır.

c) (x_n) bir dizi ve $\lim(x_{2n}) = \lim(x_{2n+1}) = \alpha$ ise, $\lim(x_n)$ vardır ve $\lim(x_n) = \alpha$ dır.

Ayrıca eğer, (x_n) dizisinin elemanları monoton artan ise, $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$ ve $\lim(x_n) = \alpha$ ise $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n < \alpha$ dır.

Ve, (x_n) dizisinin elemanları monoton azalan ise $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots$ ve $\lim(x_n) = \alpha$ ise $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $x_n > \alpha$ dır[1].

Tanım 1.3.1. a_0 dışında bütün terimleri pozitif, $(a_n)_{n=0}^{\mathbb{N}}$ sonlu ($\mathbb{N}$ doğal sayı) veya sonsuz $(\mathbb{N} = \infty)$ reel sayı dizisi olsun. $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]_{n=0}^{\infty}$ dizisine sonsuz sürekli kesir denir ve $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ biçiminde gösterilir. Eğer $\lim[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ varsa bu sonsuz sürekli kesre yakınsaktır denir ve bu durumda limit değeri, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ ile de gösterilir.

Sonsuz sürekli kesrin yakınsaklığını tanımlamak için, $n \geq 0$ artan değerlerinde $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sonlu sürekli kesri alınır. $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sürekli kesrini bulmak için aşağıdaki yol kullanılır;

Tanım 1.3.2. a_0 dışında bütün terimleri pozitif, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisi olsun.

$$p_{-1} = 1 \qquad , \qquad q_{-1} = 0$$

$$p_0 = a_0 \qquad , \qquad q_0 = 1$$

$$p_1 = a_1 a_0 + 1 \qquad , \qquad q_1 = a_1$$

verilsin. $(p_n)_{n=2}^{\mathbb{N}}$ ve $(q_n)_{n=2}^{\mathbb{N}}$ dizileri Teorem 1.2.3 de tanımlandığı gibi $n \geq 2$ için

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \qquad , \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

şeklinde verilsin. $\forall \ i, j \geq 0$ için (p_n, q_n) ikilisi, $\frac{p_n}{q_n}$ şeklinde yazılırsa, $\frac{p_n}{q_n}$ e, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisinin n. yinci yaklaşımı olarak adlandırılır ve $\frac{p_n}{q_n}$ değeri C_n ile gösterilir.

Teorem 1.3.2. $\forall \ k \geq 1$ için $a_k > 0$ olacak şekilde $a_0; a_1, a_2, \ldots$ tamsayı dizisi verildiğinde $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ise bu durumda C_k yaklaşımları bir α limitine gider,

$$\lim C_k = \alpha$$

dır.

İspat: Teorem 1.2.6. dan,

$$C_0 < C_2 < C_4 < \ldots < C_{2n} < \ldots$$

$$C_1 > C_3 > C_5 > \ldots > C_{2n-1} > \ldots$$

ve $\forall \ i > 0$, $j > 0$ tamsayısı için,

$$C_{2i-1} > C_{2j}$$

olduğu görülür. $C_0 < C_2 < C_4 < \ldots$ ve $C_1 > C_3 > C_5 > \ldots$ yakınsaklıkları için Teorem 1.3.1. in sağlandığı görülür. Şu halde $C_1 > C_3 > C_5 > \ldots$ bir α_1 limitine gider ve $C_0 < C_2 < C_4 < \ldots$ bir α_2 limitine gider. Buradan; $\lim C_{2n+1} = \alpha_1$ ve $\lim C_{2n} = \alpha_2$ yazılabilir. Şimdi bu iki limit değerinin eşit olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 1.2.1. den,

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{q_{2n+1}q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

elde edilir.

$\forall\ k \geq 0$ tamsayısı için, $q_k \geq k$ olduğundan,

$$\frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} < \frac{1}{(2n+1)(2n)}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

dizisininin limiti 0 bulunur. Yani;

$$\lim_{n\to\infty}(C_{2n+1} - C_{2n}) = 0$$

dır. şu halde $C_0 < C_2 < C_4 < \ldots$ ve $C_1 > C_3 > C_5 > \ldots$ yakınsaklıkları aynı limite sahiptir, o halde;

$$\lim_{n\to\infty}(C_{2n+1} - C_{2n}) = \lim_{n\to\infty} C_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} C_{2n} = 0$$

olur ki bu da $\alpha_1 = \alpha_2$ olduğunu gösterir. Bu da teoermin ispatını bitirir.

Tanım 1.3.3. $a_0 \in \mathbb{Z}$ ve $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ dizisi, değeri ;

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots] = \lim_{k\to\infty} C_k$$

olan sonsuz sürekli kesri tanımlar. C_k ya sonsuz sürekli kesrin k. yıncı yaklaşımı ve a_k lara da kısmi bölümler denir[1].

Teorem 1.3.3. $a_0 \in \mathbb{Z}$ ve $a_1, a_2, ... \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesri irrasyoneldir.

İspat: $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ ve $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \dfrac{p_k}{q_k}$, α nı k. yıncı yaklaşımı olsun. n pozitif tam sayı olduğunda Teorem 1.3.2. den

$$C_{2n} < \alpha < C_{2n+1}$$

dır. Her taraftan C_{2n} çıkarılırsa,

$$0 < \alpha - C_{2n} < C_{2n+1} - C_{2n}$$

elde edilir. Sonuç 1.2.1. den,

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1} q_{2n}}$$

yazılabilir. O halde;

$$0 < \alpha - C_{2n} = \alpha - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1} q_{2n}}$$

olur ve

$$0 < \frac{\alpha q_{2n} - p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1} q_{2n}}$$

elde edilir. Böylece.

$$0 < \alpha q_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}}$$

bulunur.

α nın rasyonel sayı olduğu kabul edilsin. $\alpha = \dfrac{a}{b}$ yazılabilir. $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+)$

Buradan,

$$0 < \frac{aq_{2n}}{b} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}}$$

$$0 < aq_{2n} - bp_{2n} < \frac{b}{q_{2n+1}}$$

olur. Burada her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $aq_{2n} - bp_{2n}$ bir tamsayıdır. Burada $q_{2n+1} > 2n+1$ olduğundan, $2n_0 + 1 > b$ olan bir n_0 tamsayısı için $q_{2n_0+1} > 2n_0 + 1 > b$ dir. Şu halde,

$$0 < aq_{2n_0} - bp_{2n_0} < \frac{b}{q_{2n_0+1}} < 1$$

dir. bu ise $aq_{2n} - bp_{2n}$ nin bir tamsayı olması ile çelişir.

O halde, her sonsuz sürekli kesrin irrasyonel sayı ifade ettiği gösterilmiş oldu.

Şimdi de, her irrasyonel sayının, bir tek sonsuz sürekli kesir gösterimi var olduğu gösterilsin.

Teorem 1.3.4. $\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı ve $a_0, a_1, a_2, \ldots$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

Burada, $[\![\ ]\!]$ tamdeğer fonksiyonunu göstermek üzere,

$$a_k = [\![\alpha_k]\!] \quad , \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \quad , \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

dır. O halde;

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

dir[1].

İspat: a_k tamsayılarının tanımından, her k için, a_k nın bir tam sayı olduğu görülür. Ayrıca tümevarım yönteminden, negatif olmayan her k tamsayısı için, α_k nın irrasyonel olduğu kabul edilip α_{k+1} var olduğu gösterilebilir.

$\forall\ k \geq 0$ tamsayısı için, α_k bir irrasyonel sayıdır. Gerçekten, k=0 için

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0}$$

bir irrasyonel sayıdır. Çünkü $\alpha_0 - a_0$ bir irrasyonel sayıdır.

Şimdi de α_k bir irrasyonel sayı olduğu, yani;

$$\alpha_k = \frac{1}{\alpha_{k-1} - a_{k-1}}$$

kabul edilir.

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

nın irrasyonel olduğu gösterilirse;

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} \tag{1.3}$$

olur. Eğer α_{k+1} rasyonel ise α_k da rasyonel olacaktır. Bu da bir çelişkidir. O halde;

$$a_k \leq \alpha_k < a_k + 1$$

olur. Böylece, esitsizliğin her tarafından a_k çıkarılırsa,

$$0 \leq \alpha_k - a_k < 1$$

olacaktır. Buradan da,

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} > 1$$

olur. Sonuç olarak, k=0,1,2,.. için,

$$a_{k+1} = [\![\alpha_{k+1}]\!] \geq 1$$

elde edilir. bu da bütün $a_1, a_2, \ldots$ lerin pozitif olduğu sonucunu verir.

Şimdi de (1.3) kullanılarak tümevarım yöntemiyle,

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}]$$

olduğu gösterilebilir.

k=0 için $\alpha = [0, \alpha_1]$ dir.

k-1 için ifade doğru kabul edilsin, yani;

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k]$$

olsun.

k için doğru olduğu gösterilirse;

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k]$$

$$= \left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} \right]$$

$$= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, [a_k; \alpha_{k+1}]]$$

$$= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, \alpha_{k+1}]$$

olacaktır.

Şimdi de

$$\lim_{k \to \infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, \alpha_{k+1}] = \alpha$$

olduğu gösterilirse; Teorem 1.2.3. ten,

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

nin j.yinci yaklaşımı,

$$C_j = \frac{p_j}{q_j}$$

alınırsa,

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha_{k+1}] = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

olur. devam edilirse,

$$\alpha - C_k = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}$$

$$= \frac{-\left(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k\right)}{\left(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}\right) q_k}$$

olur, Teorem 1.2.4. ten,

$$= \frac{-\left(-1\right)^{k-1}}{\left(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}\right) q_k}$$

$$= \frac{\left(-1\right)^{k}}{\left(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}\right) q_k}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1} > a_{k+1} q_k + q_{k-1} = q_{k+1}$$

olur ve,

$$\left|\alpha - C_k\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{k \cdot \left(k+1\right)}$$

bulunur. $q_k \geq k$ olduğundan,

$$\lim_{k \to \infty} \left|\alpha - C_k\right| = 0$$

dır. O halde,

$$\lim_{k \to \infty} C_k = \alpha$$

dır. Bir başka ifadeyle de,

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

sonsuz sürekli kesrinin değeri α dır.

Teorem 1.3.5. a_0 hariç a_k lar pozitif tamsayı olmak üzere, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesri olsun. $\forall\ k \geq 0$ tamsayı ve

$$\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$$

olsun. O halde,

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, \alpha_k]$$

dır.

İspat: Tümevarım yöntemiyle yapılır. $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = \lim\limits_{n\to\infty}[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ olsun.

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_n]}$$

eşitliğinden, $\alpha_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_n]$ den,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [a_0; \alpha_1]$$

elde edilir. $(\alpha_1 > a_1 > 0)$. Böylece, k=1 için doğruluğu görülür.

Her k için doğru olduğunu, yani;

$$\alpha_k = [a_k; \alpha_{k+1}]$$

olduğunu kabul edelim.

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, \alpha_k]$$

Önerme 1.2.1. den,

$$= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, [a_k; \alpha_{k+1}]]$$

$$= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, \alpha_{k+1}]$$

yazılabilir. Böylece k+1 için de teoremin ispatı gösterilmiş olur.

Örnek 1.3.1. $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı bulalım:

$$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{2}$$

$$a_0 = [\![\sqrt{2}]\!] = 1 \quad , \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$a_1 = [\![\sqrt{2}+1]\!] = 2 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$a_1 = [\![\sqrt{2}+1]\!] = 2 \quad , \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$\vdots$$

$$a_1 = [\![\sqrt{2}+1]\!] = 2 \quad , \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

Böylece; $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, ...] = \left[1, \overline{2}\right]$ bulunur.

$\sqrt{2}$ sonsuz sürekli kesri periyodiktir. Periyodik sürekli kesirler bir sonraki konuda incelenecektir.

Örnek 1.3.2. $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı bulunacak olursa:

$$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{3}$$

$$a_0 = [\![\sqrt{3}]\!] = 1 \quad , \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$a_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]\!\!\right] = 1 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

$$a_2 = \left[\!\left[\sqrt{3}+1 \right]\!\right] = 2 \quad , \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$a_1 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right]\!\right] = 1 \quad , \quad \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

$$\vdots$$

$n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ , eğer n tekse} \\ 2 \text{ , eğer n çiftse} \end{cases} \quad , \quad \alpha_n = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ , eğer n tekse} \\ \sqrt{3}+1 \text{ , eğer n çiftse} \end{cases}$$

Böylece; $\sqrt{3} = [1;1,2,1,2,...] = [1;\overline{1,2}]$ bulunur.

Bu sonsuz sürekli kesrin birkaç yaklaşımı;

$$1, 2, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, ...$$

dır.

Bir irrasyonel sayının yaklaşımları iyi yaklaşımlardır. Eğer $\frac{p_k}{q_k}$ bu sürekli kesrin k.yıncı yaklaşımı ise Teorem 1.3.4. ten,

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

olduğundan,

$$q_k < q_{k+1}$$

için,

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{{q_k}^2}$$

dır.

Tanım 1.3.4. $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, $b > 0$, $0 < d \leq b$ şartını sağlayan $\frac{a}{b}$ kesri, $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\alpha - \frac{c}{d}\right|$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu kesre, α ya bir en iyi yaklaşım denir.

Tanım 1.3.5. Bir α reel sayısı için en iyi yaklaşım p/q kesridir. (p ve q tamsayıdır, q>1 dir) öyle ki,

(1) $[\![q\alpha]\!] = |q\alpha - p|$,

(2) $[\![q'\alpha]\!] > [\![q\alpha]\!]$, $q' < q$ pozitif tamsayıları için.

Bir α tamsayısı, en iyi yaklaşımlara sahip değildir. Aşağıdaki teorem, sürekli kesirleri bakımından tam olmayan bir sayı için, en iyi yaklaşımların bir kümesini tanımlar[3].

Teorem 1.3.6. Bir $\alpha \notin \mathbb{Z}$ reel sayısı için her bir en iyi yaklaşım, α' nın bir yakınsaklığıdır. $\alpha_k > 1$ olmak üzere, her bir p_k/q_k yakınsaklığı, α için bir en iyi yaklaşımdır[3].

İspat: p/q, α için en iyi bir yaklaşım olsun. Reel eksendeki α'nın ve $\{C_n\}$ noktalarının bağıntılı durumları tekrar hatırlanırsa, Teorem 1.2.6. dan,

a) $C_0 < C_2 < C_4 < \cdots < C_{2m} < \cdots$

b) $C_1 > C_3 > C_5 > \cdots > C_{2m-1} > \cdots$

c) $C_{2i-1} > C_{2j}$

dır. $C_0, C_2, C_4, \cdots, C_{2m}, \cdots$ artandır ve α' ya yakınsar; $C_1, C_3, C_5, \cdots, C_{2m-1}, \cdots$ sayıları ise azalandır ve α' ya yakınsarlar. α ve $\{C_n\}$ noktaları, reel ekseni aralıkların sonlu ya da sayılabilir bir kümesine ayırır. p/q 'nun bu aralıkların birinde olduğu kabul edilsin. $\frac{p}{q} > C_0$ olsun. Bu durumda,

$$|1.\alpha - a_0| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < |q\alpha - p|$$

dır ki bu en iyi yaklaşım tanımıyla çelişir. $\frac{p}{q} > C_1$ olsun . Bu durumda,

$$|1.\alpha - a_0| \le \frac{1}{a_1} = \frac{1}{q_1} \le q\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{p}{q}\right| \le q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = |q\alpha - p|$$

olur ki bu da yine tanımla çelişir.

Bazı pozitif n tamsayıları için p/q ifadesi C_{n+1}, C_{n-1} bitiş noktalı aralıklarında kalsın. O zaman, bilinenler yardımıyla,

$$\frac{1}{qq_{n-1}} \le \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

elde edilir. Bundan dolayı $q_n < q$ ' dır. Diğer yandan,

$$|q_n\alpha - p_n| \le \frac{1}{q_{n+1}} \le q\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p}{q}\right| \le q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = |q\alpha - p|$$

dır. Bu da yine bir çelişkidir. Dolayısıyla, bazı n'ler için

$$\frac{p}{q} = C_n$$

dır. Buradan,

$$|q_{n+1}\alpha - p_{n+1}| \le \frac{1}{q_{n+2}} < |q_n\alpha - p_n| \qquad ; \qquad n = 0,1,2,... \tag{1.4}$$

yazılır. $\frac{p_n}{q_n}$, $q_n > 1$ olmak üzere α' nın bir yakınsaklığı olsun. Varsayılsın ki bu kesir, en iyi bir yaklaşım değildir.

$$|q\alpha - p| \leq |q_n\alpha - p_n| \qquad , \qquad 1 \leq q < q_n \tag{1.5}$$

(p,q) çifti, q en küçük olmak üzere (1.5) ifadesini gerçekliyor olsun. $q > 1$ ise p/q kesri α' ya en iyi bir yaklaşımdır. $\frac{p}{q} = C_m$, $m < n$' dır. Bu durumda (1.4) ifadesi ve (1.5) birbirleriyle ile çelişir. $q = 1$ ise ispat aşikardır[3].

Örnek 1.3.3. π reel sayısının sürekli kesir açılımı;

π = 3,1415926535897932384626433…

π = 3 + küçük bir değer (0<x<1)

= 3 +0,14159265…

$$3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,14159265}} = 3 + \frac{1}{7,0625133059...} = 3 + \frac{1}{7 + 0,0625133059...}$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,0625133059...}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 0,99659...}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + 0,0034...}}}$$

$$3 + \frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292} = 3,1415926539$$

olur ki buradan;

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, ...]$$

dir. Bu sonsuz sürekli kesrin yaklaşımları π ye en uygun rasyonel yaklaşımlardır. Bu yaklaşımların bazıları,

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \dots$$

dir.

Teorem 1.3.5. ten π için en uygun rasyonel yaklaşım; $\frac{22}{7}$ dir.

Örnek 1.3.4. e, reel sayısının sürekli kesir açılımı;

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,...]$$

dir. Bu sonsuz sürekli kesrin yaklaşımları, e ye en uygun rasyonel yaklaşımlardır. Bu yaklaşımların bazıları,

$$2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \cdots$$

dir.

1.4. Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler

Tanım 1.4.1. Keyfî $k \geq k_0$ sayısı için, $a_{k+h} = a_k$ olacak şekilde k_0 ve h pozitif sayıları varsa;

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$$

sürekli kesrine periyodik sürekli kesir denir. Bunu;

$$\alpha = \left[a_0; a_1, a_2, ..., \overline{a_{k_0-1}, a_{k_0}, a_{k_0+1}, ..., a_{k_0+h-1}} \right]$$

biçiminde yazılabilir.

Örnek 1.4.1. $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, ...]$ sayısını $\sqrt{2} = \left[1, \overline{2}\right]$ şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 1.4.1. Langrange Teoremi: Her periyodik sürekli kesir, bir quadratik (ikinci derece) irrasyonel sayı gösterir ve her quadratik irrasyonel sayı da bir periyodik sürekli kesir yardımı ile temsil edilebilir[2].

İspat: ($\Rightarrow$) α, periyodik sürekli kesir olsun.

$$\alpha = \left[a_0; a_1, a_2, ..., \overline{a_{k_0-1}, a_{k_0}, a_{k_0+1}, ..., a_{k_0+h-1}} \right]$$

periyodik sürekli kesrinin kalanları için $r_{k+h} = r_k$ yazılabilir.

$a_{k+h} = a_k$, α kalanlarına göre,

$$\alpha = \frac{p_{n-1}.r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}.r_n + q_{n-2}}$$

yazılabilir. O halde,

$$\alpha = \frac{p_{k-1}.r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}.r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}.r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}.r_{k+h} + q_{k+h-2}}$$

olur.

$$\frac{p_{k-1}.r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}.r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}.r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}.r_k + q_{k+h-2}}$$

yazıldığından, r_k, tam katsayılı bir quadratik denklemi sağlar ve sonuç olarak r_k quadratik bir sayı olur.

($\Leftarrow$) α sayısı tam katsayılı,

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{1.6}$$

quadratik denklemini sağlar. (α, quadratik olsun.) α yı n.mertebeden kalanlarına göre,

$$\alpha = \frac{p_{n-1}.r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}.r_n + q_{n-2}}$$

şeklinde yazılır. α yı (1.6) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$A_n.r_n^2 + B_n.r_n + C_n = 0$$

denklemini sağladığı görülür. $\left(A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Z}\right)$

$$A_n = a.p_{n-1}^2 + b.p_{n-1}.q_{n-1} + c.q_{n-1}^2$$
$$B_n = 2a.p_{n-1}p_{n-2} + b\left(p_{n-1}.q_{n-2} + p_{n-2}.q_{n-1}\right) + 2c.q_{n-1}.q_{n-2}$$
$$C_n = a.p_{n-2}^2 + b.p_{n-2}.q_{n-2} + c.q_{n-2}^2$$

Burada $C_n = A_{n-1}$ olduğu görülür. Formüllerden;

$$B_n^2 - 4A_nC_n = \left(b^2 - 4ac\right).\underbrace{\left(p_{n-1}.q_{n-2} - q_{n-1}.p_{n-2}\right)^2}_{=+1}$$

$$B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac$$

olur, üstelik, Teorem 1.3.4. gereği,

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2}$$

yazılabilir, bunlar yardımıyla,

$$A_n = a\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right).q_{n-1} + c.q_{n-1}^2$$

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

olduğundan,

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

olur ki, A_n, C_n in mutlak değerce sınırlı olduğu görülür. Devam edilirse,

$$B_n{}^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac \qquad (1.7)$$

A_n, C_n in sınırlı olduğu görüldüğünden, n. yinci değişken olarak sadece sonlu sayıda değer alabiliriz. Yukarıdaki eşitlik (1.7) yardımıyla B_n sayılarından da sonlu tane alınabilir. O halde, n sayısı, 1 den sonsuza artarken,

$$A_n.r_n^2 + B_n.r_n + C_n = 0$$

biçiminde sadece sonlu çoklukta denklemle karşılaşılır.

r_n, belli değerlerin sadece sonlu sayıda kadarını alabileceğinden , k ve h pozitif sayıları için $r_k = r_{k+h}$ yazılır. Bu ise α nın sürekli kesir gösteriminin periyodik olduğunu gösterir.

Örnek 1.4.2.

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2}-1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}} = \cdots$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}$$

olur. Yani,

$$\sqrt{2}=[1;2,2,2,...]=\left[1,\overline{2}\right]$$

yazılır.

Tanım 1.4.2. A sayısının sürekli kesri, $A=[a;b,b,...]$ olsun.

$$A=a+\frac{1}{[b;b,b,...]};\ B=[b;b,b,...]$$

olur. Buradan,

$$B=b+\frac{1}{[b;b,b,...]}$$

yazılır. Devam edilirse;

$$B=b+\frac{1}{B}\Rightarrow B^2-bB-1=0$$

$$B=\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}$$

(pozitif alınmasına sebep, A daki b lerin pozitif olması)

$$A=a+\frac{1}{B}$$

$$A=a+\frac{2}{b+\sqrt{b^2+4}}.\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{b-\sqrt{b^2+4}}$$

$$A=a-\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}$$

$$A=\frac{2a-b}{2}+\frac{\sqrt{b^2+4}}{2}$$

olur.

Sonuç 1.4.1. Herhangi pozitif a ve b ler için;

$$\frac{2a-b}{2}+\frac{\sqrt{b^2+4}}{2}=[a;b,b,b,...]$$

dir.

Özellikle $a=b$ alınırsa;

$$A=\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2+4}}{2}$$

olur.

$b=2a$ alınırsa;

$$A=\sqrt{1+a^2}$$

olur. Burada,

$a=1$ alınırsa;

$$A=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}=A=[1;2,2,2,...]$$

olur.

Tanım 1.4.3. Bir sürekli kesir,

$$[\overbrace{a_0;a_1,...,a_l}^{\text{başlangıç kısmı}},\overbrace{b_0,b_1,...,b_m}^{\text{tekrar eden kısım}},b_0,b_1,...,b_m,...]$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu sürekli kesre periyodiktir denir.

Örnek 1.4.3.

$$\sqrt{2}=[1;2,2,2,...]=\left[1;\overline{2}\right]\rightarrow 1-\text{periyodik}$$

$$\sqrt{23}=[4;1,3,1,8,1,3,1,8,...]=\left[4;\overline{1,3,1,8}\right]\rightarrow 4-\text{periyodik}$$

$$\frac{80-\sqrt{30}}{52}=\left[1;2,3,\overline{4,5}\right]\rightarrow 2-\text{periyodik}$$

Örnek 1.4.4.

$$\sqrt{2}=\left[1;\overline{2}\right]$$

$$\sqrt{3}=\left[1;\overline{1,2}\right]$$

$$\sqrt{5}=\left[2;\overline{4}\right]$$

$$\sqrt{7}=\left[2;\overline{1,1,1,4}\right]$$

$$\sqrt{13}=\left[3;\overline{1,1,1,1,6}\right]$$

$$\sqrt{19}=\left[4;\overline{2,1,3,1,2,8}\right]$$

$$\sqrt{23}=\left[4;\overline{1,3,1,8}\right]$$

$$\sqrt{29}=\left[5;\overline{2,1,1,2,10}\right]$$

$$\sqrt{31}=\left[5;\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}\right]$$

$$\sqrt{37}=\left[6;\overline{12}\right]$$

$$\sqrt{71}=\left[8;\overline{2,2,1,7,1,2,2,16}\right]$$

$$\sqrt{73}=\left[8;\overline{1,1,5,5,1,1,16}\right]$$

$$\sqrt{89}=\left[9;\overline{2,3,3,2,18}\right]$$

$$\sqrt{97}=\left[9;\overline{1,5,1,1,1,1,1,1,5,1,18}\right]$$

bulunur.

Her periyodik sürekli kesir, l uzunluğunda bir periyoda ve birinci terimden son terime kadar simetrik olan, ilk kısmi bölümün iki katıyla biten bir periyoda sahiptir.

BÖLÜM 2. MÖBİÜS DÖNÜŞÜMLERİ

2.1. Möbiüs Dönüşümleri

Tanım 2.1.1. $a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}_\infty$ olmak üzere

$$T:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty , \qquad T(z)=\begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \neq -\dfrac{d}{c} \quad (c \neq 0) \\ \dfrac{a}{c}, & z=\infty \\ \infty, & z=-\dfrac{d}{c} \end{cases} \qquad ad - bc \neq 0$$

biçiminde ifade edilebilen dönüşümlere möbiüs dönüşümleri denir. Kısaca;

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

ye bir möbiüs dönüşümü denir[12].

Önerme 2.1.1. $T:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $ad-bc=0$ ise, T bir sabit dönüşümdür[12].

İspat: $z \neq -\dfrac{d}{c}$ ve $ad-bc=0$ olduğundan,

$$ad=bc, \qquad ad+acz=bc+acz, \qquad a(d+cz)=c(b+az)$$

$$\frac{a}{c}=\frac{az+b}{cz+d}=T(z)$$

olur. Bu da, $T(z)$ nin $ad-bc=0$ şartı altında sabit bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Önerme 2.1.2. $T:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $ad-bc\neq 0$ ise T, bire-bir ve örten bir dönüşümdür[12].

İspat: Bire-bir olduğunu görmek için; $T(z_1)=T(z_2)$ ise $z_1=z_2$ olduğunu göstermek gerekir;

$$T(z_1)=T(z_2)$$

olsun.

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d}=\frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

$$ac\cancel{z_1}z_2+bcz_2+adz_1+\cancel{bd}=ac\cancel{z_1}z_2+bcz_1+adz_2+\cancel{bd}$$

$$adz_1-bcz_1=adz_2-bcz_2$$

$$z_1\underbrace{(\cancel{ad-bc})}_{\neq 0}=z_2\underbrace{(\cancel{ad-bc})}_{\neq 0}$$

olur ki sadeleştirme işlemi yapılırsa,

$$z_1=z_2$$

olur. Yani, T, bire-bir dönüşümdür. Örten olduğunu göstermek için; $z\in\mathbb{C}$ iken, $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $ad-bc\neq 0$ olacak şekilde, $z\in\mathbb{C}$ olduğunu göstermek gerekir;

$$czT(z)+dT(z)=az+b$$

$$czT(z)-az=b-dT(z)$$

$$z(cT(z)-a)=b-dT(z)$$

$$z=\frac{b-dT(z)}{cT(z)-a}$$

$$z=\frac{-dT(z)+b}{cT(z)-a}$$

olur. Buradan,

$$(-a)(-d)-bc=ad-bc\neq 0$$

olduğundan bir $z\in\mathbb{C}$ bulunur. Yani, T, örten bir dönüşümdür.

2.2. Özel Möbiüs Dönüşümleri

2.2.1. Öteleme dönüşümü

$$T:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty \qquad T(z)=\begin{cases} z+\alpha & , \quad z\neq\infty \\ \infty & , \quad z=\infty \end{cases}$$

yani, $T(z)=z+\alpha$ biçimindeki dönüşüme, öteleme dönüşümü denir[12].

2.2.2. Tersinme dönüşümü

$$T:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty \qquad T(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{z} & , \quad z\neq\infty \\ 0 & , \quad z=\infty \\ \infty & , \quad z=0 \end{cases}$$

yani, $T(z)=\dfrac{1}{z}$ biçimindeki dönüşüme, tersinme dönüşümü denir[12].

2.2.3. Çarpım dönüşümü

$$T:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty \qquad T(z)=\begin{cases} az & , \quad z\neq\infty \\ \infty & , \quad z=\infty \end{cases}$$

yani, $T(z)=az$ biçimindeki dönüşüme, çarpım dönüşümü denir[12].

Örnek 2.2.3.1. $T(z)=\dfrac{3z-2}{z+7}$ ise,

$T(0)=\dfrac{-2}{7}$, $T(\infty)=3$, $T(-7)=\infty$, $T(i)=\dfrac{3i-2}{i+7}$ dönüşümleri elde edilir.

Teorem 2.2.3.1. $T:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $ad-bc\neq 0$ ise T dönüşümü, öteleme, tersinme ve çarpım dönüşümlerinin bileşkesidir[12].

İspat: $c=0$ için ispatlanırsa;

$T(z)=\dfrac{az+b}{d}=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ ve $ad\neq 0$ olur. Şu halde T dönüşümü,

$T_1(z)=\dfrac{a}{d}z$, $T_2(z)=z+\dfrac{b}{d}$ olmak üzere, $T=T_2\circ T_1$ biçiminde T_1 ve T_2 dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir. Hakikaten,

$$T(z)=(T_2\circ T_1)(z)$$

$$T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=\frac{az+b}{d}$$

dır.

$c\neq 0$ için ispatlanırsa; $z\neq -\dfrac{d}{c}$ iken, T_1, T_2, T_3 ve T_4 dönüşümleri,

$$T_1(z)=z+\frac{a}{c}\ ,\ T_2(z)=z+\frac{d}{c}\ ,\ T_3(z)=\frac{1}{z}\ \text{ ve }\ T_4(z)=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot z$$

olarak alınırsa, $z\neq -\dfrac{d}{c}$ için T dönüşümü,

$$T=T_1\circ T_4\circ T_3\circ T_2$$

dır. Hakikaten,

$$T(z)=(T_1\circ T_4\circ T_3\circ T_2)(z)=(T_1\circ T_4\circ T_3)\left(z+\frac{d}{c}\right)$$

$$T(z)=(T_1\circ T_4)\left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right)=(T_1)\left(\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right)$$

$$T(z)=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{\cancel{c^2}}\cdot\frac{\cancel{c}}{cz+d}+\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c\cdot(cz+d)}+\frac{a}{c}$$

$$T(z)=\frac{bc-\cancel{ad}+acz+\cancel{ad}}{c\cdot(cz+d)}=\frac{bc+acz}{c\cdot(cz+d)}=\frac{\cancel{c}\cdot(az+b)}{\cancel{c}\cdot(cz+d)}=\frac{az+b}{cz+d}$$

olur.

$z=-\dfrac{d}{c}$ alınırsa, $T\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty$ olur ki, bu T dönüşümünün bileşkesinde yerine yazılırsa;

$$T(z)=(T_1\circ T_4\circ T_3\circ T_2)(z)$$

$$T(z)=(T_1\circ T_4\circ T_3\circ T_2)\left(-\frac{d}{c}\right)$$

$$T(z)=(T_1\circ T_4\circ T_3)(0)$$

$$T(z)=(T_1\circ T_4)(\infty)$$

$$T(z)=(T_1)(\infty)=\infty$$

elde edilir. O halde,

$$T\left(-\frac{d}{c}\right)=(T_1\circ T_4\circ T_3\circ T_2)\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$$

dır. Yani, $z\in\mathbb{C}_\infty$ için, $T=T_1\circ T_4\circ T_3\circ T_2$ dir.

Önerme 2.2.3.2. $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$, $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $T(\infty)=\dfrac{a}{c}, T\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty$ ise,

$T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$, $T^{-1}(z)=\dfrac{dz-b}{-cz+a}$ ve $T^{-1}(\infty)=-\dfrac{d}{c}, T^{-1}\left(\dfrac{a}{c}\right)=\infty$ dir[12].

İspat: $T^{-1}\circ T=T\circ T^{-1}=I$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

$$(T^{-1}\circ T)(z)=\frac{d\cdot\dfrac{az+b}{cz+d}-b}{-c\cdot\dfrac{az+b}{cz+d}+a}=\frac{\dfrac{adz+\cancel{bd}-bcz-\cancel{bd}}{\cancel{cz+d}}}{\dfrac{-\cancel{acz}-bc+\cancel{acz}+ad}{\cancel{cz+d}}}=\frac{adz-bcz}{ad-bc}=\frac{\cancel{(ad-bc)}\cdot z}{\cancel{ad-bc}}=z$$

olur. Benzer şekilde $(T\circ T^{-1})(z)=z$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca,

$$T(\infty)=\frac{a}{c}\ \text{iken},\qquad T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)=\infty$$

$$T\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty\ \text{iken},\qquad T^{-1}(\infty)=-\frac{d}{c}$$

dır. O halde ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 2.2.3.1. $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$, $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$ ve $\lambda\neq 0$ olmak üzere,

$$T(z)=\frac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d}$$

olarak yazılabilir.

$$(\lambda a)\cdot(\lambda d)-(\lambda b)\cdot(\lambda c)\neq 0,\qquad \lambda^2(ad-bc)\neq 0$$

olur. $\lambda^2 = \dfrac{1}{ad-bc}$ olacak şekilde seçilirse, $T(z)=\dfrac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d}$ için,

$$(\lambda a)\cdot(\lambda d)-(\lambda b)\cdot(\lambda c)=\lambda^2(ad-bc)=1$$

olur. O halde genelde bir möbiüs dönüşümünde, $ad-bc=1$ alınır.

Örnek 2.2.3.2. $T(z)=\dfrac{2z+1}{3z+2}$ ve $S(z)=\dfrac{-iz+1}{-2z-i}$ ise $S\circ T$ dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $(S\circ T)(z)=\dfrac{-i\cdot\dfrac{2z+1}{3z+2}+1}{-2\cdot\dfrac{2z+1}{3z+2}-i}=\dfrac{\dfrac{-2iz-i+3z+2}{\cancel{3z+2}}}{\dfrac{-4z-2-3iz-2i}{\cancel{3z+2}}}=\dfrac{-2iz-i+3z+2}{-3iz-2i-4z-2}$

$$(S\circ T)(z)=\frac{(-2i+3)z+(-i+2)}{(-3i-4)z+(-2i-2)}$$

bulunur. Şimdi, $ad-bc=1$ olduğu gösterilirse;

$$(-2i+3)\cdot(-2i-2)-(-i+2)\cdot(-3i-4)=-4-6+4i-6i+3+8-4i+6i=1$$

bulunur.

Örnek 2.2.3.3. $T(z)=\dfrac{\sqrt{2}z-1}{3z-\sqrt{2}}$ ise $T\circ T$ dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $(T\circ T)(z)=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}z-1}{3z-\sqrt{2}}-1}{3\cdot\dfrac{\sqrt{2}z-1}{3z-\sqrt{2}}-\sqrt{2}}=\dfrac{\dfrac{2z-\cancel{\sqrt{2}}-3z+\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{3z-\sqrt{2}}}}{\dfrac{\cancel{3\sqrt{2}z}-3-\cancel{3\sqrt{2}z}+2}{\cancel{3z-\sqrt{2}}}}=\dfrac{-z}{-1}=z$

bulunur. Burada $ad-bc=1$ dir.

Örnek 2.2.3.4. $T(i)=-1$, $T(0)=1$, $T(\infty)=\infty$ olan bir möbiüs dönüşümü bulunuz.

Çözüm: $T(\infty)=\infty$ ise, $T(\infty)=\dfrac{a}{c}=\infty$ olur ki, bu durumda $c=0$ olur. O halde,

$T(z)=\dfrac{az+b}{d}$ olur.

$T(0)=1$ ise, $T(0)=\frac{b}{d}=1$ olur ki, bu durumda $b=d$ olur. O halde, $T(z)=\frac{az}{d}+1$ olur.

$T(i)=-1$ ise, $T(i)=\frac{ia}{d}+1=-1$ olur ki, bu durumda $a=\frac{-2d}{i}$ olur. O halde, $T(z)=\frac{-2z+i}{i}=2iz+1$ olur.

Örnek 2.2.3.5. $T(i)=i$, $T(0)=0$, $T(\infty)=\infty$ olan bir möbiüs dönüşümü bulunuz.

Çözüm: $T(\infty)=\infty$ ise, $T(\infty)=\frac{a}{c}=\infty$ olur ki, bu durumda $c=0$ olur. O halde, $T(z)=\frac{az+b}{d}$ olur.

$T(0)=0$ ise, $T(0)=\frac{b}{d}=0$ olur ki, bu durumda $b=0$ olur. O halde, $T(z)=\frac{az}{d}$ olur.

$T(i)=i$ ise, $T(i)=\frac{ia}{d}=i$ olur ki, bu durumda $a=d$ olur. O halde, $T(z)=z$ olur.

Sonuç 2.2.3.2. $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$, $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$ olan bir möbiüs dönüşümü olsun. Eğer $T(i)=i$, $T(0)=0$, $T(\infty)=\infty$ ise her $z\in\mathbb{C}_\infty$ için $T(z)=z$ dir. Yani T dönüşümü bir özdeşlik dönüşümüdür.

2.2.4. Özdeşlik dönüşümü

Önerme 2.2.4.1. $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ bir möbiüs dönüşümü olsun. Eğer, $T(0)=0$, $T(1)=1$, $T(\infty)=\infty$ ise, her $z\in\mathbb{C}_\infty$ için $T(z)=z$ dir. Yani, T dönüşümü bir özdeşlik dönüşümüdür[12].

İspat: $T(\infty)=\infty$ ise, $\quad T(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad T(\infty)=\frac{a}{c}=\infty$

olduğundan, $c=0$ olmalıdır. Buradan,

$$T(z)=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$

olur.

$T(0)=0$ ise, $T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$, $T(0)=\frac{b}{d}=0$

olduğundan $b=0$ olmalıdır. Buradan,

$$T(z)=\frac{a}{d}z$$

olur.

$T(1)=1$ ise, $T(1)=\frac{a}{d}=1$

olur ki, burada, $a=d$ olacağından,

$$T(z)=z$$

bulunur ki bu da özdeşlik dönüşümü olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.4.1. $z_1, z_2, z_3, \in \mathbb{C}_\infty$ farklı üç nokta olsun. Bu durumda $T(z_1)=0$, $T(z_2)=1$, $T(z_3)=\infty$ olacak şekilde tek bir möbiüs dönüşümü vardır[12].

İspat: İspat yapılırken önce tekliği sonra da varlığı ispat edilir.

Teklik:

$T(z_1)=0$, $T(z_2)=1$, $T(z_3)=\infty$ ve $S(z_1)=0$, $S(z_2)=1$, $S(z_3)=\infty$ olacak şekilde S ve T gibi iki tane möbiüs dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$\left(T\circ S^{-1}\right)(0)=T\left(S^{-1}(0)\right)=T(z_1)=0$$

$$\left(T\circ S^{-1}\right)(1)=T\left(S^{-1}(1)\right)=T(z_2)=1$$

$$\left(T\circ S^{-1}\right)(\infty)=T\left(S^{-1}(\infty)\right)=T(z_3)=\infty$$

olur. $T\circ S^{-1}$ dönüşümü bir möbiüs dönüşümü olduğundan Önerme 2.2.4.1. e göre $T\circ S^{-1}=I$ olacaktır. O halde,

$$\left(T\circ S^{-1}\right)\circ S=I\circ S=S$$

olur. Buradan da,

$$T\circ\left(S^{-1}\circ S\right)=S$$

$$T\circ I=S$$

$$T=S$$

olur. O halde möbiüs dönüşümü tektir.

Varlık:

Eğer $z_1 \neq \infty$, $z_2 \neq \infty$, $z_3 \neq \infty$ ise,

$$T(z) = \frac{(z - z_1) \cdot (z_2 - z_3)}{(z - z_3) \cdot (z_2 - z_1)}$$

vardır. Burada,

$$a = z_2 - z_3, \quad b = -z_1 \cdot (z_2 - z_3)$$

$$c = z_2 - z_1, \quad d = -z_3 \cdot (z_2 - z_1)$$

alınırsa, $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ olur. Şu halde $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = \infty$ olacak şekilde bir möbiüs dönüşümü vardır.

Eğer, $1 \leq i \leq 3$ için $z_i = \infty$ ise, yani z_1, z_2, z_3 lerden birisi ∞ ise,

$$T(z) = \frac{(z - z_1) \cdot (z_2 - z_3)}{(z - z_3) \cdot (z_2 - z_1)}$$

de z_i nin geçtiği çarpımlar ortadan kaldırılır. Şu halde;

$$z_1 = \infty \text{ ise } T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

$$z_2 = \infty \text{ ise } T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

$$z_3 = \infty \text{ ise } T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

olur.

Örnek 2.2.4.1. $T(i) = 0$, $T(\infty) = 1$ ve $T(-1) = \infty$ olan bir T möbiüs dönüşümü yazınız.

Çözüm: $z_2 = \infty$ olduğundan,

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

dır. Möbiüs dönüşümde $z_1 = i$, $z_3 = -1$ yerine yazılarak,

$$T(z) = \frac{z - i}{z + 1}$$

möbiüs dönüşümü elde edilir.

Önerme 2.2.4.4. $z_1, z_2, z_3, \in \mathbb{C}_\infty$ farklı üç nokta olsun. $T(z_1) = z_1$, $T(z_2) = z_2$, $T(z_3) = z_3$ ise bu durumda $T = I$ dır[12].

İspat: Teorem 2.2.4.1. e göre $S(z_1) = 0$, $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = \infty$ olacak şekilde bir S möbiüs dönüşümü vardır.

$$(S \circ T \circ S^{-1})(0) = 0$$

$$(S \circ T \circ S^{-1})(1) = 1$$

$$(S \circ T \circ S^{-1})(\infty) = \infty$$

dır. $S \circ T \circ S^{-1}$ bir möbiüs dönüşümü olduğundan,

$$S \circ T \circ S^{-1} = I$$

dır. Buradan,

$$S \circ T = S$$

ve,

$$T = S^{-1} \circ S = I$$

bulunur.

2.2.5. Eşlenik dönüşümler

Tanım 2.2.5.1. T ve U iki möbiüs dönüşümü olsun.

$$U = S \circ T \circ S^{-1}$$

olacak şekilde bir S möbiüs dönüşümü varsa, T ve U dönüşümlerine eşlenik dönüşümler denir. Eşlenik dönüşümlerin aynı sayıda sabit noktası vardır[12].

Tanım 2.2.5.2. T möbiüs dönüşümünün bir tek sabit noktası varsa, T möbiüs dönüşümü,

$$U_a(z) = z + a$$

möbiüs dönüşümü ile eşleniktir. Burada U_a möbiüs dönüşümü,

$$U_a = S \circ T \circ S^{-1}$$

dır[12].

Tanım 2.2.5.3. T möbiüs dönüşümünün iki sabit noktası varsa, T möbiüs dönüşümü,

$$U_a(z) = az$$

möbiüs dönüşümü ile eşleniktir. Burada U_a möbiüs dönüşümü,

$$U_a = S \circ T \circ S^{-1}$$

dır. T möbiüs dönüşümünün iki sabit noktası varsa,

$$U_a(z) = az$$

möbiüs dönüşümündeki a sayısına T möbiüs dönüşümünün çarpanı denir[12].

Tanım 2.2.5.4. $\lambda \neq 0$ olmak üzere,

$$U_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z & , \quad \lambda \neq 1 \\ z+1 , & \lambda = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa bu durumda;

1. T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır. $\Leftrightarrow$ T dönüşümü U_1 ile eşleniktir. T dönüşümüne parabolik dönüşüm denir.

2. T dönüşümünün iki sabit noktası vardır. $\Leftrightarrow$ T dönüşümü $\lambda \neq 1$ olmak üzere U_λ ile eşleniktir.

a. Eğer $|\lambda| = 1$ ise T dönüşümüne eliptik dönüşüm denir.

b. Eğer $|\lambda| \neq 1$ ise T dönüşümüne loxodromik dönüşüm denir[12].

Tanım 2.2.5.5. T bir möbiüs dönüşümü ve $T \neq I$ olsun. Eğer $T^n = I$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa, T dönüşümüne sonlu mertebelidir denir ve $T^n = I$ şartını sağlayan n doğal sayılarının en küçüğüne de T dönüşümünün mertebesi denir[12].

Sonuç 2.2.5.1. T möbiüs dönüşümü sonlu mertebeli ise T^{-1} de sonlu mertebelidir. T möbiüs dönüşümünün mertebesi m ise T^{-1} in de mertebesi m dir. T möbiüs dönüşümü sonlu mertebeli ise $S \circ T \circ S^{-1}$ de sonlu mertebelidir.

Örnek 2.2.5.1. $T(z) = \frac{1}{z}$ ise $T \circ T = T^2 = I$ olup, T dönüşümünün mertebesi 2 dir.

Örnek 2.2.5.2. $T(z)=\dfrac{\sqrt{2}z-1}{5z-2\sqrt{2}}$ ise T dönüşümünün mertebesini bulunuz.

Çözüm: T dönüşümüne karşılık gelen matris, $\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 5 & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ dir.

$$T^2=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 5 & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{2}\\ -5\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$$

$$T^3=\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{2}\\ -5\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 5 & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & -7\\ 5 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$T^4=\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{2}\\ -5\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & \sqrt{2}\\ -5\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$T^4=I$$

olur. O halde T dönüşümünün mertebesi 4 tür.

2.3. Bir Möbiüs Dönüşümünün Sabit Noktaları

Tanım 2.3.1. $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ **,** $ad-bc=1$ ve T bir özdeşlik dönüşümü olmasın.

$$T(z_0)=z_0$$

ise, z_0 noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir[12].

Örnek 2.3.1. $T(z)=z-1$ dönüşümünde, $T(\infty)=\infty$ olup ∞ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Örnek 2.3.2. $T(z)=\dfrac{2z}{z+1}$ dönüşümünde, $T(0)=0$ olup 0 noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır.

$$z'=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

doğrusal dönüşümün sabit noktaları $z'=z$ yazılarak yani;

$$\frac{az+b}{cz+d}=z$$

yazılarak bulunur.

$$\frac{az+b}{cz+d}=z \Rightarrow cz^2+(d-a)z-b=0$$

olur.

z ye bağlı ikinci dereceden bir denklem olduğundan iki kökü vardır. O halde bu dönüşümün iki sabit noktası olabilir. Bu sabit noktalar;

$$z_{1,2}=\frac{a-d\mp\sqrt{(d-a)^2+4bc}}{2c}$$

dir. Buradan,

$$\Delta=(d-a)^2+4bc=d^2-2ad+a^2+4bc$$
$$\Delta=a^2+2ad+d^2-4ad+4bc$$

bulunur. $ad-bc=1$ olduğundan,

$$\Delta=(a+d)^2-4$$

Buna göre denklemin kökleri incelenirse, aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

1. Durum; $\Delta=0 \Leftrightarrow (a+d)^2-4=0 \Leftrightarrow a+d=\mp 2$ durumunda

$$z_1=z_2=\frac{a-d}{2c}$$

olan tek bir sabit nokta vardır.

2. Durum; $\Delta\neq 0$ ise farklı iki sabit nokta vardır.

3. Durum; $c=0 \Rightarrow ad-bc=1 \Rightarrow ad=1$ olur. O halde $a\neq 0, d\neq 0$ olur.

O zaman;

$$T(z) = \frac{az+b}{d} = z$$
$$az - dz + b = 0$$
$$z_1 = \frac{b}{d-a} \quad \text{ve} \quad z_2 = \infty$$

sabit noktalarıdır.

$c = 0$ iken $a = d$ olursa;

$$z = \frac{az+b}{d} = \frac{az+b}{a} = z + \frac{b}{a}$$

olur ki bu da ancak ∞'u sabit bırakır. Bu dönüşüm, bir öteleme dönüşümüdür.

Sonuç 2.3.1. Bir doğrusal dönüşümün en fazla iki sabit noktası vardır.

Teorem 2.3.1. İkiden fazla sabit noktası olan tek doğrusal dönüşüm $T(z) = z$ özdeşlik dönüşümüdür[12].

İspat: T(z) nin ikiden fazla örneğin z_1, z_2, z_3 gibi üç tane sabit noktası olsaydı;

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

denkleminin üç tane kökü olsaydı, denklemin özdeşlik yani, $c = 0$, $a = d$, $b = 0$ olması gerekirdi. Bu durumda dönüşüm;

$$T(z) = \frac{az+0}{0z+a} = z$$

olur ki dönüşüm özdeşlik dönüşümüdür.

Örnek 2.3.3. $T(z) = \frac{z+1}{z-i}$ möbiüs dönüşümünün sabit noktalarını bulunuz.

Çözüm: $T(z) = \frac{z+1}{z-i} = z$ olduğundan bu denklem çözülürse,

$$z^2 - zi = z + 1$$

$$z^2 + (-i-1)z - 1 = 0$$

elde edilir. Buradan da,

$$x_1 = \frac{1+i+\sqrt{2i+4}}{2} \text{ ve } x_2 = \frac{1+i-\sqrt{2i+4}}{2}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.4. $T(z) = 3z + 5$ möbiüs dönüşümünün sabit noktalarını bulunuz.

Çözüm: $T(z) = 3z + 5 = z$ olduğundan, bu denklem çözülürse,

$$z = -\frac{5}{2}$$

sabit noktası olduğu gibi, $T(\infty) = \infty$ olduğundan, ∞ noktası da sabit noktasıdır.

Teorem 2.3.2. z_1, z_2, z_3 gibi üç farklı noktayı z_1', z_2', z_3' gibi üç faklı noktaya götüren tek bir doğrusal dönüşüm vardır. Yani T_z'nin üç farklı noktada aldığı değerleri bilinirse T_z bulunabilir[12].

İspat: $T(z_1) = z_1'$, $T(z_2) = z_2'$, $T(z_3) = z_3'$ değerleri yazılırsa a,b,c,d nin üçü diğer dördüncü cinsinden yazılır ve $ad - bc = 1$ olan dördüncü de bulunur. Böylece, dönüşüm yazılır. Ya da;

2. Yol: $ad - bc = 1$ olduğundan a,b,c,d 'nin dördü birden sıfır olamaz. Örneğin; $c \neq 0$ ise , c ile pay ve payda bölünürse;

$$T(z)=\frac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{cz+\frac{d}{c}}=\frac{Az+B}{z+D}$$

elde edilir ki burada 3 bilinmeyenle dönüşüm bellidir. Verilen değerler ve $T(z)=z'$ değerleri yerine yazılıp 3 bilinmeyenli 3 denklem çözülür.

z_1,z_2,z_3 ü z_1',z_2',z_3' ye taşıyan dönüşümün bir tek olduğunu ispatlanır.

Tersine S ve T bu özellikte iki möbiüs dönüşümü olsunlar. O zaman möbiüs dönüşümleri bir grup oluşturduklarından T^{-1} vardır.

$$\left.\begin{array}{l} ST^{-1}\left(z_1'\right)=S\left(z_1\right)=z_1' \\ ST^{-1}\left(z_2'\right)=S\left(z_2\right)=z_2' \\ ST^{-1}\left(z_3'\right)=S\left(z_3\right)=z_3' \end{array}\right\}$$

olduğundan $U=ST^{-1}$ dönüşümünün üç sabit noktası olur ki bu da Teorem 2.3.1. gereği U nun I olmasını gerektirir.

$$\Rightarrow ST^{-1}=I\Rightarrow ST^{-1}T=IT\Rightarrow S=T$$

dir. Yani böyle bir dönüşüm tektir.

Örnek 2.3.5. $T_z:1,i,2+i\rightarrow 1,\infty,0$ dönüşümü bulunursa;

$$\frac{z'-1}{z'-\infty}\cdot\frac{\infty-0}{1-0}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{i-2-i}{1-2-i}\Rightarrow z'=-1-\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-2}{-1-i}$$

$$z'=-1+\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{2(-1+i)}{\frac{1+1}{2}}=\frac{-z+i+(z-1)(-1+i)}{z-i}=\frac{(-2+i)z+1}{z-i}$$

olur.

Örnek 2.3.6. $i,-2,0$ noktalarını $0,1,\infty$ noktalarına resmeden bir T Möbiüs dönüşümü bulunuz.

Çözüm: $T(i)=0$ **,** $T(-2)=1$ **,** $T(0)=\infty$ olduğundan, $T(z)=?$

$$T(z)=\frac{(z-z_1)\cdot(z_2-z_3)}{(z-z_3)\cdot(z_2-z_1)}=\frac{(z-i)\cdot(-2-0)}{(z-0)\cdot(-2-i)}=\frac{-2z+2i}{(-2-i)\cdot z}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.7. $1,2,3$ noktalarını $i,0,5$ noktalarına resmeden bir T Möbiüs dönüşümü bulunuz.

Çözüm: $T(1)=i$ **,** $T(2)=0$ **,** $T(3)=5$ olduğundan, $T(z)=?$

$$\left.\begin{aligned} T_1(1)&=0\\ T_1(2)&=1\\ T_1(3)&=\infty \end{aligned}\right\} \quad T_1(z)=\frac{(z-1)\cdot(2-3)}{(z-3)\cdot(2-1)}=\frac{-z+1}{z-3}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1(i)&=0\\ S_1(0)&=1\\ S_1(5)&=\infty \end{aligned}\right\} \quad S_1(z)=\frac{(z-i)\cdot(0-5)}{(z-5)\cdot(0-i)}=\frac{-5z+5i}{-iz+5i}$$

olacak sekilde tek bir T_1 ve S_1 möbiüs dönüşümü bulunur. T_1 ve S_1 möbiüs dönüşümlerine karşılık gelen matrisler,

T_1 e karşılık gelen matris, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

S_1 e karşılık gelen matris, $\begin{pmatrix} -5 & 5i \\ -i & 5i \end{pmatrix}$

S_1^{-1} e karşılık gelen matris, $\begin{pmatrix} 5i & -5i \\ i & -5 \end{pmatrix}$

dir.

$$T = S_1^{-1} \circ T_1$$

olduğundan,

$$T = S_1^{-1} \circ T_1 = \begin{pmatrix} 5i & -5i \\ i & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10i & 20i \\ -i-5 & i-15 \end{pmatrix}$$

olur. Yani,

$$T(z) = \frac{-10iz + 20i}{(-i-5)z - 15 + i}$$

bulunur.

2.4 Doğrusal Dönüşümler ve Çemberler

z bir kompleks sayı ise bunun reel ve sanal kısımları vardır. $z = x + iy$ ise $\mathrm{Re}(z) = x$ ve $\mathrm{Im}(z) = y$ 'dir. z'nin eşleniği de $\overline{z}$ ile gösterilir ve $\overline{z} = x - iy$ biçiminde tanımlanır.

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad , \quad y = \frac{i}{2}(\overline{z} - z)$$

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$$

Teorem 2.4.1. Doğrusal dönüşümler, çemberleri çemberlere dönüştürür[12].

İspat: $C_1 : A \cdot (x^2 + y^2) + b_1 x + b_2 y + C = 0$ çemberi alınır. Önce C_1 'in z ve $\overline{z}$ 'e bağlı ifadesi yazılır. Sonra da gösterilecek ki; $TC_1 = C_1'$ bir çemberdir. $(A, C, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$

$$A\left[\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right)^2\right] + b_1 \cdot \frac{z+\overline{z}}{2} + b_2 \cdot \frac{\overline{z}-z}{2} + C = 0$$

$$Az\overline{z} + \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)z + \frac{1}{2}(b_1 + ib_2)\overline{z} + C = 0$$

dır.

$$B=\frac{1}{2}\left(b_1-ib_2\right)$$

yazılırsa,

$$Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0 \qquad A,C\in\mathbb{R}$$

genel çember denklemi elde edilir. Bu denklem $A\neq 0$ için çember, $A=0$, $B\neq 0$ için doğru belirtir.

Çemberin merkezi ve yarıçapı bulunursa,

$$\left(z+\frac{\bar{B}}{A}\right)\cdot\left(\bar{z}+\frac{B}{A}\right)=\frac{B\bar{B}-AC}{A^2}$$

$$\left|z+\frac{\bar{B}}{A}\right|^2=\frac{B\bar{B}-AC}{A^2}$$

olduğundan Az çemberi $-\frac{\bar{B}}{A}$ merkezli ve $r=\sqrt{\frac{B\bar{B}-AC}{A^2}}$ yarıçaplı çemberdir. Buradan da görülüyor ki, ifadenin çember olması için $B\bar{B}-AC>0$ olması yani $B\bar{B}>AC$ olmalıdır.

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \quad\Rightarrow\quad z=\frac{-dw+b}{cw-a} \qquad \text{ve} \qquad \bar{z}=\frac{-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}-\bar{a}}$$

yerine yazılırsa,

$$C_1: A\left[\frac{-dw+b}{cw-a}\cdot\frac{-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}-\bar{a}}\right]+B\cdot\frac{-dw+b}{cw-a}+\bar{B}\cdot\frac{-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}-\bar{a}}+C=0$$

$$A\left[\frac{d\bar{d}w\bar{w}-d\bar{b}w-b\bar{d}w+b\bar{b}}{(cw-a)\cdot(\bar{c}\bar{w}-\bar{a})}\right]+B\left[\frac{-d\bar{c}w\bar{w}+d\bar{a}w+b\bar{c}w-b\bar{a}}{(cw-a)\cdot(\bar{c}\bar{w}-\bar{a})}\right]$$

$$+\bar{B}\left[\frac{-c\bar{d}w\bar{w}+c\bar{b}w+a\bar{d}\bar{w}-a\bar{b}}{(cw-a)\cdot(\bar{c}\bar{w}-\bar{a})}\right]+C\left[\frac{c\bar{c}w\bar{w}-\bar{a}cw-a\bar{c}\bar{w}+a\bar{a}}{(cw-a)\cdot(\bar{c}\bar{w}-\bar{a})}\right]=0$$

$$\left[Ad\bar{d}-Bd\bar{c}-\bar{B}c\bar{d}+Cc\bar{c}\right]w\bar{w}+\left[Ad\bar{b}+Bd\bar{a}-\bar{B}c\bar{b}-C\bar{a}c\right]w$$

$$+\left[-Ab\overline{d}+Bb\overline{c}+\overline{B}a\overline{d}-Ca\overline{c}\right]\overline{w}+Ab\overline{b}-Bb\overline{a}-\overline{B}a\overline{b}+Ca\overline{a}=0$$

olur ki bunun çember denklemi olması için $w\overline{w}$ ‘nin katsayısı ile sabit sayının gerçel olması gerekir. A ve C gerçel veriliyor.

$$d\overline{d}=|d|^2\in\mathbb{R}^2\ ,\ c\overline{c}=|c|^2\in\mathbb{R}^2 \text{ ve } \overline{Bd\overline{c}}=\overline{B}\overline{d}c$$

olduğundan,

$$Bd\overline{c}+\overline{B}\overline{d}c\in\mathbb{R}\ ,$$

$$b\overline{b}=|b|^2\in\mathbb{R}^2\ ,\ a\overline{a}=|a|^2\in\mathbb{R}^2 \text{ ve } \overline{Bb\overline{a}}=\overline{B}\overline{b}a$$

olduğundan,

$$Bb\overline{a}+\overline{B}\overline{b}a\in\mathbb{R}$$

dir.

Özel Hal: Bir çemberin $T_z=\dfrac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü altında bir doğruya dönüşmesi için çemberin $z=-\dfrac{d}{c}$ noktasından geçmesi gerekir.

Sonuç 2.4.1. Doğruları ∞ yarıçaplı birer çember olarak düşünebileceğimizden, doğrular da doğrusal dönüşüm altında bir doğruya ya da bir çembere dönüşürler.

Teorem 2.4.2. Doğrusal dönüşümler bir doğruyu veya bir çemberi bir çembere veya bir doğruya dönüştürürler[12].

İspat: Doğrular ∞ yarıçaplı çemberler olduklarından ispat açıktır. Dönüşümün bir doğru belirtmesi durumunda da ispat kolayca yapılabilir. ∞ noktası doğru üzerinde olduğundan görüntüsü ∞ olan bu nokta, $\left(-\dfrac{d}{c}\right)$, verilen çember veya doğru üzerindeyse görüntüsü bir doğru belirtir denebilir. Aksi takdirde bir çember belirtir. $w\overline{w}$ ’nin katsayısı $c\overline{c}$ ile bölünürse;

$$A\left(-\frac{d}{c}\right)\left(-\frac{\overline{d}}{\overline{c}}\right)+B\left(-\frac{d}{c}\right)+\overline{B}\left(-\frac{\overline{d}}{\overline{c}}\right)+C=0$$

olur ki bu da $z=-\frac{d}{c}$ ’nin

$$Az\overline{z}+Bz+\overline{B}\overline{z}+C=0 \qquad A,C\in\mathbb{R}$$

denklemini sağladığını gösterir. $\left(-\frac{d}{c}\right)$,

$$Az\overline{z}+Bz+\overline{B}\overline{z}+C=0 \qquad A,C\in\mathbb{R}$$

çemberi üzerindedir.

Teorem 2.4.3. Verilen bir çemberi, verilen ikinci bir çembere dönüştüren ∞ çoklukta doğrusal dönüşüm vardır.

İspat: Verilen üç nokta yardımıyla çemberi tanıdığımızdan ve her bir noktayı çember üzerinde ∞ çeşit seçebileceğimizden, verilen bir çemberi, ikinci bir çembere dönüştüren $\infty\cdot\infty\cdot\infty=\infty^3$ çoklukta doğrusal dönüşüm vardır.

Özel Durum: Bir çemberi kendisine dönüştüren ∞^3 tane dönüşüm vardır.

2.5. Çapraz Oran (Croos-Ratio)

z_1,z_2,z_3,z_4 sayılarının çapraz oranı;

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_2-z_4}$$

olarak tanımlanır. Çapraz oran, dönüşümün birçok özelliğini bulmada önemli rol oynar. Hatta bazen kendisini bulmakta da kullanılır[12].

Teorem 2.5.1. Doğrusal dönüşüm altında 4 noktanın çapraz oranı korunur. Yani z_1, z_2, z_3, z_4 4 farklı nokta ise ve z_1', z_2', z_3', z_4' de $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü altında z_1, z_2, z_3, z_4 ‘ün resimleri ise

$$\frac{\left(z_1' - z_2'\right)\cdot\left(z_3' - z_4'\right)}{\left(z_1' - z_3'\right)\cdot\left(z_2' - z_4'\right)} = \frac{\left(z_1 - z_2\right)\cdot\left(z_3 - z_4\right)}{\left(z_1 - z_3\right)\cdot\left(z_2 - z_4\right)}$$

olur[12].

İspat: Gerçekten de;

$$\frac{\left(\dfrac{az_1+b}{cz_1+d} - \dfrac{az_2+b}{cz_2+d}\right)\cdot\left(\dfrac{az_3+b}{cz_3+d} - \dfrac{az_4+b}{cz_4+d}\right)}{\left(\dfrac{az_1+b}{cz_1+d} - \dfrac{az_3+b}{cz_3+d}\right)\cdot\left(\dfrac{az_2+b}{cz_2+d} - \dfrac{az_4+b}{cz_4+d}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{acz_1z_2} + bcz_2 + adz_1 + \cancel{bd} - \cancel{acz_1z_2} - bcz_1 - adz_2 - \cancel{bd}}{\left(cz_1+d\right)\cdot\left(cz_2+d\right)}}{\dfrac{\cancel{acz_1z_3} + bcz_3 + adz_1 + \cancel{bd} - \cancel{acz_1z_3} - bcz_1 - adz_3 - \cancel{bd}}{\left(cz_1+d\right)\cdot\left(cz_3+d\right)}}$$

$$\cdot \frac{\dfrac{\cancel{acz_3z_4} + bcz_4 + adz_3 + \cancel{bd} - \cancel{acz_3z_4} - bcz_3 - adz_4 - \cancel{bd}}{\left(cz_3+d\right)\cdot\left(cz_4+d\right)}}{\dfrac{\cancel{acz_2z_4} + bcz_4 + adz_2 + \cancel{bd} - \cancel{acz_2z_4} - bcz_2 - adz_4 - \cancel{bd}}{\left(cz_2+d\right)\cdot\left(cz_4+d\right)}}$$

$$= \frac{\overbrace{(ad-bc)}^{1}z_1 - \overbrace{(ad-bc)}^{1}z_2}{\cancel{\left(cz_1+d\right)}\cdot\cancel{\left(cz_2+d\right)}} \cdot \frac{\cancel{\left(cz_1+d\right)}\cdot\cancel{\left(cz_3+d\right)}}{\underbrace{(ad-bc)}_{1}z_1 - \underbrace{(ad-bc)}_{1}z_3}$$

$$\cdot \frac{\overbrace{(ad-bc)}^{1}z_3 - \overbrace{(ad-bc)}^{1}z_4}{\cancel{\left(cz_3+d\right)}\cdot\cancel{\left(cz_4+d\right)}} \cdot \frac{\cancel{\left(cz_2+d\right)}\cdot\cancel{\left(cz_4+d\right)}}{\underbrace{(ad-bc)}_{1}z_2 - \underbrace{(ad-bc)}_{1}z_4}$$

$$= \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}$$

olur.

$$\frac{\left(z_1'-z_2'\right)\cdot\left(z_3'-z_4'\right)}{\left(z_1'-z_3'\right)\cdot\left(z_2'-z_4'\right)}=\frac{\left(z_1-z_2\right)\cdot\left(z_3-z_4\right)}{\left(z_1-z_3\right)\cdot\left(z_2-z_4\right)}$$

de;

$z_1 = z_2$ iken her iki tarafı da sıfırdır.

$z_1 = z_3$ iken her iki tarafı da sonsuzdur.

$z_1 = z_4$ iken her iki tarafı da 1 olur.

$z_2 = \infty$ sağ taraf; $\dfrac{z_1-\infty}{z_1-z_3}\cdot\dfrac{z_3-z_4}{\infty-z_4}=-\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_3}$ olur.

$z_3 = \infty$ sağ taraf; $\dfrac{z_1-z_2}{z_1-\infty}\cdot\dfrac{\infty-z_4}{z_2-z_4}=-\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_4}$ olur.

$z_4 = \infty$ sağ taraf; $\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\cdot\dfrac{z_3-\infty}{z_2-\infty}=\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ olur.

Ayrıca çapraz oran dönüşümü bulmaya da yardım eder.

Örnek 2.5.1. $T_z : 1, 2, i \to 1, 3, 2i$ olan dönüşümü bulalım.

Çözüm: $\dfrac{(z'-1)\cdot(3-2i)}{(z'-3)\cdot(1-2i)}=\dfrac{(z-1)\cdot(2-i)}{(z-2)\cdot(1-i)}$

$$\frac{z'-1}{z'-3}=\frac{(1-2i)}{(3-2i)}\cdot\frac{(z-1)\cdot(2-i)}{(z-2)\cdot(1-i)}$$

$$\frac{z'-1}{z'-3}=\frac{2z-4iz-iz-2z-2+4i+i+2}{3z-2iz-3iz-2z-6+4i+6i+4}=\frac{-5iz+5i}{(1-5i)z-2+10i}$$

$$(z'-1)\left[(1-5i)z-2+10i\right]=(z'-3)(-5iz+5i)$$

Ara işlemler yapılırsa;

$$z' = \frac{(1+10i)z-2-5i}{z-2+5i}$$

bulunur.

2.6. Sembolik Gösterim

$z' = \frac{az+b}{cz+d}$ aynı zamanda $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ile gösterilir.

$$z' = T(z)$$

dir.

$$T_1(z) = T(z) \text{ ise } T_1 = T$$

dir.

$z'' = S(z') \Rightarrow z'' = S(T(z)) = ST(z)$ olup aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

1. $U(ST) = (US)T = UST$

2. $T^2(z) = T(T(z))$ ve $T^3(z) = T(T^2(z))$

3. $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$

4. $(T_1T_2\cdots T_n)^{-1} = T_n^{-1}T_{n-1}^{-1}\cdots T_2^{-1}T_1^{-1}$

5. ST genelde TS'den farklıdır.

6. $UST = V$ olsun.

   $(UST)T^{-1} = VT^{-1} \Rightarrow US = VT^{-1}$

   $U^{-1}(UST) = U^{-1}V \Rightarrow ST = U^{-1}V$

7. W dönüşümü $T_1T_2\cdots T_n$ in tersiyse $W\cdot T_1T_2\cdots T_n = 1$ 'dir[12].

BÖLÜM 3. MÖBİÜS DÖNÜŞÜMLERİ İLE SÜREKLİ KESİRLER ARASINDAKİ İLİŞKİ

3.1 Möbiüs Dönüşümlerinin Bileşimi Olarak Sürekli Kesirler

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile,

$$T_{A_n}(z) = a_n + \frac{b_n}{z} = \frac{a_n \cdot z + b_n}{z} = \frac{a_n \cdot z + b_n}{1 \cdot z + 0}$$

biçimindeki möbiüs dönüşümleri kullanılarak,

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \ddots}}}$$

sürekli kesirleri üretebilir. n. yaklaşım,

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left(T_{A_0} \circ T_{A_1} \circ \ldots \circ T_{A_n}\right)(z)$$

ve sürekli kesrin değeri,

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{P_n}{Q_n}\right) = \lim_{z \to \infty}\left(T_{A_0} \circ T_{A_1} \circ \ldots \circ T_{A_n}\right)(z)$$

dir. Bu ifade yakınsaktır. Burada $a_0 \in \mathbb{Z}$ ve $a_n > 0$, $b_n > 0$ ve ilk terim olan a_0 hariç $a_n, b_n \in \mathbb{Z}^+$ dir.

Teorem1.2.6. dan sürekli kesirlerin,

$$\ldots \leq \frac{P_n}{Q_n} \leq \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} \leq \frac{P_{n+4}}{Q_{n+4}} \leq \ldots \leq \frac{P_{n+5}}{Q_{n+5}} \leq \frac{P_{n+3}}{Q_{n+3}} \leq \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \leq \ldots$$

alt kümelerinin, yakınsak dizisinin ileri ve geri salınması gibi çok yararlı bir özelliği vardır. Möbiüs dönüşümleri matris ifadesi ile düşünülürse,

$$\prod_{n=0}^{m} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} P_m & P_{m-1} \\ Q_m & Q_{m-1} \end{pmatrix}$$

özelliği görülür. Burada $Q_{-1} = 0$ olduğu için

$$\prod_{n=0}^{m} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \prod_{n=0}^{m+1} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Bu yüzden, matris ifadesindeki pozitif katsayılı sürekli kesirler, normal matris çarpımına karşılık gelir[11].

Tanım 3.1.1. 0 boyutlu bir möbiüs dönüşümü, kesirli bir sayıdır.

$$T_{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \frac{a}{b}$$

1 boyutlu bir möbiüs dönüşümü aşağıdaki genel yapıya sahiptir.

$$T_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

2 boyutlu bir möbiüs dönüşümü aşağıdaki genel yapıya sahiptir.

$$T_{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}}(z,w) = \frac{azw + bz + cw + d}{ezw + fz + gw + h}$$

[11].

Teorem 3.1.1. 1 boyutlu möbiüs dönüşümün bileşimi 2x2 matris çarpımı ile özdeştir.

İspat:

$$T_{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} \circ T_{\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}}(z) = \frac{a\left(\frac{ez+g}{fz+h}\right)+c}{b\left(\frac{ez+g}{fz+h}\right)+d}$$

$$= \frac{(ae+cf)z + (ag+ch)}{(be+df)z + (bg+dh)}$$

$$= T_{\begin{pmatrix} ae+cf & ag+ch \\ be+df & bg+dh \end{pmatrix}}(z)$$

ifadesi matris çarpımı ile karşılaştırılırsa,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cf & ag+ch \\ be+df & bg+dh \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu nedenle möbiüs dönüşümleri ve matrisler arasında rahatlıkla geçiş yapabiliriz.

3.2. Möbiüs Dönüşümleri ve Matrisler

Tanım 3.2.1. Her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için, $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bir möbiüs dönüşümü olsun. $ad - bc = 1$ olmak üzere, T möbiüs dönüşümüne karşılık,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisi karşılık gelir.

Önerme 3.2.1. Her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için, $T:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $S:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $S(z)=\dfrac{ez+f}{gz+h}$ biçiminde iki möbiüs dönüşümü olsun. $ad-bc=1$ ve $eh-fg=1$ ise,

$$(T \circ S)(z)=\frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}$$

dir.

İspat: T ve S sırasıyla $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ matrislerine karşılık gelirse, $T \circ S$ ye de bu matrislerin çarpımı karşılık gelir. Yani,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

dir. Bu da,

$$(T \circ S)(z)=\frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}$$

möbiüs dönüşümüne karşılık gelir.

Örnek 3.2.1. $T(z)=\dfrac{2z+1}{3z+2}$ ve $S(z)=\dfrac{-iz+1}{-2z-i}$ ise, $S \circ T$ dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: T ve S dönüşümleri, matris cinsinden yazılarak çarpılırsa,

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -2 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i+3 & -i+2 \\ -3i-4 & -2i-2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu da,

$$(S \circ T)(z)=\frac{(-2i+3)z+(-i+2)}{(-3i-4)z+(-2i-2)}$$

möbiüs dönüşümüne karşılık gelir.

Burada $R^* = R \cup \{-\infty,\infty\}$ genişletilmiş reel sayılardır. ∞ değeri $a \neq 0$ iken $\dfrac{a}{0}$ dan ortaya çıkar. Öte yandan, $T(\infty)$, $\dfrac{a}{b}$ olarak tanımlanmıştır. Tekil matrisler ile tanımlanan möbiüs dönüşümleri için ek bir sayı, $\perp$ (belirsiz) gereklidir. Bu sayı $\dfrac{0}{0}$

dan ortaya çıkar ve sıfır vektörü olarak ifade edilebilir. Bundan dolayı $T(\perp)=\perp$ dir. Bu yüzden tekil olmayan möbiüs dönüşümleri $R_{\perp}^{*} = R \cup \{-\infty,\infty\} \cup \{\perp\}$ olmak üzere $R_{\perp}^{*}$ den içine fonksiyonları ifade eder. Bu tanımlarla Möbiüs Dönüşümlerin birleştirilmesi matris çarpımına karşılık gelir.

$\det(T) \neq 0$ olan, T möbiüs dönüşümlerinin (tekil olmayan möbiüs dönüşümlerinin) tersi bulunabilir.

Önerme 3.2.2. $n = 0,1,2,...$, $j > 0$, $a_j \neq 0$ ve,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

için;

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir[10].

İspat: Tümavarım yöntemi ile ispatlanırsa;

İlk değer olan $n = 0$ için doğrudur. Burada,

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{p_0}^{a_0} & \overbrace{p_{-1}}^{1} \\ \underbrace{q_0}_{1} & \underbrace{q_{-1}}_{0} \end{pmatrix}$$

dır.

$n = k$ için doğru olsun;

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix}$$

dir. $n = k+1$ için,

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{pmatrix}$$

nın doğru olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix}$$

eşitliğinin her iki tarafı da, $\begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile çarpılırsa,

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}}^{p_{k+1}} & p_k \\ \underbrace{a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}}_{q_{k+1}} & q_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{pmatrix}$$

elde edilir ki bu da istenen sonuçtur.

Teorem 3.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ise;

$$\det A = (-1)^{n-1}$$

dir[10].

İspat:

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğundan Tanım1.2.4. ten;

$$\det A = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

olur.

Sonuç 3.2.1. $\{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kalanları, matris cinsinden,

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılırlar.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad P=\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

alınır. Burada,

$$\det A = \det P = (-1)^{n-1}$$

dır. Ayrıca,

$$\frac{a}{c}=\frac{p_n}{q_n}$$

dir[10].

Tanım 3.2.2. Eğer, $x=\dfrac{p}{q}=\left[\overline{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n}\right]$ sürekli kesri alınırsa;

$$x=\left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}\right]$$

$$x=[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, x]$$

olur. Buradan devam edilirse;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

olur. Burada, $\frac{p}{q} = x$ dir. Devam edilirse,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{p}{q} = x$$

olur. Buradan,

$$cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

ikinci derece denklemi elde edilir. Buradan da elde edilen ikinci derece denklem çözülerek sürekli kesir olan rasyonel ya da irrasyonel sayı elde edilir[10].

Örnek 3.2.2. $x = [\overline{1;2}]$ periyodik sürekli kesrini ele alalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

$$\frac{3x+1}{2x+1} = \frac{p}{q} = x$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. Bulunan bu değer sürekli kesirde yerine konursa,

$$\frac{p}{q}=\left[1;2,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{3}}{2}}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

irrasyonel sayısı elde edilir.

Örnek 3.2.3. $A=[1;2,3,4,5,4,5,...]$ periyodik sürekli kesrini ele alalım.

$$A=[1;2,3,\overline{4,5}]$$

$$A=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{[4;5,4,5,...]}}}$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$x=[4;5,4,5,...]$$

alınırsa,

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & r\\ q & s\end{pmatrix}$$

yazılabilir.

$$\begin{pmatrix}21 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & r\\ q & s\end{pmatrix}$$

$$\frac{21x+4}{5x+1}=\frac{p}{q}=x$$

$$5x^2-20x-4=0$$

denklemi şeklinde elde edilir. Denklem çözülürse,

$$x=\frac{10+2\sqrt{30}}{5}$$

bulunur. Bulunan x değeri, A da yerine yazılırsa,

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{10+2\sqrt{30}}{5}}}} = \frac{115+20\sqrt{30}}{\underset{(80-14\sqrt{30})}{80+14\sqrt{30}}}$$

$$A = \frac{80-\sqrt{30}}{52}$$

elde edilir. Yani;

A = 1,433130277402852670489044272538…

olur.

Örnek 3.2.4. $x = [1;1,1,1,...]$ periyodik sürekli kesri,

$$x = [1;1,1,1,...] = [1;[1;1,1,...]] = [1;x] = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olur ve bu ikinci derece denklem çözülürse, x pozitif olduğundan pozitif kök;

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bulunur. Bu denkleme altın oran denir.

Sonuç 3.2.2.

a) A sayısı, periyodik sürekli kesre sahip olsun.

$$A = \left[a_1; a_2, ..., a_1, \overline{b_1, b_2, ..., b_m}\right]$$

O halde;

$$A = \frac{r + s\sqrt{D}}{t}$$

biçiminde yazılır. ($r, s, t, D \in \mathbb{Z}$, $D > 0$)

b) $r, s, t, D \in \mathbb{Z}$, $D > 0$ olmak üzere;

$$\frac{r + s\sqrt{D}}{t}$$

sayısı periyodik sürekli kesre sahiptir.

Görülüyor ki; sürekli kesirler, matrisler ve möbiüs dönüşümleri arasında bir ilişki vardır. Bu da, matrislerin çarpımı ve möbiüs dönüşümlerinde kullanılan basit işlemler yardımı ile sürekli kesirlerin hesaplanmasında kolaylıklar sağlar.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR

Sonuç 4.1. $1 \le k \le n$ olmak üzere,

(i) $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n]]$

(ii) $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \dfrac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_n]}$

Sonuç 4.2. a_0 dışında bütün terimleri pozitif, $(a_n)_{n=0}^{\mathbb{N}}$ sonlu ($\mathbb{N}$ doğal sayı) veya sonsuz $(\mathbb{N} = \infty)$ reel sayı dizisi olsun. k=0,1,2,… olacak şekilde,

$$p_0 = a_0 \quad , \quad q_0 = 1$$

$$p_1 = a_1 a_0 + 1 \quad , \quad q_1 = a_1$$

$$\vdots$$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad , \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

olarak tanımlansın.

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

ise bu takdirde, $C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ dır.

Sonuç 4.3. a_0 dışında bütün terimleri pozitif, $(a_n)_{n=0}^{\mathbb{N}}$ sonlu ($\mathbb{N}$ doğal sayı) veya sonsuz $(\mathbb{N} = \infty)$ reel sayı dizisi olsun. k=0,1,2,… olacak şekilde,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

dir.

Sonuç 4.4. $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ olmak üzere $k \geq 1$ için,

$$C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$$

dir. Ayrıca $\forall\ k \geq 2$ tamsayısı için,

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}}$$

dir.

Sonuç 4.5. a_0 dışında bütün terimleri pozitif, $(a_n)_{n=0}^{\mathbb{N}}$ sonlu ($\mathbb{N}$ doğal sayı) veya sonsuz $(\mathbb{N} = \infty)$ reel sayı dizisi olsun. $C_k = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ olsun. Şu halde;

a) $C_0 < C_2 < C_4 < \ldots < C_{2m} < \ldots$

b) $C_1 > C_3 > C_5 > \ldots > C_{2m-1} > \ldots$

c) $C_{2i-1} > C_{2j}$

dir.

Sonuç 4.6. Eğer $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k]$ sürekli kesrinin k. yaklaşımı $C_k = \frac{p_k}{q_k}$, ve $a_0 > 0$ ise;

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0]$$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1]$$

dir.

Sonuç 4.7. $\forall \ k \geq 1$ için $a_k > 0$ olacak şekilde $a_0; a_1, a_2, \ldots$ tamsayı dizisi verildiğinde $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ise bu durumda C_k yaklaşımları bir α limitine gider,

$$\lim C_k = \alpha$$

dır.

Sonuç 4.8. $\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı ve $a_0, a_1, a_2, \ldots$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$a_k = \|\alpha_k\| \quad , \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \quad , \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

Şu halde;

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

dir.

Sonuç 4.9. $T(z)$ ve z , irrasyonel sayı olsun. Ve

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \; ; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad ; \quad ad - bc = \pm 1$$

olsun. Eğer, $z > 1$ ve $c > d > 0$ ise z sayısı $T(z)$ nın sürekli kesir açılımındaki kalandır.

$$T(z) = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_k, z]$$

dır. a_0 tamsayı ve $a_1, a_2, \cdots, a_k$ pozitif tamsayıları (4.1)eşitliğinden hesaplanır:

$$\frac{a}{c} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_k] \tag{4.1}$$

Sonuç 4.10. α , β irrasyonel sayılara denktirler $\Leftrightarrow$ Bunların sürekli kesir açılımlarının bazı noktaları aynıdır:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n, c_1, c_2, \cdots]$$
$$\beta = [b_0; b_1, b_2, \cdots, b_n, c_1, c_2, \cdots] \qquad ;k,n \in \mathbb{Z}^+$$

Sonuç 4.11. Bir $\alpha \notin \mathbb{Z}$ reel sayısı için her bir en iyi yaklaşım, α’ nın bir yakınsaklığıdır. $\alpha_k > 1$ olmak üzere, her bir p_k / q_k yakınsaklığı, α için bir en iyi yaklaşımdır.

Sonuç 4.12. Her periyodik sürekli kesir, bir quadratik (ikinci derece) irrasyonel sayı gösterir ve her quadratik irrasyonel sayı da bir periyodik sürekli kesir yardımı ile temsil edilebilir.

Sonuç 4.13. Herhangi pozitif a ve b ler için;

$$\frac{2a-b}{2} + \frac{\sqrt{b^2+4}}{2} = [a; b, b, b, ...]$$

dir.

Özellikle $a = b$ alınırsa;

$$A = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2+4}}{2}$$

olur.

$b = 2a$ alınırsa;

$$A = \sqrt{1+a^2}$$

olur.

Sonuç 4.14. $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $T(\infty) = \dfrac{a}{c}, T\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$ ise,

$T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $T^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ ve $T^{-1}(\infty) = -\dfrac{d}{c}, T^{-1}\left(\dfrac{a}{c}\right) = \infty$ dir.

Sonuç 4.15. İkiden fazla sabit noktası olan tek doğrusal dönüşüm $T(z) = z$ özdeşlik dönüşümüdür.

Sonuç 4.16. $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

matrisi ile,

$$T_{A_n}(z) = a_n + \frac{b_n}{z} = \frac{a_n \cdot z + b_n}{z} = \frac{a_n \cdot z + b_n}{1 \cdot z + 0}$$

biçimindeki möbiüs dönüşümleri kullanılarak,

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \ddots}}}$$

sürekli kesirleri üretebilir. n. yaklaşım,

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left(T_{A_0} \circ T_{A_1} \circ \ldots \circ T_{A_n}\right)(z)$$

ve sürekli kesrin değeri,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P_n}{Q_n}\right) = \lim_{z\to\infty}\left(T_{A_0} \circ T_{A_1} \circ \ldots \circ T_{A_n}\right)(z)$$

dir. Bu ifade yakınsaktır. Burada $a_0 \in \mathbb{Z}$ ve $a_n > 0$, $b_n > 0$ ve ilk terim olan a_0 hariç $a_n, b_n \in \mathbb{Z}^+$ dir.

Sonuç 4.17. Her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için, $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ bir möbiüs dönüşümü olsun. $ad - bc = 1$ olmak üzere, T möbiüs dönüşümüne karşılık,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisi karşılık gelir.

Sonuç 4.18. $n = 0,1,2,\ldots$, $j > 0$, $a_j \neq 0$ ve,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

için;

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir.

Sonuç 4.19. $A = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ise;

$$\det A = (-1)^{n-1}$$

dir.

Sonuç 4.20. $\{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kalanları matris cinsinden,

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılırlar.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

alınır. Burada,

$$\det A = \det P = (-1)^{n-1}$$

dır. Ayrıca,

$$\frac{a}{c} = \frac{p_n}{q_n}$$

dir.

Görülüyor ki; sürekli kesirler, matrisler ve möbiüs dönüşümleri arasında bir ilişki vardır. Bu da, matrislerin çarpımı ve möbiüs dönüşümlerinde kullanılan basit işlemler yardımı ile sürekli kesirlerin hesaplanmasında kolaylıklar sağlar.

KAYNAKLAR

[1] BAYRAKTAR, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Erzurum,1988.

[2] IVAN, N., HERBERT, S., ZUCKERMAN, H., L., M., An Introduction To Number Theory, John Wiley and Sons, Inc., 1991.

[3] NIKISHIN, E., M., SORAKIN, V., N., Rational Approximation and Ortogonality.

[4] ROSEN, H., K., Elementary Number Theory and Its Aplication, 3d Edition, Addision-Wesley, 1993.

[5] AKBULUT, F., Lineer Cebir, İzmir, 1973.

[6] OLDS, C.D., Continued Fractions ,Yale University, 1963.

[7] STARK, H.M., An Introduction to Number Theory, Chicago, 1970.

[8] KHICHIN, A.Y., Continued Fractions, Chicago, 1964.

[9] ROCKET, A., M., SZÜSZ, P., Continued Fractions, Singapore, 1998.

[10] HENNİGER, J.P., Lineer Algebra and its Applications, Ontario, 1997.

[11] POTTS, J.P., Computable Reel Arithmetic Using Linear Fractional Transformations, London, 1996.

[12] BAŞKAN, T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Ankara, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Fuat ÇINAR, 17.11.1973'te Eskişehir'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Eskişehir'de tamamladı. 1991 yılında Yunus Emre Teknik Lisesi, Elektronik Bölümünden mezun oldu. 1991 yılında başladığı Erciyes Üniversitesi Matematik bölümünü 1997 yılında bitirdi. 1998 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı okullarda öğretmen olarak görev yapmaktadır.