T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL MATRİSLER VE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşen USLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ö. Faruk GÖZÜKIZIL

Eylül 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL MATRİSLER VE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşen USLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 08/09/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Doç. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Ö. Faruk GÖZÜKIZIL	**Cemalettin KUBAT**	**Hüseyin KOCAMAN**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana öneren, çalışmam sırasında yardımcı olan, danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a sonsuz teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam süresince çeşitli yardım ve desteğini gördüğüm aileme teşekkür ederim.

Bu çalışmanın, ihtiyacı olan kişilere yardımcı olmasını dilerim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

R^{+}	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
σ	: Permütasyon fonksiyonu
P	: Permütasyon matrisi
I	: Birim dairesel matris
W	: Üreteç dairesel matris
T	: Toeplitz matrisi
$M_n(F)$	: F cisminden alınan nxn mertebeli matrislerin kümesi
o	: Hadamard çarpım
$\otimes$	: Kronecker çarpım
A^{T}	: nxn mertebeli A matrisinin transpozesi
A^{*}	: nxn mertebeli A matrisinin eşlenik transpozesi
λ	: nxn mertebeli A matrisinin özdeğeri
$\|\cdot\|_1$	: nxn mertebeli A matrisinin sütun normu
$\|\cdot\|_\infty$	: nxn mertebeli A matrisinin satır normu
$\|\cdot\|_F$	: nxn mertebeli A matrisinin Frobenius normu
$\|\cdot\|_2$	: nxn mertebeli A matrisinin spektral normu
$\|\cdot\|_p$	: nxn mertebeli A matrisinin ℓ_p normu
$r_1(A)$	: nxn mertebeli A matrisinin Frobenius satır normu
$c_1(A)$	: nxn mertebeli A matrisinin Frobenius sütun normu

ÖZET

Anahtar kelimeler: Dairesel Matris, Matris Normları

Dairesel matrislerin olasılık ve istatistik, nümerik analiz, sayılar teorisi ve geometri ile pekçok ilişkisi vardır.

Bu çalışmada dairesel matrislerin tanımı, özellikleri, türetimi gibi genel ifadeler tanımlanmış, sonra matris normları hakkında bilgiler verilmiştir. Son olarak E_n ve K_n ler tarafından tanımlanan dairesel matrislerin farklı normları için sınırlar araştırılmıştır.

CIRCULANT MATRICES AND ITS APPLICATION

SUMMARY

Key Words: Circulant Matrix, Matrix Norms

Circulant matrices have many connections to probability and statistics, to numerical analysis, to number theory and to geometry.

In this study, it has been determined general expressions such that defination, properties, generating of circulant matrices. Then, it has been given knowledges about matrix norms. Finally, it has been investigated bounds for different norms of circulant matrices whose entries are E_n and K_n numbers.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Dairesel matrislerin fizik, olasılık ve istatistik, nümerik analiz, sayılar teorisi, geometri gibi alanlarla pek çok ilişkisi vardır. Bunun dışında dairesel matrislerin birtakım özellikleri açıklanırken Fourier analizi ve grup teorisi alanlarından faydalanılır [3].

Frank makalesinde dairesel matrislerin tanımını vermiş ve bir dairesel matrisin üretilmesi konusunu incelemiştir. Benzer şekilde bir diğer çalışmada Rostermundt dairesel matrislerin tanımı, oluşumu, üreteçleri ve özdeğerleri ile ilgili bilgiler vermiştir [5].

Bir matrisi pozitif reel sayıya dönüştürme işlemi olan matris normları matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir yer teşkil eder. Donaghey ve Shapiro Catalan sayılarını kullanarak dairesel matris tanımlamış, bu matrisin spektral normu için bir üst sınır elde etmiştir [8].

Başka bir çalışmada Fibonacci ve Lucas sayılarına bağlı olarak tanımlanan dairesel matrislerin Furobenius normu incelenmiş ve spektral normları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir [7].

Bu çalışmanın ikinci bölümünde dairesel matris tanımı, dairesel matrislerin özellikleri, dairesel matrisin türetimi, dairesel matrislerin bloklara ayrılması konuları hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde dördüncü bölüme hazırlık olarak matris normu tanımına, matris normu çeşitlerine, matris normları arasındaki bağıntılara değinilip ve bu bağıntıları gerçekleyen birtakım örnekler verilmiştir. Çalışmanın asıl kısmını oluşturan dördüncü bölümde ise E_n ve K_n'lere bağlı olarak tanımlanan dairesel matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırları veren teoremler verilmiştir. Bu teoremlerden faydalanılarak bu matrislerin Hadamard çarpımlarının spektral normu Kronecker çarpımlarının Furobenius normu için birtakım sonuçlara ulaşılmıştır. Ayrıca farklı normların kullanıldığı birtakım yardımcı teoremler verilmiş ve bu teoremlerden faydalanılarak bu matrislerin spektral normları için üst sınır elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. DAİRESEL MATRİSLER

2.1. Dairesel Matris

Tanım 2.1.1.: $C=\left(c_{ij}\right), c_{ij}\in\mathbb{C}$ olmak üzere, elemanları $j-i\equiv k(\operatorname{mod} n)$ şeklinde tanımlı nxn mertebeli matrise dairesel matris denir ve,

$$C=circ\left(c_0,c_1,c_2,...,c_{n-1}\right)$$

şeklinde gösterilir.Ayrıca açık olarak,

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Genel anlamda $n\times n$ mertebeli bir dairesel matris n elemanlı bir vektör ile temsil edilir ve bu matrisin ilk satırını oluşturur. Böylece takip eden satırlar önceki satırın son elemanını başa alarak devam eder. Bir dairesel matrisin köşegeni üzerindeki elemanları ile köşegene parelel olan çizgiler üzerindeki elemanları aynıdır. 2×2, 3×3 ve 4×4 mertebeli genel dairesel matrisler aşağıdaki gibi gösterilirler.

$$C=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

2.2. Dairesel Matrislerin Özellikleri

Öncelikle özellikler içerisinde kullanılacak bazı ifadelerin tanımları verilsin.

Tanım 2.2.1.: Aynı mertebeli $A=\left(a_{ij}\right)$ ve $B=\left(b_{ij}\right)$ matrislerinin karşılıklı elemanlarının toplanmasıyla oluşan matrise *A* ve *B* matrislerinin toplamı denir.

Tanım 2.2.2.: Herhangi bir *k* skalarının bir $A=\left(a_{ij}\right)$ matrisinin her elemanı ile çarpılmasıyla oluşan matrise *A* matrisinin skaler ile çarpımı denir.

Tanım 2.2.3.: $m\times p$ mertebeli bir $A=\left(a_{ij}\right)$ matrisi ve $p\times n$ mertebeli bir $B=\left(b_{ij}\right)$ matrisinin çarpımı,

$$AB=C=(c_{ij})$$

şeklinde tanımlanır.Oluşan *C* matrisi $m\times n$ mertebelidir ve elemanları,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad (i=1,2,...,m \; ; j=1,2,...,n)$$

biçimindedir.

Tanım 2.2.4.: Bir A matrisinin aynı sayıda satırı ve sütunu varsa A matrisine kare matris denir.

Tanım 2.2.5.: Bir A kare matrisi için,

$$AB=BA=I$$

olacak şekilde bir B matrisi varsa B matrisine A matrisinin çarpma işlemine göre tersi denir ve $B=A^{-1}$ şeklinde gösterilir.Eğer bir matrisin tersi yoksa bu matrise tekil matris denir.

Tanım 2.2.6.: Elemanları bir A matrisinin elemanlarının kompleks eşleniği olan matrise A matrisinin eşleniği denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7.: Bir A matrisinin aynı sayılı satırları ve sütunlarının yer değiştirmesi ile oluşan matrise A matrisinin transpozesi denir ve A^T ile gösterilir.

Tanım 2.2.8.: A^*, A nın eşlenik transpozesini göstermek üzere,

$$AA^* = A^* A$$

ise A normal matristir.

Tanım 2.2.9.: A, $n \times n$ mertebeli bir matris olsun. $Ax = \lambda x$ olmak üzere,

$$Ax - \lambda x = 0 \text{ eşitliği } (A - \lambda I)x = 0$$

şeklinde yazılabilir.Buradan $|A - \lambda I| = 0$ 'ı sağlayan λ değerlerine A matrisinin özdeğeri denir.Ayrıca $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğindeki x vektörüne A matrisinin özvektörü denir.

Tanım 2.2.10.: a ve b herhangi iki skaler olsun. $w = a + ib$ olmak üzere $w^n = 1$ denkleminin kökleri,

$$w_k = \left(1, \frac{360k}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

ile bulunur.Bu değerlere birimin n. kökleri denir.

Dairesel matrislerin birçok ilginç özelliği vardır. $n \times n$ mertebeli dairesel matrisler için şunlar söylenebilir[1].

(i) A ve B aynı mertebeli dairesel matrisler ve a ile b herhangi iki skaler olmak üzere

$aA+bB$ matrisi bir dairesel matristir.

(ii) Aynı mertebeli iki dairesel matrisin çarpımı yine bir dairesel matristir.

(iii) Aynı mertebeli iki dairesel matrisin çarpımı değişme özelliğine sahiptir.

(iv) Eğer bir dairesel matris tekil değilse ,terside dairesel matristir.

(v) Dairesel matrislerin transpozesi dairesel matristir.

(vi) Dairesel matrisler normal matrislerdir.

(vii) İlk satırı (a_0 , a_1 , a_2 , . . ., a_{n-1}) olan $n\times n$ mertebeli bir dairesel matris ve $w_k, w^n=1$ denkleminin farklı çözümlerinden biri olmak üzere dairesel matrisin özdeğerleri,

$$\lambda_k = a_0 + a_1 w_k + a_2 w_k^2 + ... + a_{n-1} w_k^{n-1} \qquad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

formülü ile bulunur.Ayrıca dairesel matrisin ilgili özvektörleri,

$$X_i = \left(1, w_k, w_k^2, ..., w_k^{n-1}\right)^T$$

olur.

2.3. Bir Dairesel Matrisin Oluşumu

Bir dairesel matrisin oluşumu gösterilmeden önce permütasyon matrisi tanımlansın.

2.3.1. Permütasyon matrisi

Tanım 2.3.1.1.: *M*, sonlu elemanlı bir küme olmak üzere, *M* den *M* ye tanımlanan bire-bir ve örten her fonksiyona , *M* nin bir permütasyonu denir.

Tanım 2.3.1.2.: $M = \{1, 2, ..., n\}$ kümesinin bir,

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & . & . & . & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

permütasyonu olsun.E_j , *j*.bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 olan ,

$$E_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$$

şeklinde gösterilen n bileşenli birim satır vektörü olsun.

$$P = P_\sigma = \begin{pmatrix} E_{\sigma(1)} \\ E_{\sigma(2)} \\ . \\ . \\ . \\ E_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

biçiminde olan ve i=1,2,...,n olmak üzere, P nin i.satırının $\sigma(i)$.sütunundaki elemanı 1 , diğer elemanları 0 olan matrise permütasyon matrisi denir.

Örnek.2.3.1.1.:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.2. Üreteç dairesel matris

Bir $n \times n$ mertebeli dairesel matris oluşturabilmek için öncelikle $n \times n$ üreteç dairesel matrisi tanımlamak gerekir.

Tanım 2.3.2.1.: W permütasyon matrisi ilk satırı $(0,1,0,...,0)$ olan $n \times n$ mertebeli bir dairesel matris ise W 'a üreteç dairesel matris denir.

2×2 mertebeli bir dairesel üreteç,

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, W^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3×3 mertebeli bir dairesel üreteç,

$$W=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ W^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ W^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

.

.

.

$n\times n$ mertebeli bir dairesel üreteç,

$$W=\begin{pmatrix}0&1&0&.&.&.&0&0\\0&0&1&.&.&.&0&0\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\1&0&0&.&.&.&0&0\end{pmatrix},\ W^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&.&.&0&0\\0&0&0&1&.&.&0&0\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\0&1&0&0&.&.&0&0\end{pmatrix},\dots,$$

$$W^n=I=\begin{pmatrix}1&0&0&.&.&.&0&0\\0&1&0&.&.&.&0&0\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\0&0&0&.&.&.&0&1\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere W n. Mertebeden bir üreteç matris iken W^n birim matristir.

2.3.3. ***W*** **ile dairesel matris türetimi**

İlk satırı $(c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$ olan $n \times n$ mertebeli bir dairesel matris oluşturmak için herhangi bir

$$q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$$

polinomu tanımlansın. Öyle ki katsayıları C matrisinin ilk satırından oluşsun ve derecesi C matrisinin mertebesinden bir düşük olsun.

Örneğin 2×2 mertebeli bir dairesel matris oluşturmak için 1. dereceden $q(t) = a + bt$ polinomu tanımlansın. Böylece C = q (W) olacaktır.

$$\begin{aligned} C &= q\,(W) \\ &= aI + bW \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

3×3 mertebeli bir dairesel oluşturmak için,

$$W=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, W^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \text{ ve } q(t)=a+bt+ct^2$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda,

$$C = \mathrm{q}\,(W)$$

$$= aI + bW + cW^2$$

$$= a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$$

elde edilir.

*n*x*n* mertebeli bir dairesel oluşturmak için,

$$W=\begin{pmatrix}0&1&0&.&.&.&0\\0&0&1&.&.&.&0\\.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.\\1&0&0&.&.&.&0\end{pmatrix}, W^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&.&.&0\\0&0&0&1&.&.&0\\.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.\\0&1&0&0&.&.&0\end{pmatrix}, \cdots, W^{n-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&.&.&0&1\\1&0&0&.&.&0&0\\.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.\\0&0&0&.&.&1&0\end{pmatrix}$$

ve $q(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+...+c_{n-1}t^{n-1}$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda,

$$C = q(W) = c_o I + c_1 W + c_2 W^2 + \cdots + c_{n-1} W^{n-1}$$

$$C = c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & . & . & . & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & . & . & . & c_{n-3} & c_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ c_1 & c_2 & c_3 & . & . & . & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$$

n x n mertebeli dairesel matrisi oluşur.

2.4. Toeplitz Matrisleri İle Dairesel Matrislerin Açıklanması

Öncelikle Toeplitz Matrisi kısaca tanımlansın.

Tanım 2.4.1.: $T = (t_{ij})$ $, t_{ij} \in \mathbb{C}$ $n \times n$ mertebeli bir matris olmak üzere elemanları,

$$t_{i,j} = t_{i+1,j+1} \qquad i, j = 1, 2, ..., n-1 \tag{2.1}$$

şeklinde olan matrise Toeplitz matrisi denir. Toeplitz matrisinin ana köşegeni ve bu köşegenlere paralel olan köşegenleri üzerindeki elemanları aynıdır.

Örnek 2.4.1.:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix}$$

matrisinin bir Toeplitz matrisi olduğu açıktır.

Buradan (2.1)'e göre dairesel matrislerin aynı zamanda Toeplitz matrisleri olduğu fakat tersinin her zaman doğru olmadığı sonucuna ulaşılır.

2.5. Dairesel Matrislerin Bloklara Ayrılması

$n = p.q$ olacak şekilde $n \times n$ mertebeli bir A dairesel matrisi $q \times q$ mertebeli $p \times p$ tane bloğa ayrılabilir. Bu blokların her biri Toeplitz matrisidir.

Örnek 2.5.1.:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} a & b & c & d & e & f \\ f & a & b & c & d & e \\ \hline e & f & a & b & c & d \\ d & e & f & a & b & c \\ \hline c & d & e & f & a & b \\ b & c & d & e & f & a \end{array}\right)$$

şeklindeki 6×6 A dairesel matrisi $q=2$ ve $p=3$ olacak şekilde $3\times 3=9$ tane bloğa ayrılmıştır. Bu bloklar,

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ f & a \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} c & d \\ b & c \end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix} e & f \\ d & e \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilirse A dairesel matrisi aşağıdaki gibi de ifade edilir.

$$A=\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{pmatrix}$$

Ayrıca tersi olarak X,Y,Z blokları, 3×3 mertebeli W,W^2,I dairesel üreteçleri ve Kronocker matris çarpımı kullanılarak A dairesel matrisi elde edilir.

Tanım 2.5.1.: $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ve $p\times q$ mertebeli olmak üzere,

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & . & . & . & a_{1n}B \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1}B & . & . & . & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan “$\otimes$” operatörüne Kronecker çarpımı denir.

Buradan,

$$A = I \otimes X + W \otimes Y + W^2 \otimes Z$$

$$= I \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ f & a \end{pmatrix} + W \otimes \begin{pmatrix} c & d \\ b & c \end{pmatrix} + W^2 \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ d & e \end{pmatrix}$$

olur.

Bu gösterim aşağıdaki gibi genelleştirilebilir. $n = p.q$ ve $x_0, x_1, x_2, ..., x_{p-1}$ $q \times q$ mertebeli bloklar ve $I, W, W^2, ..., W^{n-1}$ $p \times p$ mertebeli üreteç daireselleri göstersin. Buna göre,

$$C = I \otimes x_o + W \otimes x_1 + W^2 \otimes x_2 + \cdots + W^{n-1} \otimes x_{p-1}$$

dairesel matrisi elde edilir.

BÖLÜM 3. NORMLAR

3.1. Vektör Normları

Tanım 3.1.1.: $(V,+)$ değişmeli bir grup ve $(F,+,.)$ bir cisim olsun. Her $a,b \in F$ ve her $u,v \in V$ için,

(i) $au \in V$
(ii) $a(bu) = (ab)u$
(iii) $(a+b)u = au + bu$
(iv) $a(u+v) = au + av$
(v) $1u = u$ (1 F cisminin birim elemanıdır)

aksiyomları sağlanırsa V kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı (veya lineer uzay) denir.

Tanım 3.1.2.: V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olmak üzere,

$$\|\,.\,\| : \to R^{+}$$

dönüşümü her $u,v \in V$ ve $\alpha \in F$ için,

(i) $\| u \| \geq 0$ ve $\| u \| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
(ii) $\| \alpha u \| = \alpha \| u \|$
(iii) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$

aksiyomlarını sağlarsa bu dönüşüme norm, V uzayına da normlu uzay denir.

3.2. Matris Normları

Tanım 3.2.1.: $M_n(F)$ elemanları F cisminden alınan $n \times n$ mertebeli matrislerin kümesini göstermek üzere,

$$\|.\|: M_n(F) \to R^+$$

dönüşümü her $A, B \in M_n(F)$ ve her $\alpha \in F$ için,

(i) $\| A \| \geq 0$ ve $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
(ii) $\| \alpha A \| = |\alpha| \, \| A \|$
(iii) $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$
(iv) $\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \|$

aksiyomlarını sağlarsa bu dönüşüme matris normu denir. Matris normu $A \in M_n(F)$ için $\| A \|$ ile gösterilir. Eğer sadece (i), (ii) ve (iii) aksiyomları sağlanırsa bu norma genelleştirilmiş matris normu denir.

O halde matris normu daima genelleştirilmiş matris normudur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin toplam normu $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ genelleştirilmiş bir matris normudur, fakat bir matris normu değildir.

Ayrıca x herhangi bir vektör olmak üzere matris normları arasında,

$$\| Ax \| \leq \| A \| \, \| x \|$$

şeklinde bir ilişki vardır. Bu eşitsizliği sağlayan $\| A \|$ matris normuna, $\| x \|$ vektör normu ile uygundur denir.

Teorem 3.2.1.: A bir matris ve z herhangi bir vektör olmak üzere,

$$\| A \| = \max_{\|z\|=1} \| Az \|$$

ifadesi matris normudur.

İspat: İspat için $\| A \|$ normunun, matris normu şartlarını sağladığı gösterilir.

(i) $A \neq 0$ ise $\| z \| = 1$ olmak üzere $Az \neq 0$ olacak şekilde daima bir z vektörü bulunabilir. Öyle ki $\| A \| \geq 0$ 'dır.

$A = 0$, $\| z \| = 1$ olacak şekilde her z için $\| Az \| = 0$ olmasını gerektirir. z birim vektör olarak seçilirse Az, A matrisinin sütunlarına karşılık gelir. Halbuki A matrisinin sütunlarının normları sıfırdır. Bu nedenle A matrisinin sütunları sıfırdır, yani $A = 0$ 'dır.

(ii) Herhangi bir c skaleri için,

$$\begin{aligned} \| cA \| &= \max_{\|z\|=1} \| cAz \| \\ &= |c| \max_{\|z\|=1} \| Az \| \\ &= |c| \; \| A \| \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) z_0, $\| z_0 \| = 1$ ve $\| (A+B)z_0 \| = \| A+B \|$ olacak şekilde bir vektör olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \| A+B \| &= \| (A+B)z_0 \| \\ &\leq \| Az_0 \| + \| Bz_0 \| \\ &\leq \| A \| \| z_0 \| + \| B \| \| z_0 \| \\ &\leq \| A \| + \| B \| \end{aligned}$$

olur.

(iv) z_0, $\| z_0 \| = 1$ ve $\| ABz_0 \| = \| AB \|$ olacak şekilde bir vektör ise,

$$\begin{aligned}
\| AB \| &= \| ABz_0 \| = \| A(Bz_0) \| \\
&\leq \| \mathrm{A} \| \, \| Bz_0 \| \\
&\leq \| A \| \, \| B \| \, \| z_0 \|
\end{aligned}$$

olur. $\| z_0 \| = 1$ yerine yazılırsa,

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\| A \| = \max\limits_{\|z\|=1} \| Az \|$ ile tanımlı $\| A \|$, matris normu olur.

Tanım 3.2.1. deki norm aksiyomlarını sağlayan bazı matris normları şu şekilde verilebilir.

Tanım 3.2.2.: A, $n \times n$ mertebeli bir matris olmak üzere,

$$\| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$$

ile tanımlanan matris normuna sütun normu denir.

Tanım 3.2.3.: A, $n \times n$ mertebeli bir matris olmak üzere,

$$\| A \|_\infty = \max_i \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$$

olarak tanımlanan norma satır normu denir.

Tanım 3.2.4.: A, $n\times n$ mertebeli bir matris olmak üzere,

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile verilen norma Frobenius normu denir. Bazen Frobenius normu yerine Euclide normu, Schur normu veya Hilbert-Schmidt normu ifadeleri de kullanılır.

Tanım 3.2.5.: A, $n\times n$ mertebeli bir matris ve A^* matrisi A matrisinin eşlenik transpozesi olmak üzere A^*A çarpım matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğerinin kareköküne A matrisinin spektral normu denir ve $\|A\|_2$ ile gösterilir. Yani,

$$\|A\|_2=\max\left\{\sqrt{|\lambda|}:\lambda, A^*A'nın\ özdeğeri\right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.6.: A, $n\times n$ mertebeli bir matris olmak üzere

$$\|A\|_p=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1\le p<\infty)$$

şeklinde tanımlanan norma A matrisinin ℓ_p normu denir.

Örnek 3.2.1.:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

matrisinin normlarını bulunuz.

Çözüm: İlk olarak $\| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$ sütun normu bulunsun.

$$\| A \|_1 = \max \left\{ \left(|1| + |0| + |-2| \right), \left(|0| + |1| + |1| \right), \left(|-3| + |0| + |2| \right) \right\}$$
$$= \max \left\{ 3, 2, 5 \right\} = 5$$

olarak bulunur. İkinci olarak $\| A \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$ satır normu hesaplansın.

$$\| A \|_\infty = \max \left\{ \left(|1| + |0| + |-3| \right), \left(|0| + |1| + |0| \right), \left(|-2| + |1| + |2| \right) \right\}$$
$$= \max \left\{ 4, 1, 5 \right\} = 5$$

elde edilir. $\| A \|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ Frobenius normu ise,

$$\| A \|_F = (|1|^2 + |0|^2 + |-3|^2 + |0|^2 + |1|^2 + |0|^{2+} |-2|^2 + |1|^2 + |2|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{20} = 4,472136$$

olur. Son olarak $\| A \|_2 = \max \left\{ \sqrt{|\lambda|} : \lambda, A^* A' \textit{nın özdeğeri} \right\}$ spektral normu,

$$\| A \|_2 = \sqrt{9 + \sqrt{73}} = \sqrt{9 + 8,5440037} = \sqrt{17,5440037} = 4,1885563$$

değerine eşittir.

Tanım 3.2.7.: A, $n \times n$ mertebeli bir matris olsun.

$$r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_j | a_{ij} |^2}$$

normuna A matrisinin Frobenius satır normu ve,

$$c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_i |a_{ij}|^2}$$

normuna A matrisinin Frobenius sütun normu denir.

Tanım 3.2.8.: $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ $n \times n$ mertebeli matrisleri için $A\text{o}B = (a_{ij}b_{ij})$ şeklinde tanımlanan "o" operatörüne Hadamard çarpımı denir.

Teorem 3.2.2.: A,B ve C $n \times n$ mertebeli matrisler ve $A = B\text{o}C$ olsun.

$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j^n |b_{ij}|^2}$ ve $c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2}$ olmak üzere,

$$\| A \|_2 \leq r_1(B) c_1(C) \tag{3.1}$$

dir [6].

Teorem 3.2.3.: A ve B $n \times n$ mertebeli matrisler ve $\| . \|$ herhangi bir norm olsun.

$$\| A\text{o}B \| \leq \| A \| \, \| B \| \tag{3.2}$$

olur.

Teorem 3.2.4.: A ve B $n \times n$ mertebeli matrisler ve $\| . \|$ herhangi bir norm olsun.

$$\| A \otimes B \| = \| A \| \otimes \| B \| \tag{3.3}$$

dir.

3.3. Matris Normları Arasındaki Bağıntılar

Matris normlarında, $\|.\|_1$ sütun normunu, $\|.\|_\infty$ satır normunu $\|.\|_F$ Frobenius normunu ve $\|.\|_2$ spektral normu gösterdiği bir önceki kısımda gösterildi. Ayrıca A, $n \times n$ mertebeli matrisi için $\| A \|_\Delta = \max | a_{ij} |$ olsun. Bu durumda bu normlar arasında

(i) $\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_F \leq \| A \|_2 \leq \| A \|_F$ (3.4)

(ii) $\| A \|_2 \leq \| A \|_F \leq \sqrt{n} \| A \|_2$ (3.5)

(iii) $\| A \|_\Delta \leq \| A \|_2 \leq n \| A \|_\Delta$ (3.6)

(iv) $\| A \|_2 \leq \sqrt{\| A \|_1 \| A \|_\infty}$ (3.7)

(v) $\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_\infty \leq \| A \|_2 \leq \sqrt{n} \| A \|_\infty$ (3.8)

(vi) $\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_1 \leq \| A \|_2 \leq \sqrt{n} \| A \|_1$ (3.9)

bağıntıları geçerlidir.

Örnek 3.3.1.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisi için 3.3'de verilen bağıntıları gerçekleyiniz.

Çözüm: Öncelikle $\| A \|_1$, $\| A \|_\infty$, $\| A \|_F$, $\| A \|_2$ *ve* $\| A \|_\Delta$ normları hesaplansın.

$$\begin{aligned} \| A \|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | = \max \left\{ \left(|1| + |4| + |-3| \right), \left(|0| + |1| + |-2| \right), \left(|2| + |0| + |-1| \right) \right\} \\ &= \max \left\{ 8, 3, 3 \right\} = 8 \end{aligned}$$

$$\| A \|_{\infty} = \max_{i} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | = \max \left\{ \left(|1| + |0| + |2| \right), \left(|4| + |1| + |0| \right), \left(|-3| + |-2| + |-1| \right) \right\}$$
$$= \max \left\{ 3, 5, 6 \right\} = 6$$

$$\| A \|_{F} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|1|^{2} + |0|^{2} + |2|^{2} + |4|^{2} + |1|^{2} + |0|^{2} + |-3|^{2} + |-2|^{2} + |-1|^{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{36} = 6$$

$$\| A \|_{2} = \frac{\sqrt{57}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = 3,77449172 + 1,8027756 = 5,5776928$$

ve

$\| A \|_{\Delta} = \max | a_{ij} | = 4$ elde edilir.

Şimdi 3.3'de verilen bağıntılar

(i) $\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_{F} \leq \| A \|_{2} \leq \| A \|_{F}$

$$3,464102 \leq 5,5776928 \leq 6$$

(ii) $\| A \|_{2} \leq \| A \|_{F} \leq \sqrt{n} \, \| A \|_{2}$

$$5,5776928 \leq 6 \leq 9,6608473$$

(iii) $\| A \|_{\Delta} \leq \| A \|_{2} \leq n \, \| A \|_{\Delta}$

$$4 \leq 5,5776923 \leq 12$$

(iv) $\| A \|_{2} \leq \sqrt{\| A \|_{1} \| A \|_{\infty}}$

$$5,5776923 \leq 6,9282032$$

(v) $\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_{\infty} \leq \| A \|_{2} \leq \sqrt{n} \, \| A \|_{\infty}$

$$3,464102 \leq 5,577692 \leq 10,392305$$

(vi) $\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_1 \leq \| A \|_2 \leq \sqrt{n} \| A \|_1$

$$4,6188002 \leq 5,577692 \leq 13,856406$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. ÖZEL DAİRESEL MATRİSLER İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde E_n ve K_n sayılarından faydalanılarak tanımlanan dairesel matrislerin normları ile bu matrislerin Hadamard ve Kronecker çarpımlarının normları incelendi.

4.1. Uygulama Matrisinin Elemanlarının Oluşturulması

Tanım 4.1.1.: $E_0 = 0$ ve $E_1 = 2$ olmak üzere,

$$E_{n+2} = E_{n+1} + E_n \tag{4.1}$$

olacak şekilde sayılar tanımlansın. Bu sayılardan bazıları aşağıdaki şekilde sıralanır.

$n:0$	1	2	3	4	5	6	7	...
$E_n:0$	2	2	4	6	10	16	26	...

Ayrıca bu sayılar geriye doğru genişletilerek E_{-n} sayıları da bulunabilir.

Tanım 4.1.2.: $K_0 = 6$ ve $K_1 = 4$ olmak üzere,

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n \tag{4.2}$$

olacak biçimde sayılar olsun. Bu sayılardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanır.

$n:0$	1	2	3	4	5	6	7	...
$K_n:6$	4	10	14	24	38	62	100	...

Bunun dışında bu sayılar geriye doğru genişletilirse K_{-n} sayıları da bulunabilir. E_n ve K_n sayıları arasında,

$$E_n + K_n = 3E_{n+1} \tag{4.3}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. (4.3) de E_{n+1} yerine,

$$E_{n+1} = E_n + E_{n\text{-}1}$$

yazılırsa,

$$K_n = 2E_n + 3E_{n\text{-}1} \tag{4.4}$$

biçiminde bir bağıntı elde edilir.

4.2. Normlar İçin Sınırlar

Teorem 4.2.1.: A, elemanları $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ şeklinde olan $n \times n$ mertebeli bir matris olmak üzere,

$$\sqrt{E_n E_{n\text{-}1}} \leq \| A \|_2 \leq E_n E_{n\text{-}1} \tag{4.5}$$

üst ve alt sınırları mevcuttur.

İspat: A matrisi açık olarak,

$$\begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & . & . & . & E_{n\text{-}1} \\ E_{n\text{-}1} & E_0 & E_1 & . & . & . & E_{n\text{-}2} \\ E_{n\text{-}2} & E_{n\text{-}1} & E_0 & . & . & . & E_{n\text{-}3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ E_1 & E_2 & E_3 & . & . & . & E_0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. (3.1) ile verilen,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_F \leq \| A \|_2 \leq \| A \|_F$$

eşitsizliği göz önüne alınsın. Frobenius normu tanımından,

$$\| A \|_F^2 = n \sum_{s=0}^{n\text{-}1} E_s^2 = nE_n E_{n\text{-}1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F = \sqrt{E_n E_{n-1}} \tag{4.6}$$

dir. Böylece (3.1) ve (4.6) ifadelerinden,

$$\sqrt{E_n E_{n-1}} \leq \| A \|_2 \tag{4.7}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $A = BoC$ olacak şekilde,

$$B = \left(b_{ij}\right) = \begin{cases} b_{ij} = E_{(\mathrm{mod}(j-i,n))} & , \ i \geq j \\ b_{ij} = 1 & , \ i < j \end{cases}$$

$$C = \left(c_{ij}\right) = \begin{cases} c_{ij} = E_{(\mathrm{mod}(j-i,n))} & , \ i \leq j \\ c_{ij} = 1 & , \ i > j \end{cases}$$

matrisleri tanımlansın.

$A = BoC$ çarpımı açık olarak,

$$\begin{bmatrix} E_0 & E_1 & . & . & . & E_{n-2} & E_{n-1} \\ E_{n-1} & E_0 & . & . & . & E_{n-3} & E_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ E_2 & E_3 & . & . & . & E_0 & E_1 \\ E_1 & E_2 & . & . & . & E_{n-1} & E_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_0 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ E_{n-1} & E_0 & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ E_2 & E_3 & . & . & . & E_0 & 1 \\ E_1 & E_2 & . & . & . & E_{n-1} & E_0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} E_0 & E_1 & . & . & . & E_{n-2} & E_{n-1} \\ 1 & E_0 & . & . & . & E_{n-3} & E_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & E_0 & E_1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & E_0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. B matrisinin Frobenius satır normu ve C matrisinin Frobenius sütun normu,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{nj}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} E_s^2} = \sqrt{E_n E_{n-1}} \tag{4.8}$$

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_i |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} E_s^2} = \sqrt{E_n E_{n-1}} \tag{4.9}$$

dir. Böylece (3.2) ile verilen,

$$\| A \|_2 \leq r_1(B) c_1(C)$$

ifadesinde (4.8) ve (4.9) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\| A \|_2 \leq E_n E_{n-1} \tag{4.10}$$

elde edilir. Böylece (4.7) ve (4.10) dan (4.5) bulunur. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1.: A elemanları $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(i+j,n))}$ olacak şekilde $n \times n$ mertebeli bir matris olmak üzere,

$$\sqrt{E_n E_{n-1}} \leq \| A \|_2 \leq E_n E_{n-1} \tag{4.5}$$

üst ve alt sınırlarına sahiptir.

İspat: (4.5) eşitsizliğinin sol tarafı, Teorem 4.2.1'in sol tarafının ispatında $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ yerine $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(i+j,n))}$ yazılarak aynı şekilde yapılır. Buradan

$$\sqrt{E_n E_{n-1}} \leq \| A \|_2 \tag{4.7}$$

olur.

Diğer yandan $A = B\mathrm{o}C$ olacak şekilde,

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} b_{ij} = E_{(\mathrm{mod}(j+i,n))} & , \; i \geq j \\ b_{ij} = 1 & , \; i < j \end{cases}$$

ve

$$C = (c_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} = E_{(\mathrm{mod}(j+i,n))} & , \; i < j \\ c_{ij} = 1 & , \; i \geq j \end{cases}$$

matrisleri tanımlansın. B matrisinin Frobenius satır normu ve C matrisinin Frobenius sütun normu,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j | b_{ij} |^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} | b_{nj} |^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} E_s^2} = \sqrt{E_n E_{n-1}} \tag{4.8}$$

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_i |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} E_s^2} = \sqrt{E_n E_{n-1}} \qquad (4.11)$$

dir. Böylece (3.2) ifadesinde (4.8) ve (4.11) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\| A \|_2 \leq E_n E_{n-1} \qquad (4.10)$$

olur. (4.7) ve (4.10)'dan (4.5) elde edilir.

Teorem 4.2.2.: A, elemanları $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ şeklinde tanımlı $n \times n$ mertebeli bir matris olsun.

$$\begin{cases} \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_n E_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2} + 36}, n \;\; tek \;\; ise \\ \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_n E_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2} - 12}, n \;\; çift \;\; ise \end{cases} \leq \| A \|_2 \qquad (4.12)$$

alt sınırına sahiptir ve bunun dışında,

$$\| A \|_2 \leq \begin{pmatrix} \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_n E_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2} + 36}, n \;\; tek \; ise \\ \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_n E_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2} - 12}, n \;\; çift \; ise \end{pmatrix} \qquad (4.13)$$

$$\times \begin{pmatrix} \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_n E_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2}} \quad , n \;\; tek \; ise \\ \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_n E_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2} - 48} \; , n \;\; çift \; ise \end{pmatrix}$$

üst sınırına sahiptir.

İspat: A matrisi açık olarak,

$$A=\begin{pmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & . & . & . & K_{n\text{-}1} \\ K_{n\text{-}1} & K_0 & K_1 & . & . & . & K_{n\text{-}2} \\ K_{n\text{-}2} & K_{n\text{-}1} & K_0 & . & . & . & K_{n\text{-}3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ K_1 & K_2 & K_3 & . & . & . & K_0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Frobenius normu tanımından,

$$\| A \|_F^2 = n\sum_{s=0}^{n\text{-}1} K_s^2 = n\sum_{s=0}^{n\text{-}1} (2E_s + 3E_{s\text{-}1})^2$$

$$\frac{1}{n}\| A \|_F^2 = 4\sum_{s=0}^{n\text{-}1} E_s^2 + 12\sum_{s=0}^{n\text{-}1} E_{s\text{-}1}E_s + 9\sum_{s=0}^{n\text{-}1} E_{s\text{-}1}^2 \qquad (4.14)$$

olur. Ayrıca,

$$\sum_{s=0}^{n\text{-}1} E_s^2 = E_n E_{n\text{-}1} \qquad (4.15)$$

$$\sum_{s=0}^{n\text{-}1} E_{s\text{-}1}E_s = \begin{cases} E_{n\text{-}1}^2 \quad , & n \ \ tek \ \ ise \\ E_{n\text{-}1}^2 \text{-} 4, & n \ \ çift \ \ ise \end{cases} \qquad (4.16)$$

$$\sum_{s=0}^{n\text{-}1} E_{s\text{-}1}^2 = 4 + E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2} \qquad (4.17)$$

dir. (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri (4.14)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{n}\| A \|_F^2 = \begin{cases} 12E_{n\text{-}1}^2 + 4E_nE_{n\text{-}1} + 9E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2} + 36, & n \ \ tek \ \ ise \\ 12E_{n\text{-}1}^2 + 4E_nE_{n\text{-}1} + 9E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2} \text{-} 12, & n \ \ çift \ \ ise \end{cases} \qquad (4.18)$$

olur (3.2) ile verilen,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\| A \|_F \leq \| A \|_2 \leq \| A \|_F$$

ifadesinde (4.18)’in karekökü alınıp yerine yazılırsa (4.12) elde edilir.

Diğer yandan $A = B \circ C$ olacak şekilde,

$$B = \left(b_{ij}\right) = \begin{cases} b_{ij} = K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))} & , \ i \geq j \\ b_{ij} = 1 & , \ i < j \end{cases}$$

ve

$$C = \left(c_{ij}\right) = \begin{cases} c_{ij} = K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))} & , \ i < j \\ c_{ij} = 1 & , \ i \geq j \end{cases}$$

matrisleri tanımlansın. $A = B \circ C$ çarpımı açık olarak,

$$\begin{pmatrix} K_0 & K_1 & . & . & . & K_{n-2} & K_{n-1} \\ K_{n-1} & K_0 & . & . & . & K_{n-3} & K_{n-2} \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & & . & & . & . \\ . & . & & & . & . & . \\ K_2 & K_3 & . & . & . & K_0 & K_1 \\ K_1 & K_2 & . & . & . & K_{n-1} & K_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_0 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ K_{n-1} & K_0 & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & & . & & . & . \\ . & . & & & . & . & . \\ K_2 & K_3 & . & . & . & K_0 & 1 \\ K_1 & K_2 & . & . & . & K_{n-1} & K_0 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 1 & K_1 & . & . & . & K_{n-2} & K_{n-1} \\ 1 & 1 & . & . & . & K_{n-3} & K_{n-2} \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & & . & & . & . \\ . & . & & & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & K_1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Frobenius satır normu ve Frobenius sütun normu tanımından,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{nj}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n} K_s^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (2E_s + 3E_{s-1})^2}$$

$$r_1(B) = \begin{cases} \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_nE_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2} + 36}, n \ \ tek\ ise \\ \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_nE_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2} - 12}, n \ \ çift\ ise \end{cases} \tag{4.19}$$

ve (4.4) ile verilen $K_n = 2E_n + 3E_{n-1}$ olmak üzere,

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_i |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{s=1}^{n-1} K_s^2} = \sqrt{\sum_{s=1}^{n-1} (2E_s + 3E_{s-1})^2} \qquad (4.20)$$

olur. Ayrıca;

$$\sum_{s=1}^{n-1} E_s^2 = E_n E_{n-1} \qquad (4.21)$$

$$\sum_{s-1}^{n-1} E_s E_{s-1} = \begin{cases} E_{n-1}^2 \quad , & n \ \ tek \ \ ise \\ E_{n-1}^2 - 4, & n \ \ çift \ \ ise \end{cases} \qquad (4.22)$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} E_{s-1}^2 = E_{n-1} E_{n-2} \qquad (4.23)$$

dir. (4.21), (4.22) ve (4.23) ifadeleri (4.20) eşitliğinde yerine konulursa,

$$c_1(C) = \begin{cases} \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_n E_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2}} & , n \ \ tek \ ise \\ \sqrt{12E_{n-1}^2 + 4E_n E_{n-1} + 9E_{n-1}E_{n-2} - 48} & , n \ \ çift \ ise \end{cases} \qquad (4.24)$$

olur. (3.2) ile verilen,

$$\| A \|_2 \le r_1(B) c_1(C)$$

eşitsizliğinde (4.19) ve (4.24) ifadeleri yerine yazılırsa (4.13) eşitsizliği bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2.: A, elemanları $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j+i,n))}$ şeklinde tanımlanan $n \times n$ mertebeli bir matris ise Teorem 4.2.2'deki (4.12) ve (4.13) ile verilen sınırlara sahiptir.

İspat: İspat, Teorem 4.2.2'de $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ yerine $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j+i,n))}$ yazılarak aynı şekilde yapılır.

Sonuç 4.2.3.: A, elemanları $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ ve B elemanları $b_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ şeklinde tanımlanan $n \times n$ mertebeli matrisler olmak üzere,

$$\| A \mathrm{o} B \|_2 \leq E_n E_{n\text{-}1} \begin{pmatrix} \sqrt{12E_{n\text{-}1}^2 + 4E_n E_{n\text{-}1} + 9E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2} + 36}, n \ \ tek \\ \sqrt{12E_{n\text{-}1}^2 + 4E_n E_{n\text{-}1} + 9E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2} \text{-} 12}, n \ \ çift \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \sqrt{12E_{n\text{-}1}^2 + 4E_n E_{n\text{-}1} + 9E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2}} \qquad , n \ \ tek \\ \sqrt{12E_{n\text{-}1}^2 + 4E_n E_{n\text{-}1} + 9E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2} - 48}, n \ \ çift \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

olacak şekilde üst sınır vardır.

İspat: A matrisi Teorem 4.2.1'de tanımlanan matris ile aynı şekilde tanımlandığından (4.10) eşitsizliğindeki üst sınıra sahiptir. Aynı şekilde B matrisi de Teorem 4.2.2'de tanımlanan matris ile aynı şeklide tanımlandığı için (4.13) eşitsizliği B matrisi için bir üst sınır olur. Ayrıca (3.2) ile verilen eşitsizlikte norm olarak spektral norm kullanılırsa,

$$\| A \mathrm{o} B \|_2 \leq \| A \|_2 \| B \|_2 \tag{4.26}$$

olur. (4.10) ve (4.13) eşitsizliklerinin sağ tarafları (4.26)'da yerine yazılır ise (4.25) elde edilir.

Sonuç 4.2.4.: A ve B matrisleri Sonuç 4.2.3'deki matrisler ile aynı şekilde tanımlanan matrisler olmak üzere,

$$\| A \otimes B \|_F = \begin{cases} \sqrt{n^2 E_n E_{n\text{-}1}(12E_{n\text{-}1}^2 + 4E_n E_{n\text{-}1} + 9E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2} + 36}, n \ \ tek \ ise \\ \sqrt{n^2 E_n E_{n\text{-}1}(12E_{n\text{-}1}^2 + 4E_n E_{n\text{-}1} + 9E_{n\text{-}1}E_{n\text{-}2} \text{-} 12}, n \ \ çift \ ise \end{cases} \tag{4.27}$$

olur.

İspat: Teorem 4.2.1'den A matrisinin, Frobenius normunun (4.6) ifadesine, B matrisinin Frobenius normunun (4.18) ile verilen ifadenin kareköküne eşit olduğu söylenirse ve (3.3) ile verilen eşitlikde norm olarak Frobenius normu kullanılırsa,

$$\| A \otimes B \|_F = \| A \|_F \| B \|_F \tag{4.28}$$

olur. (4.6) ve (4.18) ifadeleri (4.28) de yerine yazılırsa (4.27) eşitliği elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.1.: A, elemanları $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ mertebeli bir matris ise,

$$\| A \|_1 = 2E_{n-1} + E_{n-2} - 2 \tag{4.29}$$

olur.

İspat: A matrisi açık olarak,

$$A = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & . & . & . & E_{n\text{-}2} & E_{n\text{-}1} \\ E_{n\text{-}1} & E_0 & . & . & . & E_{n\text{-}3} & E_{n\text{-}2} \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & & . & & . & . \\ . & . & & & . & . & . \\ E_2 & E_3 & . & . & . & E_0 & E_1 \\ E_1 & E_2 & . & . & . & E_{n\text{-}1} & E_0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. A matrisi dairesel matris olduğu için tüm sütunlarındaki elemanları aynı ve dolayısıyla tüm sütun toplamları birbirine eşit olduğu için,

$$\| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | = \sum_{s=0}^{n\text{-}1} E_s = 2E_{n\text{-}1} + E_{n\text{-}2} - 2$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.2.: A, elemanları $a_{ij} \equiv E_{(mod(j-i,n))}$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ mertebeli bir matris ise,

$$\| A \|_{\infty} = 2E_{n-1} + E_{n-2} - 2 \tag{4.30}$$

olur.

İspat: Yardımcı Teorem 4.2.1.'deki gibi dairesel matrisin özelliğinden,

$$\| A \|_{\infty} = \max_{i} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | = \sum_{s=0}^{n-1} E_s = 2E_{n-1} + E_{n-2} - 2$$

olur. İspat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.3.: A, elemanları $a_{ij} \equiv E_{(mod(j-i,n))}$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ mertebeli bir matris ise,

$$\| A \|_{2} \leq 2E_{n-1} + E_{n-2} - 2 \tag{4.31}$$

için bir üst sınırdır.

İspat: (3.7) ile verilen,

$$\| A \|_{2} \leq \sqrt{\| A \|_{1} \| A \|_{\infty}}$$

eşitsizlikte (4.29) ve (4.30) ifadeleri yerine yazılırsa (4.31) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.5.: A, elemanları $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(j+i,n))}$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ mertebeli bir matris ise,

$$\| A \|_2 \leq 2E_{n-1} + E_{n-2} - 2$$

bir üst sınır olur.

İspat: $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ yerine $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(j+i,n))}$ yazılarak Yardımcı Teorem 4.2.3 ile aynı şekilde ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.4.: A, elemanları $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ mertebeli bir matris ise,

$$\| A \|_1 = 4E_{n\text{-}1} + 8E_{n\text{-}2} + 3E_{n\text{-}3} - 4 \tag{4.32}$$

olur.

İspat: Dairesel matrisin tüm sütunlarındaki elemanlarının aynı olması nedeniyle tüm sütun toplamları birbirine eşittir. Ayrıca (4.4) ile verilen,

$$K_n = 2E_n + 3E_{n\text{-}1}$$

ifadesinden,

$$\begin{aligned} \| A \|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | = \sum_{s=0}^{n\text{-}1} K_s \\ &= \sum_{s=0}^{n\text{-}1} (2E_s + 3E_{s\text{-}1}) \\ &= 4E_{n\text{-}1} + 8E_{n\text{-}2} + 3E_{n-3} - 4 \end{aligned}$$

olur.

Yardımcı Teorem 4.2.5.: A, elemanları $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ şeklinde olan $n \times n$ mertebeli bir matris olsun.

$$\| A \|_{\infty} = 4E_{n\text{-}1} + 8E_{n\text{-}2} + 3E_{n\text{-}3} - 4 \tag{4.33}$$

dir.

İspat: A matrisinin dairesel matris olması nedeniyle tüm satır toplamları birbirine eşittir ve (4.4) ile verilen eşitlik yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \| A \|_{\infty} &= \max_{i} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | = \sum_{s=0}^{n\text{-}1} K_s \\ &= \sum_{s=0}^{n\text{-}1} (2E_s + 3E_{s\text{-}1}) \\ &= 4E_{n\text{-}1} + 8E_{n\text{-}2} + 3E_{n\text{-}3} - 4 \end{aligned}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.6.: A, elemanları $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ biçiminde tanımlı $n \times n$ mertebeli bir matris ise,

$$\| A \|_{2} \leq 4E_{n\text{-}1} + 8E_{n\text{-}2} + 3E_{n\text{-}3} - 4 \tag{4.34}$$

bir üst sınırdır.

İspat: (3.7) ile verilen,

$$\| A \|_{2} \leq \sqrt{\| A \|_{1} \| A \|_{\infty}}$$

eşitsizliğinde (4.32) ve (4.33) ifadeleri yerine yazılırsa (4.34) elde edilip ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.6.: A, elemanları $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j+i,n))}$ şeklinde tanımlanan $n \times n$ mertebeli bir matris ise,

$$\| A \|_2 \leq 4E_{n\text{-}1} + 8E_{n\text{-}2} + 3E_{n\text{-}3} \text{ - } 4$$

dir.

İspat: Yardımcı Teorem 4.2.6'nın ispatında $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ yerine $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j+i,n))}$ yazılarak ispat tamamlanır.

4.3. Örnekler

(i) Elemanları $a_{ij} \equiv E_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ şeklinde tanımlanan 4×4 mertebeli A matrisi için Teorem 4.2.1.'i gerçekleyiniz.

Çözüm: A matrisi açık olarak,

$$\begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_3 & E_0 & E_1 & E_2 \\ E_2 & E_3 & E_0 & E_1 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$$\| A \|_2 = \max \left\{ \sqrt{|\lambda|} :, A^* A' nın \;\; özdeğeri \right\}$$

$$\| A \|_2 = \sqrt{64} = 8$$

dir. $n = 4$ için (4.5) ifadesi,

$$\sqrt{6.4} \leq 8 \leq 6.4$$

$$4,898979 \leq 8 \leq 24$$

olur.

(ii) Elemanları $a_{ij} \equiv K_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ şeklinde tanımlanan 4×4 mertebeli A matrisi için Teorem 4.2.2.'yi gerçekleyiniz.

Çözüm: A matrisi açık olarak,

$$\begin{pmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ K_3 & K_0 & K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 & K_0 & K_1 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 & 14 \\ 14 & 6 & 4 & 10 \\ 10 & 14 & 6 & 4 \\ 4 & 10 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$$\| A \|_2 = \max\left\{\sqrt{|\lambda|} : \lambda, A^* A' nın\ özdeğeri\right\}$$
$$\| A \|_2 = 34$$

dir. $n = 4$ için (4.12) ifadesi,

$$\sqrt{348} \le 34$$
$$18,654758 \le 34$$

$n = 4$ için (4.13) ifadesi,

$$34 \le \sqrt{108576}$$
$$34 \le 329,508725$$

olur.

(iii) (i) örneğinde tanımlanan A matrisi için Yardımcı Teorem 4.2.3'ü gerçekleyiniz.

Çözüm:

$$\| A \|_2 = 8$$

dir. $n = 4$ için (4.31) ifadesi,

$$8 \leq 8$$

olur.

(iv) (ii) örneğinde tanımlanan A matrisi için Yardımcı Teorem 4.2.6'yı gerçekleyiniz.

Çözüm:

$$\| A \|_2 = 34$$

dir. $n = 4$ için (4.34) ifadesi,

$$34 \leq 34$$

olur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada dairesel matrisler tanıtılmış ve elemanları E_n ve K_n ile tanımlanmış dairesel matrislerin normlarının sınırları incelenmiştir. Buradan dairesel matrislerin normlarının sınırlarının seçilen E_n ve K_n'lere bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla farklı E_n ve K_n alternatifleri için sınırların durumu incelenebilir. Ayrıca farklı norm tanımlarına göre sınırlardaki farklılıklar dikkate değer bulunmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] BRONSON, R., Schaum's Outlines Matrix Operations, McGraw-Hill, New York, 1989.

[2] ÇATAK, Ö., Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Henkel Matrislerinin ℓ_p Normları İçin Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.

[3] DAVIS, P., J., Circulant Matrices, John Wiley and Sons, New York, 1979.

[4] KAYABAŞ, H., k-Fibonacci Dizilerinin Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.

[5] KÜÇÜKÖZBEK, S., Circulant Matrisler ve Polinomların Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2007.

[6] MATHIAS, R., The Spectral Norm of A Negative Matrix, Linear Algebra and Its Applications, Vol 131, pp 269-284, 1990.

[7] SOLAK, S., On the Norms of Circulant Matrices With Fibonacci and Lucas Numbers, Applied Mathematics and Computation, Vol 160, pp 125-132, 2005.

[8] YALÇINER, A., Hankel ve Circulant Matrislerin Terslerinin Normları Üzerine, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşen Uslu, 15.07.1979 tarihiinde Uşak ilinde doğdu. İlk, orta, lise eğitimini Bursa'da tamamladı. 2002 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2004 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı tezsiz yüksek lisans programından mezun oldu. Halen Sakarya I. Endüstri Meslek Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.