T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# DAİRESEL MATRİSLERİN OLUŞUMU VE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet KÖKLÜ

| | | |
|---|---|---|
| **Enstitü Anabilim Dalı** | **:** | **MATEMATİK** |
| **Tez Danışmanı** | **:** | **Yrd.Doç.Dr.Ö.Faruk GÖZÜKIZIL** |

Eylül 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# DAİRESEL MATRİSLERİN OLUŞUMU VE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet KÖKLÜ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 10/09/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| Yrd.Doç.Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL Jüri Başkanı | Prof.Dr. Abdullah YILDIZ Üye | Doç.Dr. Elman ALİYEV Üye |

## TEŞEKKÜR

Beni böyle bir çalışmaya yönlendiren, zamanını ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Sayın: Yrd. Doç.Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL hocama teşekkür eder, saygılar sunarım.

Çalışmanın bilgisayar programının yapılmasında yardım eden Selçuk Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Bölümü öğretim üyesi Yrd. Doç.Dr. Âdem Alparslan ALTUN beye teşekkür ederim.

**İÇİNDEKİLER**

# SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$C$ : genel bir dairesel matris,

$P(x)$ : kökleri aranan polinom,

$det(xI - C)$ : genel dairesel matrisin karakteristik polinomu,

$wj$ : birimin n. dereceden kökleri,

$q(t)$ : $C$ dairesel matrisinin özdeğer polinomu

$q(w_n)$ : $C$ dairesel matrisinin özdeğerleri

# ŞEKİLLER LİSTESİ

# ÖZET


Anahtar kelimeler: Polinom Denklemler, Circulant Matrisler

Bu çalışma Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL yönetiminde yapılarak Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmanın ilk bölümünde literatür hakkında bilgi verilmektedir. İkinci bölümde çalışmada ihtiyaç duyulan bazı tanım ve teoremler yer almaktadır. Üçüncü bölümde polinom türü denklemlerin çözüm yöntemleri anlatılmaktadır. Dördüncü bölümde polinom türü denklemlerin dairesel metodla çözümü anlatılmaktadır. Son bölümü ise sonuç oluşturmaktadır.

**GENERATING CIRCULANT MATRICES AND THEIR APPLICATION**

## SUMMARY

Key Words: Polynomial Equations, Circulant Matrices.



This study has been leaded by Assist. Prof. Dr.Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, a faculty of Mathematics Department at Science and Literature Faculty of Sakarya University. This thesis has been submitted to Sakarya University-Institute of Science.

In the first part of the study a general information is given. In the second part, some necessary definitions and theorems which are needed are included. In the following part of the study, solution methods of polynomial equations are discussed. Then, circulant matrice method of polynomial equations are discussed. Lastly, there are results.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

Polinom türü denklemlerin çözümü için birçok yöntem vardır. İlk olarak bulunan yaklaşık çözümler asıl çözümlerden daha uzundu. 1545 yılında Cordano 2. ve 3. dereceden denklem çözümleri için bir tez yayınladı ve bu çalışmaları önce Tantaglia daha sonra da Ferrariye atfetti. Bu çalışmalar daha yüksek dereceli denklemlerin materyal olarak kullanıldı. Bu metodun kübik ve quartik denklemleri çözmede başarılı olduğu Langrange'ın bilinen analizi ile 1770 yılında açıklandı. Ve her yeni gün bu analizler geliştiriliyor [1].

Frank makalesinde, kuadratik, kübik ve kuartik polinomların köklerini örneklerle ele almıştır. (Frank,2002). Ayrıca bir diğer çalışmasında da dairesel matrislerin tanımını vermiş ve bir dairesel matrisin üretilmesi konusunu işlemiştir [2].

Polinom türü denklemleri çözmenin bir diğer yöntemi de dairesel yöntemdir. Kalman polinom denklemlerin, dairesel metotla çözülebilirliğini irdelemiş, dairesel matrislerin diğer matrislerle ilişkisini ele almış ve dairesel metodun uygulama sınırlılıklarını belirlemiştir.

Bu çalışmada polinom denklemlerin çözüm yolları ve dairesel matrisler yardımıyla çözümü anlatıldı. Çalışmanın C programı yapıldı, program kodları ve bazı sonuçları eklerde sunuldu.

# BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada geçen bazı tanımlar verilmiştir.

**Tanım 2.1:** $a_0 , a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ gerçek sayılar ve n doğal sayı olmak üzere,

$$P(x): a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \tag{2.1}$$

biçiminde yazılan ifadelere gerçek katsayılı polinom ve

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = 0 \tag{2.2}$$

ifadesine de polinom denklem denir.

(2.2) denkleminin, n. dereceli teriminin katsayısına bölünmesiyle elde edilen,

$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n = 0$

şeklindeki yeni denkleme monik/normal denklem denir.

**Tanım 2.2:** $w^n = 1$ denkleminin köklerinin

$w_k = \left(1, \frac{360k}{n}\right), (k = 0,1,2,\ldots,n-1, n)$

olduğu bilinmektedir. Bu değerlere birimin n. kökleri denir .

**Tanım 2.3:** $A$, $n$ -kare bir matris olmak üzere,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$$

polinomunda $x$ değişkeni yerine $A$ matrisi yazılarak elde edilen $P(A)$ ifadesine $A$ matrisinin bir polinomu denir ve

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_r A^r$$

ile gösterilir [3].

**Tanım 2.4.** $A$ , $nxn$ bir matris olsun. $Ax = \lambda x$ olmak üzere, $Ax - \lambda x = 0$ eşitliği

$(A - \lambda I)x = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikteki $A - \lambda I$ katsayı matrisinin determinantına $A$ 'nın karakteristik denklemi, bu denklemin köklerine de $A$ matrisinin özdeğerleri denir. Karakteristik denklem:

$$|A - \lambda I| = \Delta A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

şeklinde ifade edilir.

$(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğindeki $x$ bir vektör olup, $A$ 'nın öz vektörü olarak tanımlanır.

**Tanım 2.5.** $I_n$, $nxn$ mertebeli birim matris olmak üzere, birim matrisin satırlarının yer değiştirilmesi ile elde edilen matrislere permütasyon matris denir. Dolayısıyla, permütasyon matrislerin kuvvetleri de yine permütasyon matristir.

**Teorem 2.1.** n. dereceden herhangi bir monik polinomun kökleri toplamı $x^{n-1}$ teriminin katsayısıdır. Yani x ler,

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

polinomunun kökleri olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a_{n-1}$$

dir [4].

**Teorem 2.2.** $A$, $nxn$ bir matris ve özdeğerleri $\lambda 1, \lambda 2, \ldots, \lambda n$ olsun. $A$ matrisinin köşegeni üzerindeki elemanların toplamı iz(A), özdeğerlerinin toplamına eşittir. (Rostermondt, 2005)

**Tanım 2.6.** Dairesel matris, Teoplitz Matrislerinin özel bir türü olup; bu matristeki her satır vektörü, bir önceki satır vektörü dikkate alınarak birer eleman sağa kaydırılmasıyla oluşur.

$C$=circ$(c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, c_n)$

$$=C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{pmatrix} \text{ [5].}$$

Genel anlamda, nxn boyutlu bir dairesel matris n elemanlı bir vektör ile temsil edilebilir. Aşağıda $2x2, 3x3, 4x4$ boyutlu genel dairesel matrisler verilmiştir:

$$C=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

**Tanım 2.7.**

W: ilk satırı $[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1xn}$

olan dairesel matrise üreteç dairesel matris denir [6].

2x2, 3x3, 4x4 boyutlu üreteç dairesel matrisler:

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

$$W=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3,$$

$$W=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_4$$

şeklindedir.

# BÖLÜM 3. POLİNOMLARIN ÇÖZÜMÜ

## 3.1. Polinom Denklemler

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$ biçiminde yazılan denklemlere polinom denklemler denir. Burada, katsayı adı verilen a'lar kesirli ya da genel sayı olarak alınacak. Marifet, bu denklemi sağlayan $x$'leri bulmaktır.

Böyle bir denklemin en fazla $n$ tane çözümü olduğu bilinir ve bunun kanıtı da o kadar zor değildir. Eğer $a_n \neq 0$ ise, denkleme $n$ −inci dereceden denklem denir [7].

## 3.2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a ve b bilinen gerçel sayılar, $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax + b = 0$$

biçiminde yazılabilen bir denkleme birinci dereceden bir bilinmeyenli polinom denklem veya kısaca birinci dereceden denklem veya bir bilinmeyenli lineer (doğrusal) denklem , a ile b ye denklemin katsayıları, x e bilinmeyen denir [8].

Bu denklemi çözmek yani eşitliği sağlayan x i bulmak için şu işlemler yapılır;

$$ax + b = 0, \qquad ax = -b.$$

burada $a \neq 0$ olduğundan her iki taraf, $a$ ile bölünebilir. Bu işlem yapılırsa $x = \frac{-b}{a}$ bulunur. Buna göre denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$ dır.

### 3.3. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a , b ve c bilinen gerçel sayılar, $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

şeklindeki denklemlere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Bu denklemlerin çözümleri de M.Ö. 400 yıllarında Babilliler tarafından üç aşağı beş yukarı biliniyordu.

$$0 = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

eşitliklerinden, a≠ 0 olduğundan,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

çıkar.

bundan da sırasıyla,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ve

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ve

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

çıkar.

Görüldüğü gibi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin biri artılı diğeri eksili olmak üzere iki çözümü vardır.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac > 0$ ise denklemin reel iki kökü vardır.

$b^2 - 4ac = 0$ ise denklemin çakışık iki kökü vardır.

$b^2 - 4ac < 0$ ise denklemin denklemin reel kökü yoktur. Eşlenik iki kompleks kök vardır.

## 3.4. Üçüncü Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a , b , c ve d bilinen gerçel sayılar, $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

şeklindeki denklemlere üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Üçüncü dereceden denklemler İtalyan matematikçiler tarafından 1525 dolaylarında , en azından kısmen Scipione dal Ferro tarafından ve tam olarak Niccolo Fontana Tartaglia tarafınan çözülmüştür.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

denkleminin her iki tarafı a'ya bölünsün.

Yeni denklem $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ şeklinde olur.

$(B = b/a, C = c/a, D = d/a)$

Elde edilen yeni denklemle başlangıçtaki denklemin çözümleri aynıdır.

Şimdi $x = y - B/3$ değişikliği yapılırsa $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ biçiminde bir denklem bulunur.

* Eğer $\alpha = 0$ ise $y^3 + \beta = 0$ ve $y^3 = -\beta$ buradan da $y = \sqrt[3]{-\beta}$

** $\alpha \neq 0$ olsun.

$(u - v)^3 + 3uv(u - v) + v^3 - u^3 = 0$ denkleminde

$$3uv = \alpha$$

$v^3 - u^3 = \beta$ alınırsa $u - v$ *sayısı* $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ denkleminin bir çözümü olur.

Birinci denklemden $v$ alınıp ($v = \alpha/3u$) ikinci denklemde yazılırsa

$\beta = v^3 - u^3 = \alpha^3/27u^3 - u^3$ elde edilir, buradan

$$27\,u^6 + 27\,\beta u^3 - \alpha^3 = 0,$$

ya da ,

$u^6 + \beta u^3 - \frac{\alpha^3}{27} = 0$ elde edilir.

Bu denklemde $w = u^3$ alınırsa $w^2 + \beta w - \frac{\alpha^3}{27} = 0$ gibi $w$ cinsinden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem elde edilir ki; bu tür denklemlerin çözümü daha önce anlatıldı.

W bulunduktan sonra 3. kökü alınarak u bulunur. Bundan da $v = \alpha/3u$ eşitliği kullanılarak v bulunur. En sonunda da $y = u - v$ kullanılarak y bulunur.

$y_0$ , $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ denkleminin bir çözümü olduğundan $y - y_0$,

$y^3 + \alpha y + \beta$ polinomunu tam olarak böler.

$\gamma, \delta$ sayıları için $y^3 + \alpha y + \beta = (y - y_0)(y^2 + \gamma y + \delta)$ eşitliği sağlanır.

Bu eşitlikten ; $y^2 + \gamma y + \delta = 0$ denkleminin çözümleri $y^3 + \alpha y + \beta$ denkleminin $y_0$ dan başka diğer köklerinin elde edilmesi sağlanır.

### 3.5. Dördüncü Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a , b , c , d ve e bilinen gerçel sayılar, a $\neq$ 0 olmak üzere,

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

şeklindeki denklemlere dördüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Bu tür denklemler Cardano'nun öğrencisi Lodovico Ferrari tarafından 1540'larda çözülmüştür.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

denkleminde her iki taraf başkatsayı olan a'ya bölünüp

$x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ biçiminde bir denklem elde edilir. Daha sonra

$x = y - B/4$ alınırsa $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ biçiminde yazılan kolay bir denklem elde edilir.

$y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ denklemi aşğıdaki gibi tam kareye tamamlanır:

$y^4 + 2\alpha y^2 + \alpha^2 = \alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma$

$(y^2 + \alpha)^2 = \alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma$ elde edilen denklem y cinsinden çözülmelidir.

$(y^2 + \alpha)^2 = \alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma$ denkleminden

$(y^2+\alpha+z)^2 = (\alpha+2z)y^2-\beta y+\gamma+(\alpha^2-\gamma+2\alpha z+z^2)$ denklemi elde edilir. Bu elde edilen eşitlikte sağ taraf y cinsinden ikinci dereceden bir ifade olduğundan, z sağ taraf bir kare olacak biçimde seçilebilir. Bunun için z; sağ tarafın diskriminantı

$(\beta^2-4(\alpha+2z)(\alpha^2-\gamma+2\alpha z+z^2))$ nı 0(sıfır) yapacak şekilde seçilmelidir.

Buradan belli bir $\tau \geq 0$ için ,

$(y^2+\alpha+z)^2 = \tau^2$ olarak yazılabilir.

Şimdi $y, y^2+\alpha+z=\tau$ biçiminde seçilirse $y^4+\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ denkleminin çözümlerinden biri bulunur. Bu bulunan kök $y_0$ olsun.

$y^4+\alpha y^2+\beta y+\gamma$ polinomu

$y-y_0$ ' a bölünürse ;

$y^4+\alpha y^2+\beta y+\gamma = (y-y_0)(y^3+\delta y^2+\varepsilon y+\varphi)$ eşitliğini sağlayacak $\delta, \varepsilon, \varphi$ sayıları bulunur. Bundan sonra $y^4+\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ denkleminin diğer kökleri

$(y^3+\delta y^2+\varepsilon y+\varphi)=0$ denkleminin kökleridir. Bu denklemin çözümü yukarıda da anlatıldığı gibi Tartaglia tarafından bulunmuştur.

### 3.6. Beşinci ve Daha Yüksek Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a , b , c , d , e ve f bilinen gerçel sayılar, $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

şeklindeki denklemlere beşinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Beşinci derece denklemlerin cebirsel olarak çözümü mümkün değildir. Beşinci dereceden denklemlerin çoğunun cebirsel yollarla çözülemeyeceğini 1824'te Norveç'li Henrik Abel (1802-1829) kanıtlamıştır. 5 ve 5 ten büyük dereceli denklemlerin cebirsel yöntemlerle çözülemeyeceğini de Fransız matematikçi Evariste Galois (1811-1832) kanıtlamıştır.

1683'te Tschirnhaus $n$-inci dereceden bir denklemde $x$'i değiştirerek denklemde $x^{n-1}$ ve $x^{n-2}$ terimlerinin katsayılarının 0 olduğunun varsayılabileceğini gösterdi.1786' da Erland Samuel Bring beşinci dereceden bir denklemin

$$x^5 + px + q = 0$$

biçiminde yazılabileceğini kanıtladı. 1834'te G. B. Jerard bunu genelleştirdi: Tschirnhaus'un yöntemi kullanılarak sadece $x^{n-1}$ ve $x^{n-2}$ terimlerinin değil, $x^{n-3}$ teriminin de olmadığını varsayabileceğini söyledi.

Beşinci dereceden bir denklemin, Tschirnhaus'un yöntemiyle

$$x^5 - x + \alpha = 0$$

biçimine getirebileceğini ama buradaki $\alpha$'nın karmaşık bir sayı olduğunu da 1786'da Erland Samuel Bring kanıtlamıştır.

Genel olarak beşinci dereceden denklemler cebirsel yöntemlerle çözülemez.

# BÖLÜM 4. POLİNOMLARIN DAİRESEL METODLA ÇÖZÜMÜ

## 4.1.Bir Dairesel Matrisin Oluşturulması

İlk satırı $[c_0 \ \ c_1 \ c_2 \ \ . . . c_{n-1}]$ olan nxn mertebeli bir dairesel matrisi oluşturmak için, katsayıları C matrisinin ilk satırından oluşan ve derecesi C matrisinin mertebesinden bir düşük olan;

$$q(t) = c_0 + \ c_1 t + c_2 t^2 + \ \dots + c_{n-1} t^{n-1}$$

polinomu tanımlansın.$C = q(W)$ dir.

I. $2x2$ Mertebeli Bir Dairesel Matrisin Oluşturulması:

$$C = q(W)$$

$$= aI + bW$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

II. $3x3$ Mertebeli Bir Dairesel Matrisin Oluşturulması:

$$C = q(W)$$

$$= aI + bW + cW^2$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

III. $4x4$ Mertebeli Bir Dairesel Matrisin Oluşturulması:

$$C = q(W)$$

$$= aI + bW + cW^2 + dW^3$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

**4.2. $W$ Üreteç Matrisin Özdeğerleri**

λ, $W$ matrisinin özdeğeri olsun.Bu durumda $q(t)$ polinomundan elde edilen $q(\lambda)$, $q(W)$'nin yani $C$ dairesel matrisinin özdeğeridir. $W$ üreteç matrisinin özdeğerleri aşağıda da görüleceği gibi birimin $n$. dereceden kökleridir.

$2x2$ mertebeli üreteç dairesel $W$'nin özdeğerleri:

$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\det(W - \lambda I) = 0$ olduğundan;

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

$3x3$ mertebeli üreteç dairesel $W$'nin özdeğerleri:

$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\det(W - \lambda I) = 0$ olduğundan;

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 1 = 0$$

$$\lambda^3 = 1$$

olup buradan;

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

$4x4$ mertebeli üreteç dairesel $W$'nin özdeğerleri:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \det(W - \lambda I) = 0 \text{ olduğundan;}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$\lambda^4 = 1$$

olup buradan;

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = i$

$\lambda_4 = -i$ olur.

## 4.3. Dairesel Matrislerin Özdeğerlerinin Polinomlarla Hesaplanması

$C$ bir dairesel matris, $w_n$ birimin n. dereceden bir kökü olsun. $C$ dairesel matrisinin ilk satırıyla tanımlanan polinoma da $q(t)$ denilsin. Bu durumda C dairesel matrisinin özdeğerleri; $q(w_n)$ ler olur.

$2x2$ boyutlu bir dairesel matrisin özdeğerler $q(t) = a + bt$ polinomunda ;

$q(1) = a + b$ ve

$q(-1) = a - b$ yazılarak,

$3x3$ boyutlu bir dairesel matrisin özdeğerleri $q(t) = a + bt + ct^2$ polinomunda $q(1) = a + b + c$ ,

$$q\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = a - \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} i\sqrt{3} \text{ ve}$$

$$q\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = a - \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} i\sqrt{3} \text{ yazılarak,}$$

$4x4$ boyutlu bir dairesel matrisin özdeğerleri $q(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ polinomunda ;

$q(1) = a + b + c + d$,
$q(-1) = a - b + c - d$
$q(i) = a - c + (b - d)i$
$q(-i) = a - c - (b - d)i$ yazılarak elde edilir.

### 4.4. Dairesel Matrislerle Polinomların Çözümü

Dairesel matrislerle polinom türü denklemlerin çözümü yapılırken uygulanacak basamaklar aşağıdaki gibidir:

i. Verilen polinomun derecesini mertebe kabul eden genel bir dairesel matris alınır.
ii. Alınan matrisin karakteristik polinomu bulunur.
iii. Karakteristik polinomun katsayıları verilen polinomun katsayılarına eşitlenerek $C$ dairesel matrisinin elemanları olan sabitler bulunur.
iv. Dairesel matrisin özdeğerleri bulunur,bulunan bu özdeğerler verilen polinomun kökleridir.

Bu yöntemin derecesi ikiden fazla polinomlarda uygulanması için ön işlemlere ihtiyaç vardır.

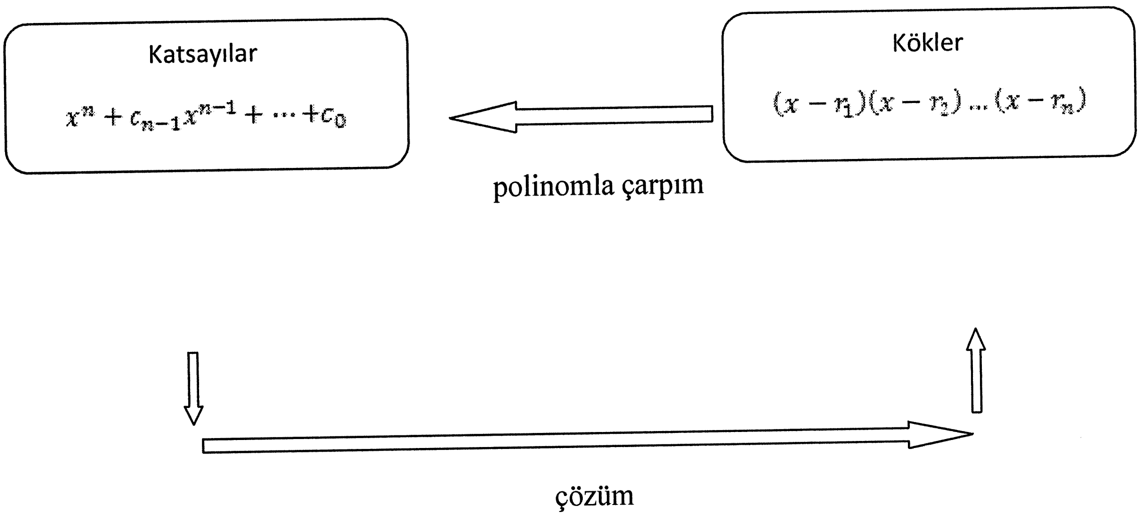
İlk önce $n$. dereceden polinomun $(n-1)$ dereceli terimi yok edilir.

Daha sonra karakteristik polinomdaki $(n-1)$. terim yok edilir.

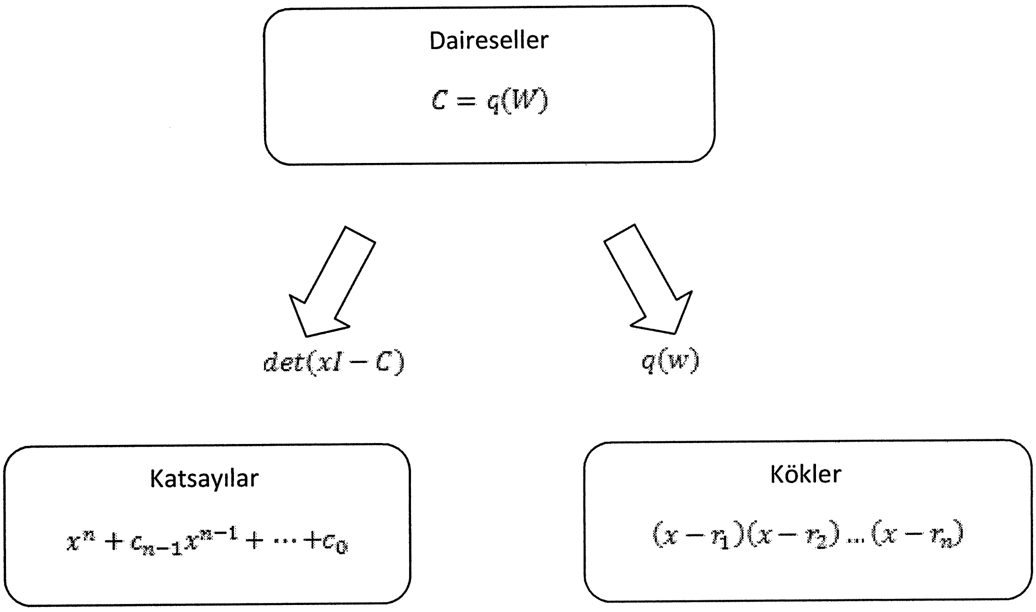
Bunun için alınan $C$ dairesel matrisin ilk elemanı $0$ (sıfır) alınır, bu da kökler toplamının yani köşegen üzerindeki elemanların toplamının sıfır olmasını sağlar. Dairesel matrislerle polinom denklemlerin çözümünün ilişkilendirilmesi $(n-1)$. terimlerin yok edilmesini gerektirmektedir.

1500 lü yıllarda Cordano, derecesi 2 den büyük olan polinomlarda $(n-1)$. terimi yok ederek denklemin köklerini bulmuş fakat en fazla derecesi 4 olan polinomlarla uğraşabilmiştir. Literatürde dairesel matrislerle polinom denklemleri çözmenin tek yolu Cardan metodudur. Dolayısıyla dairesel matrislerle polinom türü denklemleri çözebilmenin üst sınırı da 4. dereceden denklemlerdir.

Kullanılan Metod;



Dairesel Metod;




Şekil 4.1. Dairesel metodla diger metodlarin karsılastırılması

### 4.4.1. İkinci dereceden polinomların dairesel matrislerle çözümü

$2x2$ mertebeli genel bir dairesel matris;

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}_{2x2}$$

olsun. İkinci dereceden

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

polinomu alınsın.C matrisinin karakteristik polinomu;

$$det(xI - C) = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

şeklindedir.

Karakteristik polinomla verilen ikinci dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse;

$x^2 + \alpha x + \beta = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$ olur.

Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından

$-2a = \alpha$ ve $a^2 - b^2 = \beta$ olur.

Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$a = -\frac{\alpha}{2}$$

ve
$$b = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}$$

elde edilir.

Bulunan a ve b dairesel matriste yerine yazılırsa;

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} \\ \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} & -\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bulunan bu matrisin özdeğerleri verilen $p(x)$ polinomunun kökleridir. $C$ matrisinin özdeğerlerin $q(t) = c_0 + c_1 t$ i formülüyle yani

$$q(t) == -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}.t$$

polinomu yardımıyla bulunur. Birimin ikinci dereceden kökleri $\pm 1$, $q(t)$ polinomunda yazılırsa

$$q(1) == -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}$$

$$q(-1) == -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}$$

bulunur ve bu değerler verilen polinomunun kökleridir.

### 4.4.2. Üçüncü dereceden polinomların dairesel matrislerle çözümü

$3x3$ mertebeli genel bir dairesel matris;

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}_{3x3} \quad \text{olsun.}$$

Üçüncü dereceden $p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ polinomu alınsın.

$p(x)$ polinomunu$x^3 + px + q$ formuna getirmek için,

$$x = x - \frac{\alpha}{3}$$

değişken değişimi yapılsın. Böylece

$$x^3 + \left(\frac{3\beta - \alpha^2}{3}\right)x + \left(\frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{27}\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Böylece teorem 2.1. gereği kökler toplamı da sıfır oldu. Polinomun kökler toplamı ile $C$ dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı

$a = 0$ kabul edilir ve karakteristik polinomunda $x = x - a$ dönüşümü yapılır. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi;

$\det(xI - C) = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = 0$ halini alır.

Karakteristik polinomla verilen üçüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse;

$x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = x^3 + px + q$ olur.

Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından

$b.c = -p/3$ ve $b^3 + c^3 = -q$

elde edilir.Birinci eşitlikten b çekilip ikinci eşitlikte yerine yazılırsa;

$$-\frac{p^3}{27c^3} + c^3 = -q$$

$$c^3 + q - \frac{p^3}{27c^3} = 0$$

$$c^6 + qc^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

elde edilir ki; bu elde edilen yeni denklem $c^3$ ü bilinmeyen kabul eden 2. dereceden bir denklemdir. Benzer şekilde işlem yapılırsa;

$$b^3 - \frac{p^3}{27b^3} = -q$$

$$b^3 + q - \frac{p^3}{27b^3} = 0$$

$$b^6 + qb^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

elde edilir.Bu denklemler gerekli işlemler yapılarak çözülürse b ve c ;

$$b = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

ve

$$c = \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

olarak bulunur. Bulunan bu b ve c değerleri dairesel matriste yerine matriste yazılırsa;

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} & \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} \\ \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} & 0 & \left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} \\ \left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} & \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bulunan bu matrisin özdeğerleri verilen $p(x)$ polinomunun kökleridir. $C$ matrisinin özdeğerlerin $q(t) = bt + ct^2$ formülüyle yani

$$q(t) = \left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}.t + \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}.t^2$$

polinomu yardımıyla bulunur. Bu özdeğer $q(t)$ polinomunda birimin üçüncü dereceden kökleri yazılarak $C$ matrisinin özdeğerleri hesaplanır:

$q(1) = b + c$

$$= \left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$q\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(b+c) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$+ i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} - \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$q\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(b+c) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$- i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} - \left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}\right)$$

Böylelikle $C$ dairesel matrisinin indirgenmiş $p(x)$ polinomunun kökleri olan $C$ matrisinin özdeğerleri bulunmuş oldu. İlk başta verilen polinomun kökleri ise aşağıdaki dönüşümler yapılarak elde edilir:

$$x_1 = q(1) - \frac{\alpha}{3}$$

$$x_2 = q\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\alpha}{3}$$

$$x_3 = q\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\alpha}{3}$$

### 4.4.3. Dördüncü dereceden polinomların dairesel matrislerle çözümü

$4x4$ mertebeli genel bir dairesel matris;

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}_{4x4} \quad \text{olsun.}$$

Dördüncü dereceden $p(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ polinomu alınsın.

$p(x)$ polinomunu$x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ formuna getirmek için,

$$x = x - \frac{\alpha}{4}$$

değişken değişimi yapılsın Teorem 2.1. gereği kökler toplamının sıfır ve polinomun kökler toplamı ile $C$ dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için $C$ dairesel matrisinin ilk elemanı

$a = 0$ kabul edilir; $C = \begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$

Böylece $C$ dairesel matrisinin karakteristik denklemi;

det $(xI - C) = x^4 - (4bd + 2c^2)x^2 - 4c(b^2 + d^2)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = 0$ halini alır.

Karakteristik polinomla verilen dördüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse;

$$x^4 - (4bd + 2c^2)x^2 - 4c(b^2 + d^2)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2$$

$= x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ olur.

Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından

$$-(4bd + 2c^2) = \beta$$

$$-4c(b^2 + d^2) = \gamma$$

$$c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = \delta$$

elde edilir. Son eşitlikte aşağıdaki düzenlemeler yapılsın:

$c^4 - (b^2 + d^2)^2 + 4(bd)^2 - 4bdc^2 = \delta$

birinci ve ikinci eşitlikteki ifadeler yeni elde edilen bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$c^4 - \frac{\gamma^2}{16c^2} + \frac{(\beta + 2c^2)^2}{4} + (\beta + 2c^2)c^2 = \delta$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse:

$$c^6 - \frac{\beta}{2}c^4 + \left(\frac{\beta^4}{16} - \frac{\delta}{4}\right)c^2 - \frac{\gamma^2}{64} = 0$$

halini alır. Bu eşitlik yardımıyla bulunan b,c,d değerleri dairesel matriste yerine yazılır. Dairesel matrisin özdeğer polinomu;

$q(t) = bt + ct^2 + dt^3$ şeklinde olur. Bulunan bu özdeğer polinomunda daha önceki dereceden polinomların çözümü aranırken olduğu gibi birimin dördüncü dereceden kökleri yazılarak dairesel matrisin özdeğerleri bulunur;

$$q(1) = b + c + d,$$

$$q(-1) = -b + c - d,$$

$$q(i) = bi - c - di$$

$q(-i) = -bi - c + di.$

Böylelikle $C$ dairesel matrisinin indirgenmiş $p(x)$ polinomunun kökleri olan $C$ matrisinin özdeğerleri bulunmuş oldu. İlk başta verilen polinomun kökleri ise $x = x - \frac{\alpha}{4}$

dönüşümü yapılarak elde edilir. Dördüncü dereceden denklemleri yapılan proğramla çözerken aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

köklerden birisi daima dairesel matrisin elemanlarının toplamı olmaktadır, $(x_1 = b + c + d)$

$b = d$ ise çakışık iki kök çıkmaktadır,

$b = -d$ ise köklerden ikisi birbirinin eşleniği olan iki karmaşık sayı olmaktadır.

### 4.4.4. Beşinci Dereceden Polinomların Dairesel Matrislerle Çözümü

$5x5$ mertebeli genel bir dairesel matris;

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \\ d & e & a & b & c \\ c & d & e & a & b \\ b & c & d & e & a \end{bmatrix}_{5x5} \quad \text{olsun.}$$

Beşinci dereceden $p(x) = x^5 + \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$ polinomu alınsın.

$p(x)$ polinomunu $x^5 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$ formuna getirmek için,

$$x = x - \frac{\alpha}{5}$$

değişken değişimi yapılsın. Teorem 2.1. gereği kökler toplamının sıfır ve polinomun kökler toplamı ile $C$ dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için $C$ dairesel matrisinin ilk elemanı

$a = 0$ kabul edilir.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c & d & e \\ e & 0 & b & c & d \\ d & e & 0 & b & c \\ c & d & e & 0 & b \\ b & c & d & e & 0 \end{bmatrix}_{5x5}$$

Böylece $C$ dairesel matrisinin karakteristik denklemi;

$\det(xI - C) = x^5 - 5(be + dc)x^3 - 5(bc^2 + b^2d + ce^2 + d^2e)x^2 +$

$5(b^2e^2 + c^2d^2 - c^3e - de^3 - bd^3 - bdc)x - (b^5 + c^5 + d^5 + e^5) + 5(bce^3 -$
$bd^2e^2 - c^2de^2 + b^3de + cd^3e - b^2c^2e - b^2cd^2 + bc^3d$ halini alır.

Karakteristik polinomla verilen beşinci dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse;

$x^5 - 5(be + dc)x^3 - 5(bc^2 + b^2d + ce^2 + d^2e)x^2 + 5(b^2e^2 + c^2d^2 - c^3e - de^3 -$
$bd^3 - bdc)x - (b^5 + c^5 + d^5 + e^5) + 5(bce^3 - bd^2e^2 - c^2de^2 + b^3de + cd^3e -$
$b^2c^2e - b^2cd^2 + bc^3d = x^5 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$ olur.

Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından

$$-5(be + dc) = \beta$$

$$-5\left(bc^2 + b^2d + ce^2 + d^2e\right) = \gamma$$

$$5(b^2e^2 + c^2d^2 - c^3e - de^3 - bd^3 - bdc) = \delta$$

$$-(b^5 + c^5 + d^5 + e^5) + 5(bce^3 - bd^2e^2 - c^2de^2 + b^3de + cd^3e - b^2c^2e - b^2cd^2 + bc^3d = \varepsilon$$

elde edilir. Burada elde edilen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ değerleri reel sayılardır.

Yukarıdaki non-lineer denklem sisteminin çözümü yoktur. Dolayısıyla b,c,d,e değerleri bulunamaz. Dairesel matris yöntemi beşinci ve üst dereceden denklemleri çözmede başarısız olmuştur. Dairesel matrisin elemanları ; b=e ve c=d olacak şekilde seçilebilirse denklem çözülmektedir.

# BÖLÜM 5. SONUÇ

Bu çalışmada polinom türü denklemlerin çözüm yolları ve tarihsel gelişimi anlatıldıktan sonra dördüncü dereceye kadar olan polinom türü denklemlerin köklerinin dairesel matrisler yardımıyla bulunuşu anlatılmıştır.

Polinomların çözümü cebirin temel konusudur; Babillilerden bu tarafa yüzyıllardır matematikçiler, polinomların çözümleri ile ilgilenegelmişlerdir.

Dairesel matris yaklaşımı, kübik ve quartik denklemler için güzel birleştirici çözümler sağlar, polinomlarla matrisler arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarır.Quintik polinomları dairesel metodla çözmek mümkün değildir.

Polinomlarda asıl sıkıntı beşinci dereceden polinomlar ve daha yüksek dereceli polinomlarda yaşanmaktadır. Ne yazık ki, dairesel matrisleri kullanan bu yaklaşım daha yüksek dereceli polinomlarda genelde başarısızdır. Bu dolaylı olarak bir şekilde Abel ve Galois tarafından 1800 lerde ispatlanmıştır. Polinomların belirli kısımlarının köklerini bulmak oldukça kolay olmasına rağmen yüksek dereceli polinomların köklerinin çözümünde kullanılan tekniklerin çoğu Newton metodu gibi yaklaşım tekniklerine dayanmaktadır. Bununla birlikte burada gördüğümüz dairesel matrisler teorisinin polinomlar ve matris teorisi arasındaki göz alıcı bağlantıyı ortaya koymasıdır.

## KAYNAKLAR


[1] KALMAN,D.,WHİTE,J.,2001,Polinomial Equations and Circulant Matrices, Fortcoming Monthly article: November, pp. 821-840.

[2] online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/Fall2002/dfrank/presentation.pdf, Eylül,2008

[3] BOZKURT,D.,TÜREN, B., 2003, Lineer Cebir, Sel-Ün Vakfı Yayınları, Konya

[4] www-math.cudenver.edu/~rrosterm/circulant/circulant.html,Eylül,2008

[5] DAVIS, P.J., Circulant Matrices, John Wiley and Sons, New York, 1979.

[6] www.dankalman.net/preprints. Eylül,2008 (www.american.edu/academic.depts/cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/circulant.pdf)

[7] ÇÖZER,Ö.,2003,Polinom Denklemleri, Matematik Dünyası, 2003 Kış

[8] CAFEROV,V.,Özdeşlikler, Denklemler ve Eşitsizlikler,Anadolu Üniversitesi,Açık Öğretim Fakültesi Yayınları,37-80,Eskişehir,

# EKLER

**//2.dereceden denklem çözümü**

```
//if (textBox1.Text!="") { label4.Text = "P(x)=" + textBox1.Text + "x2" + textBox2.Text + "x" + textBox3.Text + Convert.ToString(Convert.ToSingle(textBox1.Text) + Convert.ToSingle(textBox2.Text)); }

    if (textBox1.Text == "") textBox1.Text = "1"; if (textBox2.Text == "") textBox2.Text = "0";

    if (textBox1.Text != "") i = Convert.ToSingle(textBox1.Text);

    else MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz");

    if (textBox2.Text != "") j = Convert.ToSingle(textBox2.Text);

    else MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); //textBox2.Focus;

    if (textBox3.Text != "") k = Convert.ToSingle(textBox3.Text);

    else MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); //textBox3.Focus;

    if ((j > 0)) { i_b[3] = i + "x^2+" + j + "x"; }

    else if ((j < 0)) { i_b[3] = i + "x^2" + j + "x"; }

    else { i_b[3] = i + "x^2"; }

    if (k > 0) { i_b[3] = i_b[3] + "+" + k; }

    else if (k < 0) { i_b[3] = i_b[3] + k; }


    if (i != 1) { j = j / i; k = k / i; }
```

```
label4.Text = label4.Text + "j=" + Convert.ToString(j) +"k="+ Convert.ToString(k);
        a = Math.Round(-1 * (j / 2),2);
        if ((Math.Pow(a, 2) - k) < 0) { i_b[0] = "i"; } else { i_b[0] = ""; }
        b[0] = Math.Round(Math.Sqrt(Math.Abs(Math.Pow(a, 2) - k)),2);
        b[1] = Math.Round(-1 * (Math.Sqrt(Math.Abs(Math.Pow(a, 2) - k))),2);
        label4.Text = label4.Text + "a=" + Convert.ToString(a) + "b1=" +
Convert.ToString(b[0]) + "b2=" + Convert.ToString(b[1]);
        q[0] = Math.Round((a + b[0]),2); q[1] = Math.Round(a + b[1],2);
        label4.Text = label4.Text + "qt1=" + Convert.ToString(q[0]) + "qt2=" +
Convert.ToString(q[1]);
        if (i_b[0] == "i") { label6.Text = "q(1)= " + q[0] + "i"; label7.Text = "q(-1)= " +
q[1] + "i"; }
        else { label6.Text = "q(1)=" + q[0]; label7.Text = "q(-1)=" + q[1]; }
        groupBox1.Visible = true;
        listBox1.Items.Add(i_b[3]+"   a="+a+"     b="+b[0]+"                "+label6.Text+"
"+label7.Text);
            }
      int randomsayi(int mini, int maksi)
      {
        Random RandomNumber = new Random();
        int x1 = RandomNumber.Next(mini, maksi);
        return x1;
```

```
//3. Dereceden denklem çözümü
if (textBox6.Text != "") i = Convert.ToSingle(textBox6.Text);
else { MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); textBox6.Focus(); goto son; }
if (textBox5.Text != "") j = Convert.ToSingle(textBox5.Text);
else { textBox5.Text = "0"; }
if (textBox4.Text != "") k = Convert.ToSingle(textBox4.Text);
else { MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); textBox4.Focus(); goto son; }
if (textBox7.Text != "") l = Convert.ToSingle(textBox7.Text);
else { MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); textBox7.Focus(); goto son; }
if ((j > 0)) { i_b[3] = i + "x^3+" + j + "x^2"; }
else if ((j < 0)) { i_b[3] = i + "x^3" + j + "x^2"; }
else { i_b[3] = i + "x^3"; }
if (k > 0) { i_b[3] = i_b[3] + "+" + k + "x"; }
else if (k < 0) { i_b[3] = i_b[3] + k + "x"; }
if (l > 0) { i_b[3] = i_b[3] + "+" + l; }
else if (l < 0) { i_b[3] = i_b[3] + l; }
listBox2.Items.Add(i_b[3]);
        if (i != 1) { j = j / i; k = k / i; l = l / i; }
label11.Text = "j=" + Convert.ToString(j) + "k=" + Convert.ToString(k) + "l=" +
Convert.ToString(l);
p[0] = Math.Round((3 * k - Math.Pow(j, 2)) / 3.0,2);
q[0] = Math.Round((2 * Math.Pow(j, 3) - 9 * k * j + 27 * l) / (27.0),2);
```

label11.Text = label11.Text + "p1=" + Convert.ToString(p[0]) + "qt1=" + Convert.ToString(q[0]);

p[1] = Math.Round((Math.Pow(q[0], 2) / 4.0) + (Math.Pow(p[0], 3) / 27.0), 2);//b yi bulmak için ilk adım, karekök içi

if (p[1] < 0) { i_b[0] = "i"; g = Math.Round(Math.Sqrt(Math.Abs(p[1])), 2); }//1. karekök içi negatif çıkarsa, karekök sonucu i li

else { i_b[0] = ""; g = Math.Round(-1.0 * (q[0] / 2) + Math.Sqrt(p[1]), 2); }//1. karekök içi pozitif çıkarsa, parantez içi sonucu

if (i_b[0] == "") { if (g > 0) p[2] = Math.Round(Math.Pow(g, 1.0 / 3), 2); else p[2] = -1.0 * Math.Round(Math.Pow(Math.Abs(g), 1.0 / 3), 2); }

//karekök içi pozitifse hesaplama devam eder p[2] sonuç

if (i_b[0] == "i") { if (q[0] != 0) i_b[1] = "(" + Convert.ToString((-1.0 * (q[0] / 2))) + "+" + g + "i)^(1/3)"; else i_b[1] = "(" + g + "i)^(1/3)"; }

else i_b[1] = "";

if (i_b[0] == "i") { /*listBox2.Items.Add(i_b[1]);*/ sonuc[0] = i_b[1]; } else { /*listBox2.Items.Add(p[2]);*/ sonuc[0] = Convert.ToString(p[2]); }

p[1] = Math.Round((Math.Pow(q[0], 2) / 4.0) + (Math.Pow(p[0], 3) / 27.0), 2);//c yi bulmak için ilk adım, karekök içi

if (p[1] < 0) { i_c[0] = "i"; g = Math.Round(Math.Sqrt(Math.Abs(p[1])), 2); }//1. karekök içi negatif çıkarsa, karekök sonucu i li

else { i_c[0] = ""; g = Math.Round(-1.0 * (q[0] / 2) - Math.Sqrt(p[1]), 2); }//1. karekök içi pozitif çıkarsa, parantez içi sonucu

if (i_c[0] == "") { if (g > 0) q[2] = Math.Round(Math.Pow(g, 1.0 / 3), 2); else q[2] = -1.0 * Math.Round(Math.Pow(Math.Abs(g), 1.0 / 3), 2); }

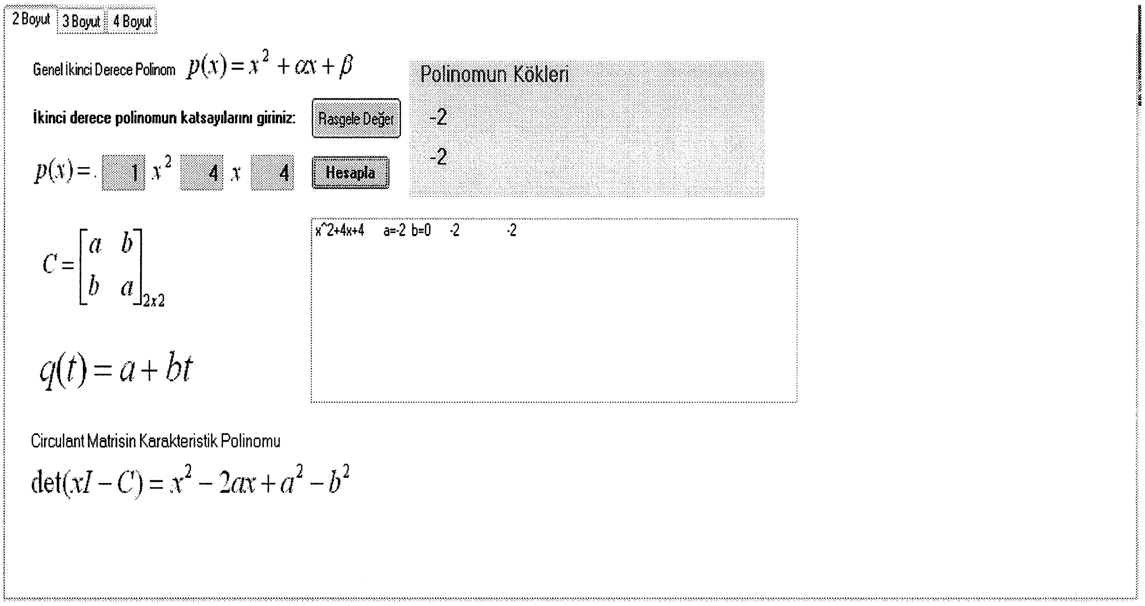
```
//karekök içi pozitifse hesaplama devam eder p[2] sonuç

if (i_c[0] == "i") { if (q[0] != 0) i_c[1] = "(" + Convert.ToString((-1.0 * (q[0] / 2))) + "-" + g + "i)^(1/3)"; else i_c[1] = "(" + g + "i)^(1/3)"; }

else i_c[1] = "";

if (i_c[0] == "i") { /*listBox2.Items.Add(i_c[1]);*/ sonuc[1] = i_c[1]; } else { /*listBox2.Items.Add(q[2]);*/ sonuc[1] = Convert.ToString(q[2]); }


if ((i_b[0] != "i") && (i_c[0] != "i")) { sonuc[2] = Convert.ToString(Convert.ToSingle(sonuc[0]) + Convert.ToSingle(sonuc[1]));

label9.Text = sonuc[2];

label8.Text = "(-1/2)*(" + sonuc[2] + ")+(3^1/2)*(i/2)*(" + sonuc[2] + ")";

label14.Text = "(-1/2)*(" + sonuc[2] + ")-(3^1/2)*(i/2)*(" + sonuc[2] + ")";

                    }

                    else

                    {

    label9.Text = sonuc[0] + "+" + sonuc[1];

label8.Text = "(-1/2)*(" + sonuc[0] + "+" + sonuc[1] + ")+(3^1/2)*(i/2)*(" + sonuc[0] + "+" + sonuc[1]+")";

label14.Text = "(-1/2)*(" + sonuc[0] + "+" + sonuc[1] + ")-(3^1/2)*(i/2)*(" + sonuc[0] + "+" + sonuc[1] + ")";

 listBox2.Items.Add(label9.Text + "      " + label8.Text + "      " + label14.Text);

   groupBox2.Visible = true;

son: i = 1;

}
```

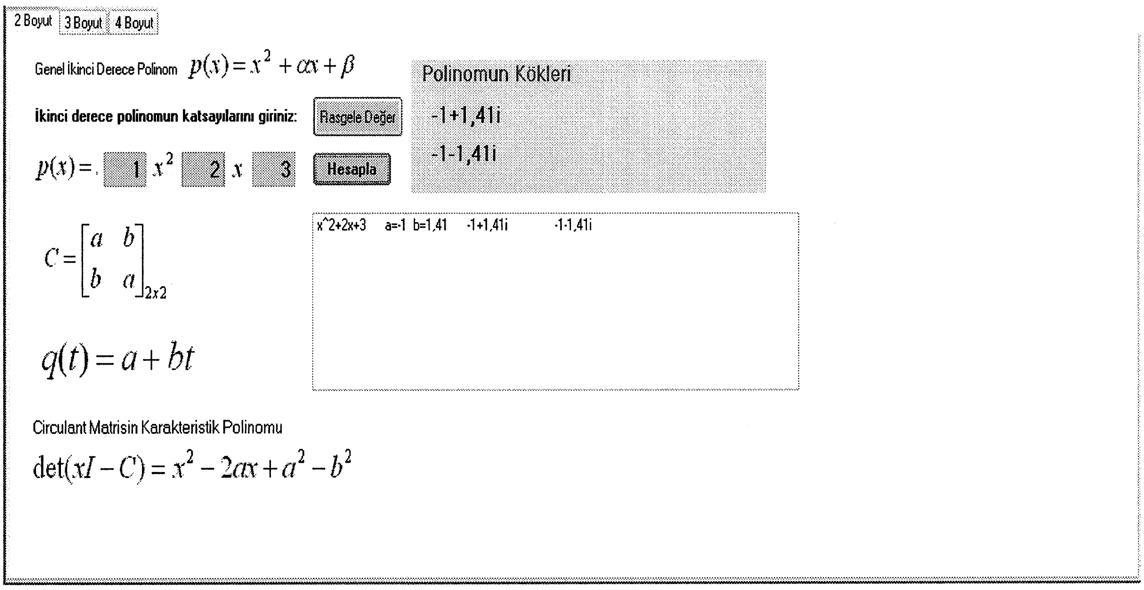
**//4. Dereceden denklem çözümü**

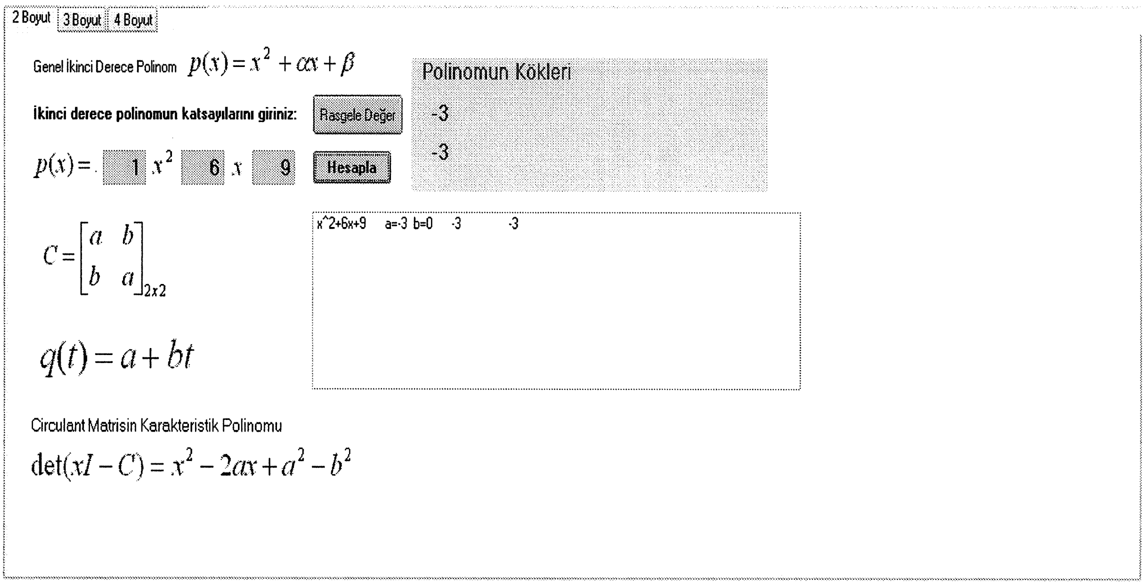
```
if (textBox12.Text != "") i = Convert.ToSingle(textBox12.Text);
else { MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); textBox12.Focus(); goto son; }
if (textBox11.Text != "") j = Convert.ToSingle(textBox11.Text);
else { textBox11.Text = "0"; }
if (textBox10.Text != "") k = Convert.ToSingle(textBox10.Text);
else { MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); textBox10.Focus(); goto son; }
if (textBox9.Text != "") l = Convert.ToSingle(textBox9.Text);
else { MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); textBox9.Focus(); goto son; }
if (textBox8.Text != "") m = Convert.ToSingle(textBox8.Text);
else { MessageBox.Show("Katsayıları boş geçemezsiniz"); textBox8.Focus(); goto son; }
i_b[3] = i + "x^4 " + j + "x^3 " + k + "x^2 " + l + "x " + m; listBox2.Items.Add(i_b[3]);
if ((j > 0)) { i_b[3] = i + "x^4+" + j + "x^3"; }
else if ((j < 0)) { i_b[3] = i + "x^4" + j + "x^3"; }
else { i_b[3] = i + "x^4"; }
if (k > 0) { i_b[3] = i_b[3] + "+" + k + "x^2"; }
else if (k < 0) { i_b[3] = i_b[3] + k + "x^2"; }
if (l > 0) { i_b[3] = i_b[3] + "+" + l+"x"; }
else if (l < 0) { i_b[3] = i_b[3] + l+"x"; }
```

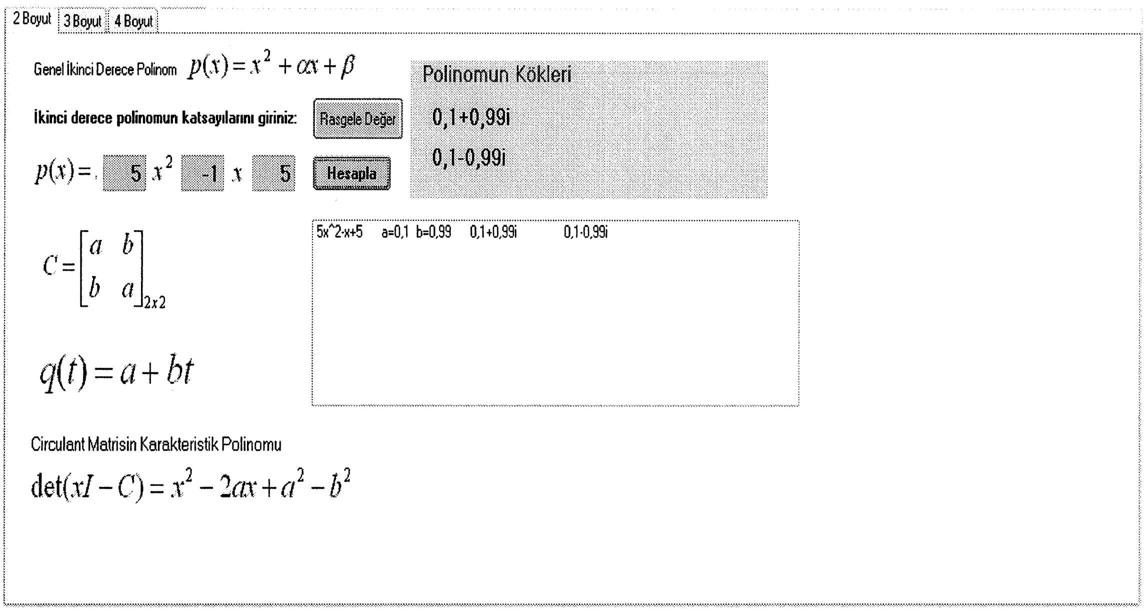
```
if (m > 0) { i_b[3] = i_b[3] + "+" + m; }

else if (m < 0) { i_b[3] = i_b[3] + m; }

listBox3.Items.Add(i_b[3]);

        if (i != 1) { j = j / i; k = k / i; l = l / i; m = m / i; }

        label17.Text = "j=" + Convert.ToString(j) + "k=" + Convert.ToString(k) +
"l=" + Convert.ToString(l);


p[1] = Math.Round(k - (3 * (Math.Pow(j, 2)) / 8.0), 2);

p[2] = Math.Round((Math.Pow(j,3)/8.0)-(j*k/2.0)+l, 2);

p[3]        =        Math.Round((Math.Pow(j,2)*k/16.0)-(j*l/4.0)+(m)-
(3*Math.Pow(j,4)/256.0), 2);

//q[0=


son:

i = 1;
```

2.Dereceden Polinomların Proğramla Çözümü

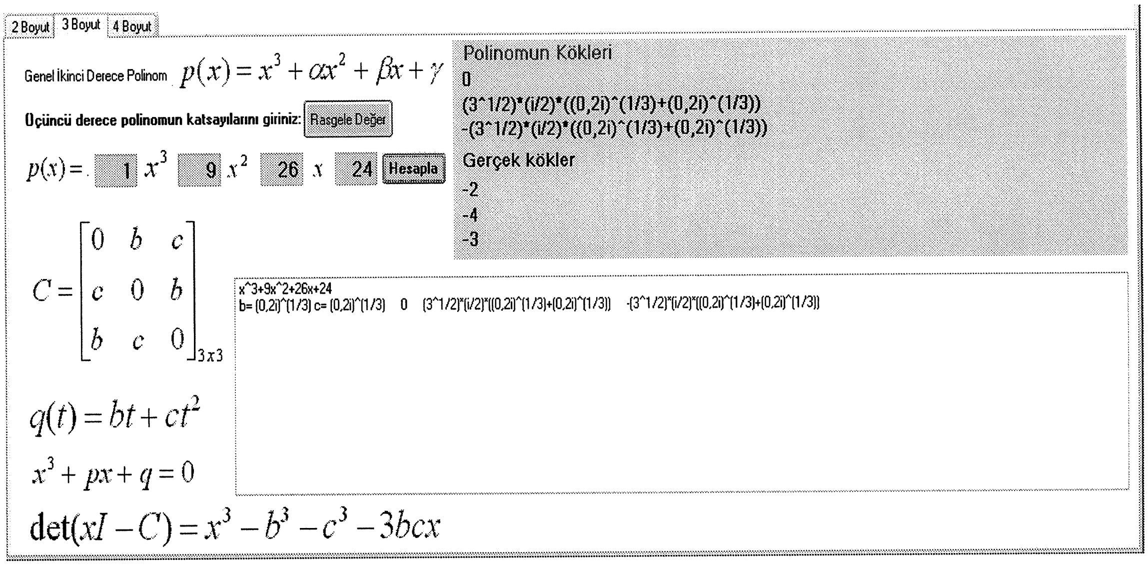


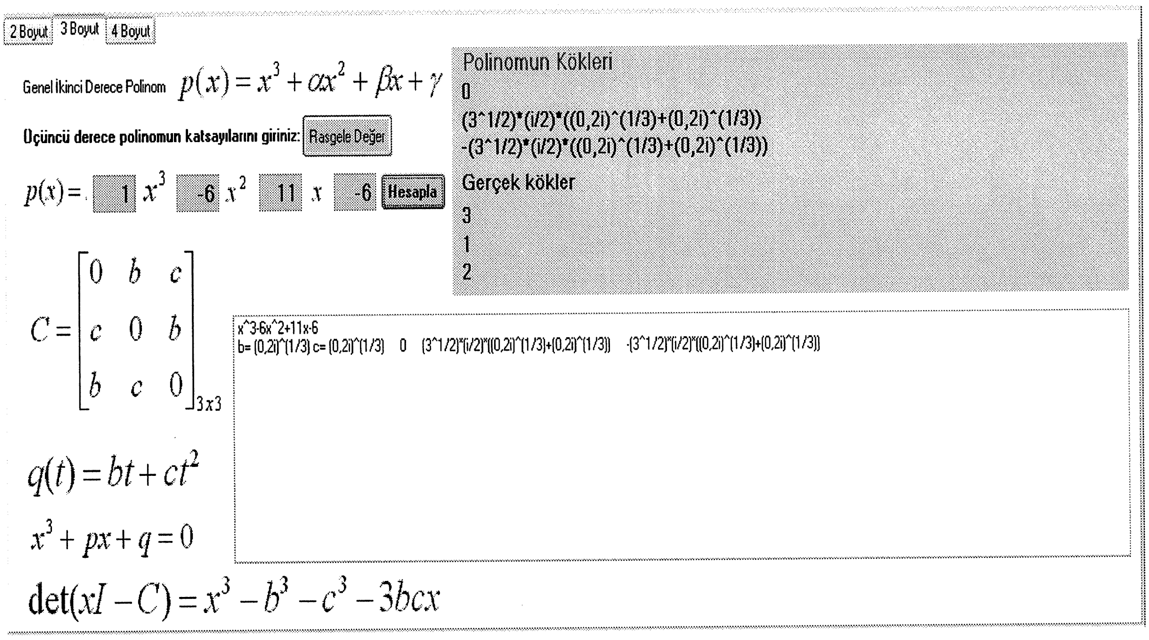



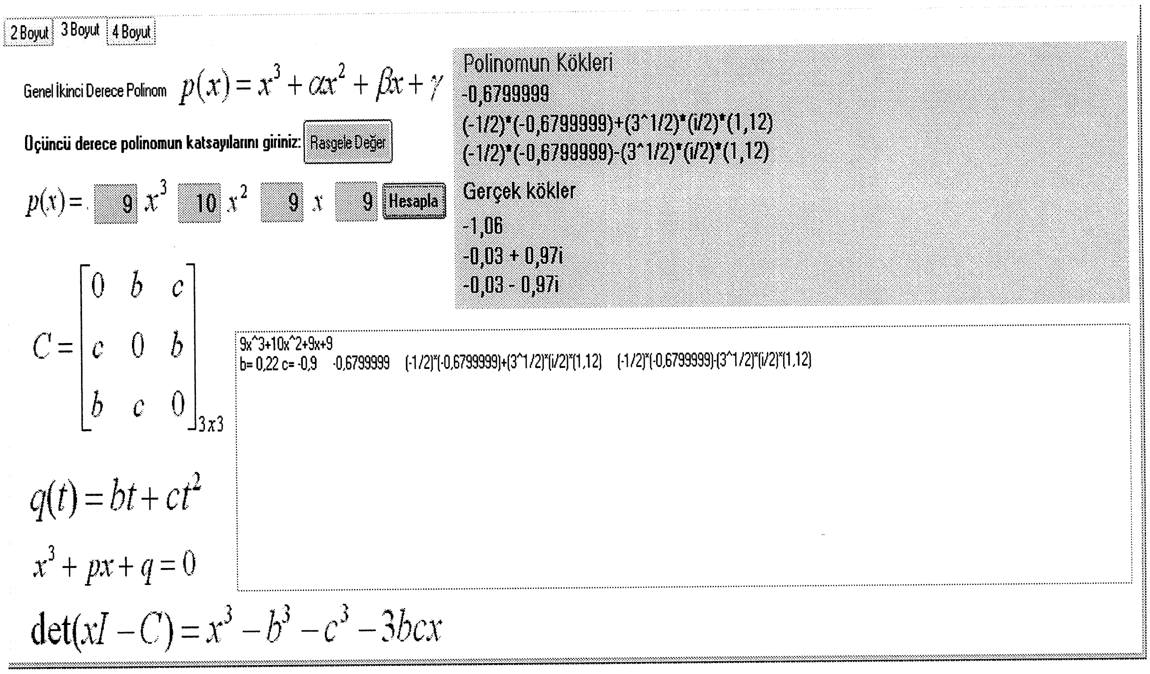

2 Boyut
3 Boyut
4 Boyut
Genel İkinci Derece Polinom $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$
İkinci derece polinomun katsayılarını giriniz:
Rasgele Değer
Polinomun Kökleri
-3
-3
$p(x) =$ 1 $x^2$ 6 $x$ 9
Hesapla
x^2+6x+9 a=-3 b=0 -3 -3
$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}_{2x2}$
$q(t) = a + bt$
Circulant Matrisin Karakteristik Polinomu
$\det(xI - C) = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$


2 Boyut
3 Boyut
4 Boyut
Genel İkinci Derece Polinom $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$
İkinci derece polinomun katsayılarını giriniz:
Rasgele Değer
Polinomun Kökleri
0,1+0,99i
0,1-0,99i
$p(x) =$ 5 $x^2$ -1 $x$ 5
Hesapla
5x^2-x+5 a=0,1 b=0,99 0,1+0,99i 0,1-0,99i
$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}_{2x2}$
$q(t) = a + bt$
Circulant Matrisin Karakteristik Polinomu
$\det(xI - C) = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$

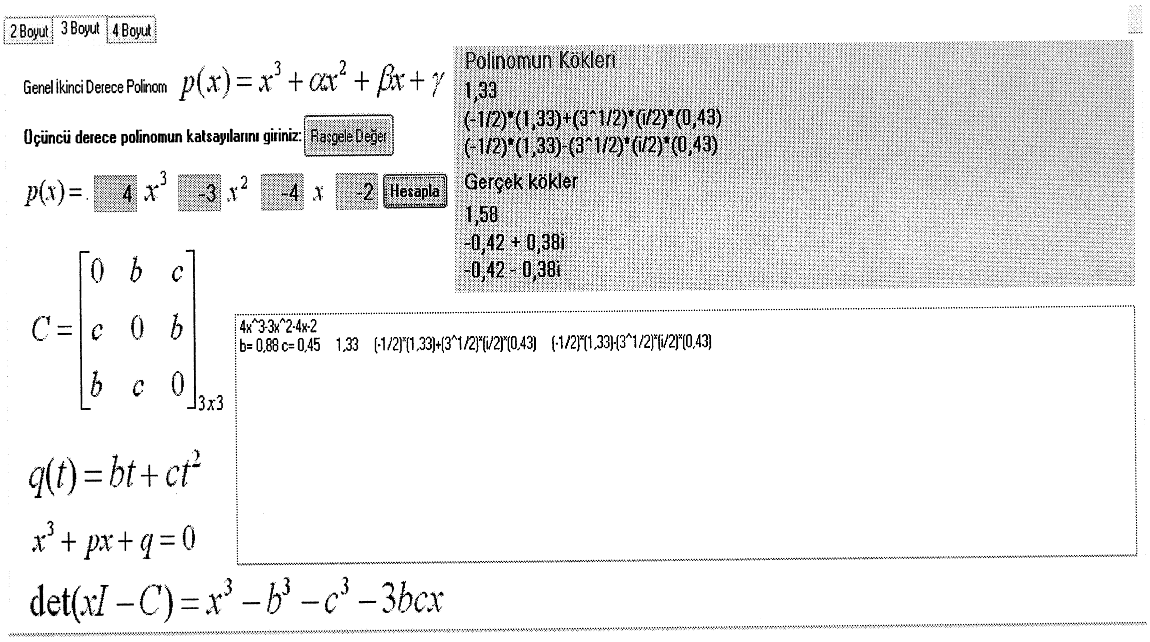
3.Dereceden Polinomların Proğramla Çözümü





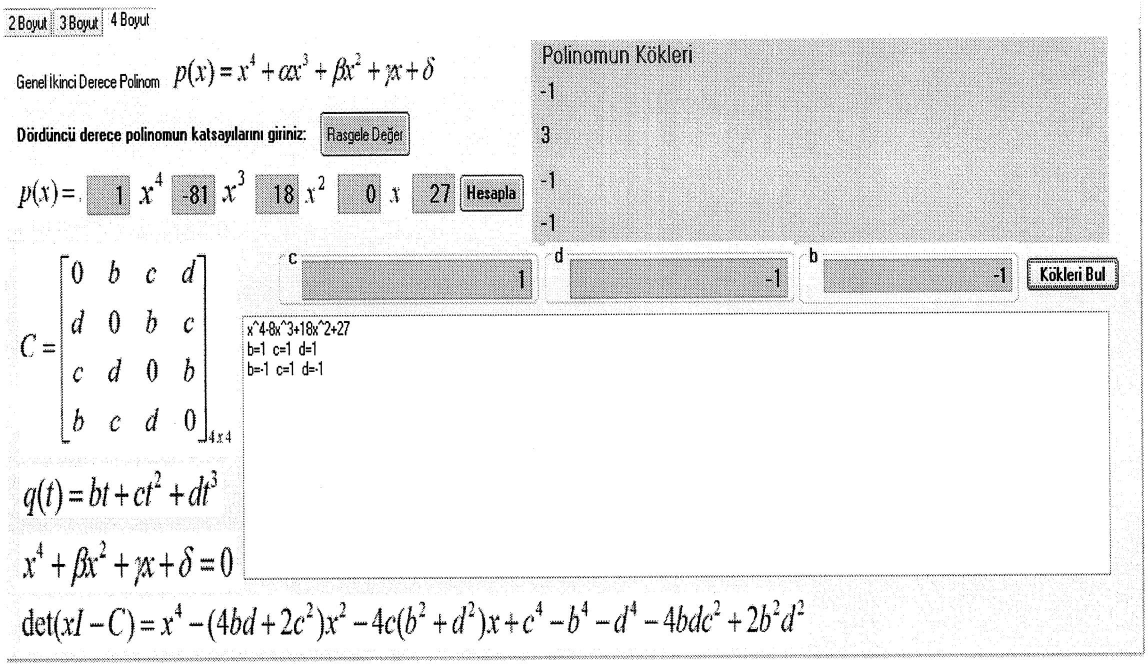


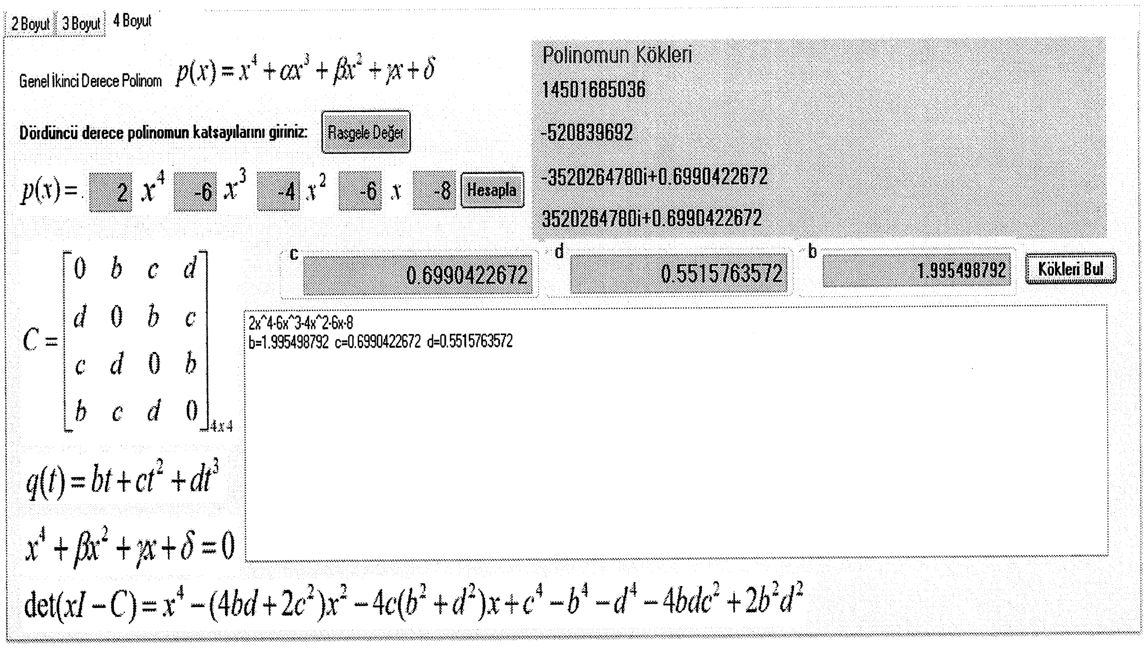
2 Boyut 3 Boyut 4 Boyut
Genel İkinci Derece Polinom $p(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$
Üçüncü derece polinomun katsayılarını giriniz: Rasgele Değer
$p(x)=$ 9 $x^3$ 10 $x^2$ 9 $x$ 9 Hesapla
Polinomun Kökleri
-0,6799999
(-1/2)*(-0,6799999)+(3^1/2)*(i/2)*(1,12)
(-1/2)*(-0,6799999)-(3^1/2)*(i/2)*(1,12)
Gerçek kökler
-1,06
-0,03 + 0,97i
-0,03 - 0,97i
$C=\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$
9x^3+10x^2+9x+9
b= 0,22 c= -0,9 -0,6799999 (-1/2)*(-0,6799999)+(3^1/2)*(i/2)*(1,12) (-1/2)*(-0,6799999)-(3^1/2)*(i/2)*(1,12)
$q(t)=bt+ct^2$
$x^3+px+q=0$
$\det(xI-C)=x^3-b^3-c^3-3bcx$

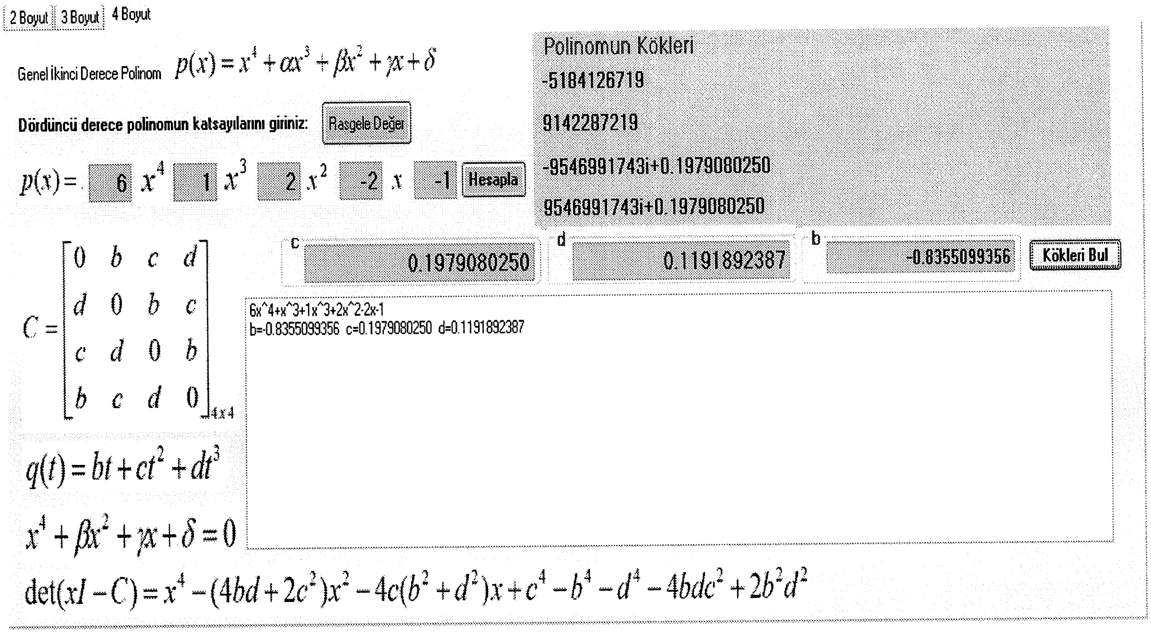



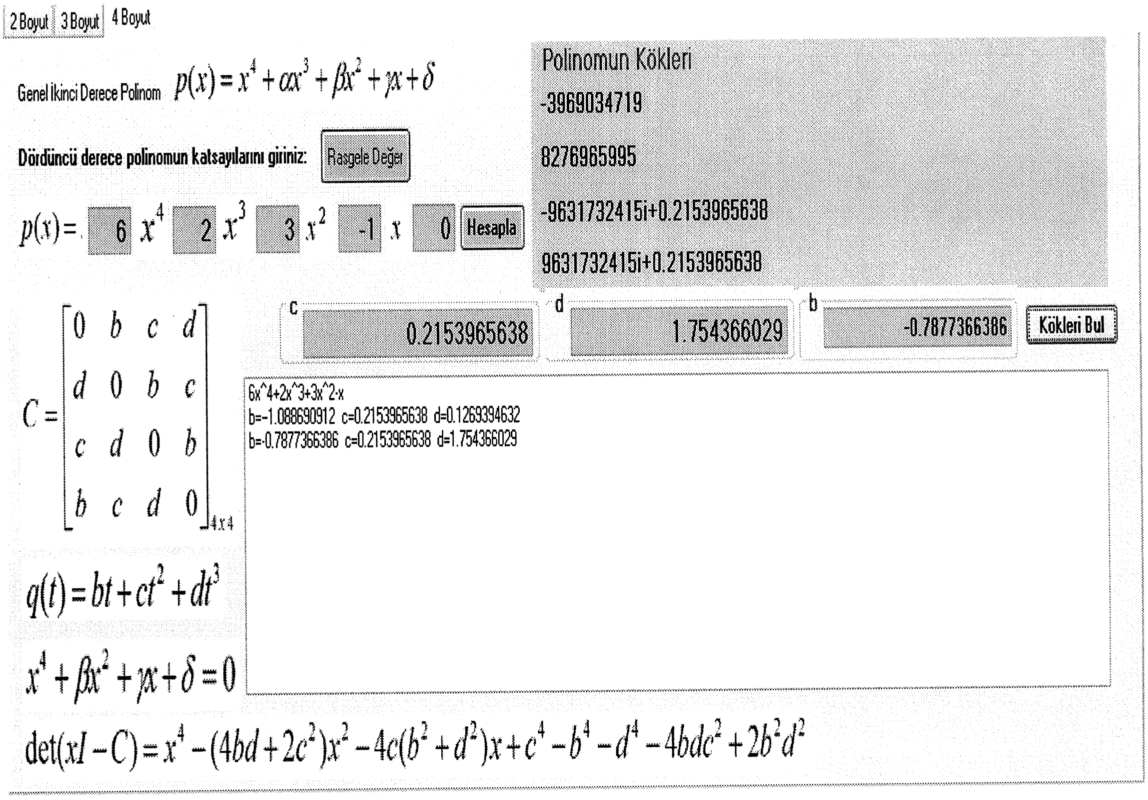
2 Boyut 3 Boyut 4 Boyut
Genel İkinci Derece Polinom $p(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$
Üçüncü derece polinomun katsayılarını giriniz: Rasgele Değer
$p(x)=$ 4 $x^3$ -3 $x^2$ -4 $x$ -2 Hesapla
Polinomun Kökleri
1,33
(-1/2)*(1,33)+(3^1/2)*(i/2)*(0,43)
(-1/2)*(1,33)-(3^1/2)*(i/2)*(0,43)
Gerçek kökler
1,58
-0,42 + 0,38i
-0,42 - 0,38i
$C=\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$
4x^3-3x^2-4x-2
b= 0,88 c= 0,45 1,33 (-1/2)*(1,33)+(3^1/2)*(i/2)*(0,43) (-1/2)*(1,33)-(3^1/2)*(i/2)*(0,43)
$q(t)=bt+ct^2$
$x^3+px+q=0$
$\det(xI-C)=x^3-b^3-c^3-3bcx$

4.Dereceden Polinomların Proğramla Çözümü




2 Boyut
3 Boyut
4 Boyut
Genel İkinci Derece Polinom $p(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$
Dördüncü derece polinomun katsayılarını giriniz:
Rasgele Değer
$p(x)=$ 6 $x^4$ 1 $x^3$ 2 $x^2$ -2 $x$ -1
Hesapla
Polinomun Kökleri
-5184126719
9142287219
-9546991743i+0.1979080250
9546991743i+0.1979080250
c 0.1979080250
d 0.1191892387
b -0.8355099356
Kökleri Bul
6x^4+x^3+1x^3+2x^2-2x-1
b=-0.8355099356 c=0.1979080250 d=0.1191892387
$C=\begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$
$q(t)=bt+ct^2+dt^3$
$x^4+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$
$\det(xI-C)=x^4-(4bd+2c^2)x^2-4c(b^2+d^2)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2$


2 Boyut
3 Boyut
4 Boyut
Genel İkinci Derece Polinom $p(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$
Dördüncü derece polinomun katsayılarını giriniz:
Rasgele Değer
$p(x)=$ 6 $x^4$ 2 $x^3$ 3 $x^2$ -1 $x$ 0
Hesapla
Polinomun Kökleri
-3969034719
8276965995
-9631732415i+0.2153965638
9631732415i+0.2153965638
c 0.2153965638
d 1.754366029
b -0.7877366386
Kökleri Bul
6x^4+2x^3+3x^2-x
b=-1.088690912 c=0.2153965638 d=0.1269394632
b=-0.7877366386 c=0.2153965638 d=1.754366029
$C=\begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$
$q(t)=bt+ct^2+dt^3$
$x^4+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$
$\det(xI-C)=x^4-(4bd+2c^2)x^2-4c(b^2+d^2)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2$

# ÖZGEÇMİŞ

Mehmet KÖKLÜ, 20.01.1978 de Konya' da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Konya'da tamamladı. 1995 yılında Konya İmam Hatip Lisesinden mezun oldu. 1996 yılında başladığı KTÜ Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2001 yılında bitirdi. 2001 yılında Konya Emirgazi'ye öğretmen olarak atandı. Van Başkale'de yedek subay öğretmen görev yaptı. Zorunlu hizmetini tamamlamak üzere İstanbul Pendik'e atandı. Pendik Melek Aknil Anadolu Kız Meslek ve Kız Meslek Lisesinde Müdür Yardımcısı olarak çalışırken girdiği sınavı kazanarak Konya İMKB GMK Anadolu Otelcilik ve Turizm Meslek Lisesine atandı. Halen burada çalışıyor. Evli ve üç çocuk babası.