T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR-PARAMETRELİ KAPALI DUAL KÜRESEL HAREKETLER İÇİN HOLDITCH TEOREMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nesrin ERALP

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. M. Ali GÜNGÖR

Haziran 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR-PARAMETRELİ KAPALI DUAL KÜRESEL HAREKETLER İÇİN HOLDITCH TEOREMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nesrin ERALP

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11 /06 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. M. Ali GÜNGÖR	Prof. Dr. İbrahim OKUR	Doç. Dr. Murat TOSUN
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Nesrin ERALP

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{D}$	: Dual sayılar cümlesi
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{D}^3$	: 3-boyutlu dual uzay
λ_X	: Reel açılım açısı
L_X	: Reel açılım uzunluğu
Λ_X	: Dual açılım açısı
H	: Hareketli uzay
$H^{'}$	: Sabit uzay
K	: Hareketli birim dual küre
$K^{'}$	: Sabit birim dual küre
$H/H^{'}$	: H uzayının $H^{'}$ uzayına göre 1-parametreli hareketi
$K/K^{'}$	: K dual küresinin $K^{'}$ dual küresine göre 1-parametreli hareketi
$SO(3)$	: 3x3 tipindeki ortogonal ve $\det = 1$ olan matrisler cümlesi
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^T	: A matrisinin transpozesi
$\det A$	: A matrisinin determinantı
ε	: Dual birim
$\langle\ ,\ \rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$\Vert\ \Vert$	: Norm
$\sum$	: İzdüşüm alanı
:=	: eşittir

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Regle yüzey, İntegral invaryantlar, Dual alan vektörü, Holditch teoremi

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bugüne kadar Holditch teoremi ile ilgili yapılan çalışmalar anlatılmıştır.

İkinci bölümde bu çalışmanın sonraki bölümlerinde temel teşkil edecek olan bazı tanımlar ve bazı teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında küre üzerindeki 1-parametreli hareketlere, regle yüzeylere ve regle yüzeyin reel integral invaryantlarına değinilmiştir.

Dördüncü bölümde $\mathbb{D}^3$, 3-boyutlu dual uzayda dual küre üzerindeki 1-parametreli hareketler, dual regle yüzeyler ve dual regle yüzeyin dual integral invaryantları, işlenmiştir.

Beşinci bölümde düzlemsel hareketler için iyi bilinen Holditch Teoremi 1-parametreli kapalı dual küresel hareketlere genelleştirilmiştir.

Altıncı bölüm bu çalışmanın sonuçlarını içerir.

ONE-PARAMETER CLOSED DUAL SPHERICAL MOTIONS FOR HOLDITCH'S THEOREM

SUMMARY

Key Words: Ruled surface, integral invariants, dual area vector, Holditch's Theorem

This thesis consists of six chapters. First chapter contains the studies about Holditch Theorem.

In the second chapter, some definitions and some theorems that will be fundamental in the sequel chapters are given.

In the third chapter, one parameter motion of the sphere, in the 3-dimensional Euclid space $\mathbb{E}^3$ is stated. Besides, ruled surfaces and the reel integral invariants of ruled surfaces are described.

In the fourth chapter, one parameter motion of the dual sphere, in the 3-dimensional dual space $\mathbb{D}^3$ is stated. Besides, dual ruled surfaces and the dual integral invariants of ruled surfaces are described.

In the fifth chapter, Holditch's theorem well known for planar kinematics is generalized to one-parameter closed dual spherical motions.

Sixth chapter is about the results of this study.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Holditch Teoremi uzun yıllar kinematik ve hareket geometrisinin ilgi çeken bir konusu olmuş ve Holditch Teoremi hakkında birçok yayın yapılmıştır.

Holditch Teoremi ilk olarak 1858 de Hamnet Holditch tarafından “Geometrical Theorem” adlı makalede ele alındı. Hamnet Holditch, uç noktaları konveks bir eğri üzerinde hareket eden sabit uzunluklu bir kiriş üzerindeki bir noktanın oluşturmuş olduğu eğrinin bir özelliğini inceledi[1].

W. Blaschke 1-parametreli küresel hareketlerde önemli yeri olan Steiner noktası ve Steiner vektörü kavramlarını tanımladı ve Gauss-Bonnet Teoreminden de yararlanarak 1-parametreli kapalı küresel hareketlerde bir alan formülü verdi[2].

H. H. Hacısalihoğlu 1-parametreli kapalı küresel hareketler için Steiner formülü ve Holditch Teoreminin çizgiler uzayındaki karşılıklarını verdi[3].

H. R. Müller 1-parametreli kapalı uzay hareketlerinde hareketli uzaydaki bir X noktasının sabit uzayda çizmiş olduğu (α) yörünge eğrisinin bir düzlem üzerine dik izdüşümünü esas almıştır. İzdüşüm ve harekete bağlı olarak izdüşüm eğrileri yardımı ile Holditch Teoremini kapalı uzay eğrilerine genelleştirmiştir[4].

A. Broman, Holditch Teoremini kapalı doğrultulabilir eğrilere genelleştirdi[5].

H. Pottman, Holditch Teoremindeki oval yerine konveks sınırsız bir eğri alarak Holditch Hilallerinin alanını ve hacmini hesapladı[6]. H. Pottman, sabit uzunluklu bir doğrunun uç noktalarının kapalı eğriler boyunca hareketiyle ilgili Holditch Teoreminin genelleştirmesini açık hareketlere genişletti[7]. H. H. Hacısalihoğlu 1-

boyutlu kapalı küresel hareketleri inceleyerek sabit uzunluklu hareketli bir yayın iki ucunun aynı küresel eğriyi ya da eşit alanları kaplayan iki kapalı eğriyi tanımlaması için bir gerek ve yeter koşul buldu[8]. O. Gürsoy 1-parametreli kapalı küresel hareketler için bir integral invaryantı verdi ve bunu hareketin, dual açılım açısı olarak adlandırdı[9].

1997 de R. Abdel-Baky ve H. H. Hacısalihoğlu Holditch teoreminin tahlilini yapan çalışmasında ve O. Gürsoy'un 1990 daki çalışmasında esas olan eğrilerin sınırladıkları bölgelerin alanları ve dual açılım açısı arasındaki ilişkilere devam etti[9,10].

E. Kılıç ve S. Keleş kapalı doğrultulabilir eğrilerin kutupsal eylemsizlik momentumları için Holditch formülüne benzeyen bulgular elde ettiler, sınırlı bölgeler ve eğrilerin kutupsal eylemsizlik momentumları arasındaki oranı gösterdiler[11].

H. H. Hacısalihoğlu ve A. Amirov n-boyutlu Riemann manifoldları için olan teoremi genelleştirerek, geometrideki Holditch Teoremi ile mekanikteki Liouville Teoremi arasında bağlantı kurdular[12].

B. Karadağ ve S. Keleş, kapalı uzay eğrilerinin paralel projeksiyon alanlarını hesaplayıp Holditch Teoremini kapalı uzay eğrilerine genelleştirdiler[13].

A. Tutar ve N. Kuruoğlu, 1-parametreli kapalı düzlemsel homotetik hareketler boyunca Steiner alan formülü ve Holditch Teoremini incelemiş, homotetik oranın $h=1$ özel durumu için sonuçlar elde etmişlerdir[14]. N. Kuruoğlu ve S. Yüce, düzlemsel kinematikler üzerinde homotetik hareketler için Holditch Teoremini genelleştirdiler. Holditch Teoreminin bazı genelleştirmelerini Lorentzian hareketler altında incelediler[15]. S. Yüce ve N. Kuruoğlu, uç noktaları, iki farklı kapalı eğri boyunca hareket eden iki farklı doğru parçası kullanarak Holditch Teoreminin bir genelleştirmesini elde ettiler[16]. M. Düldül ve N. Kuruoğlu 3-boyutlu Öklid uzayında 1-parametreli kapalı hareketler altında kapalı uzay eğrileri için projeksiyon eğrilerinin eylemsizliğinin kutupsal momentini açıkladılar[17].

R. Abdel-Baky bir parametreli kapalı dual küresel hareketler ve Holditch Teoremini inceledi[18].

S. Yüce ve N. Kuruoğlu, 1-parametreli açık düzlemsel homotetik hareketler için Steiner formülünü elde ettiler[19].

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sırasıyla, Öklid uzayı ve Dual Öklid uzayındaki temel kavramlar ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Eğer

$$\Psi : A \times A \to V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \to \left(\overrightarrow{PQ}\right) \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise, A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay adı verilir.

i. Her $P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir,

ii. Her $P \in A$ ve her $\alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\left(X,Y\right)\to\left\langle X,Y\right\rangle=\sum_{i=1}^{3}x_i y_i$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir.

Tanım 2.3. $\| \ \|$: $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^+$, $\quad \vec{X}=\left\|\vec{X}\right\|=\sqrt{\left\langle \vec{X},\vec{X}\right\rangle}$ ile tanımlanan dönüşüme $\vec{X}$ vektörünün normu denir.

Tanım 2.4. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\left\langle , \right\rangle :\ V\times V\to\mathbb{R}$$

$\forall a,b\in\mathbb{R}$ ve $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ için

i. $\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle=\left\langle \vec{v},\vec{u}\right\rangle$

ii. $\left\langle a\vec{u}+b\vec{v},\vec{w}\right\rangle=a\left\langle \vec{u},\vec{w}\right\rangle+b\left\langle \vec{v},\vec{w}\right\rangle$

iii. $\left\langle \vec{u},a\vec{v}+b\vec{w}\right\rangle=a\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle+b\left\langle \vec{u},\vec{w}\right\rangle$

özelliklerine sahip olan $\left\langle , \right\rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bi-lineer form denir.

Tanım 2.5. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta X,Y,Z olsun. $\overrightarrow{XY}$ ile $\overrightarrow{XZ}$ vektörleri arasındaki $\theta\in\mathbb{R}$ açısı, $0\le\theta\le\pi$ olmak üzere,

$$\cos\theta=\frac{\left\langle \overrightarrow{XY},\overrightarrow{XZ}\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{XY}\right\|\left\|\overrightarrow{XZ}\right\|}$$

dır.

Tanım 2.6. 3-boyutlu reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleşen E^3 Öklid uzayında, sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsü için eğer $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\right\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise, $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ çatısına bir dik çatı (veya Öklid çatısı) denir.

Tanım 2.7. E^3 de bir X noktasının E^3 deki Standart Öklid Çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

dir. Burada

$$x_i : \mathsf{E}^3 \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq 3$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar üçlüsüne de E^3 ün Öklid koordinat sistemi denir.

Tanım 2.8. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, diferensiyellenebilir bir

$$\alpha : I \to \mathsf{E}^3$$

dönüşümü E^3 de bir eğri olarak adlandırılır. Burada I açık aralığı $a, b \in \mathbb{R}$ ve $t \in I$ olmak üzere $\{t \in I : a < t < b\}$ olarak alınabilir ve t değerine eğrinin parametresi denir.

Tanım 2.9. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayının izometrilerinden biri f olsun. E^3 deki bir $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemine göre f'nin matrissel ifadesi $A \in O(3)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup bu durumda f ye $\mathbb{E}^3$ de bir hareket adı verilir.

Burada $O(3)$; 3×3 tipindeki ortogonal matrislerin cümlesi ve $\mathbb{R}_1^3$; 3×1 tipindeki matrislerin cümlesini göstermektedir.

$A \in O(3)$ olduğundan

$$\det A = \pm 1$$

dir. Eğer $\det A = +1$ ise f hareketine direkt hareket, $\det A = -1$ ise karşıt hareket adı verilir.

2.2. Dual Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.10. Her $a, a^* \in \mathbb{R}$ için $\widetilde{A} = (a, a^*)$ ikilisine bir sıralı reel sayı ikilisi adı verilir. Böylece

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, a^*) : \ a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi üzerinde iki iç işlem (toplama ve çarpma) ve eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\widetilde{A} = (a, a^*)$ ve $\widetilde{B} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\oplus : \ \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$
$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

şeklindeki işlem $\mathbb{D}$ de toplama olarak isimlendirilir.

$$\odot : \ \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

$$\widetilde{A} \odot \widetilde{B} = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^* b)$$

şeklindeki işlem $\mathbb{D}$ de çarpma olarak isimlendirilir. Ayrıca,

$\widetilde{A} = (a, a^*)$ ve $\widetilde{B} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ için

$$a = b \quad \text{ve} \quad a^* = b^*$$

ise $\widetilde{A}$ ile $\widetilde{B}$ eşittir denir ve $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.11. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise, $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve her $(a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir.

Teorem 2.12. $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır[20].

Teorem 2.13. $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir[20].

Teorem 2.14. $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar[20].

Tanım 2.15. Bir $\widetilde{A} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında "a" reel sayısına $\widetilde{A}$ nın reel kısmı, "a^*" reel sayısına da $\widetilde{A}$ nın dual kısmı denir ve $\operatorname{Re}\widetilde{A} = a$, $Du\widetilde{A} = a^*$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.16. $(1,0)=1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir.

Tanım 2.17. $(0,1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilir. Yani $(0,1)=\varepsilon$ alınır ve dual birim olarak adlandırılır.

Tanım 2.18. Birimi 1 olan değişmeli bir halka H ve S bir abel grubu olmak üzere

$$\begin{gathered} H\times S\to S \\ (a,\alpha)\to a\,\alpha \end{gathered}$$

dış işlemi, her $a,b\in H$ ve her $\alpha,\beta\in S$ için

i. $a(\alpha+\beta)=a\,\alpha+b\,\beta;$

ii. $(a+b)\alpha=a\,\alpha+b\,\alpha;$

iii. $(a\,b)\alpha=a(b\,\alpha);$

iv. $1\alpha=\alpha$

özelliklerini sağlıyor ise S ye H üzerinde bir modül adı verilir.

Tanım 2.19. $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olmak üzere

$$\mathbb{D}\times\mathbb{D}\times\mathbb{D}=\mathbb{D}^3=\left\{\left(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\widetilde{A}_3\right):\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\widetilde{A}_3\in\mathbb{D}\right\}$$

cümlesi üzerinde $\widetilde{A}=\left(\widetilde{A}_i\right)$, $\widetilde{B}=\left(\widetilde{B}_i\right)\in\mathbb{D}$, $(i=1,2,3)$ ve $\widetilde{\lambda}\in\mathbb{D}$ için, sırasıyla, toplama, skalarla çarpma ve eşitlik,

Toplama :
$$\begin{gathered} +:\ \mathbb{D}^3\times\mathbb{D}^3\to\mathbb{D}^3 \\ \left(\widetilde{A},\widetilde{B}\right)\to\widetilde{A}+\widetilde{B}=\left(\widetilde{A}_i+\widetilde{B}_i\right) \end{gathered}$$

Skalar ile Çarpma : $\odot : \mathsf{D}\times\mathsf{D}^3 \to \mathsf{D}^3$

$$\left(\tilde{\lambda},\tilde{A}\right)\to \tilde{\lambda}\,\tilde{A}=\left(\tilde{\lambda}\tilde{A}_i\right)$$

Eşitlik : $\tilde{A}=\tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}_i=\tilde{B}_i$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.20. $\left(\mathsf{D}^3,+\right)$ bir abel grubudur[20].

Teorem 2.21. $\left(\mathsf{D}^3,+\right)$ sistemi D dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür[20].

Tanım 2.22. Dual sayılar halkası üzerinde modül olan $\mathsf{D}^3=\mathsf{D}\times\mathsf{D}\times\mathsf{D}$ cümlesi D-Modül olarak isimlendirilir ve D-Modül'ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine, dual vektörler adı verilir.

Teorem 2.23. $\vec{a},\ \overrightarrow{a^*}\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere D-Modül'de her bir $\vec{\vec{A}}$ dual vektörü

$$\vec{\vec{A}}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\qquad \left[\varepsilon=(0,1)\in\mathsf{D}\right]$$

şeklinde yazılabilir[20].

Teorem 2.24. $\vec{\vec{A}}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}=\left(\vec{a},\overrightarrow{a^*}\right)$ dual vektörünün $\tilde{\lambda}\in\mathsf{D}$ skaları ile çarpımı

$$\tilde{\lambda}\vec{\vec{A}}=\left(\tilde{\lambda}\,\vec{a},\tilde{\lambda}\,\overrightarrow{a^*}\right)$$

dır[20].

Teorem 2.25. $\vec{\vec{A}}=\left(\vec{a},\overrightarrow{a^*}\right)$ ve $\vec{\vec{B}}=\left(\vec{b},\overrightarrow{b^*}\right)\in\mathsf{D}$-Modül için

$$\tilde{\vec{A}} = \tilde{\vec{B}} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \qquad \text{ve} \qquad \overrightarrow{a^*} = \overrightarrow{b^*}$$

dır[20].

Teorem 2.26. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, $\mathbb{D}$ -Modül'ün elemanları $\left(\vec{a}, \vec{0}\right)$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur[20].

Teorem 2.27. $\tilde{\vec{A}} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\tilde{\vec{B}} = \vec{b} + \varepsilon\overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}$ -Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$f : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} f\left(\tilde{\vec{A}}, \tilde{\vec{B}}\right) &= \left\langle \tilde{\vec{A}}, \tilde{\vec{B}} \right\rangle = \left\langle \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}, \vec{b} + \varepsilon\overrightarrow{b^*} \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \varepsilon\left[\left\langle \overrightarrow{a^*}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle\right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.28. Bir $\tilde{\vec{A}} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün normu

$$\left\|\tilde{\vec{A}}\right\| = \left(\left\langle \tilde{\vec{A}}, \tilde{\vec{A}} \right\rangle\right)^{1/2} = \left(\left\|\vec{a}\right\|, \frac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|}\right), \qquad \vec{a} \neq \vec{0},$$

olarak tanımlanan bir dual sayıdır. Burada

$$a = \left\|\vec{a}\right\| \qquad \text{ve} \qquad a^* = \frac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|}$$

olmak üzere,

$$\left\| \overrightarrow{\widetilde{A}} \right\| = a + \varepsilon a^*$$

dır.

Tanım 2.29. $\overrightarrow{\widetilde{A}} \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere $\left\| \overrightarrow{\widetilde{A}} \right\| = (1,0)$ olan dual vektöre birim dual vektör denir.

Teorem 2.30. $\overrightarrow{\widetilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ birim dual vektör ise,

$$\left\| \vec{a} \right\| = 1, \quad \left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle = 0$$

dır[20].

Teorem 2.31. $\overrightarrow{\widetilde{A}} \neq \left(\vec{0}, \vec{a}\right) \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere

$$\overrightarrow{\widetilde{U}} = \frac{\overrightarrow{\widetilde{A}}}{\left\| \overrightarrow{\widetilde{A}} \right\|}$$

bir birim dual vektördür[20].

Tanım 2.32. $\left\{ \overrightarrow{\widetilde{X}} = \vec{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*} \;\middle|\; \left\| \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\| = (1,0); \;\; \vec{x}, \overrightarrow{x^*} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ cümlesine $\mathbb{D}$-Modül'de birim dual küre adı verilir.

Teorem 2.33. (E. Study) $\overrightarrow{\widetilde{A}} \neq \left(\vec{0}, \vec{a}\right) \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere, $\mathbb{D}$-Modül'de denklemi

$$\left\| \overrightarrow{\widetilde{A}} \right\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir[21].

Tanım 2.34. $\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere

$$\vec{\tilde{U}} = \frac{\vec{\tilde{A}}}{\left\| \vec{\tilde{A}} \right\|}$$

birim dual vektörüne $\vec{\tilde{A}}$ vektörünün ekseni denir.

Tanım 2.35. $k = \dfrac{\left\langle \vec{a}, \vec{a^*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|^2}$ reel sayısına $\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ dual vektörünün adımı veya yükselişi denir. Bir dual vektör $\vec{\tilde{A}} = a\left(1 + \varepsilon k\right)\vec{\tilde{U}}$ şeklinde yazılabileceğinden

i. $k =$ sonlu bir sayı ise $\vec{a} \neq \vec{0}$ ve $\vec{a^*} \neq \vec{0}$ dır ve $\vec{\tilde{A}}$ dual vektörüne has dual vektör veya vida denir.

ii. $k = 0 \Rightarrow \vec{\tilde{A}} = a\,\vec{\tilde{U}}$ dır. Bu halde $\vec{\tilde{A}}$ dual vektörü $\vec{\tilde{U}}$ ekseni ile çakışık bir doğru gösterir.

iii. $k = \infty \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ dır.

$$k = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a^*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|^2} = \frac{\left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{a^*} \right\| \cos\theta}{\left\| \vec{a} \right\|^2} = \frac{\left\| \vec{a^*} \right\| \cos\theta}{\left\| \vec{a} \right\|}$$

dır.

$$k = \frac{\left\| \vec{a^*} \right\| \cos\theta}{\left\| \vec{a} \right\|}$$

ifadesinde $k = \infty$ olması için

$$\left\| \vec{a} \right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

olmalıdır. Bu halde $\vec{\vec{A}}$ dual vektörü bir sırf dual vektördür. Yani

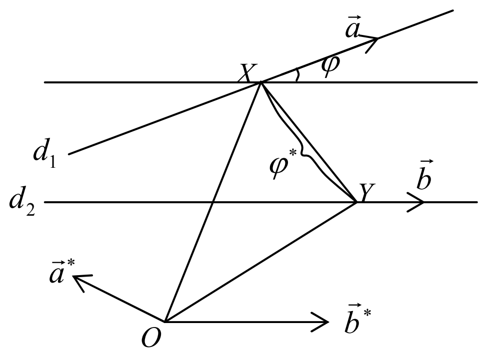
$$\vec{\vec{A}} = \left(\vec{0}, \overrightarrow{a^*} \right)$$

şeklindedir. Bu tip dual vektörlere çift (couple) dual vektör denir. Çift dual vektörler için $\overrightarrow{a^*}$ başlangıç noktasının seçilişine bağlı değildir.

Tanım 2.36. $\vec{\vec{A}}$ ve $\vec{\vec{B}}$ iki birim dual vektör ve bu birim dual vektörlere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen yönlü doğrular, sırasıyla, d_1 ve d_2 olsunlar. d_1 doğrusunun yönü $\vec{a}$, yeri $\overrightarrow{a^*}$, d_2 doğrusunun yönü $\vec{b}$, yeri de $\overrightarrow{b^*}$ ile belirlidir. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı φ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\vec{A}}, \vec{\vec{B}} \right\rangle &= \cos \Phi = \cos\left(\varphi + \varepsilon \varphi^*\right) \\ &= \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi, \qquad \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dir (Şekil 1.1).



Şekil 1.1. Dual Açı

Burada $\widetilde{\Phi}=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ dual sayısına $\overrightarrow{\widetilde{A}}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{B}}$ birim vektörleri arasındaki dual açı denir[20].

$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{\widetilde{A}} \right\| \left\| \overrightarrow{\widetilde{B}} \right\| \cos\Phi$ formülünden yararlanarak $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruların birbirine göre durumları incelenebilir.

i. $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}} \right\rangle =$ sırf dual $\Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\neq 0$ ise $\overrightarrow{\widetilde{A}}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{B}}$ birim vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu fakat aykırıdırlar.

ii. $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}} \right\rangle =$ sırf reel $\Rightarrow \varphi^* = 0$ olsun. Bu halde yönlü iki doğru kesişir ve $\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \vec{b} \right\rangle = 0$ ifadesi bu iki doğrunun kesişme koşuludur.

iii. $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}} \right\rangle = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* = 0$ ise yönlü doğrular birbirini dik olarak keser.

iv. $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}} \right\rangle = (1,0) \Rightarrow \varphi = 0$ ise yönlü doğrular paralel ve aynı yönlüdürler. Eğer $\varphi^* = 0$ ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.

v. $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}} \right\rangle = -(1,0) \Rightarrow \varphi = \pi$ ise yönlü doğrular paralel ve zıt yönlüdürler. Eğer $\varphi^* = 0$ ise doğrular çakışıktır.

Tanım 2.37. $\overrightarrow{\widetilde{A}}$, $\overrightarrow{\widetilde{B}} \in \mathbb{D}$ -Modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\wedge : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$
$$\overrightarrow{\widetilde{A}} \wedge \overrightarrow{\widetilde{B}} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon\left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{b^*} + \overrightarrow{a^*} \wedge \vec{b} \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.38. $\overrightarrow{\widetilde{A}}$, $\overrightarrow{\widetilde{B}} \in \mathbb{D}$ -Modül için

$$\overrightarrow{\overrightarrow{A}} \wedge \overrightarrow{\overrightarrow{B}} = \left\| \overrightarrow{\overrightarrow{A}} \right\| \left\| \overrightarrow{\overrightarrow{B}} \right\| \sin \Phi \overrightarrow{\overrightarrow{N}}$$

dir[20].

Tanım 2.39. $\overrightarrow{\overrightarrow{A}},\ \overrightarrow{\overrightarrow{B}},\ \overrightarrow{\overrightarrow{C}} \in \mathbb{D}$ -Modül ve $\widetilde{\Lambda_i} = \lambda_i + \varepsilon\lambda_i^* \in \mathbb{D},\quad 1 \le i \le 3,$ olmak üzere

$$\widetilde{\Lambda_1}\, \overrightarrow{\overrightarrow{A}} + \widetilde{\Lambda_2}\, \overrightarrow{\overrightarrow{B}} + \widetilde{\Lambda_3}\, \overrightarrow{\overrightarrow{C}} = \vec{0}$$

eşitliği her $\widetilde{\Lambda_i} = 0$ için sağlanıyorsa $\overrightarrow{\overrightarrow{A}},\ \overrightarrow{\overrightarrow{B}},\ \overrightarrow{\overrightarrow{C}}$ has dual vektörleri lineer bağımsızdır denir.

Tanım 2.40. $\overrightarrow{\overrightarrow{A}},\ \overrightarrow{\overrightarrow{B}},\ \overrightarrow{\overrightarrow{C}} \in \mathbb{D}$ -Modül ve $\widetilde{\Lambda_i} = \lambda_i + \varepsilon\lambda_i^* \in \mathbb{D};\quad \lambda_i \ne 0,\quad 1 \le i \le 3,$ için

$$\widetilde{\Lambda_1}\, \overrightarrow{\overrightarrow{A}} + \widetilde{\Lambda_2}\, \overrightarrow{\overrightarrow{B}} + \widetilde{\Lambda_3}\, \overrightarrow{\overrightarrow{C}} = \vec{0}$$

eşitliği en az bir $\widetilde{\Lambda_i} \ne 0$ için sağlanıyorsa, $\overrightarrow{\overrightarrow{A}},\ \overrightarrow{\overrightarrow{B}},\ \overrightarrow{\overrightarrow{C}}$ has dual vektörleri lineer bağımlıdır denir.

Tanım 2.41. $\mathbb{D}$ -Modül'de birim dual $\overrightarrow{\overrightarrow{X}} = \vec{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$ vektörüne $\mathbb{R}^3$ de bir yönlü doğru karşılık gelir. $\vec{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$ birim reel vektörü $\overrightarrow{\overrightarrow{X}}$ doğrusunun yönünü ve $\overrightarrow{x^*} = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ de bir O noktasına göre $\vec{x}$ in vektörel momentini ifade etsin.

Bu durumda $\overrightarrow{\overrightarrow{X}} = \vec{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$ birim dual vektörü

i. $$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0 \end{cases}$$

koşulunu sağlar. Eğer bu koşuldan başka, altı Plücker doğru koordinatları arasında

ii. $F\left(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = 0$

bağıntısı da sağlanırsa bu halde $\vec{\tilde{X}}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı üç olur. Böylece, $\mathbb{R}^3$ de üç bağımsız parametreye bağlı $\left(\infty^6\right)$ sayıda $\vec{\tilde{X}}$ doğrularının cümlesine ışın kompleksi adı verilir.

Tanım 2.42. $\vec{\tilde{A}}$ bir has dual vektör olmak üzere

$$\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \vec{x} \right\rangle = 0$$

denklemini sağlayan $\vec{\tilde{X}} = \vec{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$ doğrularının cümlesine bir lineer ışın kompleksi denir.

BÖLÜM 3. ÖKLİD UZAYINDA BiR-PARAMETRELİ HAREKETLER VE REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde küre üzerindeki 1-parametreli hareketler, regle yüzeyler ve regle yüzeyin reel integral invaryantları verilmiştir.

3.1. Küre Üzerinde Bir Hareketin Gösterilmesi

Aynı merkezli ve birbirine göre hareketli H ve H' küre yüzeylerini veya bunlara bağlı aynı O tepe noktasına sahip birbirine göre hareket eden ortonormal çatıları, sırasıyla,

$$\left\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\} \text{ ve } \left\{O; \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right\}$$

$$\left\langle \overrightarrow{e_i'}, \overrightarrow{e_j'} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j} \right\rangle = \delta_{ij}, \qquad 1 \le i, j \le 3,$$

ile gösterelim. Bu ortonormal çatılar H hareketli ve H' sabit kürelerinin temsilcileri olarak kabul edilecektir. Her iki eksen sistemi, ortak O başlangıç noktasına sahip ve aynı yönde yönlendirildiklerinden dolayı O noktası etrafındaki dönmelerle, sistemlerden birinden diğerine geçilebilir.

Eğer $\overrightarrow{e_i}$ ve $\overrightarrow{e_i'}$ vektörleri t reel parametresinin sürekli türevlenebilir fonksiyonları iseler, H uzayının H' uzayına göre 1-parametreli hareketi vardır. Bu hareketi kısaca B_1 ile gösterelim.

$$E = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{bmatrix}, \qquad E' = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e'_1} \\ \overrightarrow{e'_2} \\ \overrightarrow{e'_3} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$E = AE' \tag{3.1}$$

yazılabilir. $A \in SO(3)$ olduğundan

$$A^T A = AA^T = I_3 \tag{3.2}$$

dir.

(3.1) eşitliğinden t reel parametresine göre diferensiyel alınırsa

$$dE = dA\,E' + A\,dE' \tag{3.3}$$

olur. Burada $E' = A^T E$ ve $dE' = 0$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$dE = dA\,A^T E \tag{3.4}$$

elde edilir. $dA\,A^T = \Omega$ denilirse

$$dE = \Omega\,E \tag{3.5}$$

bulunur. Bu eşitlikte, Ω bir anti-simetrik matristir. (3.2) eşitliğinden

$$dA\,A^T + A\,dA^T = 0$$

veya

$$dA\,A^T + \left(dA\,A^T\right)^T = 0 \tag{3.6}$$

yazılabileceğinden

$$\Omega^T = -\Omega \tag{3.7}$$

elde edilir. Ω matrisinin bileşenleri t parametresinin 1-formlarıdır.

Eğer

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

denilirse, (3.7) den $i = j$ için $\omega_{ii} = -\omega_{ii}$ yani $\omega_{ii} = 0$ ve $i \neq j$ için $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ $\left(1 \leq i, j \leq 3\right)$ olduğundan

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu durumda (3.5) eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} d\vec{e_1} \\ d\vec{e_2} \\ d\vec{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

bulunur. Ω matrisinin sıfırdan farklı bileşenlerinden oluşturulan vektör

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \vec{e_i} \tag{3.11}$$

olmak üzere (3.5) eşitliğinden

$$d\vec{e_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_i} \tag{3.12}$$

yazılabilir. $\vec{\omega}$ vektörüne Pfaff vektörü (ani dönme vektörü) denir. $\vec{\omega}$ vektörünün doğrultusu hareketli uzayın pol noktalarından geçer. Dolayısıyla hareketli uzaydaki sabit her nokta, dt zaman aralığında $\vec{\omega}$ ani dönme vektörü etrafında $\omega = \left\| \vec{\omega} \right\|$ sonsuz küçük dönme açısı ile dönme hareketi yapar.

Tanım 3.1. H/H' 1-parametreli hareketinin her t anında, küre üzerinde sürüklenme hızları sıfır olan bir çift P ve onun karşı noktası P' vardır. Bu noktalara, sırasıyla, hareketli ve sabit pol noktaları denir. Yani bu noktalar, t anında her iki küre yüzeyi üzerinde sabit kalırlar.

Eğrinin çizilebilmesi için gerekli olan H/H' 1-parametreli hareketi boyunca P ve P' noktalarının ait oldukları küreler üzerindeki geometrik yerlerine, sırası ile, hareketli pol eğrisi ve sabit pol eğrisi adları verilir. Bu eğriler (P) ve (P') ile gösterilir. H/H' hareketinin kapalı olması halinde (P) ve (P') pol eğrileri de kapalı olurlar.

Tanım 3.2. H/H' 1-parametreli küresel hareketinde $\vec{\omega}$ ani Pfaff vektörü olmak üzere,

$$\vec{S} = \oint \vec{\omega} \tag{3.13}$$

ile tanımlanan $\vec{S}$ vektörüne hareketin Steiner vektörü denir.

3.2. Regle Yüzeyler ve Regle Yüzeyin Reel İntegral İnvaryantları

Tanım 3.3. $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında, $\mathbb{E}^3$ ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir.

Tanım 3.4. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir.

Tanım 3.5. Bir $\vec{y}(t,\mu)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

Tanım 3.6. Bir $\vec{y}(t,\mu)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına striksiyon(boğaz veya merkez) noktası denir.

Tanım 3.7. Bir $\vec{y}(t,\mu)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin striksiyon(boğaz) eğrisi denir.

Tanım 3.8. $\vec{y}(t,\mu)=\vec{r}(t)+\mu\vec{e_1}(t), \qquad t,\mu\in\mathbb{R}$ regle yüzeyi $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$$\vec{y}(t+2\pi,\mu)=\vec{y}(t,\mu)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Bir diğer ifade ile bir peryod sonra her anadoğru kendisi üzerine gelir.

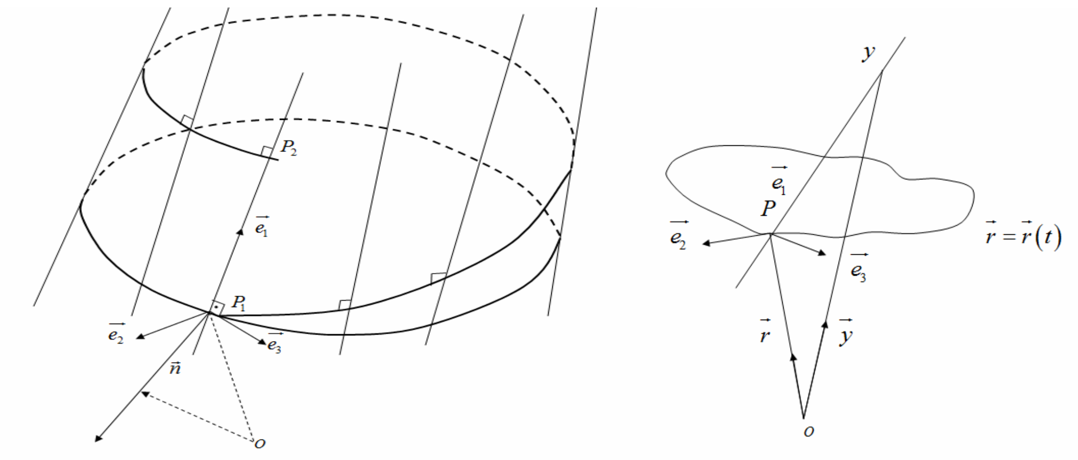
Tanım 3.9. Bir H/H' 1-parametreli kapalı uzay hareketinde, hareketli uzayı temsil eden $\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ üçayaklısının bir,

$$\vec{r}=\vec{r}(t), \qquad \vec{r}(t+2\pi)=\vec{r}(t), \qquad t\in\mathbb{R} \tag{3.14}$$

kapalı eğrisi üzerinde hareket ettiğini varsayarak, H' uzayının tespit edilmiş bir doğrusu, H' uzayında bir kapalı regle yüzey çizer. Örneğin, e_1-doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzey üzerindeki bir noktanın yer vektörünü $\vec{y}$ ile gösterirsek, bu yüzeyin denklemini,

$$\begin{aligned} &\vec{y}(t,\mu)=\vec{r}(t)+\mu\vec{e_1}(t), \qquad t,\mu\in\mathbb{R} \\ &\vec{y}(t+2\pi,\mu)=\vec{y}(t,\mu) \\ &\left\|\vec{e_1}\right\|=1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

ile verebiliriz (Şekil 3.1). $\vec{e_1}$ vektörüne bu kapalı regle yüzeyin üreteci denir.



Şekil 3.1. (e_1) - Kapalı Regle Yüzeyi

Şimdi $\vec{y}(t,\mu)=\vec{r}(t)+\mu\vec{e_1}(t), \quad t,\mu\in\mathbb{R}$ regle yüzeyi için e_1-doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzeyi (e_1) ile gösterirsek, (e_1)-kapalı regle yüzeyinin bir P_1 noktasından geçen ortogonal yörüngesinin diferensiyel denklemi;

$$\left\langle d\vec{y},\vec{e_1}\right\rangle=0, \qquad \left\|\vec{e_1}\right\|=1 \tag{3.16}$$

dır. Böylece (3.15) den

$$d\mu=-\left\langle d\vec{r},\vec{e_1}\right\rangle \tag{3.17}$$

bulunur. Bu formülün regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa,

$$\oint \left\langle d\vec{r}, \vec{e_1} \right\rangle = -\oint d\mu \tag{3.18}$$

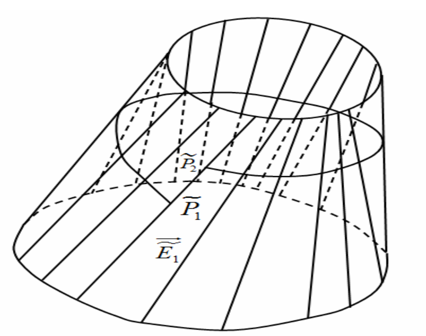
elde edilir.

Tanım 3.10. Bir $\vec{y}(t,\mu) = \vec{r}(t) + \mu \vec{e_1}(t)$ kapalı regle yüzeyi için,

$$L_{e_1} = \oint d\mu = -\oint \left\langle d\vec{r}, \vec{e_1} \right\rangle \tag{3.19}$$

büyüklüğüne bu kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu denir.

Bu tanım e_1-anadoğrusunun, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ kapalı eğrisine dayanarak kapalı regle yüzeyi çizdiğinde, kendi doğrultusunda $L_{e_1} = \oint d\mu$ kadar ilerleyerek ilk konumu ile çakıştığını gösterir. Bu nedenle, e_1-anadoğrusunun bir P_1 noktasından başlayan ortogonal yörünge, bir periyot sonra aynı e_1-anadoğrusunu P_1 den farklı bir P_2 noktasında keser (Şekil 3.2). Ortogonal yörüngeler, çıkış noktasından bağımsız olduğundan, L_{e_1} açılım uzunluğu kapalı regle yüzeyler için bir integral invaryanttır.



Şekil 3.2. (e_1)- Kapalı Regle Yüzeyinin Açılım Uzunluğu

Eğer kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngelerinin bir tam devri göz önüne alınırsa açılım uzunluğu hiçbir zaman regle yüzeyin striksiyon çizgisinin uzunluğunu aşamayacağı görülür. Fakat eşitlik hali mümkündür. Eğer regle yüzeyi kapalı ve açılabilir farzeder; dayanak eğrisini de striksiyon çizgisi olarak alırsak, o zaman, striksiyon çizgisinin yay uzunluğu, açılım uzunluğuna eşittir. Özel olarak, açılabilir kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu sıfır ise striksiyon çizgisi bir nokta ve dolayısıyla regle yüzey bir koni olur.

Şimdi (e_1)-kapalı regle yüzeyi için, ikinci bir integral invaryantı olan açılım açısı tanımlanacaktır.

(e_2, e_3)-düzleminde bir birim vektör,

$$\vec{n} = \cos\phi\overrightarrow{e_2} + \sin\phi\overrightarrow{e_3} \tag{3.20}$$

ve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_2} &= \overrightarrow{e_2}'\cos\phi - \overrightarrow{e_3}'\sin\phi \\ \overrightarrow{e_3} &= \overrightarrow{e_2}'\sin\phi + \overrightarrow{e_3}'\cos\phi, \qquad \phi = \phi(t), \end{aligned} \tag{3.21}$$

olsun. $\overrightarrow{e_2}'$ ve $\overrightarrow{e_3}'$ sabit sistem olduğundan t ye göre türev alınırsa $d\overrightarrow{e_2}' = d\overrightarrow{e_3}' = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{e_2} &= \left(-\overrightarrow{e_2}'\sin\phi - \overrightarrow{e_3}'\cos\phi\right)d\phi \\ d\overrightarrow{e_3} &= \left(\ \overrightarrow{e_2}'\cos\phi - \overrightarrow{e_3}'\sin\phi\right)d\phi \end{aligned} \tag{3.22}$$

bulunur. (3.21) göz önüne alınır ve bu denklemden $d\phi$ çekilirse

$$
\begin{aligned}
-d\phi &= \left\langle d\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\rangle = -\left\langle d\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}\right\rangle \\
d\phi &= -\left\langle d\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\rangle = \left\langle d\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

olur. $\vec{y}(t,\mu)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca integrali alınırsa açılım açısı elde edilir.

Tanım 3.11. Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü $\overrightarrow{e_1}$ olan bir $\vec{r}(t,\mu)$ regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrultunun bir peryod sonra ilk konumu ile yaptığı açıya regle yüzeyin açılım açısı denir ve

$$
\lambda_{e_1} = \oint d\phi = -\oint \left\langle d\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\rangle = \oint \left\langle d\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}\right\rangle \tag{3.24}
$$

ile verilir.

Tanım 3.12. Üç boyutlu Öklid uzayı E^3 de kapalı bir $\vec{x} = \vec{x}(t)$ eğrisi olsun.

$$
\overrightarrow{a_x} = \oint \vec{x} \wedge d\vec{x} \tag{3.25}
$$

vektörüne hareketin alan vektörü denir.

Buradaki integral kapalı uzay eğrisi üzerinden alınmaktadır.

Teorem 3.13. E^3 de bir X noktasının çizdiği kapalı uzay eğrisinin bir e birim vektörü doğrultusunda bir $\wp$ düzlemi üzerine dik izdüşümü olan eğrinin sınırladığı alan

$$
2\sigma_{xe} = \left\langle \overrightarrow{a_x}, \vec{e}\right\rangle \tag{3.26}
$$

dir[4].

BÖLÜM 4. DUAL ÖKLİD UZAYINDA BİR-PARAMETRELİ HAREKETLER VE DUAL REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde Dual küre üzerindeki 1-parametreli hareketler, dual regle yüzeyler ve regle yüzeyin dual integral invaryantları verilmiştir.

4.1. Dual Küre Üzerindeki Bir Hareketin Gösterilmesi

$\mathbb{R}^3$ de sabit ve hareketli sistemler, sırasıyla, H' ve H olsun. H', H sistemlerinin ortonormal koordinat sistemleri de, sırasıyla,

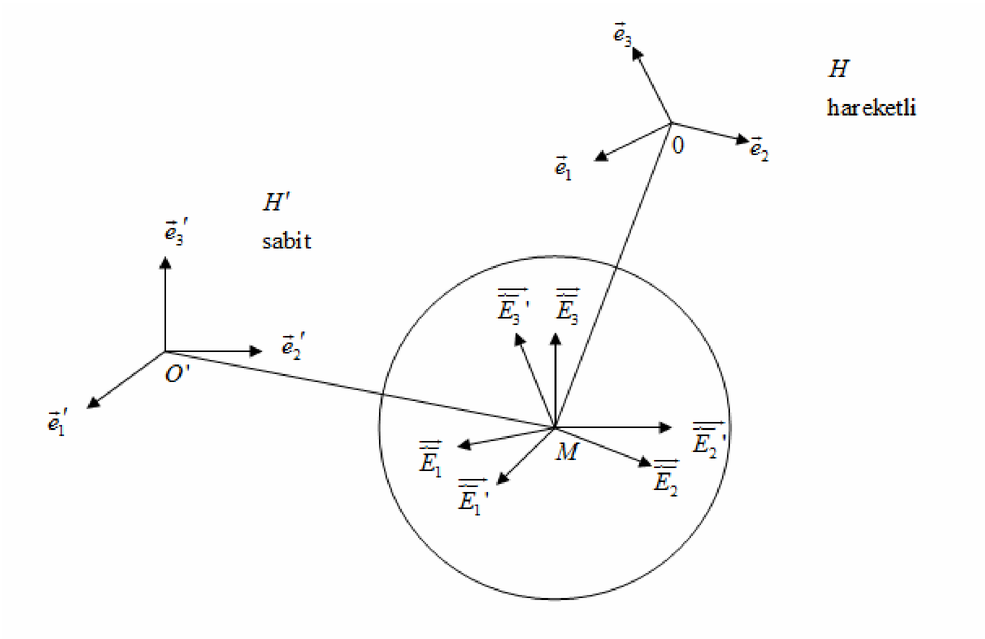
$$\left\{O';\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right\} \qquad \text{ve} \qquad \left\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right\}$$

$$\left\langle\overrightarrow{e_i'},\overrightarrow{e_j'}\right\rangle=\left\langle\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j}\right\rangle=\delta_{ij}, \qquad 1\leq i,j\leq 3,$$

olsunlar. H' ve H aynı şekilde yönlendirilmiş olsun. Yani bir has ortogonal dönüşümle birinden diğerine geçilebilsin.

Teorem 2.33 (E.Study) den $\overrightarrow{e_i'}$, $\overrightarrow{e_i}$, $(1\leq i\leq 3)$, eksenlerine $\mathbb{D}$-Modülde, sırasıyla, aynı $\widetilde{M}$ merkezli K ve K' birim dual kürelerinin dual noktaları karşılık geleceğinden H/H' hareketi K/K' dual küresel hareket veya dual dönme hareketi olarak incelenebilir. Bu birim dual kürelere sıkı sıkıya bağlı ortonormal baz sistemleri de, sırasıyla,

$$\left\{\widetilde{M};\overrightarrow{\widetilde{E_1}'},\overrightarrow{\widetilde{E_2}'},\overrightarrow{\widetilde{E_3}'}\right\}, \qquad \left\{\widetilde{M};\overrightarrow{\widetilde{E_1}},\overrightarrow{\widetilde{E_2}},\overrightarrow{\widetilde{E_3}}\right\}$$



Şekil 4.1. Dual Uzayda Ortonormal Sistemler

Burada,

$$\overrightarrow{\widetilde{E}_i}' = \overrightarrow{e_i}' + \varepsilon \overrightarrow{e_i'^*}, \qquad \overrightarrow{\widetilde{E}_i} = \overrightarrow{e_i} + \varepsilon \overrightarrow{e_i^*}, \qquad 1 \le i \le 3,$$

ve

$$\overrightarrow{e_i'^*} = \overrightarrow{\widetilde{M}O'} \wedge \overrightarrow{e_i}', \qquad \overrightarrow{e_i^*} = \overrightarrow{\widetilde{M}O} \wedge \overrightarrow{e_i},$$

dir. Bu baz sistemleri de aynı yönlü olurlar. Yani bir has dual ortogonal dönüşümle birinden diğerine geçilebilir. Elbette ki bu dönüşümler, $\widetilde{M}$ etrafındaki dual dönmelerdir.

$$\widetilde{E} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{E}' = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}_1}' \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_2}' \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_3}' \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\widetilde{E} = \widetilde{A}\,\widetilde{E}' \tag{4.1}$$

yazılabilir.

$\widetilde{A}$ has ortogonal dual matrisinin elemanları $\tilde{t} = t + \varepsilon t^*$ dual parametresinin yeteri kadar türetilebilen fonksiyonlarıdır. Burada aksi söylenmedikçe $t^* = 0$ alınacaktır. Böylece bir parametreli hareketler söz konusudur demek istiyoruz.

$\widetilde{A}$ has dual ortogonal matris olduğundan

$$\widetilde{A}^T \widetilde{A} = \widetilde{A}\widetilde{A}^T = I_3 \tag{4.2}$$

dır. (4.1) eşitliğinden t reel parametresine göre diferensiyel alınırsa

$$d\widetilde{E} = d\widetilde{A}\,\widetilde{E}' + \widetilde{A}\underbrace{d\widetilde{E}'}_{0} \tag{4.3}$$

olur. Burada $\widetilde{E}' = \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{E}$ ve $d\,\widetilde{E}' = 0$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$d\widetilde{E} = d\widetilde{A}\,\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{E} \tag{4.4}$$

elde edilir. $d\widetilde{A}\widetilde{A}^T = \widetilde{\Omega}$ denilirse

$$d\widetilde{E} = \widetilde{\Omega}\,\widetilde{E} \tag{4.5}$$

bulunur. Bu eşitlikte, $\widetilde{\Omega}$ bir anti-simetrik matristir. (4.2) eşitliğinden

$$d\widetilde{A}\widetilde{A}^T + \widetilde{A}\,d\widetilde{A}^T = 0$$

veya

$$d\widetilde{A}\widetilde{A}^T + \left(d\widetilde{A}\widetilde{A}^T\right)^T = 0 \tag{4.6}$$

yazılabileceğinden

$$\widetilde{\Omega}^T = -\widetilde{\Omega} \tag{4.7}$$

elde edilir. $\widetilde{\Omega}$ matrisinin bileşenleri t parametresinin 1-formlarıdır.

Eğer

$$\widetilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \widetilde{\Omega}_{11} & \widetilde{\Omega}_{12} & \widetilde{\Omega}_{13} \\ \widetilde{\Omega}_{21} & \widetilde{\Omega}_{22} & \widetilde{\Omega}_{23} \\ \widetilde{\Omega}_{31} & \widetilde{\Omega}_{32} & \widetilde{\Omega}_{33} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

denilirse, (4.7) den $i = j$ için $\widetilde{\Omega}_{ii} = -\widetilde{\Omega}_{ii}$, yani $\widetilde{\Omega}_{ii} = 0$ ve $i \neq j$ için $\widetilde{\Omega}_{ij} = -\widetilde{\Omega}_{ji}$, $1 \leq i, j \leq 3$ olduğundan Ω matrisi için

$$\widetilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_{12} & -\widetilde{\Omega}_{31} \\ -\widetilde{\Omega}_{12} & 0 & \widetilde{\Omega}_{23} \\ \widetilde{\Omega}_{31} & -\widetilde{\Omega}_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

elde edilir. Bu durumda (4.5) eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} d\widetilde{E}_1 \\ d\widetilde{E}_2 \\ d\widetilde{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_{12} & -\widetilde{\Omega}_{31} \\ -\widetilde{\Omega}_{12} & 0 & \widetilde{\Omega}_{23} \\ \widetilde{\Omega}_{31} & -\widetilde{\Omega}_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{E}_1 \\ \widetilde{E}_2 \\ \widetilde{E}_3 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

bulunur. Ω matrisinin sıfırdan farklı bileşenlerinden oluşturulan vektör

$$\overrightarrow{\widetilde{\Psi}} = \sum_{i=1}^{3} \widetilde{\Psi}_i \overrightarrow{\widetilde{E}_i} = \widetilde{\Omega}_{23} \overrightarrow{\widetilde{E}_1} + \widetilde{\Omega}_{31} \overrightarrow{\widetilde{E}_2} + \widetilde{\Omega}_{12} \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \tag{4.11}$$

olmak üzere (4.5) eşitliğinden

$$d_f \overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{\Psi}} \wedge \overrightarrow{\widetilde{X}} \tag{4.12}$$

yazılabilir.

$\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}$ dual vektörüne Pfaff vektörü (ani dönme vektörü) denir. $\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}$ dual vektörünün doğrultusu hareketli uzayın pol noktalarından geçer. Dolayısıyla hareketli uzaydaki sabit her nokta, dt zaman aralığında $\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}$ ani dönme vektörü etrafında $\psi = \left\| \overrightarrow{\widetilde{\Psi}} \right\|$ sonsuz küçük dönme açısı ile dönme hareketi yapar. $\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}$ nün $\overrightarrow{\psi}$ reel ve $\overrightarrow{\psi^*}$ dual kısımları K/K' dual dönme hareketine karşılık gelen H/H' uzay hareketinin, sırasıyla, ani dönme ve ani kayma Pfaff vektörlerine karşılık gelirler. Hareketin, sırf dönme ve sırf kayma olmaması için aksi söylenmedikçe $\overrightarrow{\psi} \neq \vec{0}$ ve $\overrightarrow{\psi^*} \neq \vec{0}$ alınacaktır.

Tanım 4.1. K/K' 1-parametreli dual küresel hareketinin her t anında, dual küre üzerinde sürüklenme hızları sıfır olan bir çift $\widetilde{P}$ ve onun karşı noktası $\widetilde{P'}$ vardır. Bu noktalara, sırasıyla, hareketli ve sabit dual pol noktaları denir. Yani bu dual noktalar, t anında her iki dual küre yüzeyi üzerinde sabit kalırlar.

Eğrinin çizilebilmesi için gerekli olan K/K' 1-parametreli hareketi boyunca $\widetilde{P}$ ve $\widetilde{P'}$ dual noktalarının ait oldukları dual küreler üzerindeki geometrik yerlerine, sırası ile, hareketli dual pol eğrisi ve sabit dual pol eğrisi adları verilir. Bu eğriler $\left(\widetilde{P}\right)$ ve $\left(\widetilde{P'}\right)$ ile gösterilir.

K/K' 1-parametreli dual küresel hareketinin kapalı olması halinde $\left(\widetilde{P}\right)$ ve $\left(\widetilde{P'}\right)$ pol eğrileri de kapalı olurlar.

Tanım 4.2. K/K' 1-parametreli dual küresel hareketinde $\vec{\widetilde{\Psi}}$ ani dual Pfaff vektörü olmak üzere,

$$\vec{\widetilde{S}} = \vec{S} + \varepsilon \overrightarrow{S^*} = \oint \vec{\widetilde{\Psi}} \tag{4.13}$$

ile tanımlanan $\vec{\widetilde{S}}$ vektörüne hareketin dual Steiner vektörü denir.

4.2. Dual Regle Yüzeyler

$\vec{\widetilde{X}} = \vec{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*} = \widetilde{X}\left(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ doğrusunun $\left(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ normlanmış homojen olmayan altı Plücker doğru koordinatları arasında

1. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0 \end{cases}$

bağıntılarından başka

2. $\widetilde{F}\left(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = 0$
3. $\widetilde{\Phi}\left(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = 0$
4. $\widetilde{\Psi}\left(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = 0$

bağıntıları da varsa $\widetilde{X}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı bir tanedir.

Tanım 4.3. E.Study tekabülüne uyan ve bağımsız bir parametreye bağlı $\left(\infty^1\right)$ sayısındaki $\vec{\widetilde{X}}$ doğrularının cümlesine regle yüzey ve ışın yüzeyi denir.

$\vec{\widetilde{A}}, \vec{\widetilde{B}}, \vec{\widetilde{C}}$ belli has dual vektörler olmak üzere

$$\widetilde{F} \ldots \left\langle \vec{a}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \vec{x} \right\rangle = 0$$

$$\widetilde{\Phi} \ldots \left\langle \vec{b}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{b^*}, \vec{x} \right\rangle = 0$$

$$\widetilde{\Psi} \ldots \left\langle \vec{c}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{c^*}, \vec{x} \right\rangle = 0$$

şeklinde verilebilir. O zaman bir regle yüzey $\widetilde{F} = 0$, $\widetilde{\Phi} = 0$ ve $\widetilde{\Psi} = 0$ ışın komplekslerinin üçünde de ortak olan $\left(\infty^1\right)$ doğrunun cümlesi olarak düşünülebilir.

Bir regle yüzey, bir, t parametresine bağlı $\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$ birim dual vektörel fonksiyon olmak üzere

$$\overrightarrow{\widetilde{X}} = \vec{x}(t) + \varepsilon \overrightarrow{x^*}(t)$$

şeklinde de yazılabilir.

$\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$ fonksiyonunun t ye göre istenildiği kadar türetilebildiği kabul ediliyor.

$$\overrightarrow{\widetilde{X}} = \vec{x}(t) + \varepsilon \overrightarrow{x^*}(t)$$

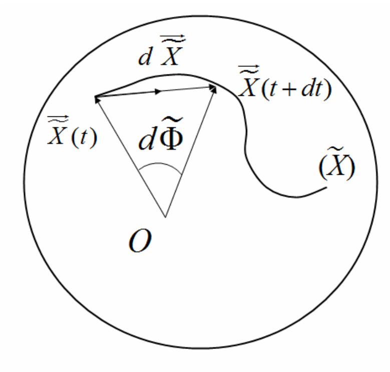
birim dual vektörüne

$$\left\| \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\widetilde{OX}} \right\| = (1,0)$$

birim dual küresi üzerinde bir dual $\widetilde{X}$ noktası karşılık gelir. Biliniyor ki bu noktaya da $\mathbb{R}^3$ de bir $\overrightarrow{\widetilde{X}}$ doğrusu karşılık gelir. t parametresi değiştikçe

$$\overrightarrow{\widetilde{OX}} = \overrightarrow{\widetilde{X}} = \vec{x}(t) + \varepsilon \overrightarrow{x^*}(t)$$

birim dual vektörü, birim dual küre üzerinde bir $\left(\widetilde{X}\right)$ dual eğrisi çizer. Bu eğriye de $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey karşılık gelir.



Şekil 4.2. Birim Dual Küre Üzerinde Dual Eğri

$\left(\widetilde{X}\right)$ dual eğrisine regle yüzeyin dual küresel resmi denir. Birim dual küre üzerinde $\vec{\widetilde{X}} = \vec{\widetilde{X}}(t)$ dual eğrisinin

$$d\widetilde{\Phi} = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$$

dual yay elementi için

$$d\widetilde{\Phi}^2 = \left\langle d\vec{\widetilde{X}}, d\vec{\widetilde{X}} \right\rangle = \left\langle \vec{\widetilde{X}}, \vec{\widetilde{X}} \right\rangle dt^2$$

yazılabilir. Tanım 2.10 den de yukarıdaki ifade için

$$d\varphi^2 = \left\langle d\vec{x}, d\vec{x} \right\rangle \qquad \text{ve} \qquad d\varphi\, d\varphi^* = \left\langle d\vec{x}, d\vec{x^*} \right\rangle$$

elde edilir. $d\widetilde{\Phi}$ dual büyüklüğü bilindiği gibi $\vec{\widetilde{X}}(t)$ ve $\vec{\widetilde{X}}(t+dt)$ komşu birim dual vektörler arasındaki dual açı, yani bu iki birim dual vektörün birim dual küre üzerindeki uç noktalarının dual küresel uzaklığıdır. $d\widetilde{\Phi}$ nin $d\varphi$ reel ve $d\varphi^*$ dual kısımlarına, $\overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$ ve $\overrightarrow{\widetilde{X}}(t+dt)$ birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki açı ile bu komşu iki anadoğru arasındaki en kısa uzaklık karşılık gelir.

$$\left\langle d\overrightarrow{\widetilde{X}}, d\overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle = \left\langle d\vec{x}, d\vec{x} \right\rangle + 2\varepsilon \left\langle d\vec{x}, d\overrightarrow{x^*} \right\rangle$$

dual ifadesi, iç çarpım olması nedeni ile koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Bu nedenle

$$\left\langle d\vec{x}, d\vec{x} \right\rangle \qquad \text{ve} \qquad \left\langle d\vec{x}, d\overrightarrow{x^*} \right\rangle$$

reel büyüklükleri de koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Dolayısıyla onların oranı regle yüzeyin en basit (yani en küçük mertebeden) diferensiyel değişmezi olur.

Tanım 4.4.

$$\frac{1}{d} = \frac{\left\langle d\vec{x}, d\overrightarrow{x^*} \right\rangle}{\left\langle d\vec{x}, d\vec{x} \right\rangle} = \frac{d\varphi \, d\varphi^*}{d\varphi \, d\varphi} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi}$$

ifadesindeki $\frac{1}{d}$ büyüklüğüne regle yüzeyin t parametresine ait olan $\overrightarrow{\widetilde{X}}$ anadoğrusu boyunca dağılma parametresi veya drali denir.

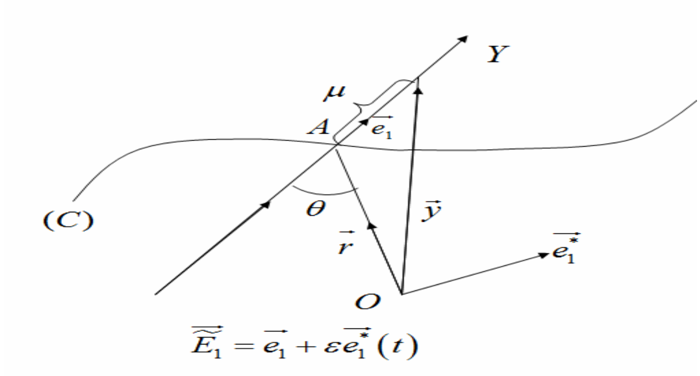
Tanım 4.5. Komşu anadoğruları kesişen regle yüzeylere açılabilir regle yüzeyler (torslar) denir.

Dralin sıfır olması torslar için karakteristiktir. Çünkü dral sıfır ise $d\varphi^* = 0$ dır. Dralin bu tanımı silindir için geçerli değildir. Drali sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu anadoğrular aykırıdır yani komşu iki anadoğru bir düzlem teşkil etmez.

$\overrightarrow{\overrightarrow{X}}(t)$ anadoğrusunun, $\overrightarrow{\overrightarrow{X}}(t+dt)$ komşu anadoğrusundan en kısa uzaklıktaki $\widetilde{X}$ noktasına boğaz noktası veya merkez noktası veya striksiyon noktası denir. Bu noktanın $\widetilde{X}(t)$ geometrik yerine de boğaz çizgisi veya striksiyon çizgisi denir.

Verilen bir regle yüzey üzerinde bütün anadoğruları kesen bir $(\widetilde{C})$ eğrisi yüzeyin bir referans eğrisi olarak alınabilir ve bu eğriye direktris adı verilir.

4.2.1. Regle Yüzeyin Dual Vektörel İfadesi



Şekil 4.3. Dual Regle Yüzey

Dayanak eğrisi $\vec{r} = \vec{r}(t)$ denklemi ile belli olan (C) eğrisi ve anadoğruları $\vec{e_1} = \vec{e_1}(t)$ birim vektörü olan regle yüzeyin denklemi

$$\vec{y}(t,\mu) = \vec{r}(t) + \mu \vec{e_1}(t)$$

dir. Burada (Şekil 4.3) den de görüldüğü gibi

$$\vec{e_1^*} = \vec{r} \wedge \vec{e_1} \qquad \text{ve} \qquad \vec{e_1} \wedge \vec{e_1^*} = \vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1}$$

olduklarından dolayı regle yüzeyin denklemi için

$$\eta = \mu + \left\langle \vec{r}, \vec{e_1} \right\rangle$$

olmak üzere

$$\vec{y}(t,\mu) = \vec{e_1}(t) \wedge \overrightarrow{e_1^*} + \eta \vec{e_1}(t)$$

bulunur.

4.3. Dual Regle Yüzeyin Dual İntegral İnvaryantları

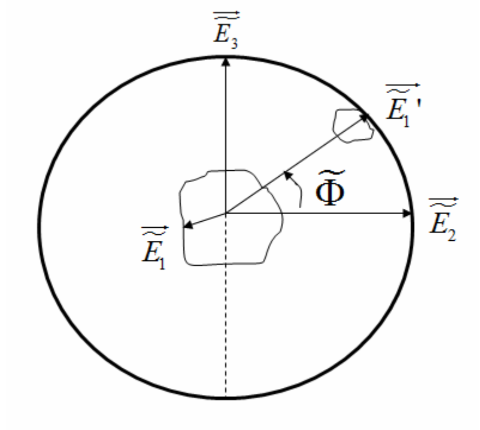
Tanım 4.6. K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareketinde, hareketli sistemin birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzey $\overrightarrow{\widetilde{E_1}} = \overrightarrow{\widetilde{E_1}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ olsun. Ayrıca $\left(\widetilde{E_2}, \widetilde{E_3}\right)$-dual düzleminde $\overrightarrow{\widetilde{E_2}}$ ile $\widetilde{\Phi}(t) = \varphi(t) + \varepsilon\varphi^*(t)$ dual açısını yapan,

$$\overrightarrow{\widetilde{E_1}}' = \cos\widetilde{\Phi}\overrightarrow{\widetilde{E_2}} + \sin\widetilde{\Phi}\overrightarrow{\widetilde{E_3}}$$

birim dual vektörünü ele alalım. Öyleki, K/K' 1-parametreli dual küresel hareketinde, hareketli kürenin $\overrightarrow{\widetilde{E_1}}$ birim dual vektörü $\overrightarrow{\widetilde{E_1}} = \overrightarrow{\widetilde{E_1}}(t)$ kapalı regle yüzeyini çizerken, $\overrightarrow{\widetilde{E_1}}'$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru da bu kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngesi boyunca bir açılabilir yüzey (tors) çizsin. Bu takdirde bir periyotluk kapalı dual küresel harekette $\widetilde{\Phi}(t) = \varphi(t) + \varepsilon\varphi^*(t)$ açısının toplam değişme miktarına $\overrightarrow{\widetilde{E_1}} = \overrightarrow{\widetilde{E_1}}(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı diyelim. O halde bu yüzeyin dual açılım açısı $\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E_1}}$ ile gösterilirse,

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E_1}} = \oint d\widetilde{\Phi} \tag{4.14}$$

dır. Burada integral, $\overrightarrow{\widetilde{E}_1} = \overrightarrow{\widetilde{E}_1}(t)$ kapalı eğrisi üzerinden alınan bir dual eğrisel integraldir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. Dual Dönme Açısı

Tanım 4.6 da verilen $\widetilde{\Phi}$ dual açısının $d\widetilde{\Phi}$ diferensiyel değişimini, hareketin 1-formları cinsinden şöyle hesaplayabiliriz:

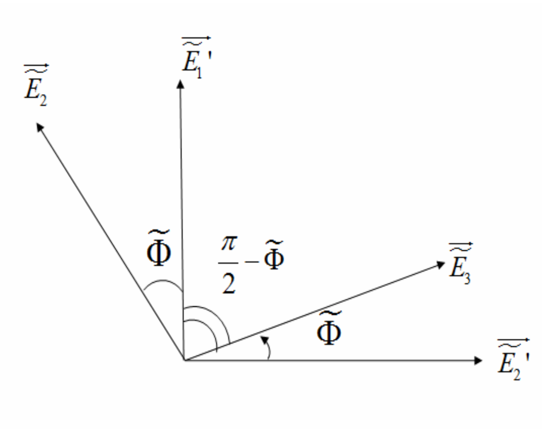
$\overrightarrow{\widetilde{E}_1}'$ birim dual vektörü üzerinde kurulan dual ortonormal,

$$\widetilde{E}' = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}_1}' \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_2}' \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_3}' \end{bmatrix}$$

sistemi ile hareketli,

$$\widetilde{E} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \end{bmatrix}$$

ortonormal sistemlerini göz önüne alalım. $\overrightarrow{\widetilde{E_1}} = \overrightarrow{\widetilde{E_3}}\,'$ kabulü ile, (Şekil 4.5)



Şekil 4.5. Dual Koordinat Sistemleri

$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{E_2}}\,', \overrightarrow{\widetilde{E_3}} \right\rangle = \cos\widetilde{\Phi}$$

$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{E_1}}\,', \overrightarrow{\widetilde{E_3}} \right\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \widetilde{\Phi}\right) = \sin\widetilde{\Phi}$$

$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{E_1}}\,', \overrightarrow{\widetilde{E_2}} \right\rangle = \cos\widetilde{\Phi}$$

$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{E_2}}\,', \overrightarrow{\widetilde{E_2}} \right\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \widetilde{\Phi}\right) = -\sin\widetilde{\Phi}$$

ifadelerinin kullanımıyla bu iki ortogonal sistem arasındaki has dual ortogonal matris,

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\widetilde{\Phi} & -\sin\widetilde{\Phi} & 0 \\ \sin\widetilde{\Phi} & \cos\widetilde{\Phi} & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\widetilde{E}$ ile $\widetilde{E}\,'$ arasında,

$$\widetilde{E} = \widetilde{A}\widetilde{E}\,'$$

dönüşümü vardır. Buradan t parametresine göre diferensiyel alırsak $\widetilde{E}$ sistemine göre hareketin denklemi olarak,

$$d\widetilde{E} = d\widetilde{A}\widetilde{A}^T \widetilde{E}$$

buluruz. $d\widetilde{A}\widetilde{A}^T$ matrisi hesaplanırsa;

$$d\widetilde{A}\widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Phi} & -d\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Phi} & 0 \\ d\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Phi} & -d\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos\widetilde{\Phi} & \sin\widetilde{\Phi} \\ 0 & -\sin\widetilde{\Phi} & \cos\widetilde{\Phi} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d\widetilde{\Phi} \\ 0 & d\widetilde{\Phi} & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Bu sonuç $d\widetilde{E} = d\widetilde{A}\widetilde{A}^T \widetilde{E}$ olarak ifade edilen türev denklemlerinde yerine konursa,

$$d\overrightarrow{\widetilde{E}_2} = -d\widetilde{\Phi}\overrightarrow{\widetilde{E}_3} \qquad \text{ve} \qquad d\overrightarrow{\widetilde{E}_3} = d\widetilde{\Phi}\overrightarrow{\widetilde{E}_2}$$

veya

$$d\widetilde{\Phi} = -\left\langle d\overrightarrow{\widetilde{E}_2}, \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\widetilde{E}_2}, d\overrightarrow{\widetilde{E}_3} \right\rangle \tag{4.15}$$

bulunur. (4.10) türev denkleminde $d\overrightarrow{\widetilde{E}_2}$ nin değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d\widetilde{\Phi} &= -\left\langle \widetilde{\Omega}_{21}\overrightarrow{\widetilde{E}_1} + \widetilde{\Omega}_{23}\overrightarrow{\widetilde{E}_3}, \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \right\rangle \\ &= -\widetilde{\Omega}_{23} \end{aligned}$$

bulunmuş olur.

Teorem 4.7. 1-parametreli K/K' birim dual küresel hareketinde,

$$\widetilde{E} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \end{bmatrix}$$

hareketli sistemine sıkı suretle bağlı bir $\overrightarrow{\widetilde{X}} = \vec{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*}$ birim dual vektörünün çizdiği kapalı regle yüzeyin dual açılım açısını $\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}}$ ile gösterirsek,

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}} = -\left\langle \overrightarrow{\widetilde{S}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle = \lambda_x - \varepsilon L_x$$

dir. Burada $\overrightarrow{\widetilde{S}} = \vec{S} + \varepsilon \overrightarrow{S^*}$ dual küresel hareketin dual Steiner vektörüdür.

İspat: $\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X}_1}$ alarak, bu birim dual vektör üzerinde kurulan ortonormal sağ sistemimizi,

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{X}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{X}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{X}_3} \end{bmatrix}$$

ile gösterelim. Böylece $\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, (veya $\overrightarrow{\widetilde{X}_1} = \overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$) kapalı regle yüzeyimizin dual açılım açısını (4.14) ve (4.15) ifadesinden

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}} = \widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}_1} = -\oint \left\langle d\overrightarrow{\widetilde{X}_2}, \overrightarrow{\widetilde{X}_3} \right\rangle$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu dual açılım açısını hesap etmek için ilk önce $d\overrightarrow{\widetilde{X}_2}$ vektörünü bulalım. $\widetilde{C} = \left[\widetilde{C}_{ij}\right]$, $1 \le i, j \le 3$ matrisi bir dual ortonormal matris olmak üzere,

$$\widetilde{X} = \widetilde{C}\widetilde{E} \tag{4.16}$$

dönüşümü yazılabilir. Diğer taraftan, bir vektör uzayında ortogonal baz dönüşümlerine karşılık gelen, bu uzayın dual uzayındaki dual baz dönüşümleri ile ilgili bir teorem D -Modül için de geçerli olacağından,

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{E} \arrow[r, "\widetilde{C}"] \arrow[d, "\widetilde{\Omega}"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\widetilde{\widetilde{\Omega}}"] \\
d\widetilde{E} \arrow[r, "\widetilde{C}^T"] & d\widetilde{X}
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.6. Baz Değişim Diyagramı

diyagramı değişimlidir. Yani,

$$\widetilde{\widetilde{\Omega}} = \left(\widetilde{C}^T\right)^T \widetilde{\Omega}\,\widetilde{C}^T$$

veya

$$= \widetilde{C}\,\widetilde{\Omega}\,\widetilde{C}^T$$

dir. Burada $\widetilde{\Omega} = \left[\widetilde{\Omega_{ij}}\right]$ ve $\widetilde{\widetilde{\Omega}} = \left[\widetilde{\widetilde{\Omega_{ij}}}\right]$, $1 \le i, j \le 3$ matrisleri, sırasıyla, $\widetilde{E}$ ve $\widetilde{X}$ sistemlerinin $\widetilde{E}'$ sabit sistemine göre hareketini belirleyen anti-simetrik matrislerdir.

Şimdi yukarıdaki diyagrama göre,

$$d\overrightarrow{\widetilde{X_2}} = \sum_{i=1}^{3}\left(\widetilde{C}\,\widetilde{\Omega}\,\widetilde{C}^{T}\right)_{2i}\overrightarrow{\widetilde{X_i}}$$

veya

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{\widetilde{X_2}} = &\left[\widetilde{C}_{11}\left(\widetilde{C}_{22}\widetilde{\Omega}_{21} + \widetilde{C}_{23}\widetilde{\Omega}_{31}\right) + \widetilde{C}_{12}\left(\widetilde{C}_{21}\widetilde{\Omega}_{12} + \widetilde{C}_{23}\widetilde{\Omega}_{32}\right) + \widetilde{C}_{13}\left(\widetilde{C}_{21}\widetilde{\Omega}_{13} + \widetilde{C}_{22}\widetilde{\Omega}_{23}\right)\right]\overrightarrow{\widetilde{X_1}} \\
&+\left[\widetilde{C}_{21}\left(\widetilde{C}_{22}\widetilde{\Omega}_{21} + \widetilde{C}_{23}\widetilde{\Omega}_{31}\right) + \widetilde{C}_{22}\left(\widetilde{C}_{21}\widetilde{\Omega}_{12} + \widetilde{C}_{23}\widetilde{\Omega}_{32}\right) + \widetilde{C}_{23}\left(\widetilde{C}_{21}\widetilde{\Omega}_{13} + \widetilde{C}_{22}\widetilde{\Omega}_{23}\right)\right]\overrightarrow{\widetilde{X_2}} \\
&+\left[\widetilde{C}_{31}\left(\widetilde{C}_{22}\widetilde{\Omega}_{21} + \widetilde{C}_{23}\widetilde{\Omega}_{31}\right) + \widetilde{C}_{32}\left(\widetilde{C}_{21}\widetilde{\Omega}_{12} + \widetilde{C}_{23}\widetilde{\Omega}_{32}\right) + \widetilde{C}_{33}\left(\widetilde{C}_{21}\widetilde{\Omega}_{13} + \widetilde{C}_{22}\widetilde{\Omega}_{23}\right)\right]\overrightarrow{\widetilde{X_3}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan,

$$\left\langle d\overrightarrow{\widetilde{X_2}}, \overrightarrow{\widetilde{X_3}}\right\rangle = \left(\widetilde{C}_{31}\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{32}\widetilde{C}_{21}\right)\widetilde{\Omega}_{21} + \left(\widetilde{C}_{33}\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{32}\widetilde{C}_{23}\right)\widetilde{\Omega}_{23} + \left(\widetilde{C}_{31}\widetilde{C}_{23} - \widetilde{C}_{33}\widetilde{C}_{21}\right)\widetilde{\Omega}_{31}$$

olur. Parantezli ifadeler, sırasıyla, $-\widetilde{C}_{13}, \widetilde{C}_{11}, \widetilde{C}_{12}$ elemanlarının kofaktörleridirler. $\widetilde{C} = \left[\widetilde{C}_{ij}\right]$ matrisi has ortogonal olduğu için bunlardan biri diğerinin yerine yazılabilir.

Bu takdirde dual açılım açısı için,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}} &= -\oint\left\langle d\overrightarrow{\widetilde{X_2}}, \overrightarrow{\widetilde{X_3}}\right\rangle \\
&= -\oint\left(\widetilde{C}_{13}\widetilde{\Omega}_{12} + \widetilde{C}_{11}\widetilde{\Omega}_{23} + \widetilde{C}_{12}\widetilde{\Omega}_{31}\right)
\end{aligned} \qquad (4.17)$$

bulunur. Diğer taraftan, Tanım 4.2 den

$$\overrightarrow{\widetilde{S}} = \overrightarrow{\widetilde{E_1}} \oint \widetilde{\Omega}_{23} + \overrightarrow{\widetilde{E_2}} \oint \widetilde{\Omega}_{31} + \overrightarrow{\widetilde{E_3}} \oint \widetilde{\Omega}_{12}$$

dual Steiner vektörü ile, (4.16) ifadesindeki

$$\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X_1}} = \widetilde{C}_{11} \overrightarrow{\widetilde{E_1}} + \widetilde{C}_{12} \overrightarrow{\widetilde{E_2}} + \widetilde{C}_{13} \overrightarrow{\widetilde{E_3}}$$

vektörünü iç çarparsak,

$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{S}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle = \oint \left(\widetilde{C}_{11} \widetilde{\Omega}_{23} + \widetilde{C}_{12} \widetilde{\Omega}_{31} + \widetilde{C}_{13} \widetilde{\Omega}_{12} \right) \tag{4.18}$$

bulunur. Böylece $\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısının (4.17) ve (4.18) ifadelerinden,

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}} = -\left\langle \overrightarrow{\widetilde{S}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle \tag{4.19}$$

olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de $\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1} = \lambda_{e_1} - \varepsilon L_{e_1}$ olduğu gösterilecek.

Gerçekten,

$$\overrightarrow{\widetilde{S}} = \overrightarrow{S} + \varepsilon \overrightarrow{S^*} = \oint \overrightarrow{\widetilde{\Psi}}, \quad \overrightarrow{\widetilde{\Psi}} = \widetilde{\Omega}_{23} \overrightarrow{\widetilde{E_1}} + \widetilde{\Omega}_{31} \overrightarrow{\widetilde{E_2}} + \widetilde{\Omega}_{12} \overrightarrow{\widetilde{E_3}}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1} = -\left\langle \overrightarrow{\widetilde{S}}, \overrightarrow{\widetilde{E_1}} \right\rangle \tag{4.20}$$

elde edilir.

Eğer (4.20) ifadesini reel ve dual kısımlara ayırırsak, o zaman

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1} &= -\left\langle \vec{S} + \varepsilon \overrightarrow{S^*}, \vec{e_1} + \varepsilon \overrightarrow{e_1^*} \right\rangle \\ &= -\left\langle \vec{S}, \vec{e_1} \right\rangle - \varepsilon\left(\left\langle \overrightarrow{S^*}, \vec{e_1} \right\rangle + \left\langle \vec{S}, \overrightarrow{e_1^*} \right\rangle \right)\end{aligned} \tag{4.21}$$

bulunur. Bu ifadenin reel kısmı (e_1)-kapalı regle yüzeyinin reel açılım açısıdır, yani

$$\lambda_{e_1} = -\left\langle \vec{S}, \vec{e_1} \right\rangle$$

dır. Diğer taraftan, (4.12) göz önüne alındığında K üzerinde sabit bir noktanın dual diferensiyel hızı

$$d\overrightarrow{\widetilde{E}_1} = \overrightarrow{\widetilde{\Psi}} \wedge \overrightarrow{\widetilde{E}_1}$$

ile elde edilir. Böylece

$$d\vec{e_1} + \varepsilon d\overrightarrow{e_1^*} = \left(\vec{\psi} + \varepsilon \overrightarrow{\psi^*} \right) \wedge \left(\vec{e_1} + \varepsilon \overrightarrow{e_1^*} \right)$$

olup, reel ve dual kısımlara ayırırsak,

$$\begin{aligned} d\vec{e_1} &= \vec{\psi} \wedge \vec{e_1} \\ d\overrightarrow{e_1^*} &= \overrightarrow{\psi^*} \wedge \vec{e_1} + \vec{\psi} \wedge \overrightarrow{e_1^*} \end{aligned} \tag{4.22}$$

dır. Burada $\overrightarrow{\widetilde{E}_1} = \vec{e_1} + \varepsilon \overrightarrow{e_1^*}$ birim dual vektörü için, $\vec{e_1}$ in vektörel momentini

$$\overrightarrow{e_1^*} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{e_1} = \vec{r} \wedge \vec{e_1}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bir $\widetilde{X}$ noktasının diferensiyel hızı $d\overrightarrow{\widetilde{X}_1}=\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}\wedge\overrightarrow{\widetilde{X}}$ dır. Burada $\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}=\vec{\psi}+\varepsilon\overrightarrow{\psi^*}$ dual Pfaff vektörü olup, $\vec{\psi}$, H/H' hareketinde ani dönmeye $\overrightarrow{\psi^*}$, H/H' hareketinde ani ötelemeye karşılık gelmektedir. K/K' hareketinde sabit ve hareketli kürelerin merkezleri için,

$$\overrightarrow{\widetilde{OP}}=\vec{r} \tag{4.23}$$

eşitliğini göz önüne alırsak

$$d\vec{r}=\overrightarrow{\psi^*}+\vec{\psi}\wedge\vec{r} \tag{4.24}$$

dır.

Eğer kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğunun $L_{e_1}=\oint d\mu=-\oint\left\langle d\vec{r},\vec{e_1}\right\rangle$ ifadesinde (4.24) eşitliği kullanılırsa yani;

$$\begin{aligned} L_{e_1} &= -\oint\left\langle d\vec{r},\vec{e_1}\right\rangle \\ &= \oint\left\langle \overrightarrow{\psi^*}+\vec{\psi}\wedge\vec{r},\vec{e_1}\right\rangle \end{aligned}$$

veya

$$L_{e_1}=\oint\left\langle \overrightarrow{\psi^*},\vec{e_1}\right\rangle+\oint\left\langle \vec{\psi},\vec{r}\wedge\vec{e_1}\right\rangle$$

yazılabilir.

Burada, H uzayında e_1 sabit doğrusunun e_i, e_i^* $(i=1,2,3)$ normlanmış Plücker doğru koordinatları, H/H' hareketinden bağımsızdır. Son ifade,

$$L_{e_1} = \left\langle \oint \overrightarrow{\psi^*}, \overrightarrow{e_1} \right\rangle + \left\langle \oint \overrightarrow{\psi}, \overrightarrow{e_1^*} \right\rangle$$

olur veya yukarıdaki ifade yerine $\overrightarrow{\widetilde{S}} = \vec{S} + \varepsilon \overrightarrow{S^*} = \oint \overrightarrow{\widetilde{\Psi}} = \oint \overrightarrow{\psi} + \varepsilon \overrightarrow{\psi^*}$ dan (e_1)-kapalı regle yüzeyinin bir integral invaryantı olan açılım uzunluğu,

$$L_{e_1} = \left\langle \overrightarrow{S^*}, \overrightarrow{e_1} \right\rangle + \left\langle \vec{S}, \overrightarrow{e_1^*} \right\rangle$$

şeklinde buluruz. Kapalı regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğunun bulunan bu değerleri $\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}$ dual açılım açısının $\left\langle \overrightarrow{\widetilde{S}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle = \oint \left(\widetilde{C}_{11} \widetilde{\Omega}_{23} + \widetilde{C}_{12} \widetilde{\Omega}_{31} + \widetilde{C}_{13} \widetilde{\Omega}_{12} \right)$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1} = \lambda_{e_1} - \varepsilon L_{e_1}$$

sonucunu elde ederiz. Burada L_{e_1} ve λ_{e_1} , (e_1)-kapalı regle yüzeyinin reel integral invaryantları olduğundan, $\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}$ dual açılım açısı (e_1)-kapalı regle yüzeyinin dual integral invaryantıdır.

Teorem 4.8. Bir birim dual küresel kapalı $\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$ eğrisinin çevrelediği küresel alan, bu kapalı eğrinin E.STUDY resmi olan kapalı regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğu cinsinden,

$$\widetilde{F}_{\widetilde{X}} = 2\pi(1-n) + (\lambda_X - \varepsilon L_X) \tag{4.25}$$

şeklinde ifade edilebilir[20].

Tanım 4.9. $\mathbb{D}^3$ de kapalı bir $\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$ eğrisi olsun.

$$\vec{\widetilde{A}}_{\widetilde{X}} = \oint \overrightarrow{\widetilde{X}} \wedge d\overrightarrow{\widetilde{X}} \tag{4.26}$$

vektörüne hareketin alan vektörü denir[18].

Teorem 4.10. $\mathbb{D}^3$ de bir $\widetilde{X}$ noktasının çizdiği kapalı uzay eğrisinin bir $\widetilde{E}$ birim vektörü doğrultusunda bir düzlem üzerine dik izdüşümü olan eğrinin sınırladığı alan

$$2\sum_{\tilde{X}\tilde{E}} = 2\left(\sigma_{\tilde{X}\tilde{E}} + \varepsilon\sigma^{*}_{\tilde{X}\tilde{E}}\right) = \left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \vec{\tilde{E}} \right\rangle \tag{4.27}$$

dir[18].

BÖLÜM 5. HOLDITCH TEOREMİNİN BİR GENELLEMESİ

Bu bölümde düzlemsel hareketler için iyi bilinen Holditch Teoremi, 1-parametreli dual küresel hareketlerde ele alınarak, kapalı dual küresel eğrilerin dual açılım açıları arasında bağıntılar bulunacaktır.

5.1. Holditch Teoreminin Bir Genellemesi

$\mathbb{D}$-Modülde sabit ve hareketli sistemler, sırasıyla, K' ve K olsun. K', K sistemlerinin ortonormal koordinat sistemleri de, sırasıyla,

$$\left\{\widetilde{M};\overrightarrow{\widetilde{E_1}}',\overrightarrow{\widetilde{E_2}}',\overrightarrow{\widetilde{E_3}}'\right\} \text{ ve } \left\{\widetilde{M};\overrightarrow{\widetilde{E_1}},\overrightarrow{\widetilde{E_2}},\overrightarrow{\widetilde{E_3}}\right\}$$

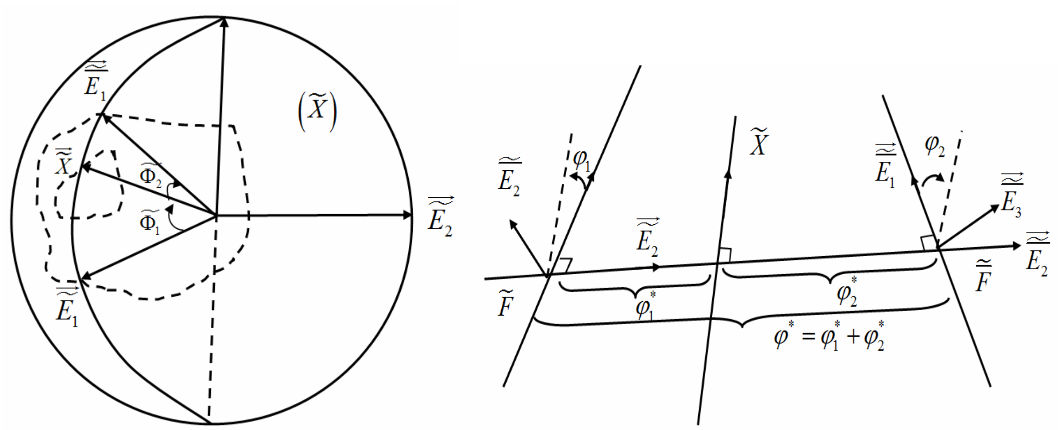
$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{E_i}},\overrightarrow{\widetilde{E_j}}\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\widetilde{E_i}}',\overrightarrow{\widetilde{E_j}}'\right\rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le 3$$

olsunlar. K' ve K aynı şekilde yönlendirilmiş olsun. Yani bir has ortogonal dönüşümle birinden diğerine geçilebilsin.

Şimdi aşağıdaki gibi bir küresel hareket tanımlayalım:

K' sabit birim dual küresi üzerinde diferensiyellenebilir bir $\left(\widetilde{X}\right)$ kapalı eğrisi seçelim. K hareketli küresinin bir büyük dairesi üzerinde, tespit ettiğimiz $\widetilde{\Phi} = sabit$ uzunluklu $\widehat{\widetilde{E_1}\widetilde{\widetilde{E_1}}}$ dual yay parçasının, $\widetilde{E_1}$ ve $\widetilde{\widetilde{E_1}}$ uç noktalarını , $\left(\widetilde{X}\right)$ eğrisi üzerinde (veya eş alanlı iki kapalı küresel eğri üzerinde) hareket ettirirsek, bir K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareketi tanımlamış oluruz. $\widetilde{\Phi} = \widehat{\widetilde{E_1}\widetilde{\widetilde{E_1}}}$ dual yay parçasını sabit tuttuğumuza göre, bu hareket yalnız başlangıçta K' de seçtiğimiz $\left(\widetilde{X}\right)$ eğrisine bağlıdır.

K/K' 1-parametreli hareketinde, $\widetilde{\Phi} = sabit$ uzunluklu dual yay üzerinde tespit edeceğimiz bir $\widetilde{X}$ dual noktasının hareketini inceleyebiliriz. Hareketimiz kapalı olduğundan, $\widetilde{X}$ dual noktasının bir kapalı yörüngeye sahip olduğunu hemen söyleyebiliriz (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. $\widetilde{E}_1$ ve $\widetilde{\widetilde{E}}_1$ Regle Yüzeylerinin Dual Açılım Açıları

$\widetilde{\Phi} = sabit$ uzunluklu dual yay parçasının $\widetilde{E}_1$ ve $\widetilde{\widetilde{E}}_1$ uç noktalarının $\left(\widetilde{X}\right)$ dual eğrisi üzerinde (veya eş alanlı iki kapalı küresel eğri üzerinde) hareketine, çizgiler uzayında, bir $\widetilde{L}$ dik hiperbolik doğru kongrüansının (iki parametreli doğru ailesi), (e_1)-kapalı regle yüzeyi üzerindeki kapalı hareketi karşılık gelir. Öyleki, bu kongrüansın odak çizgisi, (e_1)-kapalı regle yüzeyinin $\vec{e}_1$ ve $\vec{\vec{e}}_1$ anadoğrularına $\widetilde{F}$ ve $\widetilde{\widetilde{F}}$ noktalarında diktir.

$\widetilde{\Phi} = sabit$ uzunluklu $\widehat{\widetilde{E}_1 \widetilde{\widetilde{E}}_1}$ dual yayı üzerinde seçtiğimiz $\widetilde{X}$ dual noktasına ise, bu kongrüansın odak çizgisine dik bir x-ışını karşılık gelir. Öyleki, $\widetilde{E}_1$ ile $\widetilde{\widetilde{E}}_1$ dual vektörleri arasındaki $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi_1} + \widetilde{\Phi_2}$ dual açısı sabit seçildiği için, x-ışını e_1-anadoğrusu ile φ_1 reel açısını yapar ve ondan φ_1^* uzaklığındadır. Aynı şekilde, e_1-anadoğrusu ile φ_2 açısını yapar ve ondan φ_2^* uzaklığındadır. Burada

$$\widetilde{\Phi_1} = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_1^*, \quad \widetilde{\Phi_2} = \varphi_2 + \varepsilon\varphi_2^*, \quad \widetilde{\Phi} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varepsilon\left(\varphi_1^* + \varphi_2^*\right)$$

dır (Şekil 5.1.).

Şimdi K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareketinde, $\widetilde{X}$, $\widetilde{E}_1$ ve $\widetilde{\widetilde{E}}_1$ dual noktalarının çizdikleri kapalı regle yüzeylerin dual açılım açılarını hesaplayalım.

$\vec{\widetilde{X}} = \vec{\widetilde{X}}(t)$ kapalı regle yüzeyinin (veya kapalı küresel eğrinin) dual açılım açısı,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}} &= -\left\langle \vec{\widetilde{S}}, \vec{\widetilde{X}} \right\rangle \\ &= -\left\langle \vec{\widetilde{E}}_1 \oint \widetilde{\Omega}_{23} + \vec{\widetilde{E}}_2 \oint \widetilde{\Omega}_{31} + \vec{\widetilde{E}}_3 \oint \widetilde{\Omega}_{12}, \cos\widetilde{\Phi}_1 \vec{\widetilde{E}}_1 + \sin\widetilde{\Phi}_2 \vec{\widetilde{E}}_3 \right\rangle \\ &= -\cos\widetilde{\Phi}_1 \oint \widetilde{\Omega}_{23} - \sin\widetilde{\Phi}_2 \oint \widetilde{\Omega}_{12} \end{aligned} \tag{5.1}$$

dir.

$\vec{\widetilde{E}}_1 = \vec{\widetilde{E}}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1} &= -\left\langle \vec{\widetilde{S}}, \vec{\widetilde{E}}_1 \right\rangle \\ &= -\left\langle \vec{\widetilde{E}}_1 \oint \widetilde{\Omega}_{23} + \vec{\widetilde{E}}_2 \oint \widetilde{\Omega}_{31} + \vec{\widetilde{E}}_3 \oint \widetilde{\Omega}_{12}, \vec{\widetilde{E}}_1 \right\rangle \\ &= -\oint \widetilde{\Omega}_{23} \end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklindedir.

$\vec{\widetilde{\widetilde{E}}}_1 = \vec{\widetilde{\widetilde{E}}}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{\widetilde{E}}_1} &= -\left\langle \vec{\widetilde{\widetilde{S}}}, \vec{\widetilde{\widetilde{E}}}_1 \right\rangle \\
&= -\left\langle \vec{\widetilde{\widetilde{E}}}_1 \oint \widetilde{\Omega}_{23} + \vec{\widetilde{\widetilde{E}}}_2 \oint \widetilde{\Omega}_{31} + \vec{\widetilde{\widetilde{E}}}_3 \oint \widetilde{\Omega}_{12}, \cos\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\vec{\widetilde{\widetilde{E}}}_1 + \sin\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\vec{\widetilde{\widetilde{E}}}_3 \right\rangle \\
&= -\cos\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\oint \widetilde{\Omega}_{23} - \sin\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\oint \widetilde{\Omega}_{12} \\
&= \sin\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\oint \widetilde{\Omega}_{21} - \cos\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\oint \widetilde{\Omega}_{23}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

olarak bulunur.

(5.2) değeri (5.1) de yerine yazılırsa

$$
\oint \widetilde{\Omega}_{21} = \frac{\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}} - \cos\widetilde{\Phi}_1 \widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}}{\sin\widetilde{\Phi}_2}
\tag{5.4}
$$

elde edilir.

(5.2) değeri (5.3) de yerine yazılırsa

$$
\oint \widetilde{\Omega}_{21} = \frac{\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{\widetilde{E}}_1} - \cos\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}}{\sin\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)}
\tag{5.5}
$$

bulunur.

(5.4) ve (5.5) den

$$
\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}} = \frac{\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{\widetilde{E}}_1}\sin\widetilde{\Phi}_1 - \cos\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\sin\widetilde{\Phi}_1 \widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1} + \cos\widetilde{\Phi}_1 \sin\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}}{\sin\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)}
$$

elde edilir. Burada ters dönüşüm formülleri uygulanırsa

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}}=\frac{\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{\widetilde{E}}_1}\sin\widetilde{\Phi}_1-\frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}\sin\left(2\widetilde{\Phi}_1+\widetilde{\Phi}_2\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}\sin\widetilde{\Phi}_2+\frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}\sin\left(2\widetilde{\Phi}_1+\widetilde{\Phi}_2\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}\sin\widetilde{\Phi}_2}{\sin\left(\widetilde{\Phi}_1+\widetilde{\Phi}_2\right)}$$

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}}=\frac{\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{\widetilde{E}}_1}\sin\widetilde{\Phi}_1+\frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}\sin\widetilde{\Phi}_2+\frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}\sin\widetilde{\Phi}_2}{\sin\left(\widetilde{\Phi}_1+\widetilde{\Phi}_2\right)}$$

$$\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}}=\frac{\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{\widetilde{E}}_1}\sin\widetilde{\Phi}_1+\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}\sin\widetilde{\Phi}_2}{\sin\left(\widetilde{\Phi}_1+\widetilde{\Phi}_2\right)} \tag{5.6}$$

bulunur.

(5.6) ifadesinde $\widetilde{E}_1$ ve $\widetilde{\widetilde{E}}_1$ dual noktaları, aynı kapalı eğrisini bir parametre farkıyla çizerler, bunun için $\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}=\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{\widetilde{E}}_1}$ alınabilir. O halde

$$\frac{\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{X}}}{\widetilde{\Lambda}_{\widetilde{E}_1}}=\frac{\sin\widetilde{\Phi}_1+\sin\widetilde{\Phi}_2}{\sin\left(\widetilde{\Phi}_1+\widetilde{\Phi}_2\right)} \tag{5.7}$$

elde edilir. $\overrightarrow{\widetilde{X}}=\overrightarrow{\widetilde{X}}(t)$ ve $\overrightarrow{\widetilde{E}}_1=\overrightarrow{\widetilde{E}}_1(t)$ kapalı regle yüzeylerinin dual açılım açıları arasındaki bu bağıntıdan artık şu teoremi verilebiliriz.

Teorem 5.1. (Holditch Teoremi) $\widetilde{\Phi}=sabit$ uzunluklu dual yay parçasının uç noktaları, bir $\left(\widetilde{X}\right)$ dual küresel eğrisi (veya eş alanlı iki dual küresel kapalı eğri) üzerinde K/K' hareketini yapsın. Bu takdirde dual yay parçası üzerinde tespit edilmiş bir $\widetilde{X}$ dual noktası tarafından çizilen kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı;

$\left(\widetilde{X}\right)$ kapalı eğrisine (veya eşalanlı iki dual küresel eğriye) karşılık gelen kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı ve $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi_1} + \widetilde{\Phi_2}$ sabit dual açısı yardımıyla belirtilebilir. (5.7) ifadesindeki oran K' küresi üzerindeki $\left(\widetilde{E_1}\right)$ eğrisine bağlı değildir, sadece $\widehat{\widetilde{E_1}\widetilde{\widetilde{E_1}}}$ dual yay parçası üzerindeki $\widetilde{X}$ dual noktasının seçimine bağlıdır. K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareketinde, $\widetilde{\Phi} = sabit$ uzunluklu bir dual yay parçasının, tespit edilmiş bir $\widetilde{X}$ dual noktasının K' de çizdiği kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı ile, bu dual yayın uç noktalarının çizdiği, $\left(\widetilde{X}\right)$ dual eğrisine karşılık gelen regle yüzeyin dual açılım açısının oranı K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareketinden bağımsızdır.

Bu, düzlemsel kinematiğin Holditch Teoreminin K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel harekete bir genellemesidir.

E. Study dönüşümü kullanılarak (5.7) ifadesinin reel ve dual kısımları hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_x}{\lambda_{e_1}} &= \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\sin\varphi} \\ L_x &= \frac{\lambda_x \varphi^* \cos\varphi + L_{e_1}\left(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\right) - \lambda_{e_1}\left(\varphi_1^* \cos\varphi_1 - \varphi_2^* \cos\varphi_2\right)}{\sin\varphi} \end{aligned} \tag{5.8}$$

elde edilir.

(5.8) in birinci kısmı, düzlemsel kinematiğin Holditch Teoreminin H/H' 1-parametreli kapalı uzay hareketine bir genellemesidir. Bundan başka, son formüllerden yararlanılarak [3, 9, 10, 22] deki sonuçlar elde edilebilir.

Şimdi dual alan vektörünü hesap edelim.

K/K' 1-parametreli hareketinde K küresi üzerinde keyfi bir sabit $\widetilde{X}$ dual noktasının K' dual küresi üzerinde çizdiği kapalı dual bir eğri $\left(\widetilde{X}\right)$ olsun. Tanım 3.12 den $\left(\widetilde{X}\right)$ dual eğrisinin dual alan vektörü

$$\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} = \oint \vec{\widetilde{X}} \wedge d\vec{\widetilde{X}} \tag{5.9}$$

ile verilir. (4.12), (4.13) denklemlerinden ve Teorem 4.7 den

$$\begin{aligned}
\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} &:= \oint \vec{\widetilde{X}} \wedge d\vec{\widetilde{X}} \\
&= \oint \vec{\widetilde{X}} \wedge \left(\vec{\widetilde{\Psi}} \wedge \vec{\widetilde{X}}\right) \\
&= \oint \left\langle \vec{\widetilde{X}}, \vec{\widetilde{X}} \right\rangle \vec{\widetilde{\Psi}} - \left\langle \vec{\widetilde{X}}, \vec{\widetilde{\Psi}} \right\rangle \vec{\widetilde{X}} \\
&= \oint \vec{\widetilde{\Psi}} - \left\langle \vec{\widetilde{X}}, \oint \vec{\widetilde{\Psi}} \right\rangle \vec{\widetilde{X}} \\
&= \vec{\tilde{S}} - \left\langle \vec{\widetilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle \vec{\widetilde{X}} \\
&= \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \vec{\widetilde{X}}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2. K/K' 1-parametreli hareketinde K küresi üzerinde keyfi sabit bir $\vec{\widetilde{X}}$ noktasının K' küresi üzerinde çizdiği kapalı dual eğri $\left(\widetilde{X}\right)$ olsun. $\vec{\widetilde{X}}$ noktasının çizdiği $\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}$ alan vektörü

$$\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} = \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \vec{\widetilde{X}} \tag{5.11}$$

ile hesaplanabilir.

(5.11) denklemlerinden

$$\left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\rangle = \left\langle \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \vec{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \vec{\tilde{X}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle + \left\langle \vec{\tilde{S}}, \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \vec{\tilde{X}} \right\rangle + \left\langle \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \vec{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 \left\langle \vec{\tilde{X}}, \vec{\tilde{X}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{X}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \left\langle \vec{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2$$

$$\left\| \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\|^2 = \left\| \vec{\tilde{S}} \right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 \tag{5.12}$$

$$\left\| \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\|^2 = \left\| \vec{\tilde{S}} \right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2$$

elde edilir.

Şimdi dual açılım açısıyla dual Steiner vektörü arasındaki bağıntıyı bulalım.

(5.11) ifadesi ile Steiner vektörünün iç çarpımı alınarak

$$\left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle = \left\langle \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \vec{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle = \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{X}} \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\| \left\langle \frac{\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}}{\left\| \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\|}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle = \left\| \vec{\tilde{S}} \right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 \tag{5.13}$$

olduğundan

$$-\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{X}}} \left\| \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\| + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 = \left\| \vec{\tilde{S}} \right\|^2 \tag{5.14}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{X}}}$, $\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \Big/ \left\| \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\|$ doğrusunun oluşturduğu regle yüzeyin dual açılım açısıdır.

Son olarak (5.13) ve (5.14) denklemlerinden

$$-\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{X}}} = \sqrt{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2} \Leftrightarrow \tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{X}}}^2 + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 = \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 \tag{5.15}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\vec{\tilde{A}}_{\tilde{P}} &:= \oint \vec{\tilde{P}} \wedge d\vec{\tilde{P}} \\
&= \oint \vec{\tilde{P}} \wedge \left(\vec{\tilde{\Psi}} \wedge \vec{\tilde{P}}\right) \\
&= \oint \left\langle \vec{\tilde{P}}, \vec{\tilde{P}} \right\rangle \vec{\tilde{\Psi}} - \left\langle \vec{\tilde{P}}, \vec{\tilde{\Psi}} \right\rangle \vec{\tilde{P}} \\
&= \oint \vec{\tilde{\Psi}} - \left\langle \frac{\vec{\tilde{\Psi}}}{\left\|\vec{\tilde{\Psi}}\right\|}, \oint \vec{\tilde{\Psi}} \right\rangle \frac{\vec{\tilde{\Psi}}}{\left\|\vec{\tilde{\Psi}}\right\|} \\
&= \oint \vec{\tilde{\Psi}} - \oint \vec{\tilde{\Psi}} \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

olduğundan K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareketinin hareketli $\left(\tilde{P}\right)$ pol eğrisinin dual alan vektörü sıfır vektörüdür.

Eğer pol vektörü için (5.14) de $\vec{\tilde{X}} = \vec{\tilde{P}}$, $\left(\left\|\vec{\tilde{P}}\right\| = 1\right)$ olduğu kabul edilirse, (5.13) ve (5.16) dan hareketin pol vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin açılım açısı

$$\begin{aligned}
-\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{P}}} \left\|\vec{\tilde{A}}_{\tilde{P}}\right\| + \tilde{\Lambda}_{\tilde{P}}^2 &= \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 \\
\tilde{\Lambda}_{\tilde{P}} &= \pm \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|
\end{aligned} \tag{5.17}$$

olarak elde edilir.

Öte yandan, $\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} = -\left\langle \vec{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle$ olduğundan, hareketin Steiner vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin açılım açısı

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{S}} = -\left\langle \frac{\vec{\tilde{S}}}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle = -\left\|\vec{\tilde{S}}\right\| \tag{5.18}$$

bulunur.

O halde (5.17) ve (5.18) den, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3. Bir uzay hareketinde $\tilde{\Lambda}_{\tilde{P}}$ ve $\tilde{\Lambda}_{\tilde{S}}$ açılım uzunlukları ve hareketin Steiner vektörünün normu arasında

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{P}}^2 = \tilde{\Lambda}_{\tilde{S}}^2 = \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 \tag{5.19}$$

bağıntıları vardır.

$\vec{\tilde{S}}$ ve $\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}$ vektörleri arasındaki dual açı $\widetilde{\Theta} = \tilde{\theta} + \varepsilon\tilde{\theta}^*$ ise

$$\left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle = \left\|\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}\right\| \left\|\vec{\tilde{S}}\right\| \cos\widetilde{\Theta} \tag{5.20}$$

yazılabilir.

Öte yandan (5.11) deki $\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}$ alan vektörünün $\vec{\tilde{S}}$ ile iç çarpım alınırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle &= \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle + \left\langle \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \overline{\vec{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle \\ &= \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \left\langle \overline{\vec{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle \\ &= \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 \end{aligned}$$

bulunur ve (5.12) ifadesinden

$$\left\|\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}\right\| = \left(\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2\right)^{1/2}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\cos\widetilde{\Theta} &= \frac{\left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle}{\left\|\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}\right\| \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|} \\ &= \frac{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2}{\left(\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2\right)^{1/2} \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|} \\ &= \frac{\sqrt{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2}}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|}\end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir.

Teorem 4.7 den $\vec{\tilde{X}}$ ve $\vec{\tilde{S}}$ vektörleri arasındaki açı $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\varphi} + \varepsilon \widetilde{\varphi}^*$ ise

$$-\left\langle \vec{\tilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle = \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} = -\left\|\vec{\tilde{S}}\right\| \cos\widetilde{\Phi} \tag{5.22}$$

yazılabilir.

(5.22) ifadesi (5.21) ifadesinde yerine yazılarak

$$\cos\widetilde{\Theta} = \frac{\sqrt{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 - \left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 \cos^2\widetilde{\Phi}}}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|}$$

$$= \frac{\sqrt{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^2 \left(1-\cos^2 \tilde{\Phi}\right)}}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|}$$

$$= \frac{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\| \sqrt{1-\cos^2 \tilde{\Phi}}}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|}$$

$$= \sqrt{1-\cos^2 \tilde{\Phi}} \tag{5.23}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \tilde{\Phi}}$$

$$\cos \tilde{\Theta} = \sin \tilde{\Phi}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.4. K/K' 1-parametreli hareketinde hareketin dual Steiner vektörü sabit kalmak koşuluyla bir $\vec{\tilde{X}}$ dual birim vektörü ile bu vektörün $\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}$ dual alan vektörü yer değiştirebilir.

(5.23) ifadesinin reel ve dual kısımları hesaplanırsa

$$\theta + \varepsilon\theta^* + \varphi + \varepsilon\varphi^* = \frac{\pi}{2}$$

olacağından

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \varphi^* = -\theta^* \tag{5.24}$$

bulunur.

E. Study dönüşümü uygulanarak, aşağıdaki teorem elde edilir.

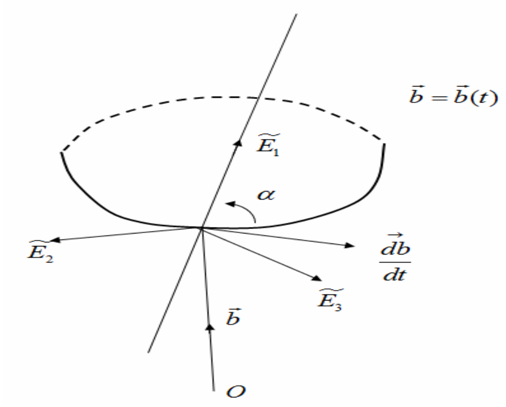
Teorem 5.5. H/H' 1-parametreli kapalı uzay hareketinde, yönlü doğru ve bu yönlü doğrunun alan vektörü boyunca olan doğru, hareketin Steiner vektöründen en kısa uzaklığa eşittir, ve Steiner vektörü ile bu doğrular arasındaki açılar tümler açılardır [18].

5.2. Blaschke Çatısı

K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareketinde, hareketli dual ortonormal sistemini özel olarak,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{E}}_1 &= \overrightarrow{\widetilde{E}}_1 \\
\overrightarrow{\widetilde{E}}_2 &= \frac{\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_1}{\left\| \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_1 \right\|} \\
\overrightarrow{\widetilde{E}}_3 &= \overrightarrow{\widetilde{E}}_1 \wedge \overrightarrow{\widetilde{E}}_2
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

şeklinde seçebiliriz. Bu harekette, $\overrightarrow{\widetilde{E}}_1$ dual birim vektörünün küre üzerinde çizdiği, $t \in \mathbb{R}$ parametresine göre diferensiyellenebilir kapalı eğriye, çizgiler uzayında $\vec{e}_1$ yönlü doğrusunun çizdiği (e_1)-kapalı regle yüzeyi karşılık gelir. Diğer taraftan $\overrightarrow{\widetilde{E}}_1, \overrightarrow{\widetilde{E}}_2, \overrightarrow{\widetilde{E}}_3$ birim dual vektörlerinin, çizgiler uzayındaki E. STUDY resmi olan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ yönlü doğruları (e_1)-kapalı regle yüzeyinin striksiyon noktasında kesişirler. Öyleki, $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ yönlü doğruları kapalı regle yüzeyin striksiyon noktasındaki, sırasıyla, normal ve teğet doğrultulardır (Şekil 5.2).



Şekil 5.2. Blaschke Çatısı

Şimdi üç $\overrightarrow{\widetilde{E}}_k,\ \ 1 \le k \le 3$ dual vektörünün $\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_k$ türevlerini $\overrightarrow{\widetilde{E}}_k$ lar cinsinden lineer olarak

$$\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_k = \sum_{k,l=1}^{3} \tilde{a}_{kl} \overrightarrow{\widetilde{E}}_l\ , \quad \tilde{a}_{kl} = \left\langle \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_k , \overrightarrow{\widetilde{E}}_l \right\rangle \tag{5.26}$$

şeklinde yazalım.

$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{E}}_k , \overrightarrow{\widetilde{E}}_l \right\rangle = \delta_{kl}, \quad 1 \le k,l \le 3 \tag{5.27}$$

bağıntılarından türev alarak

$$\left\langle \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_k , \overrightarrow{\widetilde{E}}_l \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widetilde{E}}_k , \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_l \right\rangle = \tilde{a}_{kl} + \tilde{a}_{lk} = 0 \tag{5.28}$$

çıkar. Böylece $\left[\tilde{a}_{kl}\right]$ matrisinin anti-simetrik olduğu görülür. Şu halde (5.26) denklem sistemi

$$
\begin{aligned}
\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_1 &= \tilde{a}_{12}\,\overrightarrow{\widetilde{E}}_2 - \tilde{a}_{31}\,\overrightarrow{\widetilde{E}}_3 \\
\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_2 &= \tilde{a}_{23}\,\overrightarrow{\widetilde{E}}_3 - \tilde{a}_{12}\,\overrightarrow{\widetilde{E}}_1 \\
\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_3 &= \tilde{a}_{31}\,\overrightarrow{\widetilde{E}}_1 - \tilde{a}_{23}\,\overrightarrow{\widetilde{E}}_2
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

formuna sahiptir. (5.25) ifadesinden $\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_1 = \widetilde{P}\,\overrightarrow{\widetilde{E}}_2$ dir, burada

$$
\widetilde{P} = \left\| \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_1 \right\| \tag{5.30}
$$

dir. Böylece $\tilde{a}_{12} = \widetilde{P}, \quad \tilde{a}_{31} = 0$ olup geriye

$$
\tilde{a}_{23} = \left\langle \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_2 , \overrightarrow{\widetilde{E}}_3 \right\rangle \tag{5.31}
$$

ün hesaplanması kalır.

$$
\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_2 = \frac{\ddot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_1}{\left\| \overrightarrow{\widetilde{E}}_1 \right\|} + \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_1 \left(\frac{1}{\left\| \overrightarrow{\widetilde{E}}_1 \right\|} \right)^{\bullet} \tag{5.32}
$$

bulunur ve diğer taraftan (5.25) ifadesinden

$$
\overrightarrow{\widetilde{E}}_3 = \overrightarrow{\widetilde{E}}_1 \wedge \overrightarrow{\widetilde{E}}_2 = \frac{\overrightarrow{\widetilde{E}}_1 \wedge \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}}}_1}{\left\| \overrightarrow{\widetilde{E}}_1 \right\|} \tag{5.33}
$$

olması dolayısıyla, $\tilde{a}_{23}$ yerine $\widetilde{Q}$ konursa

$$\widetilde{Q} = \frac{\left(\overrightarrow{\widetilde{E}_1}, \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}, \ddot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}\right)}{\left\| \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}} \right\|^2} = \frac{\left(\overrightarrow{\widetilde{E}_1}, \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}, \ddot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}\right)}{\left\langle \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}, \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}} \right\rangle} \tag{5.34}$$

ifadesi elde edilir. Böylece türev denlekemlerimiz nihayet

$$\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}} = \widetilde{P}\overrightarrow{\widetilde{E}_2}, \qquad \widetilde{P} = \left\| \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}} \right\| = \sqrt{\left\langle \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}, \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}} \right\rangle}$$

$$\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_2}} = -\widetilde{P}\overrightarrow{\widetilde{E}_1} + \widetilde{Q}\overrightarrow{\widetilde{E}_3},$$

$$\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_3}} = -\widetilde{Q}\overrightarrow{\widetilde{E}_2}, \qquad \widetilde{Q} = \frac{\left(\overrightarrow{\widetilde{E}_1}, \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}, \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}\right)}{\left\langle \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}, \dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}} \right\rangle} \tag{5.35}$$

şeklini alır. Bu denklemler reel ve dual parçalara ayrılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}_1} &= +p\vec{e}_2, \\ \dot{\vec{e}_2} &= -p\vec{e}_1 + q\vec{e}_3, \\ \dot{\vec{e}_3} &= -q\vec{e}_2, \end{aligned} \tag{5.36}$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{\overrightarrow{e_1^*}} &= +p^*\vec{e}_2 + p\overrightarrow{e_2^*}, \\ \dot{\overrightarrow{e_2^*}} &= -p^*\vec{e}_1 + q^*\vec{e}_3 - p\overrightarrow{e_1^*} + q\overrightarrow{e_3^*}, \\ \dot{\overrightarrow{e_3^*}} &= -q^*\vec{e}_2 - q\overrightarrow{e_2^*}, \end{aligned} \tag{5.37}$$

denklem sistemleri bulunur.

Öte yandan, Steiner vektörü

$$\vec{\tilde{S}} = \left(\oint \tilde{Q}\right)\vec{\tilde{E}}_1 + \left(\oint \tilde{P}\right)\vec{\tilde{E}}_3 = -\tilde{\Lambda}_{\tilde{e}_1}\vec{\tilde{E}}_1 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{e}_3}\vec{\tilde{E}}_3 \tag{5.38}$$

olacaktır. Burada $\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_1}$ ve $\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_3}$, sırasıyla, $\vec{\tilde{E}}_1 = \vec{\tilde{E}}_1(t)$ ve $\vec{\tilde{E}}_3 = \vec{\tilde{E}}_3(t)$ regle yüzeylerinin dual açılarıdır.

Hareketli Blaschke çatısının ikinci ekseninin çizdiği dual küresel alan incelendiğinde (5.38) denkleminden şu elde edilir: $\vec{\tilde{E}}_2$ ekseninin oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin dual açılım açısı her zaman sıfırdır. Bu nedenle, Teorem 4.8 den aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 5.6. Blaschke çatısının 1-parametreli kapalı dual küresel haraketinde, ikinci eksenin çizdiği dual alan vektörü, hareketin Steiner vektörüne paraleldir. Bundan başka, ikinci eksenin küresel göstergesi birim küresel yüzey alanını iki eş parçaya böler, yani $f_{e_2} = 2\pi$ olur.

(5.38) ifadesinin, sırasıyla $\vec{\tilde{E}}_1, \vec{\tilde{E}}_3, \vec{\tilde{S}}$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\tilde{E}}_1, \vec{\tilde{S}} \right\rangle &= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_1}, \\ \left\langle \vec{\tilde{E}}_3, \vec{\tilde{S}} \right\rangle &= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_3}, \\ \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle &= \left\| \vec{\tilde{S}} \right\|^2 = \tilde{\Lambda}^2_{\tilde{E}_1} + \tilde{\Lambda}^2_{\tilde{E}_3} \end{aligned} \tag{5.39}$$

elde edilir.

(5.15) ve (5.39) ifadelerinden

$$\tilde{\Lambda}^2_{\tilde{A}_{\tilde{X}}} + \tilde{\Lambda}^2_{\tilde{X}} = \tilde{\Lambda}^2_{\tilde{E}_1} + \tilde{\Lambda}^2_{\tilde{E}_3} \tag{5.40}$$

bulunur.

Bu denklemin reel ve dual kısımları hesaplanırsa $\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \Big/ \left\| \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\|, \overrightarrow{\tilde{X}}, \overrightarrow{\tilde{E}_1}$ ve $\overrightarrow{\tilde{E}_3}$ doğrularının oluşturduğu regle yüzeylerin açılım açısı ve açılım uzunluğu arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\begin{aligned} &\lambda^2_{a_x} + \lambda^2_x = \lambda^2_{e_1} + \lambda^2_{e_3} \\ &\lambda_{a_x} L_{a_x} + \lambda_x L_x = \lambda_{e_1} L_{e_1} + \lambda_{e_3} L_{e_3} \end{aligned} \tag{5.41}$$

(5.11) ve (5.38) ifadelerinin yardımıyla $\overrightarrow{\tilde{E}_1}, \overrightarrow{\tilde{E}_2}, \overrightarrow{\tilde{E}_3}$ doğrularının dual alan vektörleri

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{A}}_{\tilde{E}_1} &= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_3} \overrightarrow{\tilde{E}_3} \\ \vec{\tilde{A}}_{\tilde{E}_2} &= \vec{\tilde{S}} \\ \vec{\tilde{A}}_{\tilde{E}_3} &= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_1} \overrightarrow{\tilde{E}_1} \end{aligned} \tag{5.42}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.7 bu eşitliklere uygulanarak

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_1}} = \pm \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_3}, \quad \tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_2}} = \pm \sqrt{\tilde{\Lambda}^2_{\tilde{E}_1} + \tilde{\Lambda}^2_{\tilde{E}_3}}, \quad \tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_3}} = \pm \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_1} \tag{5.43}$$

elde edilir. O halde

$$\tilde{\Lambda}^2_{\tilde{A}_{\tilde{E}_2}} = \tilde{\Lambda}^2_{\tilde{E}_1} + \tilde{\Lambda}^2_{\tilde{E}_3} \tag{5.44}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.7. K/K' 1-parametreli hareketinde (5.42) ve (5.44) denklemleri Blaschke çatısının doğrularının oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları ile Blaschke çatısının alan vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin integral invaryantları benzerdir.

K/K' hareketinde herhangi farklı iki $\widetilde{X} \neq \widetilde{Y}$ sabit noktaları için $\vec{\widetilde{X}}$ doğrusu K' küresi üzerinde kapalı bir $\left(\widetilde{X}\right)$ eğrisi çizerken, yöndeş $\vec{\widetilde{X}} \in H$ doğrusu H' küresinde kapalı bir regle yüzey oluşturacaktır. O halde, $2\sigma_{xe} = \langle a_x, e \rangle$ denkleminden dolayı $\vec{\widetilde{Y}}$ doğrultusundaki $\left(\widetilde{X}\right)$ eğrisinin izdüşüm alanı

$$
\begin{aligned}
2\sum\nolimits_{\tilde{X}\tilde{Y}} &= 2\left(\sigma_{\tilde{X}\tilde{Y}} + \varepsilon\sigma^{*}_{\tilde{X}\tilde{Y}}\right) \\
&= \left\langle \vec{\widetilde{A}}_{\tilde{X}}, \vec{\widetilde{Y}} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\widetilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \vec{\widetilde{X}}, \vec{\widetilde{Y}} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\widetilde{S}}, \vec{\widetilde{Y}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \left\langle \vec{\widetilde{X}}, \vec{\widetilde{Y}} \right\rangle \\
&= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \left\langle \vec{\widetilde{X}}, \vec{\widetilde{Y}} \right\rangle \\
&= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \cos\widetilde{\Delta}
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

olur. Burada $\widetilde{\Delta} = \delta + \varepsilon\delta^{*}$, $\vec{\widetilde{X}}$ ve $\vec{\widetilde{Y}}$ dual birim vektörleri arasındaki dual açıdır.

(5.45) ifadesindeki $\sum_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}$, $\left(\widetilde{X}\right) \neq \left(\widetilde{Y}\right)$ kapalı regle yüzeylerinin dual açılım açısına göre verilir, bu nedenle $\sum_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}$ yüzeyin bir invaryantıdır. Ayrıca (5.45) denkleminden

$$
2\sum\nolimits_{\tilde{Y}\tilde{X}} = 2\left(\sigma_{\tilde{Y}\tilde{X}} + \varepsilon\sigma^{*}_{\tilde{Y}\tilde{X}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{Y}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \vec{\tilde{Y}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\tilde{S}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \left\langle \vec{\tilde{Y}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle \qquad (5.46) \\
&= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \left\langle \vec{\tilde{Y}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle \\
&= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \cos \widetilde{\Delta}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Böylece (5.45) ve (5.46) denklemlerinden

$$
\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} / 2\sum\nolimits_{\tilde{Y}\tilde{X}} = -\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \cos \widetilde{\Delta}
$$

$$
-\tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} / 2\sum\nolimits_{\tilde{X}\tilde{Y}} = -\tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \cos \widetilde{\Delta}
$$

$$
\begin{cases}
2\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \sum_{\tilde{Y}\tilde{X}} = -\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}\tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \cos \widetilde{\Delta} \\
-2\tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \sum_{\tilde{X}\tilde{Y}} = \tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}}^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}\tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \cos \widetilde{\Delta}
\end{cases}
$$

$$
2\left(\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \sum\nolimits_{\tilde{Y}\tilde{X}} - \tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}} \sum\nolimits_{\tilde{X}\tilde{Y}} \right) = \tilde{\Lambda}_{\tilde{Y}}^2 - \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}^2 \qquad (5.47)
$$

elde edilir.

K/K' hareketinde $\overrightarrow{\widetilde{X}}$ doğrultusundaki $\left(\widetilde{X}\right)$ eğrisinin izdüşüm alanı

$$
\begin{aligned}
2\sum\nolimits_{\tilde{X}\tilde{X}} &= 2\left(\sigma_{\tilde{X}\tilde{X}} + \varepsilon \sigma_{\tilde{X}\tilde{X}}^{*} \right) \\
&= \left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \overrightarrow{\widetilde{X}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\tilde{S}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \left\langle \overrightarrow{\widetilde{X}}, \overrightarrow{\widetilde{X}} \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.48}
$$

dır.

Benzer şekilde, hareketin Steiner vektörü doğrultusunda $\left(\widetilde{X}\right)$ eğrisinin izdüşüm alanı

$$
\begin{aligned}
2\sum\nolimits_{\tilde{X}\tilde{S}} &= 2\left(\sigma_{\tilde{X}\tilde{S}} + \varepsilon\sigma^{*}_{\tilde{X}\tilde{S}}\right) \\
&= \left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}, \frac{\vec{\tilde{S}}}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|} \left\langle \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}}\overrightarrow{\widetilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|} \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{X}} \left\langle \overrightarrow{\widetilde{X}}, \vec{\tilde{S}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|} \left(\left\|\vec{\tilde{S}}\right\|^{2} - \tilde{\Lambda}^{2}_{\tilde{X}} \right) \\
&= \frac{\tilde{\Lambda}^{2}_{\tilde{X}} - \tilde{\Lambda}^{2}_{\tilde{S}}}{\tilde{\Lambda}_{\tilde{S}}}
\end{aligned} \tag{5.49}
$$

dır.

Ayrıca $\overrightarrow{\widetilde{E}_j}$ eksenlerinin doğrultusunda Blaschke çatısının $\overrightarrow{\widetilde{E}_i}$ eksenlerinin izdüşüm alanları aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\begin{aligned}
2\sum\nolimits_{\tilde{E}_i\tilde{E}_j} &= 2\left(\sigma_{\tilde{E}_i\tilde{E}_j} + \varepsilon\sigma^{*}_{\tilde{E}_i\tilde{E}_j}\right) \\
&= \left\langle \vec{\tilde{A}}_{\tilde{E}_i}, \overrightarrow{\widetilde{E}_j} \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \vec{\tilde{S}} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_i} \vec{\tilde{E}_i}, \vec{\tilde{E}_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\tilde{S}}, \vec{\tilde{E}_j} \right\rangle + \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_i} \left\langle \vec{\tilde{E}_i}, \vec{\tilde{E}_j} \right\rangle \\
&= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_j} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_i} \left\langle \vec{\tilde{E}_i}, \vec{\tilde{E}_j} \right\rangle \\
&= -\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_j} + \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_i} \delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{5.50}
$$

ya da kapalı formda

$$
2\sum_{\tilde{E}_i \tilde{E}_j} = \begin{cases} 0 \quad , & i = j \\ -\tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_j}, & i \neq j \end{cases}
\tag{5.51}
$$

olur.

Örnek 5.8.

K/K' 1-parametreli dual küresel hareketinde

$$
\left(\tilde{C}\right) = \left\{ \vec{\tilde{X}} \,\middle|\, \left\langle \vec{\tilde{X}}, \vec{\tilde{E}_1}' \right\rangle = sabit, \vec{\tilde{X}} \in K \right\}
\tag{5.52}
$$

K' küresi üzerinde dual bir eğri olsun. Bu nedenle, $\vec{\tilde{X}}$ dual birim vektörü

$$
\vec{\tilde{X}} = \cos\tilde{\Theta}\vec{\tilde{E}_1}' + \sin\tilde{\Theta}\cos\tilde{\Phi}\vec{\tilde{E}_2}' + \sin\tilde{\Theta}\sin\tilde{\Phi}\vec{\tilde{E}_3}'
\tag{5.53}
$$

olarak yazılabilir. Burada

$$
\tilde{\Theta} = \theta + \varepsilon\theta^* \text{ ve } \tilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*
$$

dual açılardır,

$$
\theta = c_1 \left(sabit\right) \text{ ve } \theta^* = c_2 \left(reel\, sabit\right)
$$

olur.

Bu nedenle, (5.53) denkleminin φ ve φ^* olmak üzere sadece iki reel parametresi vardır. h, H/H' hareketinin açılımını ve φ hareketin parametresini göstermek üzere $\varphi^* = h\varphi$ alınırsa, (5.53) denklemi H' uzayında bir regle yüzey ifade eder. Böylece, $\overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{X}}\left(\widetilde{\varphi}\right)$ regle yüzeyinin Blaschke çatısı

$$\overrightarrow{\widetilde{E}_1}\left(\widetilde{\varphi}\right) = \left(\cos\widetilde{\Theta}, \sin\widetilde{\Theta}\cos\widetilde{\Phi}, \sin\widetilde{\Theta}\sin\widetilde{\Phi}\right)$$

$$\overrightarrow{\widetilde{E}_2}\left(\varphi\right) = \frac{\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}}{\left\|\dot{\overrightarrow{\widetilde{E}_1}}\right\|} = \left(0, -\sin\widetilde{\Phi}, \cos\widetilde{\Phi}\right)$$

$$\overrightarrow{\widetilde{E}_3}\left(\varphi\right) = \overrightarrow{\widetilde{E}_1} \times \overrightarrow{\widetilde{E}_2} = \left(\sin\widetilde{\Theta}, -\cos\widetilde{\Theta}\cos\widetilde{\Phi}, -\cos\widetilde{\Theta}\sin\widetilde{\Phi}\right) \tag{5.54}$$

olarak bulunur.

(5.30) ve (5.34) denklemleri göz

$$\widetilde{P} = \left(1 + \varepsilon h\right)\sin\widetilde{\Theta} \qquad \text{ve} \qquad \widetilde{Q} = \left(1 + \varepsilon h\right)\cos\widetilde{\Theta} \tag{5.55}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (5.38) denkleminden dual Steiner vektörü

$$\overrightarrow{\widetilde{S}} = -2\pi\left(1 + \varepsilon h\right)\left(\cos\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E}_1} + \sin\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E}_3}\right) \tag{5.56}$$

olacaktır.

(5.11) formülüne göre alan vektörleri

$$\vec{\tilde{A}}_{\tilde{E}_1} = -2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\sin\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E}_3}$$

$$\vec{\tilde{A}}_{\tilde{E}_3} = -2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\cos\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E}_1}$$

$$\vec{\tilde{A}}_{\tilde{E}_2} = -2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\left(\cos\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E}_1} + \sin\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E}_3}\right) \tag{5.57}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca (5.42)-(5.44) denklemlerine

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_1}} = \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_3} = 2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\sin\widetilde{\Theta}$$

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_3}} = \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_1} = 2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\cos\widetilde{\Theta}$$

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_2}} = \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_3} = 2\pi\left(1+\varepsilon h\right), \quad \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_2} = 0 \tag{5.58}$$

ifadeleri karşılık gelir.

Son olarak izdüşüm alanları

$$\sum_{\tilde{E}_1\tilde{E}_2} = \sum_{\tilde{E}_3\tilde{E}_2} = 0, \quad \sum_{\tilde{E}_2\tilde{E}_1} = \sum_{\tilde{E}_3\tilde{E}_1} = -\pi\left(1+\varepsilon h\right)\cos\widetilde{\Theta}$$

$$\sum_{\tilde{E}_1\tilde{E}_3} = \sum_{\tilde{E}_2\tilde{E}_3} = -\pi\left(1+\varepsilon h\right)\sin\widetilde{\Theta} \tag{5.59}$$

olarak elde edilir.

Örnek 5.9.

K/K' 1-parametreli dual küresel hareketinde

$$\left(\widetilde{C}\right)=\left\{\overrightarrow{\widetilde{X}}\,\middle|\,\left\langle\overrightarrow{\widetilde{X}},\overrightarrow{\widetilde{E_1}}'\right\rangle=sabit,\ \overrightarrow{\widetilde{X}}\in K\right\} \tag{5.60}$$

K' küresi üzerinde dual bir eğri olsun. Bu nedenle, $\overrightarrow{\widetilde{X}}$ dual birim vektörü

$$\overrightarrow{\widetilde{X}}=\sin\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E_1}}'+\cos\widetilde{\Theta}\cos\widetilde{\Phi}\overrightarrow{\widetilde{E_2}}'+\cos\widetilde{\Theta}\sin\widetilde{\Phi}\overrightarrow{\widetilde{E_3}}' \tag{5.61}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\widetilde{\Theta}=\theta+\varepsilon\theta^* \text{ ve } \widetilde{\Phi}=\varphi+\varepsilon\varphi^*$$

dual açılardır,

$$\theta=c_1\left(sabit\right) \text{ ve } \theta^*=c_2\left(reel\,sabit\right)$$

olur.

Bu nedenle, (5.61) denkleminin φ ve φ^* olmak üzere sadece iki reel parametresi vardır. h, H/H' hareketinin açılımını ve φ hareketin parametresini göstermek üzere $\varphi^*=h\varphi$ alınırsa, (5.61) denklemi H' uzayında bir regle yüzey ifade eder.

Böylece, $\overrightarrow{\widetilde{X}}=\overrightarrow{\widetilde{X}}\left(\widetilde{\varphi}\right)$ regle yüzeyinin Blaschke çatısı

$$\overrightarrow{\widetilde{E_1}}\left(\widetilde{\varphi}\right)=\left(\sin\widetilde{\Theta},\cos\widetilde{\Theta}\cos\widetilde{\Phi},\cos\widetilde{\Theta}\sin\widetilde{\Phi}\right)$$

$$\overrightarrow{\widetilde{E_2}}(\varphi)=\frac{\dot{\overrightarrow{\widetilde{E_1}}}}{\left\|\dot{\overrightarrow{\widetilde{E_1}}}\right\|}=\left(0,-\sin\widetilde{\Phi},\cos\widetilde{\Phi}\right)$$

$$\overrightarrow{\widetilde{E_3}}(\varphi)=\overrightarrow{\widetilde{E_1}}\times\overrightarrow{\widetilde{E_2}}=\left(\cos\widetilde{\Theta},\sin\widetilde{\Theta}\cos\widetilde{\Phi},-\sin\widetilde{\Theta}\sin\widetilde{\Phi}\right) \qquad (5.62)$$

olarak bulunur.

(5.30) ve (5.34) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\widetilde{P}=\left(1+\varepsilon h\right)\cos\widetilde{\Theta} \qquad \text{ve} \qquad \widetilde{Q}=\left(1+\varepsilon h\right)\sin\widetilde{\Theta} \qquad (5.63)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (5.38) denklemlerinden dual Steiner vektörü

$$\vec{\widetilde{S}}=-2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\left(\sin\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E_1}}+\cos\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E_3}}\right) \qquad (5.64)$$

olacaktır.

(5.11) formülüne göre alan vektörleri

$$\vec{\widetilde{A}}_{\widetilde{E}_1}=-2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\cos\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E_3}}$$

$$\vec{\widetilde{A}}_{\widetilde{E}_3}=-2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\sin\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E_1}}$$

$$\vec{\widetilde{A}}_{\widetilde{E}_2}=-2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\left(\sin\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E_1}}+\cos\widetilde{\Theta}\overrightarrow{\widetilde{E_3}}\right) \qquad (5.65)$$

olarak elde edilir.

Ayrıca, (5.42)-(5.44) denklemlerine

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_1}} = \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_3} = 2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\cos\widetilde{\Theta}$$

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_3}} = \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_1} = 2\pi\left(1+\varepsilon h\right)\sin\widetilde{\Theta}$$

$$\tilde{\Lambda}_{\tilde{A}_{\tilde{E}_2}} = \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_3} = 2\pi\left(1+\varepsilon h\right), \quad \tilde{\Lambda}_{\tilde{E}_2} = 0 \tag{5.66}$$

ifadeleri karşılık gelir.

Son olarak izdüşüm alanları

$$\sum_{\tilde{E}_1\tilde{E}_2} = \sum_{\tilde{E}_1\tilde{E}_2} = 0, \quad \sum_{\tilde{E}_2\tilde{E}_1} = \sum_{\tilde{E}_3\tilde{E}_1} = -\pi\left(1+\varepsilon h\right)\sin\widetilde{\Theta}$$

$$\sum_{\tilde{E}_1\tilde{E}_3} = \sum_{\tilde{E}_2\tilde{E}_3} = -\pi\left(1+\varepsilon h\right)\cos\widetilde{\Theta} \tag{5.67}$$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 1-parametreli kapalı dual küresel hareketler ele alındı. Hareketin dual Pfaff vektörü, dual Steiner vektörü ve dual pol noktaları tanımlandı. $\widetilde{\Phi}$ dual açılım açısının $d\widetilde{\Phi}$ diferensiyel değişimleri hareketin 1-formları cinsinden hesaplandı. Bir kapalı regle yüzeyin dual integral invaryantı olan dual açılım açısı ele alındı. Hareketli bir sisteme bağlı birim dual vektörün çizdiği kapalı regle yüzeyin dual açılım açısının, dual Steiner vektörü ile ilişkisi irdelendi. Kapalı regle yüzeyin reel integral invaryantları sayesinde dual açılım açısının, kapalı regle yüzeyin dual integral invaryant olduğu incelendi.

Ayrıca, düzlemsel hareketler için iyi bilinen Holditch Teoremi 1-parametreli kapalı dual küresel hareketler ele alınarak genelleştirildi. K' sabit birim dual küresi üzerinde diferensiyellenebilir bir $\left(\widetilde{X}\right)$ kapalı dual eğrisi alınarak, K hareketli dual küresinin büyük bir dairesi üzerinde $\widetilde{\Phi} = sabit$ uzunluklu $\widehat{\widetilde{E}_1 \widetilde{\widetilde{E}}_1}$ dual yay parçasının, $\widetilde{E}_1$ ve $\widetilde{\widetilde{E}}_1$ uç noktaları $\left(\widetilde{X}\right)$ kapalı dual eğrisi üzerinde hareket ettirildi. Böylece bir K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareket tanımlandı. Bu dual küresel harekette sırasıyla, $\left(\widetilde{X}\right), \widetilde{E}_1$ ve $\widetilde{\widetilde{E}}_1$ dual noktalarının çizdikleri kapalı regle yüzeylerin dual açılım açıları hesaplandı. $\vec{\widetilde{X}} = \vec{\widetilde{X}}\left(t\right)$ ve $\vec{\widetilde{E}}_1 = \vec{\widetilde{E}}_1\left(t\right)$ kapalı regle yüzeylerinin dual açılım açıları arasında bir oran belirlendi. Bu oranın, K' sabit birim dual küresi üzerindeki $\left(\widetilde{X}\right)$ eğrisinden bağımsız, sadece $\widehat{\widetilde{E}_1 \widetilde{\widetilde{E}}_1}$ dual yay parçası üzerindeki $\widetilde{X}$ dual noktasının seçimine bağlı olduğuna değinildi. Böylece düzlemsel kinematiğin Holditch Teoremi 1-parametreli kapalı dual küresel harekete genelleştirildi.

Diğer taraftan, kapalı dual küresel eğrilerin dual alan vektörü tanımlandı. Bu dual alan vektörü ile sırasıyla, dual açılım açısı ve dual Steiner vektörü arasındaki bağıntı elde edildi. 1-parametreli kapalı dual küresel hareketin dual pol eğrisinin dual alan vektörünün sıfır vektörü olduğu gösterildi. Hareketin, sırasıyla, dual pol vektörünün ve dual Steiner vektörünün oluşturduğu regle yüzeylerin dual açılım açıları ele alındı. $\tilde{\Lambda}_{\tilde{P}}$ ve $\tilde{\Lambda}_{\tilde{S}}$ dual açılım uzunlukları ve hareketin dual Steiner vektörünün normu arasındaki bağıntı bulundu. K/K' 1-parametreli hareketinde dual Steiner vektörü ile bir $\vec{\tilde{X}}$ dual birim vektörü ve bu vektörün $\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}}$ dual alan vektörü arasındaki açıların tümler olduğu gösterildi.

Öte yandan, Blaschke çatısının 1-parametreli kapalı dual küresel hareketi ele alındı. Bu hareketin Steiner vektörü tanımlandı. Blaschke çatısının $\vec{\tilde{E}}_1$ ve $\vec{\tilde{E}}_3$ doğrularının ve $\vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \Big/ \left\| \vec{\tilde{A}}_{\tilde{X}} \right\|$ alan vektörünün oluşturduğu regle yüzeylerin dual açılım açıları arasındaki bağıntı ele alındı. K/K' 1-parametreli kapalı dual küresel hareketinde izdüşüm alanları incelendi.

KAYNAKLAR

[1] HOLDITCH, H., "Geometrical Theorem", Q. J. Pure Appl. Math., 2, 1858.

[2] BLASCHKE, W., "Über Integrale in der Kinematik", Arch. Math., 1, 18-22, 1948.

[3] HACISALIHOGLU, H. H., "On The Pitch of a Closed Ruled Surface", Mech. Mach. Theory, 7, 291-305, 1972.

[4] MÜLLER, H. R., "Erweiterung des Satsez von Holditch für Geschlossene Raumkurven", Abhandl. Barun. Wiss. Ges., 31, 129-135, 1980.

[5] BROMAN, A., "A Fresh Look at a long-forgotten Theorem", Mathematics Magazine, 54 (3), 99-108, 1981.

[6] POTTMANN, H., "An Isotopric Analogue to Holditch's Theorem", J. Geom., 26 (1), 35-42, 1986.

[7] POTTMANN, H., "Holditch-Sicheln", Arch. Math., 44, 373-378, 1985.

[8] HACISALIHOGLU, H. H., "Two corollaries of Holditch's theorem for the parts of surface in E^3", Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, Math. Statist., 38. (1-2), 59-66, 1989.

[9] GURSOY, O., "The Dual Angle of Pitch of a Closed Ruled Surface", Mech. Mach. Theory, 25, 131-140, 1990.

[10] HACISALIHOGLU, H. H., ABDEL-BAKY, R. A., "Holditch's Theorem for One-Parameter Closed Motions", Mech. Mach. Theory, 32, 235-239, 1997.

[11] KILIÇ, E., KELEŞ, S., "On Holditch's Theorem and Polar Inertia Momentum", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 43, 41- 47, 1994.

[12] HACISALIHOGLU, H. H., AMIROV A. Kh., "On Holditch and Liouville Theorems", Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, Math. Statist., 44. (1-2), 59-66, 1995.

[13] KARADAG, B., KELES, S., "Paralel Projection Area and Holditch's Theorem", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 45, 75-84, 1996.

[14] TUTAR, A., KURUOGLU, N., “The Steiner Formula and the Holditch Theorem for the Homothetic Motions on the Planar Kinematics”, Mechanism and Machine Theory, 34 (1), 1-6, 1999.

[15] KURUOGLU, N., YUCE, S., “The Generalized Holditch Theorem for the Homothetic Motions on the Planar Kinematics”, Czechoslavak Mathematical Journal, 54 (129), 337-340, 2004.

[16] YUCE, S., KURUOGLU, N., “A Generalization of the Holditch Theorem for the Planar Homothetic Motions”, Applications of Mathematics, 50 (2), 87-91, 2005.

[17] DULDUL, M., KURUOGLU, N., “On the Polar Moment of Inertia of the Projection Curve”, Applied Mathematics E-Notes, 5, 124-128, 2005.

[18] ABDEL-BAKY, R. A., “One Parameter Closed Dual Spherical Motions and Holditch’s Theorem”, Sitzungsber Abt. II 214, 27-41, 2005.

[19] YUCE, S., KURUOGLU, N., “The Steiner Formulas for the Open Planar Homothetic Motions”, Applied Mathematics E-Notes, 6, 26-32, 2006.

[20] HACISALİHOĞLU, H. H., “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math., 2, 1983.

[21] STUDY, E., “Geometrie der Dynamen”, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1903.

[22] GURSOY, O., KUCUK, A., “On the Invariants of Trajectory Surfaces”, Mech. Mach. Theory, 34, 587-597, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

Nesrin Eralp, 21.08.1985 de Kırklareli'nde doğdu. İlköğrenimini Şanlıurfa Ahmet Erseven İlköğretim Okulunda, ortaöğrenimini Sakarya Figen Sakallıoğlu Anadolu Lisesinde tamamladı. 2003 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2007 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Programına başladı. Halen öğrenimine devam etmektedir.