T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUADRATİK İRRASYONEL SAYILARIN NEWTON YAKLAŞIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet KOLSUZ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI**

Nisan 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUADRATİK İRRASYONEL SAYILARIN NEWTON YAKLAŞIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrt. Mehmet KOLSUZ

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 10 / 03 / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR**	**Prof. Dr. İbrahim OKUR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, D tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen yakınsaklılları ile bu yakınsaklıkların $\frac{1}{2}\left(\frac{P_n}{Q_n}+\frac{DQ_n}{P_n}\right)$ Newton yakınsaklık formülünde yerine yazılması sonucunda elde edilen Newton yakınsaklıkları arasındaki bağıntılar anlatılmış ve bu bağıntıların, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu ile ilgili olduğunu gösteren örnekler verilmiştir.

Çalışmamda, bilgi ve birikimini benimle paylaşan, ilgisini eksik etmeyen danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI'ya teşekkür ederim.

Yüksek lisansa başlamam konusunda beni sürekli teşvik eden annem Menekşe KOLSUZ ve babam Mustafa KOLSUZ'a, ayrıca çalışmamın son bölümlerine doğru aramıza katılan, yoğunluktan dolayı kendisiyle yeteri kadar ilgilenemediğim kendisine ayırmam gereken zamandan fedakarca vazgeçerek bana yardımcı olmaya çalışan kızım Defne KOLSUZ'a ve son olarak çalışmamın her anında desteğini benden esirgemeyen eşim Ayten KOLSUZ'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

D	: Tam kare olmayan pozitif tamsayı
$\dfrac{P_k}{Q_k}$	: Sürekli kesirin k. yaklaşımı
$\dfrac{p_k}{q_k}$	: Sürekli kesirin k. yaklaşımı
$Q\left(\sqrt{d}\right)$	: Rasyonel sayılar kümesinin genişlemesi
R_n	: Sürekli kesirin n. yaklaşımı
$\left(r_n\right)$	: Newton yaklaşımlar dizisi
s	: Periyodik sürekli kesirin periyodu
S_k	: Sürekli kesirin k. parçası
Z	: Tamsayılar kümesi

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sürekli Kesirler, Kuadratik İrrasyonel Sayılar, Periyodik Sürekli Kesirler, Periyot, Yaklaşımlar, Newton Yaklaşımları

Bu çalışmada ilk olarak, sürekli kesirler, sürekli kesirlerin yaklaşımları ve yaklaşımların özellikleri ile yaklaşımlar yardımıyla çözülen Diophant ve Pell denklemlerinden bahsedildi.

İkinci kısımda kuadratik irrasyonel sayıların periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen yaklaşımları ile Newton yaklaşımları arasındaki ilişkiler anlatıldı. Verilen örneklerle, bazı yaklaşım değeri için hesaplanan Newton yaklaşımlarının aynı zamanda farklı bir yaklaşım değerine eşit olduğu gösterilerek, bu durumun hangi şartlarda gerçekleştiği anlatıldı. Newton yaklaşımının farklı bir yaklaşım değerine eşit olmasının, yaklaşımı alınan kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu ile bağlantılı olduğu örneklerle anlatıldı.

Son bölümde ise $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının Newton yaklaşımı ile yaklaşımının eşit olmaması durumunda, bu iki yaklaşım değerinin bulunduğu eşitliklerin tam kare olmayan D tam sayısının yazımıyla ilgili olduğu anlatıldı.

NEWTON'S APPROXIMATIONS OF QUADRATIC IRRATIONAL NUMBERS

SUMMARY

Key Words: Continued Fraction, Quadratic Irrational Number, Periodic Continued Fraction, Period, Approximations, Newton's Approximation

First of all, we mention about continued fraction, approximations of continued fraction, properties of these approximations, Diophant and Pell equations how can they be solved by approximations.

In second chapter we mention about some relations between approximations of a periodic continued fraction and Newton's approximations. Examples are given about some Newton's approximation which the same, different approximations and explain this situation when can be turn out to be true. Newton's approximation equal to be different approximation is about period of length periodic continued fraction of quadratic irrational number.

In the last chapter we explained situations which Newton's approximation isn't equal to approximation and how can be these aproximation the same equation.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 1.1.1 $n \geq 0$, $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$ tamsayılar ve a_0 hariç hepsi pozitif olmak üzere;

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

biçimindeki ifadeye düzgün veya basit sürekli kesir, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ değerlerine de, basit sürekli kesrin elemanları denir. Bu ifade $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ şeklinde gösterilecektir. $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$ değerlerinin sonlu olması durumunda, sürekli kesre n. mertebeden sonlu sürekli kesir, $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$ değerlerinin sonsuz olması durumunda da sürekli kesre sonsuz sürekli kesir denir. Buna göre n. mertebeden sonlu sürekli kesirde n+1 tane eleman vardır.

Her sonlu basit sürekli kesir, elemanları üzerinde yapılan sonlu sayıda rasyonel işlemin sonucuna eşittir. $r = c/d$, $(c, d) = 1$, $c, d \in \mathrm{Z}$, $d > 0$ olmak üzere r'nin sürekli kesir açılımı aşağıdaki eşitliklerden yararlanılarak hesaplanacaktır:

$$c = a_0 d + r_0 \quad , \quad 0 < r_0 < d$$

$$d = a_1 r_0 + r_1 \quad , \quad 0 < r_1 < r_0$$

$$r_0 = a_2 r_1 + r_2 \quad , \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = a_{n-1}r_{n-2} + r_{n-1} \quad , \qquad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_{n-2} = a_n r_{n-1} + 0$$

r rasyonel sayısının sürekli kesir açılımı, $r = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ ve $r = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n - 1, 1]$ biçiminde olmak üzere iki şekilde yazılacaktır.

Tanım 1.1.2 $S_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ yazılımına, sürekli kesrin bir parçası (segment) denir. Sonlu ya da sonsuz herhangi bir sürekli kesrin bir parçası, sonlu bir sürekli kesirdir.

Tanım 1.1.3 $r_k = [a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n]$ ifadesine, sonlu sürekli kesrin kalanı denir. Sonlu sürekli kesir için $0 \leq k \leq n$ olmak üzere; $r = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, r_k]$ biçiminde yazılır.

Örnek 1.1.1 Bu örnekte, $\dfrac{23}{5}$ rasyonel sayısının sürekli kesir açılımı bulunmuştur.

$23 = 4.5 + 3$

$5 = 1.3 + 2$

$3 = 1.2 + 1$

$2 = 2.1$

$\dfrac{23}{5} = [4;1,1,2]$ veya $\dfrac{23}{5} = [4;1,1,1,1]$ olarak yazılır.

Tanım 1.1.4 $r = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ olsun. $[a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$, $k \leq n$ açılımına karşılık gelen rasyonel sayıya, sürekli kesrin k. yaklaşımı denir. Sürekli kesrin k. yaklaşımı p_k / q_k şeklinde gösterilip, yaklaşımlar aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$[a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$[a_0;a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$[a_0;a_1,a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}} = \frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}$$

$[a_0;a_1,a_2,...,a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ yaklaşımını hesaplayabilmek için aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 1.1.1 (Yaklaşımların Oluşumu) $k \geq 2$ olmak üzere;

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \qquad (1.1.1)$$

eşitlikleri vardır (Tekrarlı bağıntılar) [5].

Örnek 1.1.2 Yukarıdaki bağıntılarda $k=0$ yazılırsa: $p_{-2}=0$, $p_{-1}=1$, $q_{-2}=1$, $q_{-1}=0$ bulunur.

Önerme 1.1.1 a_0 hariç, $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ pozitif tamsayı, her x reel sayısı ve $\forall k \geq 0$ tamsayısı için;

$$[a_0;a_1,a_2,...,x] = \frac{xp_{k-1}+p_{k-2}}{xq_{k-1}+q_{k-2}}$$

biçimindedir.

İspat: k üzerinden tümevarım uygulandığında, $k=0$;

$$[x] = \frac{x}{1} = \frac{xp_{-1}+p_{-2}}{xq_{-1}+q_{-2}}$$

sağlanır. Bu eşitliğin k için sağlandığı kabul edilerek, k+1 için ispat yapıldığında;

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_k, x] = \left[a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k + \frac{1}{x}\right] = \mathrm{A}$$

$$A = \frac{\left(a_k + \frac{1}{x}\right)p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{x}\right)q_{k-1} +_{k-2}} = \frac{x(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{x(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{xp_k + p_{k-1}}{xq_k + q_{k-1}}$$

bulunur.

Teorem 1.1.2 $\forall k \geq -1$ için;

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \tag{1.1.2 }$$

olur $[5]$.

Tanım 1.1.5 $(c, d) = 1$ olmak üzere $cx + dy = 1$ biçimindeki denklemlere Diophant denklemi denir. Teorem 1.1.2 kullanılarak bu denklemlerin bir çözümü bulunur. $\frac{c}{d} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ olsun. Bu durumda n tek ise $(x, y) = (q_{n-1}, -p_{n-1})$, n çift ise $(x, y) = (-q_{n-1}, p_{n-1})$, verilen denklemin bir çözümü olur. Gerçekten de $\frac{c}{d} = \frac{p_n}{q_n}$ olup, $c = p_n$ ve $d = q_n$ alınabilir. Teorem 1.1.2 den; $cq_{n-1} - p_{n-1}d = (-1)^{n-1}$ olacağından n tek ise $(x, y) = (q_{n-1}, -p_{n-1})$, n çift ise $(x, y) = (-q_{n-1}, p_{n-1})$ değerleri denklem için bir çözüm olur.

Örnek 1.1.3 Bu örnekte $158x + 45y = 1$ denkleminin bir çözümü bulunmuştur.

$158 = 3.45 + 23$

$45 = 1.23 + 22$

$23 = 1.22 + 1$

$22 = 1.22$

olup, $158/45$ rasyonel sayısının sürekli kesir açılımı, $158/45 = [3;1,1,22]$ olarak bulunur. $158/45$ sürekli kesrinin yaklaşımları Tablo 1.1.1 de gösterilmiştir.

Tablo 1.1.1 $158/45$ rasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

158/45	**k=0**	**k=1**	**k=2**	**k=3**	**k = 4**
p_k	3	4	7	151	158
q_k	1	1	2	43	45

$158/45 = [3;1,1,22]$ açılımı alınırsa, bu açılıma göre $n = 3$ olup tektir. Dolayısıyla $x = q_2$, $y = -p_2$ olup $x = 2$, $y = -7$ bulunur. $158/45$ rasyonel sayısının sürekli kesir açılımı $158/45 = [3;1,1,21,1]$ biçiminde de alınabilir. Bu durumda $n = 4$ olacağı için $x = -q_3$ ve $y = p_3$ olup, $x = -43$ ve $y = 151$ bulunur.

Teorem 1.1.3 Her $k \geq 0$;

$$p_k q_{k-2} - q_k p_{k-2} = (-1)^k a_k$$

veya

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}} \tag{1.1.3 }$$

eşitlikleri vardır $[5]$.

Önerme 1.1.2 i) Çift yaklaşımlar dizisi artandır: $(c_0 < c_2 < c_4 < c_6 < c_8 ...)$.

ii) Tek yaklaşımlar dizisi azalandır: $(c_1 > c_3 > c_5 > c_7 > c_9 ...)$.

iii) Her tek yaklaşım, her çift yaklaşımdan büyüktür.

İspat: i) Her çift $k \geq 2$ için (1.1.3) eşitliğinden;

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} + \frac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}}$$

yazılır. $\frac{p_k}{q_k} = c_k$ ve $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = c_{k-2}$ alınıp, k değerinin de çift olduğu dikkate alınarak;

$$c_k = c_{k-2} + \frac{a_k}{q_k q_{k-2}}$$

eşitliği yazılabilir.

Bu eşitlikte q_k ve a_k değerlerinin $\forall k \geq 0$ için pozitif olduğu dikkate alındığında $c_{k-2} < c_k$ olup, çift yaklaşımlar dizisinin artan olduğu sonucuna varılır.

ii) Her tek $k \geq 1$ için (1.1.3) eşitliğinden benzer şekilde,

$$c_k = c_{k-2} - \frac{a_k}{q_k q_{k-2}}$$

eşitliği yazılabilir. q_k ve a_k değerlerinin $\forall k \geq 0$ için pozitif olduğu dikkate alındığında $c_{k-2} > c_k$ olup, tek yaklaşımlar dizisinin azalan olduğu sonucuna varılır.

iii) (1.1.2) eşitliği $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$ biçiminde yazılıp, $\forall t \geq 0$ için $k = 2t+1$ alındığında,

$$\frac{p_{2t+1}}{q_{2t+1}} - \frac{p_{2t}}{q_{2t}} = \frac{1}{q_{2t+1} q_{2t}}$$

elde edilerek,

$$c_{2t+1} = c_{2t} + \frac{1}{q_{2t+1} q_{2t}} \qquad \text{ve} \qquad c_{2t+1} > c_{2t}$$

yazılır. $\forall\ r, s \geq 0$ için eğer, $r = s$ (i)'den $c_{2r+1} > c_{2s}$ olur. Eğer $r \neq s$ ise ($r < s$) $c_{2r+1} > c_{2s+1} > c_{2s}$ olur. Dolayısıyla $c_{2r+1} > c_{2s}$ olduğu yazılarak, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.1.4 $\forall k \geq 1$için, $a_k > 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ tamsayılar dizisi verildiğinde $c_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ ise, $\lim_{k\to\infty} c_k$ mevcuttur. $\forall r, s \geq 0$ tamsayısı için $c_{2r} < \lim_{k\to\infty} c_k < c_{2s+1}$ olur [5].

Teorem 1.1.5 $\forall k \geq 0$ için sonsuz sürekli kesrinin α değeri;

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

dir [5].

Teorem 1.1.6 $[a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$ sürekli kesri yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır [5].

Teorem 1.1.7 Tüm yakınsaklıklar indirgenemezdir [5].

Teorem 1.1.8 $\forall k \geq 0$ için sonsuz sürekli kesrinin α değeri;

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k (q_{k+1} + q_k)}$$

dir [5].

Teorem 1.1.5 ve Teorem 1.1.8 yardımıyla, $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ değeri için alt sınır ve üst sınır oluşturulmuş olur. Dolayısıyla $\frac{1}{q_k(q_k - q_k)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$ yazılabilir.

1.2. Ara Kesirler

$k \geq 2$ ve i sayısı keyfi bir negatif tamsayı olsun.

$$\frac{p_{k-1}(i+1)+p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}}-\frac{ip_{k-1}+p_{k-2}}{iq_{k-1}+q_{k-2}}=\frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}][iq_{k-1}+q_{k-2}]}$$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}},\frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}},\frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}},\frac{p_{k-2}+3p_{k-1}}{q_{k-2}+3q_{k-1}},...,\frac{p_{k-2}+q_k p_{k-1}}{q_{k-2}+q_k q_{k-1}}=\frac{p_k}{q_k} \qquad (1.2.1)$$

yazılabilir. Bu dizinin ilk ve son terimlerinin ya ikisi de tek mertebeli yakınsaklık yada ikisi de çift mertebeli yakınsaklıktır. İlk terim ve son terim arasında kalan kesirlere ara kesir adı verilir.

Tanım 1.2.1 Pozitif paydalı $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ kesirleri verilsin. $\frac{a+c}{b+d}$ kesrine $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirlerinin medyanı veya ortancası denir.

Önerme 1.2.1 İki kesrin medyanı, daima değer olarak iki kesir arasında kalır.

İspat: $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ olsun. Bu durumda $bc-ad\geq 0$ yazılabilir.

$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}\geq 0$ bulunur. Diğer taraftan $\frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{b(b+d)}\leq 0$ olup,

$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ bulunur.

Sonuç olarak (1.2.1) de bulunan ara kesirler, bir önceki kesir ile $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ kesrinin medyanıdır.

Teorem 1.2.1 $\forall\alpha\in R$ için α ya eşit değerli sadece bir tane sürekli kesir vardır. Bu sürekli kesir, α rasyonel iken sonlu, α irrasyonel iken sonsuzdur [5].

BÖLÜM 2. KUADRATİK İRRASYONEL SAYILAR VE PERİYODİK KESİRLER

2.1. Temel Tanımlar

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$ fonksiyonu $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n \in \mathrm{Z}$ katsayılarına sahip n. dereceden bir polinom olsun. α sayısı, f(x) polinomunun bir kökü oluyor ise, α 'ya cebirsel sayı denir.

Her $\alpha = \dfrac{a}{b}$ sayısı, $f(x) = bx - a$ polinomunun kökü olduğundan cebirsel sayı kavramı rasyonel sayı kavramının bir genellemesidir.

α cebirsel sayısı, n.dereceden bir polinomun kökü ise, α ya n. dereceden cebirsel sayı denir. Bu tanımdan hareketle her rasyonel sayının 1. dereceden cebirsel sayı olduğu söylenebilir. 2. dereceden cebirsel sayılara, özel olarak, kuadratik irrasyonel sayılar da denir.

Örnek 2.1.1 $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısı $f(x) = x^2 - 2$ polinomunun kökü olduğu için 2.dereceden cebirsel bir sayı, dolayısıyla kuadratik bir irrasyonel sayıdır.

Tanım 2.1.1 $u, v \in Q$ $v \neq 0$ ve $d > 0$ tam kare olmayan bir tam sayı ise, $u + v\sqrt{d}$ reel sayısına bir kuadratik irrasyonel sayı denir.

$Q(\sqrt{d}) = \{u + v\sqrt{d} : u, v \in Q\}$ kümesi Q rasyonel sayılar cisminin bir genişlemesidir. Kuadratik irrasyonel sayılar bu cismin irrasyonel sayılarıdır.

Tanım 2.1.2 $\alpha = u + v\sqrt{d} \in Q(\sqrt{d})$ ise $\alpha' = u - v\sqrt{d}$ irrasyonel sayısına α 'nın eşleniği denir.

Önerme 2.1.1 $\forall\alpha,\beta\in Q(\sqrt{d})$ için eşlenik olmanın, aşağıdaki özellikleri vardır.

$$\text{i)}\ (\alpha\mp\beta)' = \alpha'\mp\beta'$$

$$\text{ii)}\ (\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$$

$$\text{iii)}\ \beta\neq 0 \text{ ise } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)' = \frac{\alpha'}{\beta'}$$

$\alpha = u+v\sqrt{d}\in Q(\sqrt{d})$, $v\neq 0$, α ve α', $x^2-2ux+u^2-du^2=0$ kuadratik denkleminin farklı kökleridir[8].

Tanım 2.1.3 $n\geq 0$, $m>0$ olmak üzere, $[b_0,b_1,b_2,...,b_{n-1},\overline{c_0,c_1,c_2,...,c_{m-1}}]$ şeklindeki bir sonsuz sürekli kesre, periyodik sürekli kesir denir. Burada alınan en küçük m sayısına sürekli kesrin periyodu denir.

Periyodik sürekli kesirler, özel olarak devir eden tamsayı sayısına göre de adlandırılırlar. Örneğin sadece bir tane sayının tekrar ettiği sürekli kesirlere 1 periyodiktir, sadece iki tane sayının devrettiği sürekli kesirlere de 2 periyodiktir denir.

Tanım 2.1.4 a_0'dan sonraki bütün elemanları devreden, $[a_0;\overline{a_1,a_2,...a_n}]$ biçimindeki periyodik sürekli kesre, pür periyodik sürekli kesir denir. D tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısı pür periyodik sürekli kesir açılımına sahiptir.

Örnek 2.1.2 $\sqrt{3}=[1;\overline{1,2}]$ sürekli kesri, 2-periyodik sürekli kesirdir.

Örnek.2.1.3 $\alpha=[5;\overline{1,10}]$ biçiminde sürekli kesir açılımı verilen, periyodik sürekli kesrinin değeri bulunabilir. $\gamma=[1,10]$ alınırsa, $\alpha=[5,\gamma]$ olur. Dolayısıyla $\gamma=[1,10,\gamma]$ olduğundan, $\gamma=1+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{\gamma}}$ yazılabilir. Buradan $\gamma=\dfrac{11\gamma+1}{10\gamma+1}$ olup,

$10\gamma^2-10\gamma-1=0$ denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde $\gamma=\dfrac{5+\sqrt{35}}{10}$

ve $\alpha=[5,\gamma]=5+\dfrac{10}{5+\sqrt{35}}=\sqrt{35}$ kuadratik irrasyonel sayısı bulunmuş olur.

Teorem 2.1.1 n. dereceden her reel irrasyonel cebirsel α için; p, q tam sayılar, $q>0$ olmak üzere, $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right|>\dfrac{C}{q^n}$ olacak şekilde pozitif bir C vardır [8].

Teorem 2.1.2 Her periyodik sürekli kesir, bir kuadratik irrasyonel sayı gösterir. Ve her kuadratik irrasyonel sayı, bir periyodik sürekli kesir yardımıyla temsil edilir.

İspat: $(\Rightarrow)$ α periyodik bir sürekli olsun.

$$\alpha=\left[a_0,a_1,a_2,...,a_{k_n-1},\overline{a_{k_n},a_{k_n+1},...,a_{k_n+h-1}}\right]$$

Periyodik sürekli kesrin kalanları için $r_{k+h}=r_k$ yazılabilir. α kalanlar yardımıyla;

$$\alpha=\frac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}}$$ biçiminde yazılabilir.

$$\alpha=\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}}=\frac{p_{k+h-1}r_{k+h}+p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h}+q_{k+h}-2}=\frac{p_{k+h-1}r_k+p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k+q_{k+h-2}}$$

olup, son iki rasyonel ifade arasında içler dışlar çarpımı yapıldığında, r_k tam katsayılı bir 2. Dereceden denklemi sağlamış olur. Dolayısıyla, r_k α'ya karşılık gelen kuadratik bir sayıdır.

($\Leftarrow$) Tersine α sayısı, tamsayı katsayılı $P(x)=ax^2+bx+c$ polinomunun bir kökü olsun. Bu durumda $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ olup, α sayısı n. mertebeden kalanlarına göre; $\alpha=\dfrac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}}$ biçiminde yazılabilir.

Bu değer, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ eşitliğinde yerine yazıldığında, $A_n r_n^{\,2}+B_n r_n+C_n=0$ denklemi sağlanır. Burada;

$$A_n=ap_{n-1}^{\,2}+bp_{n-1}q_{n-1}+cq_{n-1}^{\,2}$$

$$B_n=2ap_{n-1}p_{n-2}+b\left(p_{n-1}q_{n-2}+p_{n-2}q_{n-1}\right)+2cq_{n-1}q_{n-2}$$

$$C_n=ap_{n-2}^{\,2}+bp_{n-2}q_{n-2}+cq_{n-2}^{\,2}$$

olarak alınmıştır. A_n eşitliğinde n yerine $n-1$ yazıldığında $C_n=A_{n-1}$ olduğu görülür. Ayrıca $A_n r_n^{\,2}+B_n r_n+C_n=0$, denklemi için Δ incelendiğinde;

$$B_n^{\,2}-4A_nC_n=\left(b^2-4ac\right)\left(p_{n-1}q_{n-2}+p_{n-2}q_{n-1}\right)^2=b^2-4ac$$

bulunur. Ayrıca Teorem 2.1.1 den $\left|\alpha-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|>\dfrac{1}{q_{n-1}^{\,2}}$ yazılabilir. $p_{n-1}=\alpha q_{n-1}+\dfrac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}$ ve $\left|\delta_{n-1}\right|<1$ alınıp, A_n eşitliğinde p_{n-1} yerine yazılarak;

$$A_n=\left(\alpha q_{n-1}+\frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2+b=\left(\alpha q_{n-1}+\frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)q_{n-1}+cq_{n-1}^{\,2}$$

$$A_n=a\alpha^2+b\alpha+cq_{n-1}^{\,2}+2a\alpha\delta_{n-1}+\frac{a\delta_{n-1}^{\,2}}{q_{n-1}^{\,2}}$$

$$\left|C_n\right|=\left|A_{n-1}\right|<2\left|a\alpha\right|+\left|a\right|+\left|b\right|$$

bulunur. Dolayısıyla, C_n mutlak değerce sınırlı olup, n sonlu sayıda değer alabilir.

Buradan $A_n r_n^{\;2} + B_n r_n + C_n = 0$ biçiminde sonlu sayıda denklemle karşılaşılacağı söylenebilir. r_n belirli değerleri sadece sonlu sayıda değer alabileceği için k ve h pozitif tamsayılar olmak üzere, $r_k = r_{k+h}$ yazılabilir. Bu ise α nın periyodik bir sürekli kesre sahip olduğunun göstergesidir.

Örnek 2.1.4 A sayısının sürekli kesri, $A = [a; b, b, b...] = \left[a; \bar{b}\right]$ biçiminde olsun.

$A = a + \dfrac{1}{[b; b, b, b,...]}$ ve $B = [b; b, b, b,...]$ olup, $B = b + \dfrac{1}{[b; b, b, b...]}$, veya $B = b + \dfrac{1}{B}$ biçiminde yazılabilir. $B^2 - bB - 1 = 0$, denklemi çözülüp pozitif kök hesaplandığında $B = \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{2}$ bulunur. Buradan;

$$A = a + \frac{1}{B} \quad \Rightarrow \quad A = a + \frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 4}} \quad \Rightarrow \quad A = a - \frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{2} \quad \text{olup,}$$

$$A = \frac{2a - b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4}}{2},$$

bulunur.

Bu uygulamada özel olarak herhangi pozitif a ve b' ler için hesaplama yapıldığında;

i) $a = b$ alınırsa; $A = \dfrac{b}{2} + \dfrac{\sqrt{b^2 + 4}}{2}$ bulunur. Örneğin $b = 1$ iken, $A = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \left[1; \bar{1}\right]$ olur.

ii) $b = 2a$ alınırsa; $A = \dfrac{2a - 2a}{2} + \dfrac{\sqrt{4a^2 + 4}}{2} = \sqrt{a^2 + 1}$ bulunur. Özel olarak $a = 1$ için, $A = \sqrt{2} = \left[1; \bar{2}\right]$ bulunur.

Örnek 2.1.5 A sayısı, $A=[1;2,3,4,5,4,5,4,5,...]=[1;2,3,\overline{4,5}]$ biçiminde sürekli kesir açılımına sahip olsun.

$$A=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{[4;5,4,5...]}}}$$ olup, $B=[4;5,4,5,...]$ yazılabilir.

$$B=4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{B}} \quad \Rightarrow \quad 5B^2-20B-4=0$$ denklemi çözülüp, pozitif kök alınarak;

$$B=\frac{10+2\sqrt{30}}{5}$$ bulunur. Bu değer A da yerine yazıldığında;

$$A=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{10+2\sqrt{30}}{5}}}}=\frac{115+20\sqrt{30}}{80+14\sqrt{30}}=\frac{80-\sqrt{30}}{52}$$ olur.

Teorem 2.1.3 i) A sayısı periyodik sürekli kesre sahip olsun. $A=[a_1;a_2,...,a_l,\overline{b_1,b_2,...b_m}]$ sürekli kesri, $A=\dfrac{r+s\sqrt{\Delta}}{t}$ biçiminde yazılabilir. Burada r, s, t tam sayı, $\Delta>0$ 'dır.

ii) r, s, t, Δ tamsayılar ve $\Delta>0$ olmak üzere, $\dfrac{r+s\sqrt{\Delta}}{t}$ sayısı periyodik sürekli kesir açılımına sahiptir[8].

2.2. Sürekli Kesir Açılımının Cebirsel Algoritma Yardımıyla Bulunması

$\sqrt{n}$ nin sürekli kesir açılımı, aşağıdaki aşamalar takip edilerek bulunacaktır.

i) Karesi n’ye en yakın olan tamsayı bulunur. Bu sayı m ise, $m^2 < n$ olup, m tamsayısı, $(m+1)^2 > n$ eşitsizliğini sağlar.

ii) $\sqrt{n} = m + \frac{1}{x}$ yazılıp, buradan da, $x = \frac{1}{\sqrt{n} - m}$ elde edilir.

iii) $x = \frac{1}{\sqrt{n} - m}\left(\frac{\sqrt{n} + m}{\sqrt{n} + m}\right) = \frac{\sqrt{n} + m}{n - m^2}$

iv) Bir önceki aşamada bulunan sayı $\sqrt{n}$ olduğunda, işlem biter.

Örnek 2.2.1 Bu örnekte, $\sqrt{14}$ kuadratik irrasyonel sayısının, periyodik sürekli kesir açılımı bulunacaktır.

$$\sqrt{14} = 3 + \left(\sqrt{14} - 3\right) = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{14} - 3}} = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{14} + 3}{5}}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{14} + 3}{5} = 1 + \frac{1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\sqrt{14} + 2}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{14} + 2}{2} = 2 + \frac{1}{x_3} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{\sqrt{14} + 2}{5}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} = 1 + \frac{1}{x_4} \quad \Rightarrow \quad x_4 = \sqrt{14} + 3$$

$$x_4 = \sqrt{14} + 3 = 6 + \left(\sqrt{14} - 3\right)$$

olup, işlem tamamlanır. $\sqrt{14}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımı, $\sqrt{14} = \left[3; \overline{1,2,1,6}\right]$ biçimindedir.

2.3. Pell Denklemleri

N, $d \in \mathrm{Z}$ için $x^2 - dy^2 = N$ biçimindeki denklemlere Pell Denklemleri denir.

Bu kısımda, özel olarak $N = \mp 1$ ve d tam kare olmayan bir pozitif tamsayı olmak üzere, pell denklemlerinin çözümleri ile $\sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımına göre hesaplanan yaklaşımları arasındaki ilişki açıklanacaktır.

Teorem 2.3.1 (p,q) sıralı ikilisi, $x^2 - dy^2 = \mp 1$ Pell denkleminin bir pozitif çözümü ise, $\frac{p}{q}$ $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir açılımından elde edilebilecek bir yaklaşımdır.

İspat: $p^2 - dq^2 = 1$ ise, $\left(p - q\sqrt{d}\right)\left(p + q\sqrt{d}\right) = 1$ yazılabilir. $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right| = \frac{1}{q\left(p + \sqrt{d}\right)}$ olup, $p^2 = 1 + dq^2$ olduğundan $p > q$ ve $p + q\sqrt{d} > 2q$ alınabilir. Buradan; $\frac{p}{q} - \sqrt{d} < \frac{1}{2q^2}$ elde edilerek, $\frac{p}{q}$ nun $\sqrt{d}$ nin bir yaklaşımı olduğu görülür.

Sonuç olarak $\sqrt{d}$ nin periyot uzunluğu m olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ pell denkleminin temel çözümü, m çift ise $\left(p_{m-1}, q_{m-1}\right)$, m tek ise $\left(p_{2m-1}, q_{2m-1}\right)$ olur. $x^2 - dy^2 = -1$ pell denkleminin temel çözümü de m tek ise $\left(p_{m-1}, q_{m-1}\right)$ olur.

Örnek 2.3.1 Bu örnekte $x^2 - 41y^2 = 1$ pell denkleminin temel çözümü bulunacaktır. $\sqrt{41}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımı, $\sqrt{41} = \left[6; \overline{2,2,12}\right]$ şeklindedir. $\sqrt{41}$ in periyodik olan sürekli kesir açılımında periyot değeri $m = 3$ olup, bu değer tektir. Yukarıdaki sonuca göre temel çözüm, $\left(p_{2m-1}, q_{2m-1}\right)$ den $\left(p_5, q_5\right)$, $x^2 - 41y^2 = -1$ pell denkleminin temel çözümü de

(p_{m-1}, q_{m-1}) den (p_2, q_2) olur. $\sqrt{41} = [6; \overline{2,2,12}]$ sürekli kesir açılımının ilk beş yaklaşım değeri, aşağıdaki tablo ile gösterilmiştir:

Tablo 2.3.1 $\sqrt{41}$ irrasyonel sayısın yaklaşımlarının tablosu

$\sqrt{41}$	**k=0**	**k=1**	**k=2**	**k=3**	**k = 4**	**k = 5**
p_k	6	13	32	397	826	2049
q_k	1	2	5	62	129	320

$x^2 - 41y^2 = 1$ pell denkleminin temel çözümü, $(x, y) = (2049{,}320)$ olur. Gerçekten de bulunan çözümün sağlaması yapıldığında;
$2049^2 - 41.320^2 = 4198401 - 4198400 = 1$ olduğu görülmektedir..

Örnek 2.3.2 Bu örnekte $x^2 - 23y^2 = 1$ pell denkleminin temel çözümü bulunacaktır. $\sqrt{23}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımı, $\sqrt{23} = [4; \overline{1,3,1,8}]$ şeklindedir. $\sqrt{23}$ ün periyodik olan sürekli kesir açılımında periyot değeri $m = 4$ olup, çifttir. Yukarıdaki sonuca göre temel çözüm (p_{m-1}, q_{m-1}) den (p_3, q_3) olarak bulunmuştur. $\sqrt{23} = [4; \overline{1,3,1,8}]$ sürekli kesir açılımının yaklaşımları aşağıdaki tablo ile gösterilmiştir:

Tablo 2.3.2. $\sqrt{23}$ irrasyonel sayısın yaklaşımlarının tablosu

$\sqrt{23}$	**k=0**	**k=1**	**k=2**	**k=3**
p_k	4	5	19	24
q_k	2	1	4	5

$x^2 - 23y^2 = 1$ pell denkleminin temel çözümü, $(x, y) = (24{,}5)$ olur. Gerçekten de bulunan çözümün sağlaması yapıldığında, $24^2 - 23.5^2 = 576 - 575 = 1$ olduğu görülmektedir.

Teorem 2.3.2 $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise, tüm (x_n, y_n) pozitif çözümleri $\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{d}$ biçimindedir.

İspat: Öncelikle yukarıdaki eşitlikte tanımlanan (x_n, y_n) çiftlerinin bir çözüm olduğu gösterilecektir.

$$
\begin{aligned}
{x_n}^2 - d{y_n}^2 &= \left(x_n - y_n\sqrt{d}\right)\left(x_n + y_n\sqrt{d}\right) \\
&= \left(x_1 - y\sqrt{d}\right)^n \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n \\
&= \left({x_1}^2 + d{y_1}^2\right)^n \\
&= 1
\end{aligned}
$$

bulunur. Çünkü $\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{d}$ eşitliği var ise, eşlenik olarak $\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{d}$ eşitliği de sağlanır.

Şimdi de her pozitif çözümün temel çözümün bir kuvveti olduğu gösterilecektir. (s,t) bir pozitif çözüm olup, (x_n, y_n) ler arasında olmasın. Bu durumda, $x_1 + y_1\sqrt{d}$, $s + t\sqrt{d} > 1$ olduğundan $\exists m \in \mathrm{N}$ bulunabilir, öyle ki;

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^m \leq s + t\sqrt{d} < \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{m+1}$$

olur. Burada eşitlik durumu söz konusu olamaz. Çünkü eşitlik olması durumunda;

$\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^m = x_m + y_m\sqrt{d} = s + t\sqrt{d} \;\; \Rightarrow \;\; s = x_m,\; t = y_m$ olması gerekecekti.

$\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^m = \dfrac{1}{\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^m}$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik $\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^m$ ile

çarpıldığında; $1 < \left(s + t\sqrt{d}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^m < x_1 + y_1\sqrt{d}$ bulunur.

Burada a ve b tamsayıları; $\left(a + b\sqrt{d}\right) = \left(s + t\sqrt{d}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^m$ eşitliğini sağlayacak biçimde tanımlandığında; $a^2 - db^2 = \left(s^2 - dt^2\right)\left(x_1{}^2 - dy_1{}^2\right)^m$ olup (a,b) nin de bu denklemin bir çözümü ve $1 < a + b\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ olduğu anlaşılmaktadır.

Ayrıca $0 < \left(a + b\sqrt{d}\right)^{-1} < 1$ ve buradan $0 < a - b\sqrt{d} < 1$ olduğu göz önüne alınarak, aşağıdaki ifadeler yazılmıştır.

$$a = \frac{1}{2}\left(a + b\sqrt{d}\right) + \frac{1}{2}\left(a - b\sqrt{d}\right) > \frac{1}{2} > 0$$

$$b\sqrt{d} = \frac{1}{2}\left(a + b\sqrt{d}\right) - \frac{1}{2}\left(a - b\sqrt{d}\right) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Buradan (a,b) nin de bir pozitif çözüm olduğu söylenebilir. Fakat (x_1, y_1) temel çözüm olması nedeni ile $a > x_1$ ve $b > y_1$ olmalıdır. Bu ise, $a + b\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ eşitsizliği ile çelişmektedir.

Ayrıca teoremde n sayısının sıfır ve negatif değerleri de alınarak, (x_n, y_n) çözümleri genişletilirse, verilen denklemin tüm çözümleri elde edilmiş olur.

2.4. Periyodik Sürekli Kesirlerin Yaklaşımları Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, kuadratik irrasyonel sayıların yaklaşımları arasındaki ilişkiler incelenecektir.

D, tam kare olmayan, pozitif bir tamsayı olsun. $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayı olup pür periyodik sürekli kesir açılımına sahiptir. s periyot uzunluğu olmak üzere, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımı alışılagelmiş gösterimden farklı bir biçimde aşağıdaki şekilde de gösterilebilir.

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \Big/ \frac{1}{a_2 +} \Big/ \cdots \Big/ \frac{1}{a_s +} \Big/ \frac{1}{a_1 +} \Big/ \frac{1}{a_2} \cdots = (a_0; a_1, a_2, \ldots, a_s)$$

Örnek 2.4.1 $\sqrt{2} = (1;2)$, $\sqrt{3} = (1;1,2)$, $\sqrt{7} = (1;1,1,1,4)$ şeklinde yazılabilir.

Bu bölümde n. yakınsaklık $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ şeklinde gösterilecektir.

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \Big/ \frac{1}{a_2 +} \Big/ \cdots \Big/ \frac{1}{+ a_{n-1}} \qquad (2.4.1)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 & Q_1 &= 1 \\ P_2 &= a_0 a_1 + 1 & Q_2 &= a_1 \\ P_k &= a_{k-1} P_{k-1} + P_{k-2} & Q_k &= a_{k-1} Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{aligned} \qquad (2.4.2)$$

eşitliklerinin olduğu bilinmektedir. Ayrıca $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımı, $\sqrt{D} = (a_0; a_1, a_2, \ldots, a_s)$ için;

$$a_0 = \left[\ \sqrt{D}\ \right] \qquad (a_0, \sqrt{D} \text{ sayısının tam kısmıdır.}) \qquad (2.4.3)$$

$$a_s = 2a_0 \qquad (2.4.4)$$

eşitlikleri yazılabilir.

$\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımını oluşturan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{s-1}$ tamsayıları simetriktir. Simetriklikten dolayı;

$$a_i = a_{s-i} \tag{2.4.5}$$

yazılabilir.

Örnek 2.4.2 $\sqrt{71}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı, $\sqrt{71} = (8;2,2,1,7,1,2,2,16)$ şekline olup, burada $a_0 = 8$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 7$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$, $a_7 = 2$ $a_8 = 16$ dır. $a_8 = 2a_0$, $a_1 = a_7$, $a_2 = a_6$, $a_3 = a_5$ yazılabilir.

Burada bir (p_k) polinomu;

$$\begin{aligned} &p_0 = 1 \\ &p_1(x_1) = x_1 \\ &p_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 1 \\ &p_k(x_1, x_2, ..., x_k) = x_k\, p_{k-1}(x_1, x_2, ..., x_{k-1}) + p_{k-2}(x_1, x_2, ..., x_{k-2}) \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

şeklinde tanımlanarak, (p_k) polinomu ile (P_n) ve (Q_n) dizileri arasındaki bağlantı kurulmuştur.

$$\begin{aligned} P_n &= p_n(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \\ Q_n &= p_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \end{aligned} \tag{ 2.4.7 }$$

Bundan sonra, (p_n) polinomu indissiz olarak gösterilecektir. Bu gösterim herhangi bir karışıklığa sebebiyet vermeyecektir.

Önerme 2.4.1 p polinomu simetriktir [14].

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = p(x_n, x_{n-1}, ..., x_1) \tag{2.4.8}$$

Önerme 2.4.2 $p(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 p(x_2, x_3, ..., x_n) + p(x_3, x_4, ..., x_n)$ [14].

Şimdi $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının, periyodik sürekli kesir açılımına göre hesaplanan yaklaşımlarının, payları ile paydaları arasındaki ilişkiyi veren eşitlikleri içeren bir teorem verilecektir.

Teorem 2.4.1 Bütün pozitif n tamsayıları için;

$$P_{ns} = a_0 Q_{ns} + Q_{ns-1} \tag{2.4.9}$$

$$DQ_{ns} = a_0 P_{ns} + P_{ns-1} \tag{2.4.10}$$

İspat: $n = 1$ seçilmiştir. Benzer ispat bütün n değerleri için yapılabilir. $a_s = 2a_0$ olduğu için;

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\Big/ \frac{1}{a_2 +}\Big/ \cdots \Big/ \frac{1}{a_{s-1} +}\Big/ \frac{1}{a_s +}\Big/ \frac{1}{a_1 +}\cdots$$

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\Big/ \frac{1}{a_2 +}\Big/ \cdots \Big/ \frac{1}{a_0 + \sqrt{D}}$$

$$\sqrt{D} = \frac{p\left(a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, a_0 + \sqrt{D}\right)}{p\left(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_0 + \sqrt{D}\right)} = \frac{\left(a_0 + \sqrt{D}\right)P_s + P_{s-1}}{\left(a_0 + \sqrt{D}\right)Q_s + Q_{s-1}}$$

$$a_0 P_s + P_{s-1} - DQ_s = \sqrt{D}\left(a_0 Q_s + Q_{s-1} - P_s\right)$$

eşitlikleri yazılabilir. Sonuç olarak, $\sqrt{D}$ irrasyonel sayıdır. Eşitliğin sağlanabilmesi için, parantez içlerinin sıfır olması gerekmektedir. Dolayısıyla $n = 1$ için;

$$P_s = a_0 Q_s + Q_{s-1}$$

$$DQ_s = a_0 P_s + P_{s-1}$$

bulunur ve ispat tamamlanır $[14]$.

Teorem 2.4.2 s çift ve $r = \frac{s}{2}$ olmak üzere, bütün pozitif n tamsayıları için;

$$\frac{P_{nr}}{Q_{nr}} = \frac{P_{nr+1} - P_{nr-1}}{Q_{nr+1} - Q_{nr-1}} \tag{2.4.11}$$

ve

$$D=\frac{P_{nr}}{Q_{nr}}\cdot\frac{P_{nr+1}+P_{nr-1}}{Q_{nr+1}+Q_{nr-1}} \tag{2.4.12}$$

eşitlikleri vardır.

İspat : $n=1$ için ispat yapılırsa, $a_{2r}=a_s=2a_0$ olduğu için;

$$\sqrt{D}=\frac{\left(a_r+\frac{1}{a_{r+1}+}\bigg/\cdots\bigg/\frac{1}{a_0+\sqrt{D}}\right)P_r+P_{r-1}}{\left(a_r+\frac{1}{a_{r+1}+}\bigg/\cdots\bigg/\frac{1}{a_0+\sqrt{D}}\right)Q_r+Q_{r-1}}$$

$$=\frac{p\left(a_r,...,a_{2r-1},a_0+\sqrt{D}\right)P_r+p\left(a_{r+1},...,a_{2r-1},a_0+\sqrt{D}\right)P_{r-1}}{p\left(a_r,...,a_{2r-1},a_0+\sqrt{D}\right)Q_r+p\left(a_{r+1},...,a_{2r-1},a_0+\sqrt{D}\right)Q_{r-1}}$$

yazılabilir. $a_1,a_2,a_3,...,a_{2r-1}$ dizisinin simetrik olduğu kullanılarak Önerme 2.4.1 ve Önerme 2.4.2 den;

$$\begin{aligned}p\left(a_r,...,a_{2r-1},a_0+\sqrt{D}\right)&=\left(a_0+\sqrt{D}\right)p\left(a_r,...,a_{2r-1}\right)+p\left(a_r,...,a_{2r-2}\right)\\&=\sqrt{D}\,p\left(a_r,...,a_{2r-1}\right)+p\left(a_r,...,a_{2r-1},a_0\right)\\&=\sqrt{D}\,p\left(a_1,...,a_r\right)+p\left(a_0,...,a_r\right)\\&=\sqrt{D}Q_{r+1}+P_{r+1}\end{aligned}$$

bulunur, böylece;

$$\sqrt{D}=\frac{\left(\sqrt{D}Q_{r+1}+P_{r+1}\right)P_r+\left(\sqrt{D}Q_r+P_r\right)P_{r-1}}{\left(\sqrt{D}Q_{r+1}+P_{r+1}\right)Q_r+\left(\sqrt{D}Q_r+P_r\right)Q_{r-1}}$$

bulunmuştur [14].

BÖLÜM 3. NEWTON YAKLAŞIMLARI

3.1. Temel Tanımlar ve Örnekler

$(r_n)_{n\geq 1}$ dizisi, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımına göre Newton yaklaşımlarının oluşturduğu bir dizi olmak üzere, (r_n) dizisinin elemanları aşağıdaki formüle göre hesaplanacaktır:

$$\frac{1}{2}\left(r_n + \frac{D}{r_n}\right). \tag{3.1.1}$$

Bu formüle, Newton yaklaşım formülü denir.

(R_n) dizisi en iyi yaklaşıma sahip olsun. Bütün kesirlerin arasında paydası Q_n den küçük ve eşit olan R_n, $\sqrt{D}$ için en iyi yaklaşımdır. Fakat (R_n) dizisi Newton dizisiyle karşılaştırıldığında, örneklerde de görüleceği gibi $\sqrt{D}$ ye çok daha yavaş yaklaşır.

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{D}{r_n}\right) \tag{3.1.2}$$

(R_n) yaklaşımlar dizisi ile, (r_n) Newton yaklaşımlar dizisi arasında ilginç ilişkiler vardır. Bu bölümde, örneklerle bu ilişkiler üzerinde durulacaktır.

Örnek 3.1.1 $\sqrt{2} = (1;2)$ sayısının yaklaşımları Tablo 3.1.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.1.1 $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	1	1
2	3	2
3	7	5
4	17	12
5	41	29
6	99	70
7	239	169
8	577	408
9	1393	985
10	3363	2378
11	8119	5741
12	19601	13860
13	47321	33461
14	114243	80782
15	275807	195025
16	665857	470832
17	1607521	1136689
…	…	…
…	…	…
23	318281039	225058681
24	768398401	543339720
25	1855077841	1311738121
…	…	…
…	…	…
31	367296043199	259717522849
32	886731088897	627013566048
33	2140758220993	1513744654945
…	…	…
…	…	…

Tablo 3.1.1 (Devam) $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
47	489133282872437279	345869461223138161
48	1180872205318713601	835002744095575440
49	2850877693509864481	2015874949414289041
…	…	…
…	…	…
63	651385640666817642523007	460599203683050495415105
64	1572584048032918633353217	1111984844349868137938112

r_1 değerleri için, Tablo 3.1.1 den bazı yaklaşımlar alınacaktır. r_k lar $\frac{u_k}{v_k}$ kesirlerini temsil edecektir. Tablo 3.1.1 de, yaklaşımlar dizisinin terimleri verilmiştir. Şimdi de, $\sqrt{2}$ nin, Newton yaklaşımlarının görülebileceği bir tablo verilecektir.

Tablo 3.1.2 $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısının Newton yaklaşımlarının tablosu (n = 1)

k	u_k	v_k	n
1	1	1	1
2	3	2	2
3	17	12	4
4	577	408	8
5	665857	470832	16
6	886731088897	627013566048	32
7	1572584048032918633353217	1111984844349868137938112	64

Tablo 3.1.2 de, $\sqrt{2}$ nin periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen 1. yaklaşım değeri, r_1 başlangıç değeri olarak alınarak, Newton yaklaşımlarıyla elde edilen dizinin ilk yedi terimi elde edilmiştir. Bu yedi terim;

$$r_1 = \frac{P_1}{Q_1},\ r_2 = \frac{P_2}{Q_2},\ r_3 = \frac{P_4}{Q_4},\ r_4 = \frac{P_8}{Q_8},\ r_5 = \frac{P_{16}}{Q_{16}},\ r_6 = \frac{P_{32}}{Q_{32}},\ r_7 = \frac{P_{64}}{Q_{64}}$$

şeklindedir.

Tablo 3.1.3 $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısının Newton yaklaşımlarının tablosu (n = 3)

k	u_k	v_k	n
1	7	5	3
2	99	70	6
3	19601	13860	12
4	768398401	543339720	24
5	1180872205318713601	835002744095575440	48

Tablo 3.1.3 de $\sqrt{2}$ nin periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen 3. yaklaşım değeri r_1 olarak alınarak, Newton yaklaşımlarıyla elde edilen dizinin ilk beş terimi bulunmuştur. Bu beş terim;

$$r_1 = \frac{P_3}{Q_3},\ r_2 = \frac{P_6}{Q_6},\ r_3 = \frac{P_{12}}{Q_{12}},\ r_4 = \frac{P_{24}}{Q_{24}},\ r_5 = \frac{P_{48}}{Q_{48}}$$

şeklindedir.

Tablo 3.1.1 den seçilen herhangi bir n değerine karşılık gelen yaklaşım, Newton yaklaşımlar dizisinin birinci terimi olarak alınıp, Newton yaklaşım formülü yardımıyla da Newton yaklaşımlar dizisinin diğer terimleri bulunacaktır. Ayrıca Tablo 3.1.2 ve Tablo 3.1.3 den yararlanılarak aşağıdaki formül verilmiştir:

$$R_{2n} = \frac{1}{2}\left(R_n + \frac{2}{R_n} \right) \qquad (3.1.3)$$

$\sqrt{3} = (1;1,2)$ ve $\sqrt{8} = (2;1,4)$ için benzer tablolar yapılarak, yukarıdaki sonucun

2-periyotlu sürekli kesirler için de geçerli olduğu gösterilmiştir.

Örnek 3.1.2 Bu örnekte $\sqrt{3} = (1;\overline{1,2})$ irrasyonel sayısının yaklaşımları incelenmiştir;

Tablo 3.1.4 $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	1	1
2	2	1
3	5	3
4	7	4
5	19	11
6	26	15
7	71	41
8	97	56
9	265	153
10	362	209
11	989	571
12	1351	780
13	3691	2131
14	5042	2911
15	13775	7953
16	18817	10864
17	51409	29681
18	70226	40545
19	191816	110771
20	262087	151316
21	716035	413403
22	978122	564719
23	2672279	1542841
24	3650401	2107560
25	9973081	5757961
26	13623482	7865521

Tablo 3.1.4 (Devam) $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
27	37220045	21489003
28	50843527	29354524
29	138907099	80198051
30	189750626	109552575
31	518408351	299303201
32	708158977	408855776
33	1934726305	1117014753
34	2642885282	1525870529
35	7220496869	4168755811
36	9863382151	5694626340
37	26947261171	15558008491
38	36810643322	21252634831
39	100568547815	58063278153
40	137379191137	79315912984

Tablo 3.1.4 de $\sqrt{3}$ ün yaklaşımlar dizisinin terimleri verilmiştir. Ayrıca burada, $\sqrt{3}$ ün Newton yaklaşımlarının görülebileceği birkaç tane daha tablo verilmiştir.

Tablo 3.1.5 $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının Newton yaklaşımlarının tablosu (n = 4)

k	u_k	v_k	n
1	7	4	4
2	97	56	8
3	18817	10864	16
4	708158977	408855776	32

Tablo 3.1.5 de $\sqrt{3}$ ün periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen, 4. yaklaşım değeri r_1 olarak alınarak, Newton yaklaşımlarıyla elde edilen dizinin ilk dört terimi

elde edilmiştir. Bu dört terim;

$$r_1 = \frac{P_4}{Q_4},\ r_2 = \frac{P_8}{Q_8},\ r_3 = \frac{P_{16}}{Q_{16}},\ r_4 = \frac{P_{32}}{Q_{32}}$$

şeklindedir.

Tablo 3.1.6 $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının Newton yaklaşımlarının tablosu (n = 5)

k	u_k	v_k	n
1	19	11	5
2	362	209	10
3	262087	151316	20
4	137379191137	79315912984	40

Tablo 3.1.6 da $\sqrt{3}$ ün periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen 5. yaklaşım değeri r_1 olarak alınarak, Newton yaklaşımlarıyla elde edilen dizinin ilk dört terimi elde edilmiştir. Bu dört terim;

$$r_1 = \frac{P_5}{Q_5},\ r_2 = \frac{P_{10}}{Q_{10}},\ r_3 = \frac{P_{20}}{Q_{20}},\ r_4 = \frac{P_{40}}{Q_{40}}$$

şeklindedir.

Örnek 3.1.3 Bu örnekte $\sqrt{8} = (2;\overline{1,4})$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları incelenmiştir;

Tablo 3.1.7 $\sqrt{8}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	2	1
2	3	1
3	14	5
4	17	6
5	82	29
6	99	35
7	478	169
8	577	204
9	2786	985
10	3363	1189
11	16238	5741
12	19601	6930
13	94642	33461
14	114243	40391
15	551614	195025
16	665857	235416
17	3215042	1136689
18	3880899	1372105
19	18738638	6625109
20	22619537	7997214
21	109216786	38613965
22	131836323	46611179
23	636562078	225058681
24	768398401	271669860
25	3710156682	1311738121
26	4478554083	1583407981
27	21624373014	7645370045
28	26102927097	9228778026
29	126036081402	44560482149
30	152139008499	53789260175

Tablo 3.1.7 (Devam) $\sqrt{8}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
31	734592115398	259717522849
32	866731123897	313506783024
33	4281516610986	1513744654945
34	5148247734883	1827251437969
35	24874507550518	8822750406821
36	30022755285401	10650001844790
37	144965528692122	51422757785981
38	174988283977523	62072759630771
39	844918664602214	299713796309065
40	1019906948579737	361786555939536

Tablo 3.1.7 de $\sqrt{8}$ in yaklaşımlar dizisinin terimleri verilmiştir. Şimdi $\sqrt{8}$ in Newton yaklaşımlarının görülebileceği tablolar verilecektir.

Tablo 3.1.8 $\sqrt{8}$ irrasyonel sayısının Newton yaklaşımlarının tablosu (n = 1)

k	u_k	v_k	n
1	2	1	1
2	3	1	2
3	17	6	4
4	577	204	8
5	665857	235416	16
6	866731123897	313506783024	32

Tablo 3.1.8'de $\sqrt{8}$ in periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen 1. yaklaşım değeri r_1 olarak alınarak, Newton yaklaşımlarıyla elde edilen dizinin ilk altı terimi elde edilmiştir. Bu altı terim;

$$r_1 = \frac{P_1}{Q_1},\ r_2 = \frac{P_2}{Q_2},\ r_3 = \frac{P_4}{Q_4},\ r_4 = \frac{P_8}{Q_8},\ r_5 = \frac{P_{16}}{Q_{16}},\ r_6 = \frac{P_{32}}{Q_{32}}$$

biçimindedir.

Tablo 3.1.9 $\sqrt{8}$ irrasyonel sayısının Newton yaklaşımlarının tablosu (n = 5)

k	u_k	v_k	n
1	82	29	5
2	3363	1189	10
3	22619537	7997214	20
4	1019906648579737	361786555939	40

Tablo 3.1.9 da $\sqrt{8}$ in periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen 5. yaklaşım değeri r_1 olarak alınarak, Newton yaklaşımlarıyla elde edilen dizinin ilk dört terimi elde edilmiştir. Bu dört terim;

$$r_1 = \frac{P_5}{Q_5},\ r_2 = \frac{P_{10}}{Q_{10}},\ r_3 = \frac{P_{20}}{Q_{20}},\ r_4 = \frac{P_{40}}{Q_{40}}$$

biçimindedir.

Sonuç olarak, periyot uzunluğu 2 olan kuadratik irrasyonel sayıların bazı yaklaşımlarını, Newton yaklaşımına göre hesaplamak, tekrarlı bağıntılarla hesaplamaktan daha kolaydır. Örneğin, $\sqrt{8}$ in 5. yaklaşım değeri hesaplandıktan sonra, bu değer kullanılarak, 640. yaklaşım değeri, Newton yaklaşım formülünden, sadece 7 tane eşitlik hesaplanarak kolaylıkla bulunabilir. Fakat burada Newton yaklaşım formülüyle bulunan değerlerin en sade halinin yaklaşım olduğu unutulmamalıdır.

$$r_2 = \frac{P_{10}}{Q_{10}},\ r_3 = \frac{P_{20}}{Q_{20}},\ r_4 = \frac{P_{40}}{Q_{40}},\ r_5 = \frac{p_{80}}{q_{80}},\ r_6 = \frac{p_{160}}{q_{160}},\ r_7 = \frac{p_{320}}{q_{320}},\ r_8 = \frac{p_{640}}{q_{640}}$$

Oysa ki, tekrarlı bağıntılarla 640. yaklaşım değerine ulaşabilmek için, yaklaşımların payı ve paydası ayrı ayrı düşünüldüğünde, $\frac{p_5}{q_5}, \frac{p_7}{q_7}, ..., \frac{p_{639}}{q_{639}}$ olmak üzere tam $635.2 = 1270$ tane eşitlik hesaplamak gerekmektedir.

Burada merak edilen "bütün $\sqrt{D}$ ler için de, Newton yaklaşım formülüyle elde edilen değerler ile yaklaşımlar arasında, yukarıdaki örneklere benzer ilişkiler var mıdır? " sorusunun cevabıdır. Bu sorunun cevabı, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyot uzunluğuna bağlıdır.

3.2. Periyot Uzunlukları ile Newton Yaklaşımları Arasındaki İlişkiler

Teorem 3.2.1 s, kuadratik irrasyonel sayıyı temsil eden sürekli kesrin periyodu olsun.Burada bir r değeri aşağıdaki biçimde tanımlanacaktır.

$$r = \begin{cases} s \quad , & s \quad \text{tek} \\ \frac{s}{2} \quad , & s \quad \text{çift} \end{cases}$$

bütün n-ler için;

$$R_{2nr} = \frac{1}{2}\left(R_{nr} + \frac{D}{R_{nr}} \right) \tag{3.2.1}$$

eşitliği vardır.

İspat: $s = 2$ için $r = 1$ olup, (3.2.1) eşitliği elde edilir.
$r = s$ (periyodu tek olan kuadratik irrasyonel sayılar) olması durumu Teorem 2.4.2 kullanılarak farklı bir biçimde ispatlanacaktır:

$$\text{R}_{2\text{s}} = \frac{\left(a_s + \frac{1}{a_{s+1} +} \diagup \dots \diagup \frac{1}{a_{2s-1}} \right) P_s + P_{s-1}}{\left(a_s + \frac{1}{a_{s+1} +} \diagup \dots \diagup \frac{1}{a_{2s-1}} \right) Q_s + Q_{s-1}} = \frac{\left(a_0 + \frac{P_s}{Q_s} \right) P_s + P_{s-1}}{\left(a_0 + \frac{P_s}{Q_s} \right) Q_s + Q_{s-1}}$$

$$R_{2s} = \frac{\dfrac{P_s^{\,2}}{Q_s^{\,2}} + \dfrac{a_0 P_s + P_{s-1}}{Q_s}}{\dfrac{P_s}{Q_s} + \dfrac{a_0 Q_s + Q_{s-1}}{Q_s}} = \frac{R_s^{\,2} + D}{2R_s}$$

Benzer ispat, R_{2ns} için de yapılabilir. $r = \dfrac{s}{2}$ için aynı işlemler yapılırsa;

$$R_{2r} = \frac{p(a_r,...,a_{2r-1})P_r + p(a_{r+1},...,a_{2r-1})P_{r-1}}{p(a_r,...,a_{2r-1})Q_r + p(a_{r+1},...,a_{2r-1})Q_{r-1}} = \frac{Q_{r+1}P_r + Q_r P_{r-1}}{Q_{r+1}Q_r + Q_r Q_{r-1}}$$

$$= \frac{P_r(Q_{r+1} + Q_{r-1}) + Q_r(P_{r+1} + P_{r-1})}{2Q_r(Q_{r+1} + Q_{r-1})} = \frac{1}{2}\left(R_r + \frac{D}{R_r}\right)$$

bulunur.

Örnek 3.2.1 Bu örnekte $\sqrt{21} = (4;1,1,2,1,1,8)$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları incelenmiştir.

Tablo 3.2.1 $\sqrt{21}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	4	1
2	5	1
3	9	2
4	23	5
5	32	7
6	55	12
7	472	103
8	527	115
9	999	218
10	2525	551
11	3524	769
12	6049	1320
13	51916	11329

Tablo 3.2.1 (Devam) $\sqrt{21}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
14	57965	12649
15	109881	23978
16	277727	60605
17	387608	84583
18	665335	145188
19	5710288	1246087
20	6375623	1391275
21	12085911	2737362
22	30547445	6665999
23	36923068	9403361
24	67470513	16069360
25	576687172	137958241

Aşağıda $\sqrt{21}$ için (3.2.1) eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir. $\sqrt{21}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $s=6$ (çift) olduğu için, $r=3$ alınmalıdır. $r=3$ için (3.2.1) eşitliği düzenlenerek;

$$R_{6n} = \frac{1}{2}\left(R_{3n} + \frac{21}{R_{3n}}\right)$$

bulunmuştur. Bu eşitliğin $n=1$, $n=2$, $n=3$ değerleri için gerçeklendiği gösterilmiştir.

$n=1$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_3 + \frac{21}{R_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} + \frac{21}{\frac{9}{2}}\right) = \frac{55}{12} = R_6,$$

$n=2$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_6 + \frac{21}{R_6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{55}{12} + \frac{21}{\frac{55}{12}}\right) = \frac{6049}{1320} = R_{12},$$

$n = 3$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_9 + \frac{21}{R_9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{999}{218} + \frac{21}{\frac{999}{218}}\right) = \frac{665335}{145188} = R_{18},$$

$\sqrt{21}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu 6 olup, (çift olduğundan, $r = 3$ için 3.2.1 eşitliğinin sağlanması beklenir) $r = 2$ durumu incelenmiştir.

$$R_{4n} = \frac{1}{2}\left(R_{2n} + \frac{21}{R_{2n}}\right)$$

Eşitliğinin $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ve $n = 4$ için sağlandığı gösterilmiştir.

$n = 1$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_2 + \frac{21}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{21}{5}\right) = \frac{23}{5} = R_4,$$

$n = 2$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_4 + \frac{21}{R_4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{5} + \frac{21}{\frac{23}{5}}\right) = \frac{527}{115} = R_8,$$

$n = 3$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_6 + \frac{21}{R_6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{55}{12} + \frac{21}{\frac{55}{12}}\right) = \frac{6049}{1320} = R_{12},$$

$n = 4$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_8 + \frac{21}{R_8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{527}{115} + \frac{21}{\frac{527}{115}}\right) = \frac{277727}{60605} = R_{16},$$

$\sqrt{21}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu 6 olup, bu sayı (3.2.1) eşitliğini hem $r = 3$ için hem de $r = 2$ için sağlamaktadır. Acaba bu durum periyodu 6 olan bütün kuadratik irrasyonel sayılar için de geçerli midir?

$\sqrt{22} = (4;1,2,4,2,1,8)$ kuadratik irrasyonel sayısı, $\sqrt{21}$ kuadratik irrasyonel sayısıyla aynı periyoda sahiptir. Her iki kuadratik irrasyonel sayınında periyodu 6'dır. $\sqrt{22}$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları da bir tabloyla gösterilip, bu yaklaşımlara göre, (3.2.1) eşitliğinin $r = 3$ ve $r = 2$ değerleri için sağlanıp sağlanmadığı araştırılmıştır.

Örnek 3.2.2 Bu örnekte $\sqrt{22}$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları incelenmiştir.

Tablo 3.2.2 $\sqrt{22}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	4	1
2	5	1
3	14	3
4	61	13
5	136	29
6	197	42
7	1712	365
8	1909	407
9	5530	1179
10	24029	5123
11	53588	11425
12	77617	16548
13	674524	143809
14	752141	160357
15	2178806	464523
16	9467365	2018449
17	21113536	4501421
18	30580901	6519870
19	265760744	56660381
20	296341645	63180251

Tablo 3.2.2 (Devam) $\sqrt{22}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
21	858444034	183020883
22	3730117781	795263783
23	83186779596	1773548449
24	86916897377	2568812232
25	778521958612	22324046305

Öncelikle (3.2.1) eşitliği gereğince, $r=3$ durumu incelenecektir. $r=3$ için (3.2.1) eşitliği düzenlendiğinde, $R_{6n}=\frac{1}{2}\left(R_{3n}+\frac{22}{R_{3n}}\right)$ elde edilir. Eşitliğin $n=1$, $n=2$ ve $n=3$ değerleri için gerçeklendiği aşağıda gösterilmiştir:

$n=1$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_3+\frac{22}{R_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}+\frac{22}{\frac{14}{3}}\right)=\frac{197}{42}=R_6,$$

$n=2$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_6+\frac{22}{R_6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{197}{42}+\frac{22}{\frac{197}{42}}\right)=\frac{77617}{16548}=R_{12},$$

$n=3$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_9+\frac{22}{R_9}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5530}{1179}+\frac{22}{\frac{5530}{1179}}\right)=\frac{30580901}{6519870}=R_{18},$$

bulunur. Şimdi de $r=2$ durumu incelenecektir. $r=2$ için (3.2.1) eşitliği düzenlenirse, $R_{4n}=\frac{1}{2}\left(R_{2n}+\frac{22}{R_{2n}}\right)$ elde edilir. Bu eşitliğin $n=1$ ve $n=2$ değerleri için sağlanıp sağlanmadığı incelenecektir:

$n=1$ için, $$\frac{1}{2}\left(R_2+\frac{22}{R_2}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{22}{5}\right)=\frac{47}{10}\neq R_4,$$

$n = 2$ için, $\quad \frac{1}{2}\left(R_4 + \frac{22}{R_4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{61}{13} + \frac{22}{\frac{61}{13}}\right) = \frac{7439}{1320} \neq R_8$,

bulunur. Görüldüğü gibi $\sqrt{22}$ kuadratik irrasyonel sayısı $(3.2.1)$ eşitliğini, $r = 3$ için sağlarken $r = 2$ için sağlamamaktadır. Sonuç olarak $\sqrt{21}$ kuadratik irrasyonel sayısının $(3.2.1)$ eşitliğini, hem $r = 2$ hem de $r = 3$ için sağlamasının periyodunun 6 olmasıyla ilgili olmadığı ortaya çıkmıştır.

Bir başka ilginç durum da, periyodu 5 olan kuadratik irrasyonel sayılar için söz konusudur. Örneğin $D = 13$ için, $\sqrt{13} = (3;1,1,1,1,6)$ olup aşağıdaki eşitlik sağlanmaktadır:

$$\frac{1}{2}\left(R_k + \frac{D}{R_k}\right) = \begin{cases} \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}, & k = 5n \\ \frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}, & k = 5n-1 \\ \frac{P_{2k+2}}{Q_{2k+2}}, & k = 5n+1 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

$(3.2.2)$ eşitliğini inceleyebilmek için $\sqrt{13} = (3;1,1,1,1,6)$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu yapılacaktır.

Örnek 3.2.3 Bu örnekte, $\sqrt{13} = (3;1,1,1,1,6)$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları incelenmiştir.

Tablo 3.2.3 $\sqrt{13}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	3	1
2	4	1
3	7	2

Tablo 3.2.3 (Devam) $\sqrt{13}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

4	11	3
5	18	5
6	119	33
7	137	38
8	256	71
9	393	109
10	649	180
11	4287	1189
12	4936	1369
13	9223	2558
14	14159	3927
15	23382	6485
16	154451	42837
17	177833	49322
18	332284	92159
19	510117	141481
20	842401	233640
21	5564523	1543321
22	6406924	1776961
23	11971447	3320282
24	18378371	5097243
25	30349818	8417525
26	200477279	55602393

i) $k = 5n$ durumu;

$n = 1$ için $k = 5$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_5 + \frac{13}{R_5}\right) = \frac{P_{10}}{Q_{10}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{13}{\frac{18}{5}}\right) = \frac{649}{180} = \frac{P_{10}}{Q_{10}}$ olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=10$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_{10}+\frac{13}{R_{10}}\right)=\frac{P_{20}}{Q_{20}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{649}{180}+\frac{13}{\frac{649}{180}}\right)=\frac{842401}{233640}=\frac{P_{20}}{Q_{20}}$

olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

ii) $k=5n-1$ durumu;

$n=2$ için $k=9$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_{9}+\frac{13}{R_{9}}\right)=\frac{P_{16}}{Q_{16}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{393}{109}+\frac{13}{\frac{393}{109}}\right)=\frac{154451}{42837}=\frac{P_{16}}{Q_{16}}$ olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n=3$ için $k=14$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_{14}+\frac{13}{R_{14}}\right)=\frac{P_{26}}{Q_{26}}$ elde edilir. $\frac{1}{2}\left(\frac{14159}{3927}+\frac{13}{\frac{14159}{3927}}\right)=\frac{200477279}{55602393}=\frac{P_{26}}{Q_{26}}$ olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

iii) $k=5n+1$ durumu;

$n=1$ için $k=6$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_{6}+\frac{13}{R_{6}}\right)=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{119}{33}+\frac{13}{\frac{119}{33}}\right)=\frac{14159}{3927}=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$

olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=11$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_{11}+\frac{13}{R_{11}}\right)=\frac{P_{24}}{Q_{24}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{4287}{1189}+\frac{13}{\frac{4287}{1189}}\right)=\frac{18378371}{5097243}=\frac{P_{24}}{Q_{24}}$

olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

(3.2.2) eşitliğinin, periyodu 5 olan $\sqrt{29}=(5;2,1,1,2,10)$ ve $\sqrt{53}=(7,3,1,1,3,14)$ kuadratik irrasyonel sayıları için de sağlandığı örneklerle gösterilmiştir.

Örnek 3.2.4 Bu örnekte, $\sqrt{29}=(5;2,1,1,2,10)$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları, tablo yapılarak incelenmiştir.

Tablo 3.2.4 $\sqrt{29}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	5	1
2	11	2
3	16	3
4	27	5
5	70	13
6	727	135
7	1524	283
8	2251	418
9	3775	701
10	9801	1820
11	101785	18901
12	213371	39622
13	315156	58523
14	528527	98145
15	1372210	254813
16	14250627	2646275
17	29873464	5547363
18	44124091	8193638
19	73997555	13741001

Tablo 3.2.4 (Devam) $\sqrt{29}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
20	192119201	35675640
21	1995189565	370497401
22	4182498331	776670442
23	6177687896	1147167843
24	10360186227	1923838285
25	26898060350	4994844413
26	279340789727	51872282415

i) $k = 5n$ durumu;

$n = 1$ için $k = 5$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_5 + \frac{29}{R_5}\right) = \frac{P_{10}}{Q_{10}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{70}{13} + \frac{29}{\frac{70}{13}}\right) = \frac{9801}{1820} = \frac{P_{10}}{Q_{10}}$ olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n = 2$ için $k = 10$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_{10} + \frac{29}{R_{10}}\right) = \frac{P_{20}}{Q_{20}}$ elde edilir. Gerçekten; $\frac{1}{2}\left(\frac{9801}{1820} + \frac{29}{\frac{9801}{1820}}\right) = \frac{192119201}{35675640} = \frac{P_{20}}{Q_{20}}$ olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

ii) $k = 5n - 1$ durumu;

$n = 1$ için $k = 4$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_4 + \frac{29}{R_4}\right) = \frac{P_6}{Q_6}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{27}{5} + \frac{29}{\frac{27}{5}}\right) = \frac{727}{135} = \frac{P_6}{Q_6}$ olup (3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=9$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_9+\frac{29}{R_9}\right)=\frac{P_{16}}{Q_{16}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{3775}{701}+\frac{29}{\frac{3775}{701}}\right)=\frac{14250627}{2646275}=\frac{P_{16}}{Q_{16}}$

olup (3.2.2) eşitliği sağlanır.

iii) $k=5n+1$ durumu;

$n=1$ için $k=6$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_6+\frac{29}{R_6}\right)=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{727}{135}+\frac{29}{\frac{727}{135}}\right)=\frac{528527}{98145}=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$ olup,

(3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=11$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$\frac{1}{2}\left(R_{11}+\frac{29}{R_{11}}\right)=\frac{P_{24}}{Q_{24}}$ elde edilir ve $\frac{1}{2}\left(\frac{101785}{18901}+\frac{29}{\frac{101785}{18901}}\right)=\frac{10360186227}{1923838285}=\frac{P_{24}}{Q_{24}}$

olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

Örnek 3.2.5 Bu örnekte $\sqrt{53}=(7;3,1,1,3,14)$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları, tablo yapılarak incelenmiştir.

Tablo 3.2.5 $\sqrt{53}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	7	1
2	22	3
3	29	4
4	51	7
5	182	25

Tablo 3.2.5 (Devam) $\sqrt{53}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
6	2599	357
7	7979	1096
8	10578	1453
9	18557	2549
10	66249	9100
11	946043	129949
12	2904378	398947
13	3850421	528896
14	6754799	927843
15	24114818	3312425
16	344362251	47301793
17	1057201571	145217804
18	1401563822	192519597
19	2458765393	337737401
20	8777860001	1205731800
21	125348805407	17217982601
22	384824276222	52859679603
23	510173081629	70077662204
24	894997357851	122937341807
25	3195165155182	438889687625

i) $k = 5n$ durumu;

$n = 1$ için $k = 5$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_5 + \frac{53}{R_5}\right) = \frac{P_{10}}{Q_{10}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{182}{25} + \frac{53}{\frac{182}{25}}\right) = \frac{66249}{9100} = \frac{P_{10}}{Q_{10}}$ olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n = 2$ için $k = 10$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_{10}+\frac{53}{R_{10}}\right)=\frac{P_{20}}{Q_{20}}$ elde edilir ve $\frac{1}{2}\left(\frac{66249}{9100}+\frac{53}{\frac{66249}{9100}}\right)=\frac{8777860001}{1205731800}=\frac{P_{20}}{Q_{20}}$ olup,

(3.2.2) eşitliği sağlanır.

ii) $k=5n-1$ durumu;

$n=1$ için $k=4$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_{4}+\frac{53}{R_{4}}\right)=\frac{P_{6}}{Q_{6}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{51}{7}+\frac{53}{\frac{51}{7}}\right)=\frac{2599}{357}=\frac{P_{6}}{Q_{6}}$ olup,

(3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=9$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_{9}+\frac{53}{R_{9}}\right)=\frac{P_{16}}{Q_{16}}$ elde edilir. Gerçekten, $\frac{1}{2}\left(\frac{18557}{2549}+\frac{53}{\frac{18557}{2549}}\right)=\frac{344362251}{47301793}=\frac{P_{16}}{Q_{16}}$

olup (3.2.2) eşitliği sağlanır.

iii) $k=5n+1$ durumu;

$n=1$ için $k=6$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_{6}+\frac{53}{R_{6}}\right)=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{2599}{357}+\frac{53}{\frac{2599}{357}}\right)=\frac{6754799}{927843}=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$

olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=11$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_{11}+\frac{53}{R_{11}}\right)=\frac{P_{24}}{Q_{24}}$ elde edilir ve $\frac{1}{2}\left(\frac{946043}{129949}+\frac{53}{\frac{946043}{129949}}\right)=\frac{894997357851}{122937341807}=\frac{P_{24}}{Q_{24}}$

olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

Fakat, $\sqrt{74} = (8;1,1,1,1,16)$ kuadratik irrasyonel sayısı, periyodu 5 olan bir kuadratik irrasyonel sayı olmasına rağmen, (3.2.2) eşitliğini sağlamaz.

Örnek 3.2.6 Bu örnekte, $\sqrt{74} = (8;1,1,1,1,16)$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları, tablo yapılarak incelenmiştir.

Tablo 3.2.6 $\sqrt{74}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	8	1
2	9	1
3	17	2
4	26	3
5	43	5
6	714	83
7	757	88
8	1471	171
9	2228	259
10	3699	430
11	61412	7139
12	65111	7569
13	126523	14708
14	191634	22277
15	318157	36985
16	5282146	614037
17	5600303	651022
18	10882449	1265059
19	16482752	1916081
20	27365201	3181140
21	454325968	52814321
22	481691169	55995461
23	936017137	108809782
24	1417708306	164805243
25	2353725443	273615025

i) $k=5n$ durumu;

$n=1$ için $k=5$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_5+\frac{74}{R_5}\right)=\frac{P_{10}}{Q_{10}}$ elde edilir. Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{43}{5}+\frac{74}{\frac{43}{5}}\right)=\frac{3699}{430}=\frac{P_{10}}{Q_{10}}$ olup,

(3.2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=10$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_{10}+\frac{74}{R_{10}}\right)=\frac{P_{20}}{Q_{20}}$ elde edilir. Gerçekten; $\frac{1}{2}\left(\frac{3699}{430}+\frac{74}{\frac{3699}{430}}\right)=\frac{27365201}{3181140}=\frac{P_{20}}{Q_{20}}$

olup, (3.2.2) eşitliği sağlanır.

ii) $k=5n-1$ durumu;

$n=1$ için $k=4$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_4+\frac{74}{R_4}\right)=\frac{P_6}{Q_6}$ elde edilir. Oysa ki; $\frac{1}{2}\left(\frac{26}{3}+\frac{74}{\frac{26}{3}}\right)=\frac{671}{78}\neq\frac{P_6}{Q_6}$ olup, (3.2.2)

eşitliği sağlanmaz.

iii) $k=5n+1$ durumu;

$n=1$ için $k=6$ olup, bu değerler (3.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\frac{1}{2}\left(R_6+\frac{74}{R_6}\right)=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$ elde edilir. Oysa ki; $\frac{1}{2}\left(\frac{714}{83}+\frac{74}{\frac{714}{83}}\right)=\frac{509791}{59262}\neq\frac{P_{14}}{Q_{14}}$ olup,

(3.2.2) eşitliği sağlanmaz.

Dolayısıyla (3.2.2) eşitliği, periyodu 5 olan tüm kuadratik irrasyonel sayılar için, geçerli olan bir eşitlik değildir. Ayrıca burada, (3.2.2) eşitliğinin $5n\mp 2$ için de genişletilemeyeceği, örneklerle gösterilmiştir.

Örnek 3.2.7 Bu örnekte, $\sqrt{13}=(3;1,1,1,1,6)$ kuadratik irrasyonel sayısı incelenecektir. $n=1$ için $(k=5n+2)$ $k=7$ olup, R_7 değerine göre elde edilecek Newton yaklaşımının, $\sqrt{13}$ kuadratik irrasyonel sayısı için herhangi bir yakınsaklık olup olmadığına bakılmıştır:

$$\frac{1}{2}\left(R_7+\frac{13}{R_7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{137}{38}+\frac{13}{\frac{137}{38}}\right)=\frac{37541}{10412}$$ olup, bu değer $\sqrt{13}$ kuadratik irrasyonel sayısı için herhangi bir yaklaşım değildir.

$n=1$ için $(k=5n-2)$ $k=3$ olup, R_3 değerine göre elde edilecek Newton yaklaşımının, $\sqrt{13}$ kuadratik irrasyonel sayısı için, herhangi bir yaklaşım olup olmadığına bakılmıştır:

$$\frac{1}{2}\left(R_3+\frac{13}{R_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}+\frac{13}{\frac{7}{2}}\right)=\frac{101}{28}$$ olup, bu değer $\sqrt{13}$ kuadratik irrasyonel sayısı için herhangi bir yaklaşım değildir.

Örnek 3.2.7 Bu örnekte, $\sqrt{29}=(5;2,1,1,2,10)$ kuadratik irrasyonel sayısı incelenecektir. $n=1$ için $(k=5n+2)$ $k=7$ olup, R_7 değerine göre elde edilecek Newton yaklaşımının, $\sqrt{29}$ kuadratik irrasyonel sayısı için, herhangi bir yaklaşım olup olmadığına bakılmıştır:

$$\frac{1}{2}\left(R_7+\frac{29}{R_7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1524}{283}+\frac{29}{\frac{1524}{283}}\right)=\frac{4645157}{862584}$$ olup, bu değer $\sqrt{29}$ kuadratik irrasyonel sayısı için herhangi bir yaklaşım değildir.

$n=1$ için $(k=5n-2)$ $k=3$ olup, R_3 değerine göre elde edilecek Newton yaklaşımının, $\sqrt{29}$ kuadratik irrasyonel sayısı için, herhangi bir yakınsaklık olup olup olmadığı incelenmiştir:

$\frac{1}{2}\left(R_3+\frac{13}{R_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}+\frac{29}{\frac{16}{3}}\right)=\frac{517}{96}$ olup bu değer $\sqrt{29}$ kuadratik irrasyonel sayısı için herhangi bir yakınsaklık değildir.

Sonuç olarak, (3.2.2) eşitliğinin, periyodu 5 olan bütün kuadratik irrasyonel sayılar için, geçerli olmadığı ve (3.2.2) eşitliğini sağlayan kuadratik irrasyonel sayılar için, bu eşitliğin $k=5n\mp 2$ için genişletilemeyeceği söylenebilir.

Bu bölümde, örneklerle kuadratik irrasyonel sayıların, bazı Newton yaklaşımlarının, aynı zamanda kuadratik irrasyonel sayılar için normal yaklaşım olduğu, fakat bu durumun bütün Newton yaklaşımları için geçerli olmadığı gösterilmiştir.

BÖLÜM 4. SÜREKLİ KESİRLERİN YAKLAŞIMLARI İLE NEWTON YAKLAŞIMLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Bu bölümde verilecek teoremler yardımıyla, kuadratik irrasyonel sayının, herhangi bir yaklaşıma eşit olmayan Newton yaklaşımları, normal yaklaşımın payı ve paydası kullanılarak hesaplanacaktır.

4.1. Tam Kare Olmayan Özel D Tamsayı Değerleri için Newton Yaklaşımları

θ, kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesir açılımı olmak üzere, $n = 1,2,...$ için;

$$\theta = a_0 + \theta_0 \qquad , \qquad a_0 = [\theta]$$
$$1/\theta_{n-1} = a_n + \theta_n \qquad , \qquad a_n = [1/\theta_{n-1}]$$

eşitlikleri yazılabilir.

Bu bölümde bundan önceki bölümlerden farklı olarak, sürekli kesrin k. yaklaşımı, p_k/q_k biçiminde gösterilip, $p_k/q_k = [a_0; a_1,...,a_k]$ biçiminde hesaplanacaktır. Bundan önceki bölümlerde ise sürekli kesrin k. yaklaşımı, P_k/Q_k biçiminde gösterilip, $P_k/Q_k = [a_1; a_2,...,a_k]$ biçiminde hesaplanmıştı. Bu gösterim farkına, 3.Bölümde verilen yaklaşım tablolarını bu bölümde kullanırken, dikkat etmek gerekmektedir. Özetle bu bölümde sürekli kesrin k. yaklaşımına 3.bölümdeki tablolardan bakılmak istenildiğinde, $(k+1)$. yaklaşıma bakmak gerekmektedir. Kısaca $P_{k+1}/Q_{k+1} = p_k/q_k$ yazılabilir.Ayrıca D, tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının, $\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_0, a_1, a_2,...,a_s}]$ biçiminde gösterilebilen periyodik bir sürekli kesir açılımına sahip olduğu ve

$\sqrt{D}=\left[a_0;\overline{a_0,a_1,a_2,...,a_s}\right]$ yazılışında, $i=1,2,3,...,s-1$ olmak üzere, $a_s=2a_0$ ve $a_i=a_{s-i}$ olduğu bilinmektedir.

Teorem 4.1.1 s, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının periyodu olmak üzere, bir r tamsayısı;

$$r=\begin{cases} s, & s \ tek \\ s/2, & s \ çift \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa, $n=1,2,...$ için:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{nr-1}}{q_{nr-1}}+\frac{D}{\frac{p_{nr-1}}{q_{nr-1}}}\right)=\frac{p_{2nr-1}}{q_{2nr-1}} \tag{4.1.1}$$

eşitliği vardır[19].

Önerme 4.1.1 $a\geq 3$ olan, tek bir tam sayı olmak üzere, $D=a^2+4$ şartını sağlayan, tam kare olmayan D tamsayısı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [14].

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_k}{q_k}+\frac{D}{\frac{p_k}{q_k}}\right)=\begin{cases} \dfrac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, & k=5n-1 \\ \dfrac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}, & k=5n-2 \\ \dfrac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}}, & k=5n \\ \dfrac{(a-2)\,p_{2k+2}+p_{2k+1}}{q_{2k+2}+q_{2k+1}}, & k=5n+1 \\ \dfrac{p_{2k+1}-(a-2)\,p_{2k}}{q_{2k+1}-(a-29)\,q_{2k}}, & k=5n-3 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Örnek 4.1.1 Bu örnekte, (4.1.2) eşitliğinin sağlandığı, $\sqrt{13}$ için gösterilecektir. $a = 3$ için $D = a^2 + 4$ eşitliğinden, $D = 13$ bulunur.

i) $k = 5n - 1$ durumu;

$n = 1$ ve $k = 4$ değerleri (4.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$\frac{1}{2}\left(\frac{p_4}{q_4} + \frac{13}{\frac{p_4}{q_4}}\right) = \frac{p_9}{q_9}$ elde edilir. Gerçekten de, $\frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{13}{\frac{18}{5}}\right) = \frac{649}{180} = \frac{p_9}{q_9}$ olup,

(4.1.2) eşitliği sağlanır.

ii) $k = 5n - 2$ durumu;

$n = 1$ ve $k = 3$ değerleri, (4.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$\frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{q_3} + \frac{13}{\frac{p_3}{q_3}}\right) = \frac{p_5}{q_5}$ elde edilir. Gerçekten de, $\frac{1}{2}\left(\frac{11}{3} + \frac{13}{\frac{11}{3}}\right) = \frac{119}{33} = \frac{p_5}{q_5}$ olup,

(4.1.2) eşitliği sağlanır.

iii) $k = 5n$ durumu;

$n = 1$ ve $k = 5$ değerleri, (4.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$\frac{1}{2}\left(\frac{p_5}{q_5} + \frac{13}{\frac{p_5}{q_5}}\right) = \frac{p_{13}}{q_{13}}$ elde edilir. Gerçektende, $\frac{1}{2}\left(\frac{119}{33} + \frac{13}{\frac{119}{33}}\right) = \frac{14159}{3927} = \frac{p_{13}}{q_{13}}$ olup,

(4.1.2) eşitliği sağlanır.

iv) $k = 5n + 1$ durumu;

$n = 1$ ve $k = 6$ değerleri, (4.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$\frac{1}{2}\left(\frac{p_6}{q_6} + \frac{13}{\frac{p_6}{q_6}}\right) = \frac{p_{14} + p_{13}}{q_{14} + q_{13}}$ elde edilir, $\frac{1}{2}\left(\frac{p_6}{q_6} + \frac{13}{\frac{p_6}{q_6}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{137}{38} + \frac{13}{\frac{137}{38}}\right) = \frac{37541}{10412}$ ve

$\frac{p_{14}+p_{13}}{q_{14}+q_{13}}=\frac{23382+14159}{6485+3927}=\frac{37541}{10412}$ bulunur. Bulunan değerlerden, (4.1.2) eşitliğinin sağlandığı.görülür.

v) $k=5n-3$ durumu;

$n=1$ ve $k=6$ değerleri, (4.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{q_2}+\frac{13}{\frac{p_2}{q_2}}\right)=\frac{p_5-p_4}{q_5-q_4}$ elde edilir, $\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{q_2}+\frac{13}{\frac{p_2}{q_2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}+\frac{13}{\frac{7}{2}}\right)=\frac{101}{28}$ ve

$\frac{p_5-p_4}{q_5-q_4}=\frac{119-18}{33-5}=\frac{101}{28}$ olup (4.1.2) eşitliği sağlanır.

4.2. Temel Teorem

Bu kısımda, tam kare olmayan $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımları ile Newton yaklaşımları arasındaki ilişkiyi gösteren temel bir teorem verilecektir.

Teorem 4.2.1 $\sqrt{D}=\left[a_0;\overline{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{s-1},a_s,2a_0}\right]$, $i=0,1,2,\ldots,[s/2]$ ve $(n=0,1,2,\ldots)$ olmak üzere;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{ns+i-1}}{q_{ns+i-1}}+\frac{q_{ns+i-1}}{p_{ns+i-1}}D\right)=\frac{\alpha_i p_{2ns+2i}+p_{2ns+2i-1}}{\alpha_i q_{2ns+2i}+q_{2ns+2i-1}} \tag{4.2.1}$$

ve

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{ns-i-1}}{q_{ns-i-1}}+\frac{q_{ns-i-1}}{p_{ns-i-1}}D\right)=\frac{p_{2ns-2i-1}-\beta_i p_{2ns-2i-2}}{q_{2ns-2i-1}-\beta_i q_{2ns-2i-2}} \tag{4.2.2}$$

olup, $i = 0,1,2,...,[s/2]$ için $\alpha_i = \beta_i$ dir. (4.2.1) eşitliği $n = 0$ alınıp α_i yalnız bırakılacak biçimde düzenlenerek:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} + \frac{q_{i-1}}{p_{i-1}}D\right) = \frac{\alpha_i p_{2i} + p_{2i-1}}{\alpha_i q_{2i} + q_{2i-1}}$$

$$\alpha_i = -\frac{\left(p_{i-1}{}^2 + q_{i-1}{}^2 D\right)q_{2i-1} - 2p_{i-1}q_{i-1}p_{2i-1}}{\left(p_{i-1}{}^2 + q_{i-1}{}^2 D\right)q_{2i} - 2p_{i-1}q_{i-1}p_{2i}} \qquad (4.2.3)$$

bulunmuştur. Benzer biçimde (4.2.2) eşitliğinde $n = 1$ alınıp β_i yalnız bırakılacak biçimde düzenleme yapılarak:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{s-i-1}}{q_{s-i-1}} + \frac{q_{s-i-1}}{p_{s-i-1}}D\right) = \frac{p_{2s-2i-1} - \beta_i p_{2s-2i-2}}{q_{2s-2i-1} - \beta_i q_{2s-2i-2}}$$

$$\beta_i = -\frac{\left(p_{s-i-1}{}^2 + q_{s-i-1}{}^2 D\right)q_{2(s-i)-1} - 2p_{s-i-1}q_{s-i-1}p_{2(s-i)-1}}{\left(p_{s-i-1}{}^2 + q_{s-i-1}{}^2 D\right)q_{2(s-i-1)} - 2p_{s-i-1}q_{s-i-1}p_{2(s-i-1)}} \qquad (4.2.4)$$

elde edilmiştir. Ayrıca $\sqrt{D} = \sqrt{a_0{}^2 + t} = \left[a_0; \overline{a_1, a_2, ..., a_{s-1}, 2a_0}\right]$ olarak düşünülüp, (4.2.1) ve (4.2.2) eşitliklerinde $i = 1$ yazılarak;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{ns}}{q_{ns}} + \frac{q_{ns}}{p_{ns}}D\right) = \frac{\alpha_1 p_{2ns+2} + p_{2ns+1}}{\alpha_{1i} q_{2ns+2} + q_{2ns+1}}$$

ve

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{ns-2}}{q_{ns-2}} + \frac{q_{ns-2}}{p_{ns-2}}D\right) = \frac{p_{2ns-3} - \beta_1 p_{2ns-4}}{q_{2ns-3} - \beta_1 q_{2ns-4}}$$

elde edilmiş, son olarak da,

$$\alpha = \frac{2a_0 - a_1 t}{(a_1 a_2 + 1)t + 2a_0 a_2}$$

bulunmuştur $[19]$.

Örnek 4.2.1 Bu örnekte, $D = 13$, $i = 1$, $n = 1$ değerleri (4.2.1) ve (4.2.2) eşitliklerinde yerine yazılarak, α_1 ve β_1 değerleri hesaplanmış ve bu değerlerin eşit oldukları gösterilmeye çalışılmıştır.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_5}{q_5} + \frac{q_5}{p_5} D\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{119}{33} + 13\frac{33}{119}\right) = \frac{14159}{3927}$$

$$\frac{\alpha_1 p_{12} + p_{11}}{\alpha_1 q_{12} + q_{11}} = \frac{\alpha_1 9223 + 4936}{\alpha_1 2558 + 1369}$$

$$\frac{14159}{3927} = \frac{\alpha_1 9223 + 4936}{\alpha_1 2558 + 1369}$$

$$36218722\alpha_1 + 19383671 = 36218721\alpha_1 + 19383672$$

$$\alpha_1 = 1$$

bulunur. Benzer biçimde;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{q_3} + \frac{q_3}{p_3} D\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{3} + 13\frac{3}{11}\right) = \frac{119}{33}$$

$$\frac{p_7 - \beta_1 p_6}{q_7 - \beta_1 q_6} = \frac{256 - \beta_1 137}{71 - \beta_1 38}$$

$$\frac{119}{33} = \frac{256 - \beta_1 137}{71 - \beta_1 38}$$

$$8448 - 4521\beta_1 = 8449 - 4522\beta_1$$

$$\beta_1 = 1$$

bulunarak, $\alpha_1 = \beta_1$ olduğu gösterilmiştir.

Aşağıda temel teorem olarak adlandırılan, Teorem 4.2.1 in ispatında kullanılacak önermeler verilmiştir.

Önerme 4.2.1 $n = 0,1,2,...$ olmak üzere;

$$\frac{1}{\theta_n} = \frac{\sqrt{D} + k_n}{l_n}$$

$$k_n = (-1)^{n-1}(q_n q_{n-1} D - p_n p_{n-1})$$

$$l_n = (-1)^n (q_n{}^2 D - p_n{}^2)$$

ve

$$\begin{aligned} Dq_n &= k_n p_n + l_n p_{n-1} \\ p_n &= k_n q_n + l_n q_{n-1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{q_n} + \frac{q_n}{p_n} D\right) = \frac{\dfrac{p_n + k_n q_n}{l_n q_n} p_n + p_{n-1}}{\dfrac{p_n + k_n q_n}{l_n q_n} q_n + q_{n-1}}$$

eşitlikleri vardır.

İspat: k_n ve l_n tekrarlı bağıntıları için aşağıdaki eşitliklerin varlığı bilinmektedir;

$$\begin{aligned} k_n &= a_n l_{n-1} + k_{n-1} \\ l_n &= l_{n-2} - a_n{}^2 l_{n-1} + 2a_n k_{n-1} \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad D - k_n{}^2 = l_n l_{n-1}$$

$$k_{-1} = 0 \quad , \quad l_{-1} = 1 \quad , \quad k_0 = a_0 \quad \text{ve} \quad l_0 = D - a_0{}^2$$

Tümevarımla ispat yapılacaktır:

i) k_n için doğru olduğu kabul edilerek, k_{n+1} için doğru olduğu gösterilecektir:

$$(-1)^n (q_{n+1} q_n D - p_{n+1} p_n) = (-1)^n \left(a_{n+1}(q_n{}^2 D - p_n{}^2) + (q_n q_{n-1} D - p_n p_{n-1})\right)$$

$$= (-1)^n \left(a_{n+1}(-1)^n l_n + (-1)^{n-1} k_n\right)$$

$$=a_{n+1}l_n-k_n=k_{n+1}$$

bulunur.

ii) l_{n+1} için doğru olduğu kabul edilerek, l_{n+2} için doğru olduğu gösterilecektir:

$(-1)^{n+2}\left(q_{n+2}{}^2D-p_{n+2}{}^2\right)=B$ alınırsa, bu değer ;

$$\text{B}=(-1)^{n+2}\left(a_{n+2}{}^2\left(q_{n+1}{}^2D-p_{n+1}{}^2\right)+\left(q_n{}^2D-p_n{}^2\right)+2a_{n+2}\left(q_{n+1}q_nD-p_{n+1}p_n\right)\right)$$

$$=(-1)^{n+2}\left(a_{n+2}{}^2(-1)^{n+1}l_{n+1}+(-1)^nl_n+2a_{n+2}(-1)^nk_{n+1}\right)$$

$$=l_n-a_{n+2}{}^2l_{n+1}+2a_{n+2}k_{n+1}=l_{n+2}$$

olup teoremin ilk bölümünün ispatı tamamlanmış olur. Bu bölüm kullanılıp k_n ve l_n yerine yazılarak;

$$k_np_n+l_np_{n-1}=(-1)^{n-1}\left(p_nq_nq_{n-1}D-p_n{}^2p_{n-1}\right)+(-1)^n\left(p_{n-1}q_n{}^2D-p_n{}^2p_{n-1}\right)$$

$$=(-1)^{n-1}q_n\left(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n\right)D=Dq_n$$

ve

$$k_nq_n+l_nq_{n-1}=(-1)^{n-1}\left(q_n{}^2q_{n-1}D-p_np_{n-1}q_n\right)+(-1)^n\left(q_n{}^2q_{n-1}D-p_n{}^2q_{n-1}\right)$$

$$(-1)^{n-1}p_n\left(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n\right)=p_n$$

bulunmuştur. Son olarak önermenin 3. bölümü ispatlanacaktır.

iii)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{q_n}+\frac{q_n}{p_n}D\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p_n{}^2+q_n{}^2D}{p_nq_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p_n\frac{p_n}{q_n}+q_nD}{\frac{p_nq_n}{q_n}}\right)=\frac{\frac{p_np_n}{q_n}+q_nD}{\frac{2p_nq_n}{q_n}}=\frac{\frac{p_n}{q_n}p_n+q_nD}{\frac{p_nq_n}{q_n}+\frac{p_nq_n}{q_n}}$$

$$=\frac{\frac{p_n}{q_n}p_n+q_nD}{\frac{p_n}{q_n}q_n+p_n}=\frac{\left(\frac{p_n}{q_n}+k_n\right)p_n+l_np_{n-1}}{\frac{p_nq_n+p_nq_n}{q_n}}=\frac{\frac{p_n+k_nq_n}{q_nl_n}p_n+p_{n-1}}{\frac{p_nq_n+\left(k_nq_n+l_nq_{n-1}\right)q_n}{l_nq_n}}$$

$$=\frac{\dfrac{(p_n+k_nq_n)p_n}{q_nl_n}+p_{n-1}}{\dfrac{p_nq_n+k_nq_n^{\;2}+l_nq_{n-1}q_n}{l_nq_n}}=\frac{\left(\dfrac{p_n+k_nq_n}{q_nl_n}\right)p_n+p_{n-1}}{\dfrac{(p_n+k_nq_n)q_n+l_nq_{n-1}q_n}{l_nq_n}}=\frac{\left(\dfrac{p_n+k_nq_n}{q_nl_n}\right)p_n+p_{n-1}}{\dfrac{p_n+k_nq_n}{l_nq_n}q_n+q_{n-1}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{p_n+k_nq_n}{q_nl_n}\right)p_n+p_{n-1}}{\dfrac{p_n+q_nk_n}{l_nq_n}q_n+q_{n-1}}$$

bulunup, ispat tamamlanmıştır $[19]$.

Önerme 4.2.2 $i=0,1,2,...,[s/2]$ için;

i) $k_{ns+i}=k_i$, $l_{ns+i}=l_i$ $(n=0,1,2,...)$

ii) $k_{ns-i-1}=k_i$, $l_{ns-i-1}=l_{i-1}$ $(n=1,2,3,...)$

İspat: i) $$\theta_i=\cfrac{1}{a_{i+1}+\cfrac{1}{a_{i+2}+\cfrac{1}{a_{i+3}+\ddots}}}=\cfrac{1}{a_{ns+i+1}+\cfrac{1}{a_{ns+i+2}}}=\theta_{ns+i}$$

$\dfrac{1}{\theta_i}=\dfrac{\sqrt{D}+k_i}{l_i}$, $\dfrac{1}{\theta_{ns+i}}=\dfrac{\sqrt{D}+k_{ns+i}}{l_{ns+i}}$ ve $\dfrac{1}{\theta_i}=\dfrac{1}{\theta_{ns+i}}$ olduğundan;

$k_{ns+i}=k_i$, $l_{ns+i}=l_i$ yazılarak ispat tamamlanmıştır.

ii) Simetriklik gereğince, $a_{ns-i}=a_i$ olduğu kullanılarak:

$\theta_{ns-i-1}=\dfrac{\sqrt{D}-k_{ns-i-1}}{l_{ns-i-1}}=\dfrac{\sqrt{D}-k_{ns-(i+1)}}{l_{ns-(i+1)}}=\dfrac{\sqrt{D}-k_i}{l_i}$ olup, $k_{ns-i-1}=k_i$ ve $l_{ns-i-1}=l_{i-1}$

bulunmuş ve ispat tamamlanmıştır $[19]$.

Burada Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2 kullanılarak asıl teorem olan, Teorem 4.2.1

ispatlanmıştır.

İspat: Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2 kullanılarak;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{ns+i-1}}{q_{ns+i-1}}+\frac{q_{ns+i-1}}{p_{ns+i-1}}D\right)=\frac{\dfrac{p_{ns+i-1}+k_{ns+i-1}q_{ns+i-1}}{l_{ns+i-1}q_{ns+i-1}}p_{ns+i-1}+p_{ns+i-2}}{\dfrac{p_{ns+i-1}+k_{ns+i-1}q_{ns+i-1}}{l_{ns+i-1}q_{ns+i-1}}q_{ns+i-1}+q_{ns+i-2}}$$

$$=\frac{\dfrac{p_{ns+i-1}+k_{i-1}q_{ns+i-1}}{l_{i-1}q_{ns+i-1}}p_{ns+i-1}+p_{ns+i-2}}{\dfrac{p_{ns+i-1}+k_{i-1}q_{ns+i-1}}{l_{i-1}q_{ns+i-1}}q_{ns+i-1}+q_{ns+i-2}}$$

bulunmuştur. Şimdi de Teorem 4.1.2. de ki eşitliğin sağ tarafı kullanılacaktır:

$\alpha_i = a_k$, $p_{2ns+2i} = p_{k-1}$, $p_{2ns+2i-1} = p_{k-2}$, $q_{2ns+2i} = q_{k-1}$, $q_{2ns+2i-1} = q_{k-2}$ olarak düşünülüp:

$$\frac{\alpha_i p_{2ns+2i}+p_{2ns+2i-1}}{\alpha_i q_{2ns+2i}+q_{2ns+2i-1}}=[a_0;a_1,a_2,...,a_{2ns+2i},\alpha_i]$$

$$=\frac{[a_{ns+i};a_{ns+i+1},...,a_{2ns+2i},\alpha_i]p_{ns+i-1}+p_{ns+i-2}}{[a_{ns+i};a_{ns+i+1},...,a_{2ns+2i},\alpha_i]q_{ns+i-1}+q_{ns+i-2}}$$

$$=\frac{[a_i;a_{i+1},...,a_{ns+2i},\alpha_i]p_{ns+i-1}+p_{ns+i-2}}{[a_i;a_{i+1},...,a_{ns+2i},\alpha_i]q_{ns+i-1}+q_{ns+i-2}}$$

bulunmuştur.

$$\begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} q_{i-2} & -p_{i-2} \\ -q_{i-1} & p_{i-1}\end{pmatrix}.(p_{i-1}q_{i-2}-p_{i-2}q_{i-1})$$

$$=\begin{pmatrix} p_{i-1}q_{i-2}{}^2-q_{i-2}q_{i-1}p_{i-2} & -p_{i-2}p_{i-1}q_{i-2}+p_{i-2}{}^2q_{i-1} \\ -q_{i-1}q_{i-2}p_{i-1}+q_{i-1}{}^2p_{i-2} & p_{i-1}{}^2q_{i-2}-p_{i-1}p_{i-2}q_{i-1}\end{pmatrix}$$

eşitliği kullanılarak;

$\begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_{ns+2i} & p_{ns+2i-1} \\ q_{ns+2i} & q_{ns+2i} \end{pmatrix}$ matris çarpımında ki, ters matris hesaplanarak,

çarpımda yerine yazılıp, aşağıdaki. sonuç elde edilmiştir.

$$\begin{pmatrix} p_{i-1}q_{i-2}{}^2 - q_{i-2}q_{i-1}p_{i-2} & -p_{i-2}p_{i-1}q_{i-2} + p_{i-2}{}^2 q_{i-1} \\ -q_{i-1}q_{i-2}p_{i-1} + q_{i-1}{}^2 p_{i-2} & p_{i-1}{}^2 q_{i-2} - p_{i-1}p_{i-2}q_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{ns+2i} & p_{ns+2i-1} \\ q_{ns+2i} & q_{ns+2i} \end{pmatrix}$$

Bu çarpım sonucunda elde edilen 2x2 tipindeki matrisin elemanları $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ biçiminde gösterilerek;

$$c_{11} = (p_{i-1}q_{i-2}{}^2 - q_{i-2}q_{i-1}p_{i-2})p_{ns+2i} + \left(-p_{i-2}p_{i-1}q_{i-2} + p_{i-2}{}^2 q_{i-1}\right)q_{ns+2i}$$

$$c_{12} = (p_{i-1}q_{i-2}{}^2 - q_{i-2}q_{i-1}p_{i-2})p_{ns+2i-1} + \left(-p_{i-2}p_{i-1}q_{i-2} + p_{i-2}{}^2 q_{i-1}\right)q_{ns+2i-1}$$

$$c_{21} = \left(-q_{i-1}q_{i-2}p_{i-1} + q_{i-1}{}^2 p_{i-2}\right)p_{ns+2i} + \left(p_{i-1}{}^2 q_{i-2} - p_{i-1}p_{i-2}q_{i-1}\right)q_{ns+2i}$$

$$c_{22} = \left(-q_{i-1}q_{i-2}p_{i-1} + q_{i-1}{}^2 p_{i-2}\right)p_{ns+2i-1} + \left(p_{i-1}{}^2 q_{i-2} - p_{i-1}p_{i-2}q_{i-1}\right)q_{ns+2i-1}$$

değerleri bulunmuştur. Bu ifadeler düzenlenerek;

$$c_{11} = q_{i-2}\left[(p_{i-1}q_{i-2} - q_{i-1}p_{i-2})p_{ns+2i} + (-p_{i-2}p_{i-1})q_{ns+2i}\right] + p_{i-2}(p_{i-2}q_{i-1})q_{ns+2i}$$

$$= q_{i-2}\left[(-(q_{i-1}p_{i-2} - p_{i-1}q_{i-2})p_{ns+2i} + (-p_{i-2}p_{i-1})q_{ns+2i}\right] + p_{i-2}(p_{i-2}q_{i-1})q_{ns+2i}$$

$$= q_{i-2}(-1)^i p_{ns+2i} - p_{i-2}p_{i-1}q_{i-2}q_{ns+2i} + p_{i-2}{}^2 q_{i-1}q_{ns+2i}$$

$$= q_{i-2}(-1)^i p_{ns+2i} - p_{i-2}q_{ns+2i}(p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1})$$

$$= q_{i-2}(-1)^i p_{ns+2i} + p_{i-2}q_{ns+2i}(p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2})$$

$$= q_{i-2}(-1)^i p_{ns+2i} - p_{i-2}q_{ns+2i}(-1)^i$$

$$= (-1)^i(q_{i-2}p_{ns+2i} - p_{i-2}q_{ns+2i})$$

$$c_{12} = q_{i-2}(p_{i-1}q_{i-2} - q_{i-1}p_{i-2})p_{ns+2i-1} + p_{i-2}(-p_{i-1}q_{i-2} + p_{i-2}q_{i-1})q_{ns+2i-1}$$

$$= q_{i-2}(-1)^i p_{ns+2i} - p_{i-2}(-1)^i q_{ns+2i-1}$$

$$= (-1)^i (q_{i-2} p_{ns+2i} - p_{i-2} q_{ns+2i})$$

$$c_{21} = -q_{i-1}(q_{i-2} p_{i-1} - q_{i-1} p_{i-2}) p_{ns+2i} + p_{i-1}(p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1}) q_{ns+2i}$$

$$= -q_{i-1}(-1)^i p_{ns+2i} + p_{i-1}(-1)^i q_{ns+2i}$$

$$= (-1)^i (-p_{ns+2i} q_{i-1} + p_{i-1} q_{ns+2i})$$

$$c_{22} = -q_{i-1}(q_{i-2} p_{i-1} - q_{i-1} p_{i-2}) p_{ns+2i-1} + p_{i-1}(p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1}) q_{ns+2i-1}$$

$$= -q_{i-1}(-1)^i p_{ns+2i-1} + p_{i-1}(-1)^i q_{ns+2i-1}$$

$$= (-1)^i (p_{i-1} q_{ns+2i-1} - q_{i-1} p_{ns+2i-1})$$

bulunmuştur. Bu ifadeler $\begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_{ns+2i} & p_{ns+2i-1} \\ q_{ns+2i} & q_{ns+2i} \end{pmatrix}$ matris çarpımında yerine yazılarak;

$(-1)^i \begin{pmatrix} q_{i-2} p_{ns+2i} - p_{i-2} q_{ns+2i} & q_{i-2} p_{ns+2i-1} - p_{i-2} q_{ns+2i-1} \\ -q_{i-1} p_{ns+2i} + p_{i-1} q_{ns+2i} & -q_{i-1} p_{ns+2i-1} + p_{i-1} q_{ns+2i-1} \end{pmatrix}$ elde edilmiştir. Buradan da

$$\begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_{ns+2i} & p_{ns+2i-1} \\ q_{ns+2i} & q_{ns+2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{A}$$

$$A = (-1)^i \begin{pmatrix} q_{i-2} p_{ns+2i} - p_{i-2} q_{ns+2i} & q_{i-2} p_{ns+2i-1} - p_{i-2} q_{ns+2i-1} \\ -q_{i-1} p_{ns+2i} + p_{i-1} q_{ns+2i} & -q_{i-1} p_{ns+2i-1} + p_{i-1} q_{ns+2i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunmuştur. Bu çarpım sonucunda elde edilecek matris yine 2x2 tipinde bir matris olacaktır. Elde edilecek 2x2 tipindeki matrisin elemanları da d_{ij} biçiminde gösterilip, buradan da;

$$d_{21} = (-1)^i \left[(-q_{i-1} p_{ns+2i} + p_{i-1} q_{ns+2i}) \alpha_i - q_{i-1} p_{ns+2i-1} + p_{i-1} q_{ns+2i-1} \right]$$

olarak bulunmuştur. Buradaki p_{ns+2i} ve $p_{ns+2i-1}$ değerleri yerine, bu değerlerin Önerme 4.2.1 deki eşitleri yazılarak;

$$d_{21} = (-1)^i \left[(-q_{i-1}k_{2i} + p_{i-1})\alpha_i q_{ns+2i} + (-q_{i-1}l_{2i}\alpha_i - q_{i-1}k_{2i-1} + p_{i-1})q_{ns+2i-1} - q_{i-1}l_{2i-1}q_{ns+2i-2} \right]$$

bulunmuştur. Ayrıca;

$$A_1 = A_1^{(i)} = q_{i-1}p_{2i} - p_{i-1}q_{2i} \quad , \quad A_2 = A_2^{(i)} = q_i p_{2i} - p_i q_{2i}$$

$$A_3 = A_3^{(i)} = q_{i-1}p_{2i-1} - p_{i-1}q_{2i-1} \quad , \quad A_4 = A_4^{(i)} = q_i p_{2i-1} - p_i q_{2i-1}$$

$$A_5 = A_5^{(i)} = q_{i-1}p_{2i-2} - p_{i-1}q_{2i-2} \quad , \quad A_6 = A_6^{(i)} = q_i p_{2i-2} - p_i q_{2i-2}$$

gösterimleri kullanılarak, bu değerler d_{21} eşitliğinde yerine yazılmış ve d_{21} değeri aşağıdaki biçimde bulunmuştur.

$$d_{21} = (q_{i-1}k_{2i} - p_{i-1})\alpha_i (A_1 q_{ns+i} + A_2 q_{ns+i-1}) + (q_{i-1}l_{2i}\alpha_i + q_{i-1}k_{2i-1} - p_{i-1})(A_3 q_{ns+i} + A_4 q_{ns+i-1})$$

$$+ q_{i-1}l_{2i-1}(A_5 q_{ns+i} + A_6 q_{ns+i-1}) \; [19].$$

4.3. Özel Örnekler

Örnek 4.3.1 $\sqrt{D} = \sqrt{a^2+4} = \left[a; \overline{\frac{a-1}{2}, 1, 1, \frac{a-1}{2}, 2a} \right]$ periyodik sürekli kesir açılımı için, $a \geq 3$ ve a tek sayı olmak üzere, α_1 değeri hesaplanmıştır:

$$\alpha_1 = -\frac{(p_0^{\,2} + q_0^{\,2}D)q_1 - 2p_0 q_0 p_1}{(p_0^{\,2} + q_0^{\,2}D)q_2 - 2p_0 q_0 p_2}$$

$$= -\frac{(a^2 + a^2 + 4)(a-1) - 2a(a^2 - a + 2)}{(a^2 + a^2 + 4)(a+1) - 2a(a^2 + a + 2)}$$

$$= -\frac{2a^3 - 2a^2 + 4a - 4 - 2a^3 + 2a^2 - 4a}{2a^3 + 2a^2 + 4a + 4 - 2a^3 - 2a^2 - 4a} = 1$$

bulunur. α_2 değeri Teorem 4.2.1 kullanılarak, Önerme 4.2.1 de ki $\frac{1}{\theta_i}=\frac{\sqrt{D}+k_i}{l_i}$ eşitliği kullanılarak da $\frac{1}{\theta_0}$, değeri hesaplanacaktır ($p_{-1}=1$, $q_{-1}=0$):

$$k_0=(-1)^{-1}(q_0q_{-1}D-p_0p_{-1})=-1(-a)=a$$

$$l_0=(-1)^0(q_0^{\ 2}D-p_0^{\ 2})=a^2+4-a^2=4$$

olup $\frac{1}{\theta_0}=\frac{\sqrt{D}+a}{4}$ olarak bulunmuştur.

Önerme 4.2.2 den $k_{ns-i-1}=k_i$, $i=0,1,2,...,[s/2]$ ve $s=5$ olup, $i=0$ seçilerek $k_{5n-1}=k_0$, $n=1$ için $k_4=k_0=a$ olarak bulunmuştur. $l_{ns-i-1}=l_{i-1}$, $s=5$ olup $i=0$ seçilerek, $l_{5n-1}=l_{-1}$, $n=1$ için $l_4=l_{-1}$ bulunmuştur. $q_1=a_1q_0+q_{-1}$, $\frac{a-1}{2}=\frac{a-1}{2}+q_{-1}$, $q_{-1}=0$ olur. $p_1=a_1p_0+p_{-1}$, $\frac{a^2-a+2}{2}=\frac{a-1}{2}a+p_{-1}$, $p_{-1}=1$ olur. q_1 ve p_1 değerleri $l_{-1}=(-1)^{-1}\left(q_{-1}^{\ 2}D-p_{-1}^{\ 2}\right)$ eşitliğinde yerine yazılarak, $l_{-1}=(-1)(-1)=1$ bulunur. Ayrıca k_1 değeri de:

$$k_1=(-1)^0(q_1q_0D-p_1p_0)=\frac{a-1}{2}(a^2+4)-\frac{a^2-a+2}{2}a=\frac{2a-4}{2}=a-2$$

biçiminde bulunmuştur. $\sqrt{D}$ kudratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının ilk üç yaklaşım değeri hesaplanarak:

$\frac{p_0}{q_0}=\frac{a}{1}$ olup, $p_0=a$ ve $q_0=1$ bulunmuştur.

$\frac{p_1}{q_1}=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}=\frac{a-1}{2}a+1=\frac{a^2-a+2}{2}$ olup, $p_1=\frac{a^2-a+2}{2}$ ve $q_1=\frac{a-1}{2}$ olarak bulunmuştur.

$\frac{p_2}{q_2}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=\frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}$ olup, $p_2=\frac{a^2+a+2}{2}$ ve $q_2=\frac{a+1}{2}$

olarak bulunmuştur.

$$\frac{p_3}{q_3}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}}=\frac{a_0a_1a_2a_3+a_1a_0+a_3a_0+a_2a_3+1}{a_1a_2a_3+a_1+a_3}$$ olup, $p_3=a^2+2$ ve

$q_3=a$ olarak bulunmuştur.

$$\frac{p_4}{q_4}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}}$$ olup, $p_4=\frac{a-1}{2}\left(a^2+2\right)+\frac{a^2+a+2}{2}=\frac{a^3+3a}{2}$

$q_4=\frac{a-1}{2}a+\frac{a+1}{2}=\frac{a^2+1}{2}$ olarak bulunmuştur.

$$k_3=q_3q_2D-p_3p_2=\frac{a(a+1)}{2}(a^2+4)-(a^2+2)\left(\frac{a^2+a+2}{2}\right)=\frac{2a-4}{2}=a-2$$

$k_3=k_1=a-2$ ve $l_0=4$ olarak bulunmuştur.

$l_3=-\left(q_3{}^2D-p_3{}^2\right)=-\left(a^2(a^2+4)-(a^2+2)^2\right)=-(a^4+4a^2-a^4-4a^2-4)=4$ olup,

$l_0=l_3=4$ olarak bulunmuştur. Ayrıca:

$$A_5^{(2)}=q_1p_2-p_1q_2=\frac{a-1}{2}.\frac{a^2+a+2}{2}-\frac{a^2-a+2}{2}.\frac{a+1}{2}$$

$$=\frac{a^3+a^2+2a-a^2-a-2-a^3-a^2+a^2+a-2a-2}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$A_3^{(2)}=q_1p_3-p_1q_3=\left(\frac{a-1}{2}\right)\left(a^2+2\right)-\left(\frac{a^2-a+2}{2}\right)a$$

$$=\frac{a^3+2a-a^2-2-a^3+a^2-2a}{2}=-1=A_3$$

bulunur. Ayrıca;

$$A_1^{(2)} = q_1 p_4 - p_1 q_4 = \frac{(a-1)(\,a^3+3a)}{4} - \frac{(a^2-a+2)(a^2+1)}{4}$$

$$= \frac{-2a-2}{4} = \frac{-a-1}{2} = -\frac{a+1}{2}$$

olur. Bulunan değerler eşitlikte yerine yazılarak, α_2 değeri hesaplanmıştır.

$$\alpha_2 = \frac{-\left[(q_1k_3 - p_1)A_3 + q_1 l_3 A_5\right]}{(q_1k_4 - p_1)A_1 + q_1 l_4 A_3} = \frac{-\left[\left(\frac{a-1}{2}(a-2) - \frac{a^2-a+2}{2}\right) + 2 - 2a\right]}{\left(\frac{a-1}{2}a - \frac{a^2-a+2}{2}\right)\left(-\frac{a+1}{2}\right) + \frac{1-a}{2}}$$

$$= \frac{a-2-a^2+2a+a^2-a+2+4a-4}{\frac{1}{2}(a^2-a-a^2+a-2)(1-a)+1-a} = a-2$$

Şimdi de α_2 değeri, Teorem 4.2.1 kullanılarak hesaplanacaktır.

$$\alpha_i = -\frac{\left(p_{i-1}{}^2 + q_{i-1}{}^2 D\right) q_{2i-1} - 2p_{i-1}q_{i-1}p_{2i-1}}{\left(p_{i-1}{}^2 + q_{i-1}{}^2 D\right) q_{2i} - 2p_{i-1}q_{i-1}p_{2i}}$$

$i = 2$ için ;

$$\alpha_2 = -\frac{\left[\left(\frac{a^2-a+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 (a^2+4)\right] a - \frac{(a^2-a+2)(a-1)(a^2+2)}{2}}{\left[\left(\frac{a^2-a+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 \left(a^2+4\right)\right] \frac{a^2+1}{2} - \frac{(a^2-a+2)(a-1)(a^3+3a)}{4}}$$

$$\alpha_2 = \frac{2(2a^5-4a^4+10a^3-12a^2+8a-2a^5-10a^3+12a^2-12a+4a^4+8)}{2a^6+12a^4-4a^5-16a^3+18a^2-12a+8-2a^6-12a^4+4a^5+16a^3-18a^2+12a}$$

$$= a-2$$

bulunmuştur.

Örnek 4.3.2 $D=a^2+4$ ve a çift olsun. Bu durumda $\sqrt{D}$, $\sqrt{D}=\left[a;\overline{\frac{a}{2},2a}\right]$ biçiminde bir sürekli kesir açılımına sahiptir $(s=2)$. Teorem 4.1.1 deki, (4.1.1) eşitliğinde, $r=\frac{s}{2}=\frac{2}{2}=1$ yazılarak;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}+\frac{D}{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right)=\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$$

bulunmuştur. Burada özel olarak $n=k+1$ seçilerek:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_k}{q_k}+\frac{D}{\frac{p_k}{q_k}}\right)=\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

elde edilmiştir. Örneğin $a=2$ alındığında, $a^2+4=2^2+4=8$ ve $\sqrt{8}=\left(2;\overline{1,4}\right)$ sürekli kesir açılımı için $k=4$ seçilirse;

$\frac{1}{2}\left(\frac{p_4}{q_4}+\frac{D}{\frac{p_4}{q_4}}\right)=\frac{p_9}{q_9}$ olup, gerçekten de, $\frac{1}{2}\left(\frac{82}{29}+\frac{8}{\frac{82}{29}}\right)=\frac{3363}{1189}=\frac{p_9}{q_9}$ bulunur.

Örnek 4.3.3 a çift, $a\geq 6$ ve $D=a^2-4$ olması durumunda;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_k}{q_k}+\frac{q_k}{p_k}D\right)=\begin{cases}\dfrac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, & k \;\; tek \;\; sayı\\[2ex] \dfrac{3p_{2k+2}+\left(a/2+1\right)p_{2k+1}}{3q_{2k+2}+\left(a/2+1\right)q_{2k+1}}, & k=4n\\[2ex] \dfrac{\left(a/2+1\right)p_{2k+1}-3p_{2k}}{\left(a/2+1\right)q_{2k+1}-3q_{2k}}, & k=4n-2\end{cases}$$

şeklindedir. $a=6$ için $D=32$ olup, $\sqrt{32}=\left[5;\overline{1,1,1,10}\right]$ biçimindedir. $\sqrt{32}$ nin yaklaşımları tablo ile Tablo 4.3.1 de gösterilmiştir.

Tablo 4.3.1 $\sqrt{32}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	5	1
2	6	1
3	11	2
4	17	3
5	181	32
6	198	35
7	379	67
8	577	102
9	6149	1087
10	6726	1189
11	12875	2276
12	19601	3465
13	208885	36926
14	228486	40391
15	437371	77317
16	665857	117708
17	7095941	1254397
18	7761798	1372105
19	14857739	2626502
20	22619537	3998607
21	241053109	42612572
22	263672646	46611179
23	504725755	89223751
24	768398401	135834930
25	8188709765	1447573051

i) k'nın tek sayı olması durumu; $k=3$ için,

$\frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{q_3}+\frac{q_3}{p_3}D\right)=\frac{p_7}{q_7}$ elde edilir, gerçekten de, $\frac{1}{2}\left(\frac{17}{3}+\frac{3}{17}32\right)=\frac{577}{102}=\frac{p_7}{q_7}$ olup, eşitlik sağlanmış olur.

ii) $k=4n$ olması durumu; $n=1$ için $k=4$ bulunur,

$$\frac{3p_{2k+2}+\left(\frac{a}{2}+1\right)p_{2k+1}}{3q_{2k+2}+\left(\frac{a}{2}+1\right)q_{2k+1}}=\frac{3p_{10}+4p_9}{3q_{10}+4q_9}$$

$$=\frac{3.12875+4.6726}{3.2276+4.1189}=\frac{65529}{11584}$$

bulunmuştur, ayrıca;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_4}{q_4}+\frac{q_4}{p_4}D\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{181}{32}+\frac{32}{181}32\right)=\frac{65529}{11584}$$

bulunur. Böylelikle $k=4n$ olması durumu sağlanmış olur.

iii) $k=4n-2$ durumu; $n=1$ için $k=2$ olup,

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+1\right)p_{2k+1}-3p_{2k}}{\left(\frac{a}{2}+1\right)q_{2k+1}-3q_{2k}}=\frac{4p_5-3p_4}{4q_5-3q_4}=\frac{4.198-3.181}{4.35-3.32}=\frac{249}{44}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{q_2}+\frac{q_2}{p_2}D\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}+\frac{2}{11}32\right)=\frac{249}{44}$$

bulunur. Böylelikle $k=4n-2$ olması durumu sağlanmış olur.

Ayrıca $a=4$ için $\sqrt{a^2-4}=\sqrt{12}$ olup, $\sqrt{12}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı, $\sqrt{12}=\left[3;\overline{2,6}\right]$ biçimindedir. Burada $s=2$, $r=\frac{s}{2}=\frac{2}{2}=1$ olup,

$n = k+1$ için bulunan değerler (4.1.1) eşitliğinde yerine yazılarak;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_k}{q_k}+\frac{D}{\frac{p_k}{q_k}}\right)=\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

elde edilir.

$a \geq 6$ ve a çift olması durumunda, $\sqrt{a^2-4}$ kuadratik irrasyonel sayısının açılımı;
$\sqrt{a^2-4}=\left[a-1;\overline{1,\frac{a-4}{2},1,2(a-1)}\right]$ biçimindedir.

Örneğin, $a=8$ için $\sqrt{a^2-4}=\sqrt{60}$ olup, $\sqrt{60}$ ın sürekli kesir açılımı ve $a=6$ için, $\sqrt{a^2-4}=\sqrt{32}$ 'nin sürekli kesir açılımı sırasıyla, $\sqrt{60}=\left[7;\overline{1,2,1,14}\right]$ ve $\sqrt{32}=\left[5;\overline{1,1,1,10}\right]$ biçimindedir. $a \geq 6$ ve a çift olması durumunda, $\sqrt{a^2-4}$ kuadratik irrasyonel sayısı için (4.2.3) eşitliği kullanılarak, α_1 hesaplandığında;

$$\alpha_1=-\frac{\left(p_0{}^2+q_0{}^2D\right)q_1-2p_0q_0p_1}{\left(p_0{}^2+q_0{}^2D\right)q_2-2p_0q_0p_2}$$

$$=-\frac{\left[(a-1)^2+a^2-4\right]-2(a-1)a}{\left[(a-1)^2+a^2-4\right]\frac{a-2}{2}-2(a-1)\left(\frac{a^2-2a-2}{2}\right)}$$

$$=-\frac{a^2-2a+1+a^2-4-2a^2+2a}{\left(2a^2-2a-3\right)\left(\frac{a-2}{2}\right)-(a-1)\left(a^2-2a-2\right)}=\frac{6}{a+2}$$

bulunur.

Örnek 4.3.4 Bu örnekte $a \geq 5$ ve a tek sayı olmak üzere, $D=a^2-4$ olması durumu incelenmiştir:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_k}{q_k}+\frac{q_k}{p_k}D\right)=\begin{cases}\dfrac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, & k=6n-1,6n-3,6n-4,6n-5\\[2ex] \dfrac{3p_{2k+2}+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)p_{2k+1}}{3q_{2k+2}+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)q_{2k+1}}, & k=6n\\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{a-1}{2}\right)p_{2k+1}-3p_{2k}}{\left(\dfrac{a-1}{2}\right)q_{2k+1}-3q_{2k}}, & k=6n-2\end{cases}$$

$a\geq 5$ ve a tek olması durumunda, $\sqrt{a^2-4}$ kuadratik irrasyonel sayısının açılımı, $\sqrt{a^2-4}=\left[a-1;\overline{1,\frac{a-3}{2},2,\frac{a-3}{2},1,2(a-1)}\right]$ biçimindedir. Örneğin $a=5$, $\sqrt{a^2-4}=\sqrt{21}$ olup, $\sqrt{21}$ in sürekli kesir açılımı ve $a=7$ için $\sqrt{a^2-4}=\sqrt{45}$ in sürekli kesir açılımı, sırasıyla $\sqrt{21}=\left[4;\overline{1,1,2,1,1,8}\right]$ ve $\sqrt{45}=\left[6;\overline{1,2,2,2,1,12}\right]$ biçimindedir. Aşağıda $\sqrt{21}=\left[4;\overline{1,1,2,1,1,8}\right]$ için eşitliklerin sağlandığı gösterilmiştir.

i) $k=6n-1$, $6n-3$, $6n-4$, $6n-5$ olması durumunda, $\frac{1}{2}\left(\frac{p_k}{q_k}+\frac{q_k}{p_k}D\right)=\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ olduğu, $n=1$ için gösterilecektir. $k=6n-1$, $n=1$ için, $k=5$ olur,

$\frac{1}{2}\left(\frac{p_5}{q_5}+\frac{q_5}{p_5}D\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{55}{12}+\frac{12}{55}21\right)=\frac{6049}{1320}$ ve $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}=\frac{p_{11}}{q_{11}}=\frac{6049}{1320}$ olup eşitlik sağlanır.

$k=6n-3$, $n=1$ için $k=3$ olur, $\frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{q_3}+\frac{q_3}{p_3}D\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{23}{5}+\frac{5}{23}21\right)=\frac{527}{115}$ ve $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}=\frac{p_7}{q_7}=\frac{527}{115}$ olup, eşitlik sağlanır.

$k=6n-5$, $n=1$ için $k=1$ olur, $\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{q_1}{p_1}D\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{1}{5}21\right)=\frac{23}{5}$ ve

$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}=\frac{p_3}{q_3}=\frac{23}{5}$ olup, eşitlik sağlanır.

ii) $k=6n$ olması durumunda $n=1$ için $k=6$ olur,

$$\frac{3p_{2k+2}+\frac{a-1}{2}p_{2k+1}}{3q_{2k+2}+\frac{a-1}{2}q_{2k+1}}=\frac{3p_{14}+2p_{13}}{3q_{14}+2q_{13}}=\frac{3.109881+2.57965}{3.23978+2.12649}=\frac{445573}{97232}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_6}{q_6}+\frac{q_6}{p_6}D\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{472}{103}+\frac{103}{472}21\right)=\frac{222784+222789}{97232}=\frac{445573}{97232}$$

olup, eşitlik sağlanır.

iii) $k=6n-2$ olması durumunda, $n=1$ için $k=4$ olur,

$$\frac{\frac{a-1}{2}p_{2k+1}-3p_{2k}}{\frac{a-1}{2}q_{2k+1}-3q_{2k}}=\frac{2p_9-3p_8}{2q_9-3q_8}=\frac{2.2525-3.999}{2.551-3.218}=\frac{2053}{448}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_4}{q_4}+D\frac{q_4}{p_4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{32}{7}+\frac{7}{32}21\right)=\frac{1024+1029}{448}=\frac{2053}{448}$$

olup, eşitlik sağlanır.

Şimdi $\sqrt{a^2-4}$, $a\geq 5$ ve tek olmak üzere, α_1 hesaplanacaktır:

$$\alpha_1=-\frac{\left(p_0{}^2+q_0{}^2D\right)q_1-2p_0q_0p_1}{\left(p_0{}^2+q_0{}^2D\right)q_2-2p_0q_0p_2}\,,\ p_0=a-1,\ p_1=a\,,\ q_0=1,\ q_1=1$$

$$p_2=a_0a_1a_2+a_0+a_2=(a-1)\left(\frac{a-3}{2}\right)+a-1+\frac{a-3}{2}=\frac{a^2-a-2}{2}\quad \text{ve}\quad q_2=\frac{a-1}{2}$$

$$\alpha_1 = -\frac{\left[\left(a^2-2a+1+a^2-4\right)\right]-2(a-1)a}{(2a^2-2a-3)\dfrac{a-1}{2}-2(a-1)\left(\dfrac{a^2-a-2}{2}\right)} = \frac{6}{a-1}$$

bulunur. Ayrıca;

$$\theta = a_0+\theta_0 = a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}\,,\quad \frac{1}{\theta_0} = a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}$$

$$\frac{1}{\theta_n} = \frac{\sqrt{D}+k_n}{l_n},\quad \frac{1}{\theta_0} = \frac{\sqrt{D}+k_0}{l_0},\quad \begin{aligned} k_0 &= p_0p_{-1}-q_0q_{-1}D \\ l_0 &= q_0{}^2D-p_0{}^2 \end{aligned}$$

$p_n = a_np_{n-1}+p_{n-2}$ tekrarlı bağıntısında $n=1$ yazıldığında;

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1p_0+p_{-1} \\ a &= a-1+p_{-1} \end{aligned}$$ olup, $p_{-1}=1$ bulunmuştur.

$q_n = a_nq_{n-1}+q_{n-2}$ tekrarlı bağıntısında $n=1$ yazıldığında;

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1q_0+q_{-1} \\ 1 &= q_{-1}+1 \end{aligned}$$ olup, $q_{-1}=0$ bulunmuştur.

Aşağıda $\dfrac{1}{\theta_0}$, $\dfrac{1}{\theta_1}$ ve $\dfrac{1}{\theta_2}$ değerleri hesaplanmıştır

$$\begin{aligned} k_0 &= a-1 \\ l_0 &= a^2-4-(a-1)^2 = 2a-5 \end{aligned}\quad ,\quad \frac{1}{\theta_0} = \frac{\sqrt{D}+a-1}{2a-5}$$

$$\frac{1}{\theta_1} = \frac{\sqrt{D}+k_1}{l_1}\quad ,\quad \begin{aligned} k_1 &= q_1q_0(a^2-4)-p_1p_0 \\ k_1 &= a^2-4-a(a-1) \\ k_1 &= a-4 \end{aligned}\quad ,\quad \begin{aligned} l_1 &= p_1{}^2-q_1{}^2D \\ l_1 &= a^2-(a^2-4) \\ l_1 &= 4 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\theta_1} = \frac{\sqrt{D}+a-4}{4}$$ olur.

$$k_2 = p_2 p_1 - q_2 q_1 D$$

$$\frac{1}{\theta_2} = \frac{\sqrt{D} + k_2}{l_2} \quad , \quad k_2 = \left(\frac{a^2 - a - 2}{2}\right)a - \left(\frac{a-1}{2}\right)\left(a^2 - 4\right)$$

$$k_2 = a - 2$$

$$l_2 = q_2{}^2 D - p_2{}^2$$
$$l_2 = \frac{\left(a^2 - 2a + 1\right)}{4}\left(a^2 - 4\right) - \frac{\left(a^2 - a - 2\right)^2}{4} \quad , \frac{1}{\theta_2} = \frac{\sqrt{D} + k_2}{l_2} = \frac{\sqrt{D} + a - 2}{a - 2}$$
$$l_2 = a - 2$$

olarak bulunur. Önerme 4.2.2 deki $\begin{array}{l} k_{ns+i} = k_i \\ k_{ns-i-1} = k_i \end{array}$, $\begin{array}{l} l_{ns+i} = l_i \\ l_{ns-i-1} = l_{i-1} \end{array}$ eşitlikleri kullanılarak;

$k_{ns+i-1} = k_i$ eşitliğinde, $s = 6$, $n = 1$, $i = 1$ yazıldığında; $k_{6-1-1} = k_1$, $k_4 = k_1$ olup, $k_4 = a - 4$ bulunmuştur.

$l_{ns-i-1} = l_{i-1}$ eşitliğinde $s = 6$, $n = 1$, $i = 1$ yazıldığında; $l_{6-1-1} = l_{1-1}$, $l_4 = l_0$ olup $l_4 = 2a - 5$ bulunmuştur.

$k_{ns-i-1} = k_i$ eşitliğinde $s = 6$, $n = 1, i = 2$ yazıldığında; $k_{6-2-1} = k_2$, $k_3 = k_2$ olup $k_3 = a - 2$ bulunmuştur.

$l_{ns-i-1} = l_{i-1}$ eşitliğinde $s = 6$, $i = 2$, $s = 1$ yazıldığında; $l_{6-2-1} = l_{2-1}$, $l_3 = l_1$ olup $l_3 = 4$ bulunmuştur.

Ayrıca $p_1 = a_0 a_1 + 1 = \dfrac{a^2 - a + 2}{2}$, $q_1 = a_1 = \dfrac{a-1}{2}$, $p_2 = \dfrac{a^2 - a - 2}{2}$, $q_2 = \dfrac{a-1}{2}$, $p_3 = a^2 - 2$, $q_3 = a$, $p_4 = \dfrac{a^3 - 2a^2 - 3a + 4}{2}$, $q_4 = \dfrac{a^2 - 2a - 1}{2}$ olup;

$$A_5^{(2)} = q_1 p_2 - p_1 q_2 = \frac{a^2 - a - 2 - a^2 + a}{2} = -1,\ A_5^{(2)} = -1$$

$$A_3^{(2)} = q_1 p_3 - p_1 q_3 = a^2 - 2 - a^2 = -2 \quad ,\ A_3^{(2)} = -2$$

$$A_1^{(2)} = q_1 p_4 - p_1 q_4 = \frac{a^3 - 2a^2 - 3a + 4 - a^3 + 2a^2 + a}{2},\ \ A_1^{(2)} = 2 - a$$

olarak bulunmuştur.

Yukarıda bulunan değerler kullanılıp, α_2 değeri hesaplandığında;

$$\alpha_2 = -\frac{\left(p_1{}^2 + q_1{}^2 D\right)q_3 - 2p_1 q_0 p_3}{\left(p_1{}^2 + q_1{}^2 D\right)q_4 - 2p_1 q_1 p_4} = -\frac{\left(2a^2 - 4\right)a - 2a\left(a^2 - 2\right)}{\left(2a^2 - 4\right)\left(\frac{a^2 - 2a - 1}{2}\right) - 2a\left(\frac{a^3 - 2a^2 - 3a + 4}{2}\right)}$$

$$= -\frac{2a^3 - 4a - 2a^3 + 4a}{\left(a^2 - 2\right)\left(a^2 - 2a - 1\right) - a^4 + a^3 + 3a^2 + 4a} = 0$$

bulunmuştur. Dolayısıyla $\sqrt{a^2 - 4}$, $a \geq 5$ ve a tek sayı olması durumunda; Teorem 4.1.1, $i = 2$ için yazılırsa; $\frac{1}{2}\left(\frac{p_{6n+1}}{q_{6n+1}} + \frac{q_{6n+1}}{p_{6n+1}} D\right) = \frac{p_{12n+3}}{q_{2n+3}}$ bulunur.

Son olarak $2 \leq D \leq 40$ aralığında bulunan ve tam kare olmayan, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayılarının sürekli kesir açılımları, Tablo 4.3.2 de verilmiştir.

Tablo 4.3.2. Kuadratik irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımlarının tablosu

D	Sürekli Kesir Açılımı
2	$[1;\overline{2}]$
3	$[1;\overline{1,2}]$
5	$[2;\overline{4}]$
6	$[2;\overline{2,4}]$
7	$[2;\overline{1,1,1,4}]$
8	$[2;\overline{1,4}]$
10	$[3;\overline{6}]$
11	$[3;\overline{3,6}]$
12	$[3;\overline{2,6}]$
13	$[3;\overline{1,1,1,1,6}]$
14	$[3;\overline{1,2,1,6}]$
15	$[3;\overline{1,6}]$
17	$[4;\overline{8}]$
18	$[4;\overline{4,8}]$
19	$[4;\overline{2,1,3,1,2,8}]$
20	$[4,\overline{2,8}]$
21	$[4;\overline{1,1,2,1,1,8}]$
22	$[4;\overline{1,2,4,2,1,8}]$
23	$[4;\overline{1,3,1,8}]$
24	$[4;\overline{1,8}]$
26	$[5;\overline{10}]$

Tablo 4.3.2 (Devam) Kuadratik irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımlarının tablosu

D	Sürekli Kesir Açılımı
27	$\left[5;\overline{5,10}\right]$
28	$\left[5;\overline{3,2,3,10}\right]$
29	$\left[5;\overline{2,1,1,2,10}\right]$
30	$\left[5;\overline{2,10}\right]$
31	$\left[5;\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}\right]$
32	$\left[5;\overline{1,1,1,10}\right]$
33	$\left[5;\overline{1,2,1,10}\right]$
34	$\left[5;\overline{1,4,1,10}\right]$
35	$\left[5;\overline{1,10}\right]$
37	$\left[6;\overline{12}\right]$
38	$\left[6;\overline{6,12}\right]$
39	$\left[6;\overline{4,12}\right]$
40	$\left[6;\overline{3,12}\right]$

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

D tam kare olamayan pozitif tamsayı olmak üzere $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen yaklaşımları $\frac{1}{2}\left(\frac{P_n}{Q_n}+\frac{DQ_n}{P_n}\right)$ formülünde yerine yazılarak Newton yaklaşımları elde edilir.

Newton yaklaşımları bazı durumlarda yaklaşım değerine eşit olurken bazı durumlarda ise eşit olmamaktadır. Newton yaklaşımının, normal yaklaşım değerine eşit olması, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu olan s ile ilgilidir. Örneğin periyot uzunluğu 1 olan $\sqrt{2}=(1;2)$ kuadratik irrasyonel sayısının herhangi bir yaklaşımına göre hesaplanan Newton yaklaşımı aynı zamanda farklı bir normal yaklaşım değerine eşittir. Benzer durum periyot uzunluğu 2 olan, $\sqrt{3}=(1;1,2)$ ve $\sqrt{8}=(2;1,4)$ için de geçerlidir. Fakat periyot uzunluğu 6 olan, $\sqrt{21}=(4;1,1,2,1,1,8)$ ve $\sqrt{22}=(4;1,2,4,2,1,8)$ için alınan her yaklaşım değerine karşılık hesaplanan Newton yaklaşımı normal yaklaşım değerine eşit olmamaktadır.

Newton yaklaşım değeri ile normal yaklaşım değerinin eşit olması durumu periyot uzunluğuna bağlı olarak veya periyot uzunluğundan bağımsız olarak genişletilip, genelleştirilebilir. Ayrıca eşitlik durumunun, D nin bulunduğu özel bir denklemin çözümünün bulunmasına yardımcı olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] MCCOY, N.H., The Theory of Numbers, Macmillan, New York, p. 147, 1964.

[2] HERRNSTEIN, I.N., Topic in Algebra, Blasdell Pub. Co., New York, p. 337, 1964.

[3] NIVEN, I., and ZUCKERMAN, H.S., “An Introduction to Theory of Numbers”, Second Edition, Wiley, 1991.

[4] ÇALLIALP, F., Sayılar Teorisi, İstanbul, 1999.

[5] OLDS, C.D., Continued Fractions, Random House, The L.W Singer Company, Third Printing, 1963.

[6] IVAN, N., HERBERT, S., ZUCKERMAN, H.L., Introduction to Number Theory, Dohn Wiley And Sons, 1991.

[7] WALL, H.S., Analitic Theory of Continued Fractions, New York, 1948.

[8] KHICHIN, A.Y., ‘Continued Fractions’, Chicago, 1964.

[9] PERRON, O., Die Lehre Von Den Kettenbrüchen, Stuttgaart, 1954.

[10] STARK, H.M., Introduction to Number Theory, Markham Pub. Co., Chicago, 1997.

[11] BAYRAKTAR, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Erzurum, 1988.

[12] SİLVERMAN, J.H., “Introduction to Number Theory” Diophantine Analysis, pp.99-138, Kensington, 1985

[13] ROCKETT, A.M., SZÜSZ, P., “Continued Fractions”,Two edition, 1998.

[14] ELOZOVIC, N., A Note On Continued Fractions of Quadratic İrrationals Mathematical Communications 1, pp.27-33, 1996.

[15] CHRYSTAL, G., Textbook of Algebra, Vol 2, Chelsea Publishing Company,1896.

[16] CLEMENS, L.E., MERILL, K.D., ROEDER, D.W., Continued Fractions And Series, J.Number Theory, 1995.

[17] HARDY, G.H., WRIGHT, E. H., Introduction to Theory of Numbers, Oxford University, 1954.

[18] SIERPINSKI, W., Elementary Theory of Numbers, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1964.

[19] KOMATSO, T., Continued Fractions And Newton Approximations, Mathematical Communication 4, pp 167-176, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet KOLSUZ, 18.01.1979 da Ankara'da doğdu. ilk, orta ve lise eğitimini Ankara'da tamamladı. 1997 yılında girdiği Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden 2001 yılında mezun oldu. Aynı sene Çorum'un Bayat ilçesi Akseki köyüne matematik öğretmeni olarak atandı. 2001-2002 eğitim öğretim yılında bu okulda görev yaptıktan sonra, kısa dönem er olarak askere gitti. Askerliği boyunca Hakkari Yüksekova Mehmetçik Dershanesi'nde matematik öğretmenliği yaptıktan sonra, okuluna dönerek iki sene daha aynı okulda görev yaptı. 2005 senesinde Kocaeli Körfez Milangaz Hacer Demirören Çok Programlı Lisesi'ne atandı ve halen bu okulda görev yapmaktadır.