T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya TUNÇ

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	:	**Yard.Doç.Dr.Metin YAMAN**

Haziran 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya TUNÇ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 22 / 07 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Barış Tamer TONGUÇ	**Y.Doç.Dr.Metin YAMAN**	**Y.Doç.Dr.Yalçın YILMAZ**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve çalışmaların yapılması sırasında her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen tez yöneticisi kıymetli hocam Yard. Doç. Dr. Metin YAMAN ve tez hazırlama sürecinde bana gösterdikleri tahammül ve destekten ötürü aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

α	: Alfa
β	: Beta
δ	: Delta
h	: Derinlik
ε	: Epsilon
η	: Eta
ξ	: Ksi
m	: Kütle
λ	: Delta
max	: Maksimum
∇	: Nabla operatörü
Ω	: Omega
π	: Pi
φ	: Phi
ρ	: Rho
σ	: Sigma
sup	: Supremum
e	: Üstel fonksiyon
g	: Yer çekimi

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sturm Liouville

Bu çalışma diferansiyel denklemler için ters problemler teorisini matematiksel fiziğin çatısı altında kapsamlı olarak geliştirilmesinin sunulması üzerine yapılmıştır. Ters problemler teorisinin kökeni 19. yüzyılın sonlarında veya 20. yüzyılın başlarında ortaya çıkmıştır.Ters problem, ısı ve kütle transferi, potansiyel teori, nükleer fizik, esneklik teorisi, sismolojide kinematik problemler, Sturm-Liouville problemini ve daha fazlasını içermektedir.

Bu çalışmada adlandırılan direkt problem, ters problem denklemi bilinmiyorken, verilen bir diferansiyel denklemin veya denklem sisteminin çözümünü ek koşullar aracılığı ile gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada mevcut olan parabolik denklemler, ters problemler için en yaygın olandan biridir. Ters problem belirli uygun koşullar altında ortaya çıkan çözümden yola çıkarak bize problemi vermektedir. Son olarak bu çalışmada ters problemin varlığı ve tekliği de kanıtlanmıştır.

INVERSE PROBLEMS OF PARABOLİC EQUATION

SUMMARY

Key Words: Sturm Lıouville

This study present the theory of inverse problems for differential equations is being extensively developed within the from work of mathematical phycis. The sources of the theory of inverse problems may be found lately in the 19th centry or early 20 th century.Inverse problems contains heat and mass transfer, potantiel theory, nuclear physics, elasticity theory, the kinematic problems in seismology, the STURM LIOUVİLLE problem and more.

In the study of so-called direct problems the solution of a given differential equation or system of equatinos is realised by means of supplementary conditions, while in inverse problems the equation it self is also unkown.In this study of parabolic equation is are of the wide spread inverse problems. The inverse problems under avaliable conditions gives the problem from its solution.Finally in this study, the uniquess of solution and existence its for inverse problem is proved.

BÖLÜM 1. BASİT TERS PROBLEM ÖRNEKLERİ

Bu bölümde, birbirine ters olan birtakım basit örnekler sunulacaktır.

Örnek 1.1.

$x_1, x_2, ..., x_n$ kökleri verilen n. dereceden bir p polinomunun bulunması problemi ile verilen bir p polinomunun $x_1, x_2, ..., x_n$ sıfırlarının bulunması problemi birbirine terstir. Bunun çözümü c keyfi bir sabit olmak üzere, $p(x) = c(x - x_1)...(x - x_n)$ şeklindedir.

Örnek 1.2.

A_{nxn} matrisi ile $\lambda_1, ..., \lambda_n$ özdeğerlerine sahip A+D şeklindeki bir D köşegen matrisinin bulunması problemi ile verilen A+D matrisinin özdeğerlerinin hesaplanması problemi birbirine terstir.

Örnek 1.3.

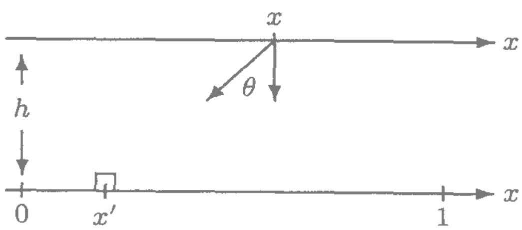
Bu ters problem zeka testlerinde kullanılır. $a_1, a_2, ..., a_k$ dizisinin ilk birkaç terimi verildiğinde dizinin oluşum kuralı bulunur. Genel olarak, sadece sonraki iki ve üç terim dizinin oluşum kuralının bulunuşunu göstermek için incelenir. Uygun gelen direk problem oluşum kuralı verilen bir (a_n) dizisinin değerlendirilmesidir.

Örnek 1.4.

Genellikle, yeryüzeyinden ölçüm yaparak jeolojik bulguların yerini, şeklini, parametrelerini hesaplama problemidir. Bir boyutlu basit bir problem ele alalım ve aşağıdaki ters problemi ifade edelim. x değişim kuvvetinin $f_v(x)$ düşey bileşeninin ölçümlerinden h derinliğindeki farklı bir bölgenin kütle yoğunluğunun $p = p(x)$ $0 \leq x \leq 1$ değişimleri belirlenir. $p(x')\Delta x'$, x' in bir hacim elemanının kütlesi ve $\sqrt{(x-x')^2 + h^2}$ uzaklığıdır. Yer çekimi değişimi, γ yer çekimi sabiti olmak üzere $f = \gamma \frac{m}{r^2}$ Newton'un yerçekimi kanunu ile tanımlanmıştır. Düşey bileşen için,

$$\Delta fv(x) = \gamma \frac{P(x')\Delta x'}{(x-x')^2 + h^2} Cos\theta = \gamma \frac{hp(x')\Delta x'}{[(x-x')^2 + h^2]^{3/2}}$$

yazılır.



Şekil 1.1. Jeolojik bulgularda değişim kuvvetinin düşey bileşenine ait şema

Bu eşitlik, p nin belirlenmesi için aşağıdaki integral denklemini verir:

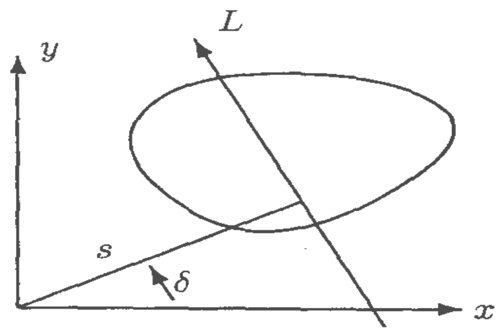
$$fv(x) = \gamma h \int_0^1 \frac{p(x')}{[(x-x')^2 + h^2]^{3/2}} dx' \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.1}$$

Örnek 1.5. (Ters Saçılma Problemi)

Elektromanyetik dalga veya sesin yoğunluğu verildiğinde saçılan cismin şeklini bulma problemi ters problemdir. Direk problem ise verilen cismin saçılan dalgaların hesaplanması problemidir. Ters saçılma problemleri yıkıcı olmayan materyallerin testinde, jeofizikte, sismik ve elektromanyetik araştırmalarda, tomografide çeşitli kullanımlara sahiptir.

Örnek 1.6. (Bilgisayar Tomografisi)

Radon dönüşümünün en göze çarpan kullanımı tıbbi görüntülemedir. Örneğin, bir insan vücudunda bir bölge ele alındığında $p(x,y)$, (x,y) noktasındaki yoğunluk değişimini göstersin ve L, düzlemde bir doğru olsun. L boyunda vücuda bir X dalgası gönderildiğinde vücuttan akan yoğunluğun ne kadar olduğu ölçülür.



Şekil 1.2. Bilgisayar tomografisine ait şema

L, (s,δ) ile parametrize edilmiştir. Burada $s \in \mathrm{R}$ *ve* $\delta \in [0,\pi)$ dir. $L_{s,\delta}$ ışınının koordinatları:

$$se^{i\delta} + iue^{i\delta} \in \mathrm{C}\ ,\ u \in \mathrm{R} \tag{1.2}$$

I yoğunluğunun değişimi yaklaşık olarak γ sabit olmak üzere

$$dI = -\gamma pIdu$$

ile belirlenir. Işın boyunca integral alınırsa

$$lnI(u) = -\gamma \int_{uo}^{u} p(se^{i\delta} + iue^{i\delta})du$$

veya, p nin bir kompakt destek olduğunu kabul ederek yoğunluk kaybı

$$lnI(\infty) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} p(se^{i\delta} + iue^{i\delta})du$$

ile hesaplanır. Prensipte, azalma faktörlerinden tüm çizgi integralleri hesaplanabilir:

$$(Rp)(s,\delta) := \int_{-\infty}^{\infty} p(se^{i\delta} + iue^{i\delta})du\ ,\ s \in \mathrm{R} \tag{1.3}$$

R_p , p nin radon dönüşümü olarak adlandırılır. Direk problem, p verildiği zaman R_p radon dönüşümünün hesaplanmasıdır. Ters problem ise verilen bir R_p radon dönüşümü için p yoğunluğunun belirlenmesidir. p nin açısal olarak simetrik kabul edildiği yerde sadece düşey ışınlar alınır. O zaman $p = p(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $(x,0)$ dan geçen L_x ışını (x,u), $u \in \mathrm{R}$ ile parametrize edilebilir.

$$V(x) := lnI(\infty) = -2\gamma \int_0^{\infty} P(\sqrt{x^2 + u^2})du$$

p, $x : |x| \le R$ de kompakt destek olsun. $u = \sqrt{r^2 - x^2}$ değişken değişimi ile

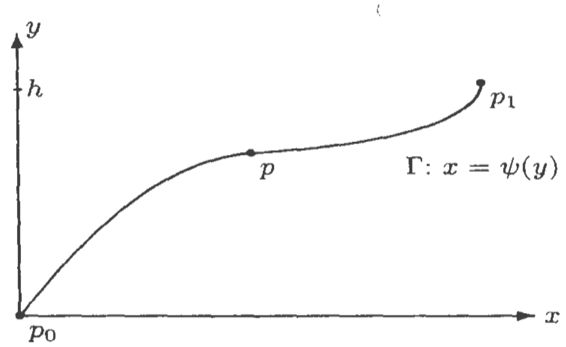
$$V(x) = -2\gamma \int_x^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} p(r)dr = -2\gamma \int_x^{R} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} p(r)dr \tag{1.4}$$

yazılır. $z = R^2 - r^2$ ve $y = R^2 - x^2$ değişken dönüşümü $z \to p(\sqrt{R^2 - z})$ fonksiyonu için aşağıdaki Abel integral denklemi elde edilir:

$$V(\sqrt{R^2 - y}) = -\gamma \int_0^{y} \frac{p(\sqrt{R^2 - z})}{\sqrt{y - z}} dz, \quad 0 \le y \le R \tag{1.5}$$

Örnek 1.7. (Abel İntegral Denklemi)

$h > 0$ seviyesinde bir p_1 noktasından h=0 seviyesindeki bir p_0 noktasına Γ eğrisi boyunca bir kütlenin hareketini ele alalım. Bu kütleye etkiyen tek kuvvet mg yerçekim kuvvetidir.



Şekil 1.3. Eğri boyunca bir kütlenin hareket şeması

Direk problem, Γ eğrisi verildiği zaman p_1 den p_0 a hareket eden elemanın *T* zamanını belirlenmesidir. Ters problem ise, çeşitli h değerleri için *T*=*T*(*h*) zamanının ölçülmesi ve Γ eğrisinin belirlenmesi problemidir. Eğri $x = \psi(y)$ ile parametrize edilsin. *p* nin koordinatları: $(\psi(y), y)$ olur. Enerjinin korunumu yasası ile,

$$E + U = \frac{m}{z}v^2 + mgy = sabit$$

yazılır. Buradan hız denklemi

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2g(h-y)}$$

elde edilir. p_1 den p_0 a kadar toplam *T* zamanı

$$T = T(h) = \int_{p_0}^{p_1} \frac{ds}{v} = \int_0^h \sqrt{\frac{1+\psi'(y)^2}{2g(h-y)}}dy, \quad h > 0$$

şeklindedir.

$$\psi(y) = \sqrt{1+\psi'(y)^2}$$

olsun ve *f*(*h*):=*T*(*h*) $\sqrt{2g}$ verilen fonksiyondur. O zaman

$$\int_0^h \frac{U(y)}{\sqrt{h-y}}dy = f(h), \; h > 0 \tag{1.6}$$

Abel integral denkleminden bilinmeyen φ fonksiyonunu belirlenmek zorundayız.

Bir benzer problem de sismolojide yer almaktadır. Bu, sismik dalgalarının varış süresi ölçümlerinden, dünyanın *c* hız dağılımının belirlenmesi problemidir.

Örnek 1.8. (Geri Isı Denklemi)

Bir boyutlu ısı denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.7a}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \;, t \geq 0 \tag{1.7b}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \ 0 \le x \le \pi \tag{1.7c}$$

(1.7b) sınır koşulları ve (1.7c) başlangıç koşuludur. Değişkenlerine ayırma metodu ile

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} + \sin nx \tag{1.8}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) Sinnydy$$

çözümü elde edilir. Direk problem başlangıç sınır değer probleminin çözülmesidir. Verilen u_0 başlangıç sıcaklık dağılımı ve son T zamanı ile $u(.,T)$ belirlenir. Ters problemde ise, $u(.,T)$ son sıcaklık dağılımı ölçülür ve $t < T$ daha önceki zamanlarda sıcaklık belirlenmeye çalışılır, örneğin $u(., 0)$ başlangıç sıcaklığı gibi. (1.8) ve aşağıdaki integral denklemden u_0 belirlenir.

$$u(x,T) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k(x,y) u_0(y) dy, 0 \le x \le \pi \tag{1.9}$$

Burada,

$$k(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(ny) \tag{1.10}$$

Örnek 1.9.

Homojen olmayan bir ortamdaki ısı yayılımı

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{c} div(k \, grad \, u(x,t)) \ , x \in D, t > 0 \tag{1.11}$$

denklemi ile tanımlanır. Burada c bir sabittir ve $k=k(x)$ ortamla ilgili bir parametredir. k sabit olması durumunda, D bölgesinde

$$div(kgradu)=0 \tag{1.12}$$

denklemine indirgenir. Direk problem, verilen $u|\partial D$ sınır değeri ve k fonksiyonu için bir sınır değer probleminin çözülmesidir. Ters problem ise, u ve ∂D sınırı üzerindeki $\frac{\partial u}{\partial v}$ akısını ve D de ki bilinmeyen k fonksiyonunu belirleme problemidir.

BÖLÜM 2. PARABOLİK DENKLEM İÇİN DİREKT PROBLEM

2.1. Notasyonlar ve Önemli Eşitsizlikler:

Bu bölümde işaretler ve semboller tanıtılacak R^n, n boyutlu öklit uzayıdır.

$x = (x, ..., x_n)$ $\quad \mathrm{R}^n$ de bir noktadır.

$S = \partial\Omega$ $\quad \Omega$ bölgesinin sınırıdır ; $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$

$\overline{\Omega}$, $\bar{\Omega} \subset \Omega$ *ile* Ω nin sınırlı bir alt bölgesidir.

$Q_T = \quad (x,t) : x \in \Omega, t \in (0,T)$ $\quad R^{n+1}$ de bir silindirdir.

$S_T = \ (x,t) : x \in \partial\Omega, t \in \ 0,T$ $\quad Q_T$ nin yanal yüzeyidir.

$n,\ \partial\Omega$ ye dış birim normaldir.

u_{x_i} *ve* $u_{x_i x_j}$ *sembolleri*, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} ve \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j x_j}$ genelleştirilmiş türevlerdir.

$$u_x = (u_{x_i}, ..., u_{x_n}) \ , \ u_{x_i}^2 = (u_{x_i})^2, \quad u_x^2 = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \ , \ |u_x| = \sqrt{u_x^2}$$

$$u_x v_x = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i} \ , \ u_{xx} = (u_{x_i x_j}) \ ; \ i, j = 1, ..., n$$

$$u_{x_i x_j}^2 = (u_{x_i x_j})^2 \ , \ u_{xx}^2 = \sum_{i,j=1} u_{x_i x_j}^2$$

$$|u_{xx}| = \sqrt{u^2{}_{xx}}; \ u_{xx} v_{xx} = \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} x_j v_{x_i} x_j$$

$L_p(\Omega),\ p \geq \Omega$ üzerinde tüm ölçülebilir fonksiyonları içeren Banach uzayıdır ve

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{2.1}$$

sonlu norm şeklindedir.

Genel olarak, $L_2(\Omega)$ de ki norm (,) skaler çarpım ve $\|.\|$ olarak kısaltılır.

$$\|u_x\|_{2,\Omega} = \left(\int_\Omega u_x^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\|u_{xx}\|_{2,\Omega} = \left(\int_\Omega u_{xx}^2 dx \right)^{1/2}$$

$W_2^1(\Omega)$ Hilbert uzayı $L_2(\Omega)$ nin elemanlarından oluşur ve Ω üzerinde birinci mertebeden genelleştirilmiş türevlerin toplamından oluşan karedir. Skaler çarpım aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir.

$$(u,v)_{2,\Omega}^{(1)} = \int_\Omega (uv + u_x v_x) dx$$

$$ve \qquad (2.2)$$

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} = \sqrt{(u,u)_{2,\Omega}^{(1)}}$$

normu ile tanımlanır.

$C^\infty(\Omega)$, (Ω) kompakt destekli sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonların sınıfıdır.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ uzayında yoğun olup $W_2^1(\Omega)$ uzayının bir alt uzayıdır.

$W_2^2(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ den birinci ve ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevlerine sahip $L_2(\Omega)$ de ki tüm elemanlardan oluşan Hilbert uzayıdır. Skaler çarpım aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir.

$$(u,v)_{2,\Omega}^{(2)} = \int_\Omega (uv + u_x v_x + u_{xx} v_{xx}) dx \qquad (2.3)$$

ve $\|.\|_{2,\Omega}^{(2)}$ normu ile tanımlıdır.

$W_p^\ell(\Omega)$ Sobolev uzayı, ℓ bir pozitif tamsayı ve $1 \le p < \infty$ iken, birinci ℓ mertebeden bütün genelleştirilmiş türevlere sahip $L_p(\Omega)$ uzayının bütün fonksiyonlarını içerir. Bu uzayın normu,

$$\|u\|_{p,\Omega}^{\ell} = \left(\sum_{k=0}^{\ell} \sum_{|\alpha|=k} \|D_x^\alpha u\|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p} \qquad (2.4)$$

ile tanımlıdır.

$W_{2,0}^{2}(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ de sürekli iki kere diferansiyallenebilir fonksiyonlardan oluşan $W_2^2(\Omega)$nin bir alt uzayıdır ve $\partial\Omega$ üzerinde sıfıra eşittir. Eğer $\partial\Omega \subset C^2$ ise o zaman $W_{2,0}^{2}(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^{1}(\Omega)$ Q_T silindiri ile ilgili olarak aşağıdaki uzay verilir.

$W_{2,0}^{1}(Q_T)$, $W_2^1(Q_T)$ uzayının bir alt uzayıdır ve S_T de sıfıra eşit düzgün fonksiyonların kümesidir.

$W_2^{1,0}(Q_T) = L_2\ \ (0,T);W_2^1(\Omega)$, Q_T üzerinde $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $i = 1,...,,n$ genelleştirilmiş türevlerine sahip $L_2(Q_T)$ uzayının $u(x,t)$ elemanlarından oluşan Hilbert uzayıdır. Skaler çarpımı ve normu aşağıdaki eşitlikler ile tanımlıdır.

$$(u,v)_{2,Q_T}^{1,0} = \int_{Q_T} (uv + u_x v_x)dxdt$$

$$\|u\|_{2,Q_T}^{1,0} = \sqrt{(u,u)_{2,Q_T}^{(1,0)}} \tag{2.5}$$

$\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T) = L_2((0,T);W_2^1(\Omega))$ S_T de sıfıra eşit düzgün fonksiyonların kümesi olup $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ uzayının bir alt uzayıdır.

$\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $L_2(Q_T)$ den genelleştirilmiş u_t, u_{x_i} *ve* $u_{x_i x_j}$ türevlerine sahip $L_2(Q_T)$ nin tüm elemanlarından oluşan Hilbert uzayıdır. Skaler çarpımı aşağıdaki eşitlik ile tanımlıdır.

$$(u,v)_{2,Q_T}^{2,1} = \int_{Q_T} (uv + u_x v_x + u_t v_t + u_{xx} v_{xx})dxdt \tag{2.6}$$

ve normu $\|.\|_{2,Q_T}^{2,1}$ ile ifade edilir.

$W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $(L_2(Q_T);W_2^{2,1}(\Omega))$ uzayına ait elemanlar ile $W_2^{2,1}(Q_T)$ uzayının bir alt uzayıdır.

$V_2(Q_T)=W_2^{1,0}(Q_T)\cap L_\infty\ \ (0,T);L_2(\Omega)$,sonlu bir $|u|_{Q_T}=ess\sup\limits_{0\le t\le T}\|u(.,t)\|_{2,Q}+\|u_x\|_{2,Q_T}$

normuna sahip $W_2^{1,0}(Q_T)$ uzayının elemanlarından oluşan Banach uzayıdır.

Burada,

$$\|u_x\|_{2,Q_T}=\left(\int\limits_{Q_T}u_x^2dxdt\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

$\overset{0}{V}_2(Q_T)=\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)\cap V_2(Q_T),\quad V_2(Q_T)$ nin bir alt uzayıdır

$\overset{0}{V}{}_2^{1,2}(Q_T)=V_2^{1,0}(Q_T)\cap\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T),\ V_2^{1,0}(Q_T)$ nin bir alt uzayıdır. S_T de sıfıra eşit düzgün fonksiyonlar bu uzayda yoğundur. $C^\ell(\Omega)$, Ω de ℓ mertebesine kadar türevleri içeren Ω deki tüm sürekli fonksiyonlar kümesidir. $C^\ell(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ de sürekli ℓ dahil olmak üzere ℓ mertebesine kadar türevleri içeren $\bar{\Omega}$ deki tüm sürekli fonksiyonlardan oluşan Banach uzayıdır. Normu aşağıdaki eşitlik ile tanımlıdır.

$$|u|_\Omega^\ell=\sum_{|k|=0}^{\ell}\sum_k\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial^{|k|}u(x)}{\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}}\right| \tag{2.8}$$

$\overset{0}{C}{}^\ell(\Omega)$, Ω bölgesine ait kompakt destekleri içeren $\overset{0}{C}{}^\ell(\Omega)$ kümesinde yoğun $\overset{\ell}{C}(\bar{\Omega})$ uzayının alt uzayıdır.

Ters problemlerin incelenmesi için genel olarak bilinen ve kullanılan birtakım eşitsizlikler ise aşağıdaki şekildedir.

(i) Cauchy Eşitsizliği,

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j\right|\le\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\eta_i\eta_j\right)^{1/2} \tag{2.9}$$

$\xi_1,\ldots,\xi_n$ *ve* $\eta_1,\ldots,\eta_n$ sabit reel sayılar, $a_{ij}=a_{ji}$ ile negatif olmayan keyfi bir $a_{ij}\xi_i,\eta_j$ kuadratik form için geçerlidir.

(ii) Young Eşitsizliği,

$$ab \le \frac{1}{p}\delta^p a^p + \frac{1}{q}\delta^{-q} b^q, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{2.10}$$

Herhangi pozitif a, b, δ ve $p, q > 1$ için geçerlidir.

(iii) Hölder Eşitsizliği,

$$\left| \int_\Omega \prod_{k=1}^{s} u_k(x)dx \right| \le \prod_{k=1}^{s} \left(\int_\Omega |u_k(x)|^{\lambda_k} dx \right)^{1/\lambda_k} \tag{2.11}$$

$$\lambda_k \ge 1 \ , \ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^{-1} = 1$$

Ω bölgesinde tanımlı $u_k(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar için Hölder eşitsizliği kullanılır.Özel olarak, $s = 2 \; ve \, \lambda_1 = \lambda_2 = 2$ iken bu Cauchy-Schwarz Eşitsizliği olarak bilinir.

(iv) Poincare – Friedrichs Eşitsizliği,

$$\int_\Omega u^2(x)dx \le c_1(\Omega) \int_\Omega |u_x|^2 (x)dx \tag{2.12}$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ uzayından tüm u fonksiyonları için sağlanır ve Ω, R^n uzayında sınırlı bir bölgedir. $c_1(\Omega)$ sabiti ise sadece Ω bölgesine bağlıdır.

2.2. Direkt Problem

Teorem 2.1.

Ω, C^2 sınıfının $\partial\Omega$ sınırı ile R^n uzayında sınırlı bir bölgedir. Ω bölgesinde ikinci mertebeden eliptik denklem için Dirichlet Sınır Değer Problemi ele alınacaktır.

$$(Lu)(x) = f(x) \quad , \quad x \in \Omega \tag{2.1}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{2.2}$$

Burada L,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{2.3}$$

şeklinde bir eliptik diferansiyel operatörüdür ve

$$\forall x \in \bar{\Omega} \text{ , } 0 < v\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \;\; x \; \xi_i\xi_j \le \mu\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \tag{2.4}$$

koşulu sağlamaktadır.

$\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ reel sabit sayılar ve μ ve v pozitif sabitlerdir. (2.4) eşitsizliğinin sol tarafı eliptik özelliği yansıtır ve sağ tarafı ise a_{ij} katsayılarının sınırlılığını ifade eder. Yukarıda ki direk problemin çözümünde, f kaynak terim ve Ω bölgesi, bilinen L operatörünün katsayılarına ilişkin u fonksiyonu aranır.

Teorem 2.2.

L operatörü (2.3) ve (2.4) koşullarını sağlar,

$a_{ij} \in C(\overline{\Omega}),\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \in C(\overline{\Omega}),\ b_i \in L_\infty\ ve\ c \le 0$ ifadeleri Ω bölgesinin her yerinde sağlanmaktadır. Eğer $f \in L_p(\Omega)$ ise $(1 < p < \infty)$, (2.1)-(2.2) Dirichlet problemi bir $u \in W_p^2(\Omega)$ çözümüne sahiptir. Bu çözüm belirtilen fonksiyonların sınıfında tektir ve

$$\|u\|_{p,\Omega}^{(2)} \le c^* \| f \|_{p,\Omega} \tag{2.5}$$

koşulunu sağlar.Burada, c* sabiti u dan bağımsızdır. Tek çözümle ilgili benzer bir sonuç, c katsayısının işareti önemsenmeksizin elde edilebilir.Bununla birlikte, L operatörünün katsayılarının birtakım sınırları sağlaması gerekmektedir. Örneğin;

$$\frac{v}{2c_1(\Omega)} - \|b\|_{\infty,\Omega} + \frac{1}{2v}\|c\|_{\infty,\Omega}^2 > 0 \tag{2.6}$$

eşitsizliğidir.

Bu eşitsizlikte $b = \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2(x)\right]^{1/2}$ $ve\, c_1(\Omega)$ aşağıdaki

$$\int_\Omega u^2(x)dx \le c_1(\Omega) \int_\Omega |u_x(x)|^2 dx \tag{2.7}$$

Poincare-Friedrichs eşitsizliğini sağlar

Teorem 2.3.

L operatörü Teorem 2.2 nin koşullarını sağlasın ve bir $u \in W_2^1(\Omega)$ fonksiyonu zayıf çözüm anlamında Ω bölgesinde $Lu \ge 0$ eşitsizliğini sağlasın

O halde,

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u^+$$

Sonuç 2.1.

Loperatörü Teorem 2.2 nin koşulları doğrultusunda olsun ve bir $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ fonksiyonu Ω bölgesinde $\varphi(x) \geq 0, \varphi(x) \not\equiv$ sabit şartlarını sağlasın. Bu durumda, $mes_n \Omega' > 0$ koşulunu sağlayan bir $\Omega' \subset \Omega$ ölçülebilir küme vardır ki bu da Ω' kümesinde $L\varphi < 0$ şeklindedir.

İspat.

Aksine, Ω *de* $L\varphi \geq 0$ olduğu varsayılsın. Böylece, teorem Ω bölgesinde $\varphi =$ sabit ya da Ω de $\varphi \leq 0$ durumlarını sağlar. Fakat, bu sonuç 2.1 ile çelişmektedir. Bu durumda aşağıdaki sonuç ispatlanır.

Sonuç 2.2.

L operatörü Teorem 2.2 nin koşullarını sağlar ve bir $\varphi \in W_2^2(Q_T) \cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ fonksiyonu Ω bölgesinde ve $\varphi(x) \geq 0$ koşullarını sağladığı kabul edilsin.Bu durumda, $mes_n \Omega' > 0$ ile bir $\Omega' \subset \Omega$ ölçülebilir küme vardır ve Ω' de $L\varphi < 0$ şeklindedir.

İspat.

$L\varphi \not\equiv 0$ olduğundan dolayı $\varphi \not\equiv 0$ olur.

Verilen $\varphi, \varphi \not\equiv$ sabit ya da $\varphi \equiv sabit > 0$ dır.

Eğer $\varphi = sabit > 0$ ise,

$(L\varphi)(x) \equiv c(x)\varphi(x)$

ifadesi sağlanır.

$\varphi \not\equiv$ sabit için sonuç 2.1 istenilen iddiaya yol gösterir.

Şimdi,

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=F(x,t), \quad (x,t)\in Q_T=\Omega x(0,T) \tag{2.8}$$

$$u(x,0)=a(x)\ , \qquad x\in\Omega \tag{2.9}$$

$$u(x,t)=0 \quad , \qquad (x,t)\in S_T\equiv\partial\Omega x\ \ 0,T \tag{2.10}$$

başlangıç ve sınır koşulları ile parabolik denklem ele alınsın.Burada L operatörü düzgün eliptiktir. Bunun anlamı aşağıda ki ifade de görülür.

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}(x)u_{x_i})+\sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}+C(x)u$$

$$A_{ij}=A_{ij}\ ,\ 0<v\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{2.11}$$

$$v,\mu\equiv sabit>0$$

Buna takiben L operatörünün katsayıları,

$$A_{ij}\in C(\overline{\Omega}),\ \frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\in C(\overline{\Omega}),\ B_i\in L_\infty(\Omega),\ C\in L_\infty(\Omega) \tag{2.12}$$

şeklindedir. (2.8) denklemi için direk problem, (2.9) başlangıç koşulu ile (2.10) sınır koşuluna ilişkin denklemin bir u çözümünün bulunuşundan oluşmaktadır, L ve a fonksiyonları ile L operatörünün katsayıları ve $\Omega x(0,T)$ bölge verileri ile işlem yapılır.

Tanım 2.1.

$u\in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ ve (2.8) – (2.10) ifadeleri karşılık gelen bölgelerin her yerinde sağlanıyorsa u fonksiyonunun $W_2^{2,1}(Q_T)$ sınıfından (2.8)-(2.10) direk probleminin bir çözümü olduğu söylenir.

Teorem 2.4.

L operatörünün katsayıları (2.11)-(2.12) ifadelerini sağlasın ve $F \in L_2(Q_T),\ a \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ olsun. Bu durumda (2.8)-(2.10) direk problemi bir $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ çözümüne sahiptir. Bu çözüm belirtilen fonksiyonların içinde tektir ve aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$\|u\|_{2,Q_T}^{2,1} \le c^* \ \|F\|_{2,Q_T} + \|a\|_{2,\Omega}^{1} \tag{2.13}$$

Burada c* , u ya bağlı değildir.(2.8)-(2.10) direk problemin çözülebilirliği üzerinde ters problemlerle ilgili birtakım alt dizi çalışmaları $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ enerji uzayında önemli sonuçlar elde etmek için gereklidir.

Tanım 2.2.

$u \in \overset{o}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ ise u fonksiyonu $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ sınıfından (2.8)-(2.10) direk problemin bir zayıf çözümü olduğu söylenir ve (2.8)-(2.10) sistemi ile aşağıdaki ifadelerden elde edilen (2.14) integral özdeşliği sağlanır.Bunun için (2.8) ifadesi $\phi(x,t) = 0$, $(x,t) \in S_T$, olan keyfi bir $\phi \in W_2^{1,1}(Q_T)$ elemanı ile çarpılır.

$$u_t(x,t)\phi(x,t) - \phi(x,t)(Lu)(x,t) = F(x,t)\phi(x,t)$$

$$u_t(x,t)\phi(x,t) - \phi(x,t)\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}(x)u_{x_i}) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)u_{x_i} + C(x)u \right) = F(x,t)\phi(x,t)$$

Yukarıdaki ifade Ω bölgesinde integre edilir.

$$\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x,t)dx - \int_\Omega \phi(x,t)\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}(x)u_{x_i}) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)u_{x_i} + C(x)u \right)dx = \int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dx$$

Bu kez yukarıdaki ifade t ye göre integre edilir.

$$\int_0^t\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x,t)dxd\tau-\int_0^t\int_\Omega\phi(x,t)\left(\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}(x)u_{x_i})+\sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i}+C(x)u\right)dxd\tau$$
$$=\int_0^t\int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau$$

$$\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)\Big|_0^t dx-\int_0^t\int_\Omega u(x,t)\phi_\tau(x,t)dxd\tau-$$
$$\int_0^t\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_i}\phi(x,t)+\sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t)+C(x)u\phi(x,t)\right)dxd\tau=\int_0^t\int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau$$

$$\int_\Omega(u(x,t)\phi_\tau(x,t)-u(x,0)\phi(x,0))dx-\int_0^t\int_\Omega u(x,t)\phi_\tau(x,t)dxd\tau-$$
$$\int_0^t\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j}(x,t)+\sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t)+C(x)u\phi(x,t)\right)dxd\tau=\int_0^t\int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau$$

$$\int_\Omega u(x,t)\phi_\tau(x,t)dx-\int_\Omega u(x,0)\phi(x,t)dx-\int_0^t\int_\Omega u(x,t)\phi_\tau(x,t)dxd\tau-$$
$$\int_0^t\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j}(x,t)+\sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t)+C(x)u\phi(x,t)\right)dxd\tau=\int_0^t\int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau$$

$$\int_0^t\int_\Omega -\ u(x,t)\phi_\tau(x,t)+\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j}(x,t)-\sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t)-$$
$$C(x)u\phi(x,t))dxd\tau+\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)dx-\int_\Omega a(x)\phi(x,0)dx$$
$$=\int_0^t\int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau \qquad (2.14)$$

Teorem 2.5.

L operatörünün katsayıları (2.11)-(2.12) yi sağlasın ve $F \in L_{2,1}(Q_T),\ a \in L_2(\Omega)$ olsun.

(2.8)-(2.10) direk problemi bir $u \in \overset{o}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ zayıf çözümüne sahiptir. Bu çözüm belirtilen fonksiyonların sınıfında tektir ve enerji denge denklemi geçerlidir. Bunun için; (2.8) ifadesi bir u fonksiyonu ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilir.

$$\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx - \int_\Omega u(x,t)(Lu)(x,t)dx = \int_\Omega F(x,t)u(x,t)dx$$

$$\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx - \int_\Omega u(x,t)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}(x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i} + C(x)u\right)dx$$
$$= \int_\Omega F(x,t)u(x,t)dx$$

Yukarıdaki ifade t ye göre integre edilir.

$$\int_0^t\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dxd\tau - \int_0^t\int_\Omega u(x,t)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}(x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i} + Cu\right)dxd\tau$$
$$= \int_0^t\int_\Omega F(x,t)u(x,t)dxd\tau$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|_\Omega^2\, dx - \int_0^t\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_j}u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}u + C(x)u^2\right)dxd\tau$$
$$= \int_0^t\int_\Omega F(x,t)u(x,t)dxd\tau$$

$$\frac{1}{2}\|u(x,t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(x,0)\|^2 - \int_0^t\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_j}u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}u + C(x)u^2\right)dxd\tau$$
$$= \int_0^t\int_\Omega F(x,t)u(x,t)dxd\tau$$

$$\frac{1}{2}\|u(x,t)\|^2+\int_0^t\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_j}u_{x_i}-\sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i}u-C(x)u^2\right)dxd\tau$$

$$=\frac{1}{2}\|a\|_{2,\Omega}^2+\int_0^t\int_\Omega F(x,t)u(x,t)dxd\tau \qquad (2.19)$$

Önerme 2.1.

Teorem 2.5 in tüm koşulları ile $F\in L_2(Q_T)$ verildiğinde herhangi bir $\varepsilon\in\ 0,T$ için $u\in W_{2,0}^{2,1}(\Omega x(\varepsilon,T))\cap C(\ \varepsilon,T\ ,\overset{0}{W_2^1}(\Omega))$ sağlanır.İleriki aşama için, bazı ifadelerin türevleri alınarak başlanır. Daha derin olarak bu araştırılırsa, (2.8) sisteminin $u\in \overset{o}{V_2^{1,0}}(Q_T)$ çözümleri için birtakım ifadelerin ele alınması gerekir. Bunlar, önemli analizleri yürütmede kullanılır. Teorem 2.5 in koşulları ve önerme 2.1 in sağladığı varsayılsın. Bu anlamda, (2.8)-(2.10) sisteminin $0\le t\le T$ için $\overset{o}{V_2^{1,0}}(Q_T)$ sınıfından bir çözüm gösterilecek.

$$\|u(.,t)\|_{2,\Omega}\le exp\ -\alpha t\ \|a\|_{2,\Omega}+\int_0^t exp\ -\alpha(t-T)\ \|F\ .,T\ \|_{2,\Omega}d\tau \qquad (2.16)$$

Burada,

$$\alpha=\left[\frac{v}{2c_1(\Omega)}-\left(\mu_1+\frac{\mu_1^2}{2v}\right)\right]$$

$$\mu_1=\max\left\{ess\ \underset{\Omega}{sup}|C(x)|,ess\ \underset{\Omega}{sup}\left[\sum_{i=1}^n B_i^2(x)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

ve $c_1(\Omega)$ sabiti (2.7) Poincare-Friedrich eşitsizliğindeki sabittir. Dikkate edildiğinde α sabiti için bir sınırlama olmadığı görülür. Sonraki aşamada, $t=\varepsilon\ ile\ (0,T)$ aralığından bir ε sayısı alınarak, (2.14) özdeşliğine başvurulup aşağıdaki ifade elde edilir. (2.8) ifadesi $W_2^{1,1}(Q_T)$ uzayının keyfi bir ϕ fonksiyonu ile çarpılıp Ω de integre edilir.

$$u_t(x,t)\phi(x,t) - \phi(x,t)(Lu)(x,t) = F(x,t)\phi(x,t)$$

$$\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x,t)dx - \int_\Omega \phi(x,t)(Lu)(x,t)dx = \int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dx$$

$$\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x,t)dx - \int_\Omega \phi(x,t)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}(x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i} + C(x)u\right)dx = \int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dx$$

$$\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x,t)dx - \int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_i}(x,t) + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t) + C(x)u\phi(x,t)\right)dx = \int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dx$$

Yukarıdaki ifade τ a göre integre edilir.

$$\int_\varepsilon^t\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x,t)dxd\tau - \int_\varepsilon^t\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t) + C(x)u\phi(x,t)\right)dxd\tau$$
$$= \int_\varepsilon^t\int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau$$

$$\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)\Big|_\varepsilon^t dx - \int_\varepsilon^t\int_\Omega u(x,t)\phi_\tau(x,t)dxd\tau - \int_\varepsilon^t\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t)\right.$$
$$\left. + C(x)u\phi(x,t)\right)dxd\tau = \int_\varepsilon^t\int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau$$

$$\int_\Omega (u(x,\varepsilon)\phi(x,\varepsilon) - u(x,t)\phi(x,t))dx - \int_\varepsilon^t\int_\Omega u(x,t)\phi_\tau(x,t)dxd\tau$$
$$-\int_\varepsilon^t\left(\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t) + C(x)u\phi(x,t)dxd\tau\right) = \int_\varepsilon^t\int_\Omega F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau$$

$$\int_{\Omega} u(x,\varepsilon)\phi(x,\varepsilon)dx - \int_{\Omega} u(x,t)\phi(x,t)dx - \int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega} u(x,t)\phi_{\tau}dxd\tau$$
$$-\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega}\left(\sum_{i;j=1}^{n} A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_i}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t) + C(x)u\,\phi(x,t)\;\; dxd\tau\right) = \int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega} F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau$$

$$\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega} -(u(x,t)\phi_{\tau}(x,t) + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_i}(x,t) - \sum_{i=1}^{n} B_i(x)u_{x_i}\phi(x,t) - C(x)u\phi(x,t)dxd\tau$$
$$+\int_{\Omega} u(x,t)\phi(x,t)dx - \int_{\Omega} u(x,\varepsilon)\phi(x,\varepsilon)dx) = \int_{0}^{t}\int_{\Omega} F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau \qquad (2.17)$$

(2.1) önermesinde ele alınan u fonksiyonunun diferansiyel özellikleri sayesinde $0 < \varepsilon \le t \le T$ için (2.17) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u_t(x,t)\phi(x,t) - (Lu)(x,t)\phi(x,t) = F(x,t)\phi(x,t)$$

$$\int_{\Omega}(u_t(x,t)\phi(x,t) - (Lu)(x,t)\phi(x,t))dx = \int_{\Omega} F(x,t)\phi(x,t)dx$$

$$\int_{\Omega}(u_t(x,t) - (Lu)(x,t)\phi(x,t))dx = \int_{\Omega} F(x,t)\phi(x,t)dx$$
$$\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega}(u_{\tau}(x,t) - (Lu)(x,t))\phi(x,t)d\tau = \int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega} F(x,t)\phi(x,t)dxd\tau \qquad (2.18)$$

Önceki ifadenin $\partial\Omega x\;\; \varepsilon, T$ üzerinde sıfırlanan bir $\phi \in W_2^{1,1}(\Omega x(\varepsilon,T))$ oluşturması önemlidir. $\overset{o}{C}{}^{\infty}(\;\varepsilon, T\;)$ uzayından keyfi bir $\eta(t)$ fonksiyonu alınır. Açıkça, $\phi = u(x,t)\eta(t)$ fonksiyonu (2.18) ifadesine ilişkin uygun tüm fonksiyonların sınıfına aittir. $\phi = u(x,t)\eta(t)$ fonksiyonu yukarıdaki (2.18) ifadesinde yerine yazıldığında aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\int_{\varepsilon}^{t}\left[\int_{\Omega}(u_{\tau}-Lu)u(x,t)dx\right]\eta(\tau)d\tau=\int_{\varepsilon}^{t}\left[\int_{\Omega}F(x,t)u(x,t)dx\right]\eta(\tau)d\tau \tag{2.19}$$

$0<\varepsilon\leq t\leq T$

(2.19) ifadesi ile birtakım işlemlerle aşağıdaki ifade elde edilir. Bunun için (2.8) ifadesi $u(x,t)$ ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilirse

$$u_t(x,t)u(x,t)-u(x,t)(Lu)(x,t)=u(x,t)F(x,t)$$

$$\int_{\Omega}u_t(x,t)u(x,t)dx-\int_{\Omega}u(x,t)(Lu)(x,t)dx=\int_{\Omega}u(x,t)F(x,t)dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u^2(x,t)dx-\int_{\Omega}u(x,t)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}(x)u_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}+C(x)u\right)dx=\int_{\Omega}u(x,t)F(x,t)dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u^2dx-\int_{\Omega}u\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}u_{x_i}dx-\int_{\Omega}u\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}dx-\int_{\Omega}(Cu)udx=\int_{\Omega}uF(x,t)dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u^2dx-\left(-\int_{\Omega}u_{x_i}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_i}dx\right)-\int_{\Omega}u\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}dx-\int_{\Omega}(Cu)udx=\int_{\Omega}u(x,t)F(x,t)dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u^2dx+\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dx-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}dx-\int_{\Omega}Cu^2dx=\int_{\Omega}uF(x,t)dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{2,\Omega}^2+\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_i}u_{x_i}dx-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}udx-\int_{\Omega}Cu^2dx=\int_{\Omega}uF(x,t)dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{2,\Omega}^2+\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dx=\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}udx+Cu^2\right)dx+\int_{\Omega}uF(x,t)dx \tag{2.20}$$

elde edilir.(2.20) ifadesine sırasıyla Hölder eşitsizliği ve (2.11) ifadesi uygulanarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{2,\Omega}^2+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n A_{ij}u_{x_i}u_{x_i}dx\le\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n B_i^2(x)\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x)\right)+C\int_\Omega u^2dx+\int_\Omega uF(x,t)dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{2,\Omega}^2+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n A_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dx\le\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n B_i^2(x)\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x)\right)^{1/2}udx+C\|u\|^2$$
$$+\int_\Omega u(x,t)F(x,t)dx$$

$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}u_{x_i}{}^2\ge v\sum_{i=1}^n u_{x_i}{}^2$ eşitsizliği yardımı ile,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{2,\Omega}^2+\int_\Omega v\sum_{i=1}^n u_{x_i}{}^2dx\le\left(\sum_{i=1}^n B_i^2(x)\right)^{1/2}\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x)\right)^{1/2}udx+C\|u\|^2+\int_\Omega u(x,t)F(x,t)dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\int_\Omega v\sum_{i=1}^n u_{x_i}{}^2dx\le sup\left(\left[\left(\sum_{i=1}^n B_i^2(x)\right)^{1/2}\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x)\right)^{1/2}udx\right]+C\|u\|^2\right)+\int_\Omega u(x,t)F(x,t)dx$$

Eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy Eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\int_\Omega v\sum_{i=1}^n u_{x_i}{}^2dx\le\mu_1\|u_x\|\|u\|+\mu_1\|u\|^2+\|u\|\|F\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(.,t)\|_{2,\Omega}^2+v\|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2\le\mu_1\|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}\|u(.,t)\|_{2,\Omega}+ \tag{2.21}$$

$$\mu_1\|.,t\|_{2,\Omega}^2+\|u(.,t)\|_{2,\Omega}\|F(.,t)\|_{2,\Omega}$$

elde edilir.

Burada,

$$\mu_1=\max\left\{\operatorname*{ess\,sup}_\Omega|C(x)|,\operatorname*{ess\,sup}_\Omega\left[\sum_{i=1}^n B_i^2(x)\right]^{1/2}\right\}$$

(2.21) in sağ tarafındaki ilk terime Young Eşitsizliği uygulanırsa,

$(p = q = 2 \ ve \ \delta^2 = \nu / \mu_1) \ ve$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu\|u_x\|^2 \le \mu_1\left(\frac{\nu}{\mu_1}\frac{\|u_x\|^2}{2} + \frac{\mu_1}{2\nu}\|u\|^2\right) + \mu_1\|u\|^2 + \|F\|\|u\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu\|u_x\|^2 \le \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2 + \frac{\mu_1^2}{2\nu}\|u\|^2 + \mu_1\|u\|^2 + \|F\|\|u\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \left(\nu - \frac{\nu}{2}\right)\|u_x\|^2 \le \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2\nu}\right)\|u\|^2 + \|F\|\|u\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2 \le \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2\nu}\right)\|u\|^2 + \|F\|\|u\| \tag{2.22}$$

ifadesi elde edilir. (2.22) nin sağ tarafındaki ikinci terime Poincare Eşitsizliği uygulanarak,

$$\left[\frac{\nu}{2}\|u\|^2 \le \frac{c_1\nu}{2}\|u_x\|^2 \Rightarrow \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2 \ge \frac{\nu}{2c_1}\|u\|^2\right]$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \frac{\nu}{2c_1}\|u\ \|^2 \le \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2\nu}\right)\|u\|^2 + \|u\|\|F\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \frac{\nu}{2c_1}\|u\ \|^2 - \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2\nu}\right)\|u\|^2 \le \|u\|\|F\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \left(\frac{\nu}{2c_1} - \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2\nu}\right)\|u\|^2 \le \|u\|\|F\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\alpha\|u\|^2\le\|u\|\|F\|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|+\alpha\|u\|^2\le\|F\| \qquad (2.23)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\alpha=\left[\frac{\nu}{2c_1(\Omega)}-\left(\mu_1+\frac{\mu_1^2}{2\nu}\right)\right]$$

ve $c_1(\Omega)$ Poincare katsayısıdır.

(2.23) ifadesinin her iki tarafı $e^{\alpha t}$ ile çarpılır ve (ε,t) de integre edilirse,

$$e^{\alpha t}\left(\frac{d}{dt}\|u\|+\alpha\|u\|\right)\le e^{\alpha t}\|F\|$$

$$\int_\varepsilon^t\frac{d}{dt}\ e^{\alpha t}\|u\|\ \le\int_\varepsilon^t e^{\alpha t}\|F\|$$

$$e^{\alpha t}\|u\|-e^{\alpha\varepsilon}\|u(x,0)\|\le\int_\varepsilon^t e^{\alpha\tau}\|F\|d\tau$$

$$e^{\alpha t}\|u\|-e^{\alpha\varepsilon}a(x)\le\int_\varepsilon^t e^{\alpha\tau}\|F\|d\tau$$

$\varepsilon\to 0$ iken

$$e^{\alpha t}\|u\|-a(x)\le\int_0^t e^{\alpha\tau}\|F\|d\tau$$

$$e^{\alpha t}\|u\|\le a(x)+\int_0^t e^{\alpha\tau}\|F\|d\tau$$

her iki taraf $e^{-\alpha t}$ ile çarpıldığında,

$$\|u\|\le e^{-\alpha t}a(x)+e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\|F\|d\tau$$

$$\|u\|\le e^{-\alpha t}a(x)+\int_0^t e^{-\alpha t}e^{\alpha\tau}\|F\|d\tau$$

$$\|u\|\le e^{-\alpha t}a(x)+\int_0^t e^{-\ t-\tau\ \alpha}\|F\|d\tau$$

elde edilir ve buradan (2.16) yardımı ile,

$$\sup_{0,t}\|u\| \le c_2(t)\left(\|a\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} d\tau \right) \tag{2.24}$$

bulunur. Burada,

$u \in \overset{o}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ ve $c_2(t) = e^{|\alpha| t}$

(2.22) ifadesinin ε dan t ye kadar integrali alınır ve ardından $\varepsilon \to 0_+$ için limite geçilerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\frac{1}{2}\int_\varepsilon^t \frac{d}{dt}\|u(.,t)\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \frac{v}{2}\int_\varepsilon^t \|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le \int_\varepsilon^t \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2v} \right)\|u(.,t)\|_{2,\Omega}^2 d\tau$$

$$+ \int_0^t \|u(.,t)\|_{2,\Omega} \|F(.,t)\|_{2,\Omega} d\tau$$

$$\frac{1}{2}\|u(x,t)\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\|u(x,\varepsilon)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{v}{2}\int_\varepsilon^t \|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le \int_\varepsilon^t \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2v} \right) \|u(.,t)\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_\varepsilon^t \|u(.,t)\|_{2,\Omega} \|F(.,t)\|_{2,\Omega} d\tau$$

$$\frac{1}{2}\|u(x,t)\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\|u(x,\varepsilon)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{v}{2}\int_\varepsilon^t \|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2v} \right)\int_\varepsilon^t \|u(.,t)\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_\varepsilon^t \|u(.,t)\|_{2,\Omega} \|F(.,t)\|_{2,\Omega} d\tau$$

$$\frac{1}{2}\|u(x,t)\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\|u(x,\varepsilon)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{v}{2}\int_\varepsilon^t \|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le \int_{\tau^*}^t \int_\Omega \frac{1}{2}|u_\tau|^2 dx d\tau + \int_{\tau^*}^t \int_\Omega 4\mu_1^2 |u_x|^2 dx d\tau + \int_{\tau^*}^t \int_\Omega 4\mu_1^2 |u|^2 dx d\tau$$

$\varepsilon \to 0+$ iken

$$\frac{-1}{2}\|u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{v}{2}\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2v} \right) t \|u(.,t)\|_{2,\Omega}^2$$

$$+ \int_0^t \|u(.,t)\|_{2,\Omega} \|F(.,t)\|_{2,\Omega} d\tau$$

$$\frac{v}{2}\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 \, d\tau \le \frac{1}{2}\|u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2v}\right) t \|u(.,t)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \|u(.,t)\|_{2,\Omega} \|F(.,t)\|_{2,\Omega} \, d\tau$$

Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının supremum değeri alındığında,

$$\frac{v}{2}\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 \, d\tau \le \frac{1}{2}\|u(x,0)\| \sup_{0,t}\|u(.,\tau)\|_{2,\Omega} + \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2v}\right) + \sup_{0,t}\|u(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2$$

$$+ \sup_{0,t}\|u(.,\tau)\|_{2,\Omega} \int_0^t \|F(.,t)\|_{2,\Omega} d\tau \tag{2.25}$$

ifadesi elde edilir.

(2.24) ifadesi (2.25) de yerine yazıldığında (2.8) – (2.10) direk probleminin herhangi bir $u \in \overset{o}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ zayıf çözümünü sağlar. Bu da aşağıdaki ifadeyi sağlar.

$$\frac{v}{2}\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 \, d\tau \le \frac{1}{2}\|u(.,0)\|_{2,\Omega}\, c_2(t)\left[\|a\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} \, d\tau\right.$$

$$+\left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2v}\right) t c_2^2(t)\left[\|a\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} \, d\tau\right.^2$$

$$+c_2(t)\left[\|a\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|F(.,\tau)\| \, d\tau\right] \int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} d\tau$$

$$\frac{v}{2}\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 \, d\tau \le \frac{1}{2} c_2(t)\left[\|a\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} \, d\tau\right] +$$

$$\left[\|u(.,0)\|_{2,\Omega} + \left(\mu_1 + \frac{\mu_1}{2v}\right) + 2c_2(t)\left(\|a\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} d\tau\right) + 2\int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} d\tau\right]$$

$$\frac{v}{2}\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le \frac{1}{2} c_2(t)\left[\|a\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} d\tau\right] +$$

$$\left[\left(\|a\|_{2,\Omega} + 2\int_0^t \|F(.,\tau)\|_{2,\Omega} \, d\tau\right) + \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2v}\right) t 2c_2(t)\left(\|a\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|F(.,t)\|_{2,\Omega} \, d\tau\right)^2\right]$$

$$\frac{v}{2}\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le \frac{1}{2}c_2(t)\left[1+2tc_2(t)\left(\mu_1+\frac{\mu_1^2}{2v}\right)\right]\left(\|a\|+2\int_0^t \|F(.,t)\|_{2,\Omega} d\tau\right)^2 +$$

$$\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le \frac{1}{v}c_2(t)\left[1+2tc_2(t)\left(\mu_1+\frac{\mu_1^2}{2v}\right)\right]\left(\|a\|+2\int_0^t \|F(.,t)\|_{2,\Omega} d\tau\right)^2$$

Burada,

$c_3(t)=\frac{1}{v}c_2(t)\left[1+2+c_2(t)\left(\mu_1+\frac{\mu_1^2}{2v}\right)\right]$ alınırsa,

$$\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \le c_3(t)\left(\|a\|+2\int_0^t \|F(.,t)\|_{2,\Omega}\, d\tau\right) \qquad (2.26)$$

elde edilir. $t,\ (0,T$ yarı kapalı olduğundan bir keyfi sabit kabul edilsin. (0,t) sabit aralığından bir ε sayısı alınarak aşağıdaki ifadeyi oluşturan bir $\tau^* \in\ \varepsilon,T$ noktasının varlığından söz edilebilir.

$$\int_\varepsilon^t \left\|u_x(.,\xi)_{2,\Omega}\right\|^2 d\xi=(t-\varepsilon)\left\|u_x(.,\tau^*)\right\|_{2,\Omega}^2, \quad \tau^*\in\ \varepsilon,t \qquad (2.27)$$

$0<\varepsilon<t\le T$

Bu anlamda (2.18) eşitliğinin tekrar ele alınması gerekir çünkü, uygun ϕ fonksiyonlarının kümesi $L_2(Q_T)$ uzayında yoğundur. O halde herhangi bir $\phi\in L_2(Q_T)$ için bu eşitsizlik geçerli olmalıdır. Bundan dolayı,

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=F(x,t) \qquad (2.\ 28)$$

denklemi $Q\equiv\Omega x(\varepsilon,t)$ nin her yerinde mevcuttur ve ayrıca τ^* ve t (2.27) ifadesinden alınarak

$$\int_{\tau^*}^t\int_\Omega (u_\tau-Lu)^2 dxd\tau=\int_{\tau^*}^t\int_\Omega F^2 dxd\tau \ \ ,\tau^*\in\ \varepsilon,t\ ,\quad 0<\varepsilon<t\le T \qquad (2.29)$$

eşitliğini sağlar. Kolaylıkla görülebilir ki (2.29) ifadesi aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}(u_\tau^2 - 2u_\tau(Lu) + (Lu)^2)dxd\tau = \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}u_\tau^2 dxd\tau - 2\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}u_\tau(Lu)dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}(Lu)^2 dxd\tau = \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}u_\tau^2 dxd\tau - 2\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}u_\tau\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}(x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i} + C(x)u\right)dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}(Lu)^2 dxd\tau$$

$$= \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}(u_\tau^2 + (Lu)^2)dxd\tau - 2\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}u_\tau\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}(x)u_{x_i}\right)dxd\tau - 2\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}u_\tau(B_i(x)u_{x_i} + C(x)u)dxd\tau$$

$$= \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}(u_\tau^2 + (Lu)^2)dxd\tau - 2\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_j}(x,t)u_{x_i}(x,t)dx +$$

$$2\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_j}(x,t)u_{x_i}(x,t)dx + 2\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}u_\tau\left(\sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i} + C(x)u\right)dxd\tau = \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_j}(x,t)u_{x_i}(x,t)dx + \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}(u_\tau^2 + (Lu)^2)dxd\tau \le \int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_j}(x,\tau^*)u_{x_i}(x,\tau^*)dx$$

$$+2\left|\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}u_\tau\left[\sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i} + C(x)u\right]\right|dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau \tag{2.30}$$

elde edilir.(2. 30)- (2.31) ifadelerinde $\delta = 1/(4\mu_1)$ yerine yazılırsa,

$\left(0 < \nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\xi_i\xi_j \le \mu\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\right)$ eşitsizliği yardımı ile

$$\nu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,t)\ dxdt + \int_{\tau}^{t} \int_{\Omega} \left[u_\tau^2 + (Lu)^2 \right] dxd\tau \ \le \mu \int_{\Omega} u_x^2(.,\tau^*)\ dx$$

$$+\mu_1 \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left(2\frac{1}{4\mu_1} \left| u_{\ \tau} \right|^2 + 4\mu_1\ \left| u_x \right|^2 + \left| u \right|^2 \ \right) dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} F^2 dxd\tau$$

$$\nu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,t) dx + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left[u_\tau^2 + (Lu)^2 \right] dxd\tau \ \le \ \mu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,\tau^*) dx + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left| u_\tau \right|^2 dxd\tau$$

$$+ \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} 4\mu_1^2 (\left| u_x \right|^2 + \left| u \right|^2) dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} F^2 dxd\tau$$

$$\nu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,t)\ d\ x + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left[u_\tau^2 + (Lu)^2 \right] dxd\tau \ \le \mu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,\tau^*) dx + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left| u_\tau \right|^2 dxd\tau$$

$$+ \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} 4\mu_1^2 \left| u_x \right|^2 dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} 4\mu_1^2 \left| u \right|^2 dxd\tau \ + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} F^2 dxd\tau$$

$$\nu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,t) d\ x + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left[u_\tau^2 + (Lu)^2 \right] dxd\tau \ \le \mu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,\tau^*) dx + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left| u_\tau \right|^2 dxd\tau$$

$$+ \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} 4\mu_1^2 \left| u_x \right|^2 dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} 4\mu_1^2 c_1(\Omega) \int_{\Omega} \left| u \right|^2 dxd\tau \ + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} F^2 dxd\tau$$

$$\nu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,t) d\ x + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left[u_\tau^2 + (Lu)^2 \right] dxd\tau \ \le \mu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,\tau^*) dx + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left| u_\tau \right|^2 dxd\tau$$

$$+ \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} 4\mu_1^2 \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left| u_x \right|^2 dxd\tau + 4\mu_1^2 c_1(\Omega) \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left| u_x \right|^2 dxd\tau \ + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} F^2 dxd\tau$$

$$\nu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,t) d\ x + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left[u_\tau^2 + (Lu)^2 \right] dxd\tau \ \le \mu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,\tau^*) dx \ + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left| u_\tau \right|^2 dxd\tau$$

$$+4\mu_1^2 (1 + c_1(\Omega)) \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} \left| u_x \right|^2 dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t} \int_{\Omega} F^2 dxd\tau$$

$$\nu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,t)d\,x + \frac{1}{2}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega} u_{\tau}^2 dxd\tau + \int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}(Lu)^2 dxd\tau \geq \mu \int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,\tau^*)dx$$

$$+4\mu_1^2(1+c_1(\Omega))\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}|u_x|^2 dxd\tau + +\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\int_{\Omega} u_{x_i}(.,t)^2 d\,x \leq \frac{\mu}{\nu}\int_{\Omega} u_{x_i}^2(.,\tau^*)dx + \frac{4\mu_1^2(1+c_1(\Omega))}{\nu}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}|u_x|^2 dxd\tau + \frac{1}{\nu}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{\mu}{\nu}\|u_x(.,\tau^*)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{4\mu_1^2(1+c_1(\Omega))}{\nu}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}|u_x|^2 dxd\tau + \frac{1}{\nu}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau \qquad (2.31)$$

elde edilir. (2. 31) ifadesi (2.32) de yerine yazılırsa (2.27) yardım ile

$$\|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{\mu}{\nu(t-\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{t}\|u_x(.,\xi)\|^2 d\xi + \frac{4\mu_1^2(1+c_1(\Omega))}{\nu}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}|u_x|^2 dxd\tau + \frac{1}{\nu}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \left(\frac{\mu}{\nu(t-\varepsilon)} + \frac{4\mu_1^2(1+c_1(\Omega))}{\nu}\right)\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}|u_x|^2 dxd\tau + \frac{1}{\nu}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$$\|u_x(.,t)\|_{2,\Omega}^2 \leq c_4(t)\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}|u_x|^2 dxd\tau + \frac{1}{\nu}\int_{\tau^*}^{t}\int_{\Omega}F^2 dxd\tau$$

$0<\varepsilon<t\leq T$

elde edilir. Buradaε (0,t) aralığında keyfi pozitif bir sayıdır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim (2.26) temel alınarak aşağıdaki şekilde satılır.

BÖLÜM 3. PARABOLİK DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM

3.1 Lineer Ters Problem: Bir Kaynak Teriminin Yeniden Ele Alınışı

Bu bölümde, (2.8) parabolik denkleminin bir kaynak fonksiyonunun bulunuşu ele alacaktır. Bu anlamda,

$$F = f(x)h(x,t) + g(x,t) \tag{3.1}$$

formunda bir F fonksiyonu ele alınabilir. Burada, h ve g fonksiyonları bilinirken, bilinmeyen f fonksiyonu aranır.h, g, a, b ve χ fonksiyonları, L, B, ℓ operatörleri ve Q_T bölgesi dikkate alındığında, $Q_T \equiv \Omega x(0,T)$ silindirinde aşağıdaki denklemi sağlayan bir $\{u, f\}$ fonksiyonu çiftine ait ters problem incelenir.

$$u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = f(x)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{3.2}$$

Başlangıç koşulu,

$$u(x,0) = a(x) \qquad , x \in \Omega \tag{3.3}$$

Sınır koşulu,

$$(Bu)(x,t) = b(x,t) \quad , \quad (x,t) \in S_T = \partial\Omega x \ \ 0,T \tag{3.4}$$

ve ek koşulu,

$$(\ell u)(x) = \chi(x) \qquad , x \in \Omega \tag{3.5}$$

alınacaktır.Burada L sembolü, herhangi bir $x \in \overline{\Omega}$ için t den bağımsız katsayıları olan bir düzgün eliptik operatör için kullanılır.

$$(Lu)(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}(x) u_{x_i}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) u_{x_i}(x,t) + C(x)u(x,t) \tag{3.6}$$

$$A_{ij} = A_{ji} \ , \quad 0 < \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i \le \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \xi_i \xi_j \le \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_j^2 \ , \ \nu, \mu \equiv sabit > 0$$

(3.4) sınır koşulunda yer alan B operatörünün anlamı şudur:

$$(Bu)(x,t) \equiv u(x,t)$$

ya da (3.7)

$$(Bu)(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial N} + \sigma(x)u(x,t)$$

Burada, $\frac{\partial u}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_j}(x,t) Cos(n, O_{x_i})$ ve $n,$ $\partial\Omega$ ye dış normaldir ve $\sigma \ge 0$ olduğu kabul edilir. (3.5) de ki (ℓu) ifadesi , t_1 sabit tutulmuş ve w bilinmiyorsa

$$(\ell u)(x) \equiv (x) \ , \quad 0 < t_1 \le T \ , \ x \in \Omega$$

ya da (3.8)

$$(\ell u)(x) \equiv \int_0^{\tau} u(x,\tau) w(\tau) d\tau \ , \ x \in \Omega$$

ifadesine dönüşür.

Bu durumda teori yeniden biçimlenmesine rağmen, (3.3)- (3.4) homojen koşulları sağlanır ve g fonksiyonu (3.2) de sıfıra eşittir. Gerçekten, g , a ve b fonksiyonları ile L ve B operatörleri üzerinde geçerli olan bir yardımcı bilgi mevcutsa, aşağıdaki bağıntılarda direk problemi yeniden oluşturan bir v fonksiyonu ele alınabilir.

$$\begin{aligned} & v_t(x,t) - (Lv)(x,t) = g(x,t) \ , && x,t \in Q_T \\ & v(x,0) = a(x) \ , && x \in \Omega \\ & (Bv)(x,t) = b(x,t), && (x,t) \in S_T \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.9) problemi çözülürken karşılık gelen fonksiyonların sınıfında tek bir v çözümü bulunur.Bu nedenle, (3.2) – (3.5) ve (3.9) ifadeleri bir çift $u-v, f$ fonksiyonunun,

$$(u-v)_t - L(u-v) = f(x)h(x,t) \quad , \quad (x,t) \in Q_T \tag{3.10}$$

denklemini sağladığını belirtir. Burada başlangıç koşulu,(3.3) den

$$\begin{aligned}(u-v)(x,0) &= u(x,0) - v(x,0)\\ &= a(x) - a(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$(u-v)(x,0) = 0 \quad , x \in \Omega \tag{3.11}$$

(3.4) den sınırlı koşulu,

$$\begin{aligned}B(u-v)\ (x,t) &= (Bu)(x,t) - (Bv)(x,t)\\ &= b(x,t) - b(x,t) = 0\end{aligned}$$

$$B(u-v)\ (x,t) = 0, \qquad (x,t) \in S_T \tag{3.12}$$

(3.5)den ek koşulu,

$$\begin{aligned}\ell(u-v)\ (x) &= (\ell u)(x) - (\ell v)(x)\\ &= \chi(x) - (\ell v)(x)\\ &= \chi_1(x)\end{aligned}$$

$$\ell(u-v)\ (x) = \chi_1(x) \quad , x \in \Omega \tag{3.13}$$

elde edilir. v , (3.9) direk probleminin bir çözümü olarak belirlenen bilinmeyen fonksiyondur. Bu yaklaşım, uygun bir tipte ters problemine yol gösterir.Daha detaylı yorum, (3.7) nin ilk bağıntısına uyan Dirichlet sınır verisi ile ters probleme dayanır. Ek koşul, (3.8) in ikinci ifadesi ile bağdaştırılan integral formunda ele alınacaktır. İleri bir çözümleme elde etmek için, aşağıdaki bağıntıları sağlayan ve bir $u-f$ fonksiyon çiftini sağlayan ters problem kurulur.

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=f(x)h(x,t)\ ,\ (x,t)\in Q_T \tag{3.14}$$

$$u(x,0)=0\ \ ,\ \ x\in\Omega \tag{3.15}$$

$$u(x,t)=0\ \ ,\ \ (x,t)\in S_T \tag{3.16}$$

$$\int_0^{\tau} u(x,\tau)w(\tau)d\tau=\varphi(x)\ \ ,\ \ x\in\Omega \tag{3.17}$$

L operatörü, h,w,φ fonksiyonları ve Ω bölgesi verilmiştir.

Tanım 3.1.

$u\in W_{2,0}^{2,1}(Q_T),\ f\in L_2(\Omega)$ *ve* (3.14) – (3.17) ifadeleri sağlanırsa, bir u,f fonksiyon çifti (3.14)-(3.17) ters probleminin bir genelleştirilmiş çözümü olduğu söylenebilir.İlk olarak , $L_2(\Omega)$ uzayında f fonksiyonu için bir operatör denklem oluşturulur. İkinci olarak, bu denklemin mevcut olan ters probleme denk olduğu gösterilir. Bu, Fredholm denkleminin çözümünü bularak ters problemin çözümünün de varlığını göstermiş olur ve Fredholm, denklemin tek çözümünü bulmaya yardım eder. Tek çözüm bulunduğunda varlığıda kanıtlanmış olur.f fonksiyonu için ikinci bir operatör denklemi elde edilir. L operatörünün katsayıları (2.11)-(2.12) koşullarını ve aşağıdaki ifadeleri sağlar.

$$h,h_t\in L_\infty(Q_T),\ \ \left|\int_0^T h(x,t)w(t)dt\right|\geq 0 \tag{3.18}$$

$x\in\overline{\Omega},\ (\delta\equiv sabit),\ w\in L_2(0,T)$

$L_2(\Omega)$ uzayında keyfi bir f fonksiyonu göz önüne alınarak (3.14) te yerine koyulduğunda (3.14)-(3.16) direk probleminin bir $u\in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ tek çözümü bulunur. Eğer bu gerçekleşirse, Önerme 2.2 u fonksiyonunun,

$u(.,t)\in C(\ 0,T\ \ ;W_2^2(\Omega))$

ve

$u_t(.,t)\in C(\ 0,T\ \ ;L_2(\Omega))$

koşullarına sahip olduğunu garanti eder.Bu özelliklerin ışığındaki amaç,

$$(A_1 f)(x) = \frac{1}{h_1(x)} \int_0^T u_t(x,t) w(t) dt, \; x \in \Omega \tag{3.19}$$

$$h_1(x) = \int_0^T h(x,t) w(t) dt$$

kuralına uygun olarak lineer operatörünü kullanmaktadır. $L_2(\Omega)$ uzayı civarında f fonksiyonu için ikinci tip bir lineer operatör denklem elde edilir. Bunun için, $u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = f(x)h(x,t)$ ifadesinin her iki tarafı $w(t)$ ile çarpılıp, [0,T] de integre edilir.

$$w(t)u_t(x,t) - (Lu)(x,t)w(t) = f(x)h(x,t)w(t)$$

$$\int_0^T w(t)\, u_t(x,t) dt - \int_0^T (Lu)(x,t) w(t) dt = \int_0^T w(t) f(x) h(x,t) dt$$

$$\int_0^T w(t)\, u_t(x,t) dt - \int_0^T (Lu)(x,t) w(t) dt = f(x) \int_0^T w(t) h(x,t) dt$$

$$\int_0^T w(t)\, u_t(x,t) dt - \int_0^T (Lu)(x,t) w(t) dt = f(x) h_1(t)$$

Her iki taraf $h_1(t)$ ye bölünürse,

$$f(x) = \frac{1}{h_1(x)} \int_0^T w(t) u_t(x,t) dt - \frac{1}{h_1(t)} \int_0^T (Lu)(x,t) w(t) dt$$

$$\Psi(x) = \frac{-1}{h_1(x)} \int_0^T (Lu)(x,t) w(t) dt$$

$$f(x) = (A_1 f)(x) + \Psi(x) \tag{3.20}$$

elde edilir. Burada $\Psi(x)$ bilinmeyen fonksiyondur ve $L_2(\Omega)$ uzayına aittir.İleriki kısımlarda, eliptik operatör için

$$(Lv)(x) = 0 \; , \; x \in \Omega \; , \; v(x) = 0 \; , x \in \partial\Omega \tag{3.21}$$

Dirichlet probleminin sadece aşikar bir çözüme sahip olduğu kabul edilir. İlerde ki önermeler,(3.20) denkleminin bir çözümünün varlığı ve tersi ile (3.14)-(3.17) ters problemin çözülebilirliği arasında saptanan bağıntılar için uygun prensipleri sağlar.

Teorem 3.1.

Farz edilsin ki L operatörü (2.11) –(2.12) koşullarını sağlasın ve $h, h_t \in L_\infty(Q_T)$

$$\left| \int_0^T h(x,\tau)w(\tau)d\tau \right| \geq \delta > 0 \ , \ x \in \overline{\Omega} \ (\delta \equiv sabit)$$

$$w \in L_2(0,T) \ ve \ \varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$$

(3.21) Dirichlet probleminin aşikar bir çözüme sahip olduğu kabul edilir. Eğer,

$$\psi(x) = \frac{-1}{h_1(x)}(L\varphi)(x) \quad , \ h_1(x) = \int_0^T h(x,\tau)\omega(\tau)d\tau \tag{3.22}$$

düşünülürse aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(a) (3.20) lineer denklemi çözülebilirse, o zaman (3.14) – (3.17) ters problemi de çözülebilir.

(b) (3.14) – (3.17) ters probleminin bir u, f çözümü varsa, o zaman f fonksiyonu içeren (3.20) denklemine bir çözüm verir.

İspat.

(3.20) denkleminin bir çözüme sahip olduğunu ve (3.22) nin doğruluğunu kabul ederek (a) maddesinin ispatı için yol alınıcaktır. (3.20) nin çözümü f fonksiyonu olsun. Eğer f fonksiyonu (3.14) te yerine yazılırsa, o zaman (3.14) –(3.16) bir direk problem olarak çözülür. Teorem 1.1.5 göz önüne alınırsa $u \in w_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ tek çözümü vardır ve Önerme 2.1 den

$$u(.,t) \in C(\ 0,T\ ;W_2^2(Q))$$

ve

$$u_t(.,t) \in C(\ 0,T\ ;L_2(\Omega))$$

ifadelerini verir. u fonksiyonunun (3.17) ek koşulu sağladığı gösterilirse iddia ispatlanmış olur.

$$\int_0^T u(x,\tau)w(\tau)d\tau = \varphi_1(x) \quad ,x \in \Omega \tag{3.23}$$

ile u fonksiyonunun yukarıdaki özellikleri anlamlı hale gelir. Bu vasıtayla $\varphi_1 \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ ifadesi ortaya çıkar.(3.14) ün her iki tarafı $w(t)$ fonksiyonu ile çarpılsın ve çıkan ifade t ye göre [0,T] de integre edilirse,

$$u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = f(x)h(x,t)$$

$$w(t)u_t(x,t) - (Lu)(x,t)w(t) = w(t)f(x)h(x,t)$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \int_0^T (Lu)\,(x,t)w(t)dt = \int_0^T w(t)f(x)h(x,t)dt$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \int_0^T (Lu)\,(x,t)w(t)dt = f(x)\int_0^T w(t)h(x,t)dt$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \int_0^T (Lu)\,(x,t)w(t)dt = f(x)h_1(x) \qquad (*)$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \int_0^T \left\{ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}u_{x_i}) + \sum_{i=1}^n B_i u_{x_i} + Cu \right\} w(t)dt = f(x)h_1(x)$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \left\{ \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}u_{x_i})w(t)dt + \int_0^T \sum_{i=1}^n B_i u_{x_i} w(t)dt + \int_0^T Cuw(t)dt \right\}$$

$$+\int_0^T (Cu)w(t)d\,t \ = f(x)h_1(x)$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} \int_0^T u_{x_i} w(t)dt + \sum_{i=1}^{n} B_i \int_0^T u_{x_i} w(t)dt + C\int_0^T uw(t)d\,t \right. = f(x)h_1(x)$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T uw(t)dt + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T uw(t)dt + C\int_0^T uw(t)dt \right\}$$
$$= f(x)h_1(x)$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} \right) \varphi + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x} B_i \right) \varphi + C\varphi \right\} = f(x)h_1(x)$$

$$\int_0^T w(t)u_t(x,t)dt - \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}\varphi_x + \sum_{i=1}^{n} B_i\varphi_x + C\varphi \right\} = f(x)h_1(x)$$

$$\int_0^T u_t(x,t)w(t)dt - (L\varphi_1)(x) = f(x)h_1(x) \quad , x \in \Omega \tag{3.24}$$

Diğer bir taraftan, f fonksiyonunun (3.20) nin bir çözümü olduğu göz önüne alınarak , (3.19) dan

$$(A_1 f)(x) = \frac{1}{h_1(x)} \int_0^T u_t(x,t)w(t)dt$$

$$(A_1 f)(x)h_1(x) = \int_0^T u_t(x,t)w(t)dt$$

olur ve

$$h_1(x)(A_1 f)(x) - (L\varphi_1)(x) = f(x)h_1(x) \quad , x \in \Omega \tag{3.25}$$

elde edilir.

(3.24) – (3.25) den $\varphi - \varphi_1$ fonksiyonu, Laplace operatörü için direk sabit sınır değer probleminin bir çözümüdür.

$$\left(\int_0^T u_t(x,t)w(t)dt-(L\varphi_1)(x)-f(x)h_1(x)\right)-(h_1(x)(A_1f)(x)-(L\varphi)(x)-f(x)h_1(x))=0$$

$$\int_0^T u_t(x,t)w(t)dt-(L\varphi_1)(x)-f(x)h_1(x)-h_1(x)(A_1f)(x)+(L\varphi)(x)+f(x)h_1(x)=0$$

$$(A_1f)(x)h_1(x)-(L\varphi_1)(x)-f(x)h_1(x)-h_1(x)(A_1f)(x)+(L\varphi)(x)+f(x)h_1(x)=0$$

ifadelerinden,

$$(L\varphi)(x)-(L\varphi_1)(x)=0$$

$$\begin{aligned} &L(\varphi-\varphi_1)\ (x)=0\ ,\ x\in\Omega \\ &(\varphi-\varphi_1)(x)=0\ ,\ x\in\partial\Omega \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir.Bu yüzden, Ω nin hemen hemen her yerinde $\varphi_1=\varphi$ dir ve (3.14) – (3.17) ters problemi çözülebilirdir. Böylece (a) maddesi ispatlanmış oldu.Şimdi, (3.14) – (3.17) ters problemini çözen bir u, f fonksiyon çiftinin varlığını kabul eden (b) maddesinin ispatına geçilecektir.Bunun için,(3.14) ifadesi ($*$) ile gösterilen

$$\int_0^T u_t(x,t)w(t)dt-\int_0^T(Lu)(x,t)w(t)dt=f(x)h_1(x) \tag{3.27}$$

ifadesini belirtir ve burada $h_1(x)=\int_0^T h(x,\tau)w(\tau)d\tau$ dır.

(3.17) ek koşulu ve (3.22) ifadesi yardımı ile (3.27) aşağıdaki şekilde tekrar yazılır.

(3.22) den,

$$\Psi(x)h_1(x)=-(L\varphi)(x)$$

$$\Psi(x)\int_0^T h(x,t)w(t)dt=-(L\varphi)(x)$$

$h_1(x)=\int_0^T h(x,\tau)w(\tau)d\tau$ ifadesinden de yararlanılarak (3.27) den,

$$\int_0^T u_t(x,t)w(t)dt+\varphi(x)h_1(x)=f(x)h_1(x) \qquad (3.2)$$

yazılır.(3.19) da ki A operatörünün tanımı hatırlanarak (3.28) in, f fonksiyonunun (3.20) denkleminin bir çözümü olduğunu ima ettiği sonucu çıkarılır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıdaki sonuç, önemli koşullar altında var olan ters problemin tek bir çözümünün bulunabileceğini ifade eder.

Teorem 3.2.

L operatörü (2.11) – (2.12) koşullarını sağlasın

$$h,h_t\in L_\infty(Q_T)\,ve\left|\int_0^T h(x,t)w(t)dt\right|\geq\delta>0\quad \delta=sabit$$

$$w(t)\in L_2\ 0,T\ ,\ \varphi\in W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$$

olsun. Ayrıca, (2.21) Dirichlet probleminin bir aşikar çözüme sahip olduğu varsayılarak aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$m_1<1$$

$$m_1=\delta^{-1}\|w\|_{2,(0,T)}\|m_2\|_{2,(0,T)} \qquad (3.29)$$

$$m_2(t)=\exp\ -\alpha t\ \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|h(x,0)|+\int_0^t \exp\ -\alpha(t-\tau)\ \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|h_x(.,\tau)|d\tau$$

$$\alpha=\left[\frac{v}{2c_1(\Omega)}-\left(\mu_1+\frac{1}{2v}\mu_1^2\right)\right]$$

$$\mu_1=\max\left\{ess\sup|C(x)|,\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^n B_1^2(x)\right]^{1/2}\right\}$$

Burada, $c_1(\Omega)$ Poincare-Friedrichs eşitsizliği sabitidir. O halde, (3.14)-(3.17) ters probleminin bir $u \in W_{2.0}^{2.1}(Q_T)$ çözümü vardır, bu çözüm belirtilen fonksiyonların sınıfında tektir ve aşağıdaki ifadeler (2.13) de ki c* sabiti ile geçerlidir:

$$\| f \|_{2,\Omega} \leq \frac{\delta^{-1}}{1-m_1} \|L\varphi\|_{2,\Omega} \tag{3.30}$$

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(2,1)} \leq \frac{c^*\delta^{-1}}{1-m_1} \|L\varphi\|_{2,\Omega}\, x \left(\int_0^T ess \sup_{\Omega} |h(x,t)|^2\, dt \right)^{1/2} \tag{3.31}$$

İspat.

(3.20) denklemi ele alınarak ispata başlanılacaktır. Önemli bir nokta ise, (3.20) ifadesi bir çözüme sahipse o zaman Teorem 3.1 ile ilgili ters problemin çözülebilirliğini sağlar. A_1 lineer operatörü için (3.29) da ki m_1 sabiti ile

$$\|A_1 f\|_{2,\Omega} \leq m_1 \| f \|_{2,\Omega} \ , \ f \in L_2(\Omega) \tag{3.32}$$

ifadesinin geçerli olduğu gösterilecektir. Bunun için (3.19) ifadesinden yola çıkılırsa,

$$|(A_1 f)(x)| = \left| \frac{1}{h_1(x)} \int_0^T u_t(x,t) w(t) dt \right|$$

$$|(A_1 f)(x)| = \frac{1}{|h_1(x)|} \int_0^T u_t(x,t) w(t) d\, t|$$

$$|(A_1 f)(x)| \leq \frac{1}{\delta} \int_0^T |u_t(x,t)| |w(t)| dt$$

$$|(A_1 f)(x)| \leq \frac{1}{\delta} \|w\|_{0,T} \ \|u_t\|_{0,T}$$

$$|(A_1 f) \ \ x \ |^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \|w\|_{0,T}^2 \ \|u_t\|_{(0,T)}^2$$

$$\int_{\Omega} |(A_1 f)(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{\delta^2} \|w\|_{(0,T)}^2 \, \|u_t\|_{(0,T)}^2 \, dx$$

$$\|A_1 f\|_\Omega^2 \le \frac{1}{\delta^2} \int_\Omega \|w\|_{(0,T)}^2 \|u_t\|_{(0,T)}^2 \, dx$$

$$\|A_1 f\|_\Omega^2 \le \frac{1}{\delta^2} \|w\|_{(0,T)}^2 \int_\Omega \|u_t\|_{(0,T)}^2 dx$$

$$\|A_1 f\|_\Omega^2 \le \frac{1}{\delta^2} \|w\|_{(0,T)}^2 \int_\Omega \left(\int_0^T u_t^2 dt \right) dx$$

$$\|A_1 f\|_\Omega^2 \le \frac{1}{\delta^2} \|w\|_{(0,T)}^2 \int_0^T \left(\int_\Omega u_t^2 dx \right) dt$$

$$\|A_1 f\|_\Omega^2 \le \frac{1}{\delta^2} \|w\|_{(0,T)}^2 \int_0^T \|u_t\|_\Omega^2 dt$$

$$\|A_1 f\|_\Omega^2 \le \frac{1}{\delta} \|w\|_{(0,T)} \left(\int_0^T \|u_t\|_\Omega^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{3.33}$$

elde edilir.Diğer bir taraftan, $f \in L_2(\Omega)$ olarak (3.14) – (3.16) sistemi (2.8)- (2.10) sistemi gibi aynı tip haline gelir. Önerme 2.1 de ki (2.27) dan yararlanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta} \|w\|_{0,T} \int_0^T e^{-\alpha t} \|La + F(.,0)\|_{2,\Omega} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|F_\tau\|_\Omega \, d\tau)$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta} \|w\|_{(0,T)} \int_0^T \left(e^{-\alpha t} \|La\| + \|F(.,0)\|_{2,\Omega} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|F_\tau\|_\Omega \right) d\tau$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta} \|w\|_{(0,T)} \int_0^T \left[e^{-\alpha t} \left(\int_\Omega f(x)h(x,0)^{\,2} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \| fh_\tau \|_\Omega \right] d\tau$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta} \|w\|_{(0,T)} \int_0^T e^{-\alpha t} \operatorname*{ess\,sup}_\Omega h(x,0) \left(\int_\Omega f^2(x) dx \right)^{1/2} d\tau + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \operatorname*{ess\,sup}_\Omega h_\tau(x,0) \left(\int_\Omega f^2(x) dx \right)^{1/2} d\tau$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta} \|w\|_{(0,T)} \left(\int_0^T e^{-\alpha t} \operatorname*{ess\,sup}_\Omega h(x,0) \|f\|_\Omega + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \operatorname*{ess\,sup}_\Omega h_\tau(x,0) \|f\|_\Omega \right) d\tau$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta} \|w\|_{(0,T)} \int_0^T \left(e^{-\alpha t} \operatorname*{ess\,sup}_\Omega h(x,0) d\tau + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \operatorname*{ess\,sup}_\Omega h_\tau(x,0) d\tau \right) \|f\|_\Omega$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta}\|w\|_{(0,T)} \int_0^T m_2(t)\|f\|_\Omega \, d\tau$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta}\|w\|_{(0,T)} \left(\int_0^T m_2^2(t)\|f\|_\Omega^2 \, d\tau\right)^{1/2}$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta}\|w\|_{(0,T)} \|f\|_\Omega \left(\int_0^T m_2^2(t) d\tau\right)^{1/2}$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le \frac{1}{\delta}\|w\|_{(0,T)} \|m_2(t)\|_{(0,T)} \|f\|_\Omega$$

$$\|A_1 f\|_\Omega \le m_1 \|f\|_\Omega$$

ifadesi elde edilmiş oldu.

Aynı zamanda,

$$\|u_t(.,t)\|_{2,\Omega} \le m_2(t)\|f\|_{2,\Omega} \ , \ \ t \in 0,T$$

sonucuna varılır ve

$$m_2(t) = \exp\ -\alpha t \ \ \underset{\Omega}{ess\sup}|h(x,0)| \quad , \alpha = \left[\frac{v}{2c_1(\Omega)} - \left(\mu_1 + \frac{1}{2v}\mu_1^2\right)\right]$$

$$\mu_1 = \max\left\{\underset{\Omega}{ess\sup}|C(x)|, \underset{\Omega}{ess\sup}\left[\sum_{i=1}^n B_i^2(x)\right]^{1/2}\right\}$$

Burada, $c_1(\Omega)$ Poincare-Friedrichs eşitsizlik katsayısıdır.

$m_1 < 1$iken, (3.20) lineer denklemi $L_2(\Omega)$ uzayından herhangi bir ψ fonksiyonu tek çözümüne sahiptir ve özellikle , $\Psi = -L\varphi / h_1$ifadesinin (3.22) yi sağladığı kabul edilebilir. Eğer öyleyse, (3.30) ifadesinin doğruluğu kesindir ve şu şekilde elde edilir;bunun için (3.20) ifadesinden yola çıkılırsa,

$$|f| = |A_1 f + \Psi|$$

$$|f|^2 = |A_1 f + \Psi|^2$$

$$\int_\Omega |f|^2 dx = |A_1 f + \Psi|^2 \, dx$$

$$\| f \|_{\Omega}^{2} \le 2\left(\int_{\Omega} |A_1 f|^2 + |\Psi|^2 \, dx \right)$$

$$\| f \|_{\Omega}^{2} \le 2\left(\|A_1 f\|^2 + \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \right)$$

(3.32) ifadesi ile,

$$\| f \|_{\Omega}^{2} \le (m_1 \| f \|_{2,\Omega})^2 + \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx$$

$$\| f \|_{\Omega} \le m_1 \| f \|_{2,\Omega} + \left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\| f \|_{\Omega} - m_1 \| f \|_{2,\Omega} \le \left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\| f \|_{\Omega} (1 - m_1) \le \left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

elde edilir ve buradan de (3.22) ifadesinin yardımı ile,

$$\| f \|_{\Omega} (1 - m_1) \le \left(\int_{\Omega} \left| \frac{-1}{h_1(x)} (L\varphi)(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\| f \|_{\Omega} (1 - m_1) \le \frac{1}{\delta} \left(\int_{\Omega} |(L\varphi)(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\| f \|_{\Omega} (1 - m_1) \le \frac{1}{\delta} \|L\varphi\|_{2,\Omega}$$

$$\| f \|_{\Omega} \le \frac{\delta^{-1}}{1 - m_1} \|L\varphi\|_{2,\Omega}$$

Böylece (3.30) ifadesi elde edildi. Benzer şekilde (3.31) ifadesi de elde edilir.Bunun için

$\|u\| \le c * (\|F\| + \|a\|)$ (2.13) ifadesi kullanılır.

Ayrıca (2.9) koşulundan,

$$\|u\| \le c^* \|F\|$$
$$\|u\| \le c^* \| f(x)h(x,t)\|$$
$$\|u\| \le c^* \left(\int_0^T (f(x)h(x,t))^2 \, dt \right)^{1/2}$$
$$\|u\| \le c^* \left(\int_0^T h(x,t)^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T f(x)^2 \, dt \right)^{1/2}$$
$$\|u\| \le c^* \left(\int_0^T \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |h(x,t)|^2 \, dt \right) \| f \|_{\Omega}$$
$$\|u\| \le c^* \left(\int_0^T \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |h(x,t)|^2 \, dt \right) \frac{\delta^{-1}}{1-m_1} \|L\varphi\|$$
$$\|u\| \le \frac{c^* \delta^{-1}}{1-m_1} \|L\varphi\| \left(\int_0^T \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |h(x,t)|^2 \, dt \right) \tag{3.31}$$

elde edilir.Böylece, Teorem 3.1 (3.14) – (3.17) ters probleminin çözümünün varlığını ifade eder.Yukarıda çözümü bulunan (3.14)- (3.17) ters problemin u_1, f_1 *ve* u_2, f_2 iki farklı çözüm kümesi olduğu var sayılsın. Bu durumda, f_1 fonksiyonu f_2 fonksiyonu ile çakışamaz, çünkü onların eşitliği u_1 ve u_2 arasındaki eşitliği doğrudan doğruya belirtir. (2.8) – (2.10) direk problemi için teklik teoreminden). Teorem1.2.10 in (b) maddesi, f_1 ve f_2 fonksiyonlarının ikisinden birinin (3.20) denkleminin bir çözümünü verdiğini gösterir. Bununla birlikte bu, daha önce belirtilen (3.20) denkleminin tekliği ile uyuşmamaktadır. Çünkü, (3.14)-(3.17) ters problemin çözümünün tek olmadığı kabul edilmişti. Dolayısıyla iddia doğru değildir. (3.31) ifadesi (2.13) ve (3.30) un bir direk koşullu önermesidir, böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi – parabolik denklem için son ek koşul ile aşağıdaki ters problem dikkate alınacaktır.

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=f(x)h(x,t),\quad (x,t)\in Q_T \tag{3.34}$$
$$u(x,0)=0,\qquad x\in\Omega \tag{3.35}$$
$$u(x,0)=0,\qquad (x,t)\in S_T \tag{3.36}$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad x\in\Omega \tag{3.37}$$

Daha iyi anlaşılması için, (3.34)-(3.37) ters probleminin bir çözümü için önemli bir tanım aşağıdaki ifade edilir.

Tanım 3.2.

$u\in W_{2,0}^{2,1}(Q_T),\ f\in L_2(\Omega)$ *ve* (3.34)-(3.37) ifadeleri sağlanıyorsa bir u, f fonksiyon çifti (3.34) – (3.37) ters probleminin bir genelleştirilmiş çözümüdür.
L operatörünün katsayılarının (2.11) – (2.12) ve

$$h,h_t\in L_\infty(Q_T),\ \ |h(x,T)|\geq\delta>0\ ,\ x\in\bar{\Omega},\ (\delta\equiv sabit) \tag{3.38}$$

koşullarını sağladığı kabul edilsin.
Bu varsayım altında, (3.34) – (3.36) ifadeleri $L_2(\Omega)$ uzayından keyfi bir fonksiyon alınarak ve bu (3.34) denkleminde yerine koyularak bir direk problem olarak algılanır. Teorem 1.1.5 e göre aşağıdaki özellikler ile (3.34)-(3.36) direk probleminin tek bir $u\in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ çözümü vardır.

$$u(.,t)\in C(\ 0,T\ \ :W_2^2(\Omega))$$
ve
$$u(.,t)\in C(\ 0,T\ \ :L_2(\Omega))$$

İleriki çözümler için,

$$(A_2 f)(x)=\frac{1}{h(x,T)}u_t(x,T)\quad ,x\in\Omega \tag{3.39}$$

ifadesini sağlayan

$A_2 : L_2(\Omega) \mapsto L_2(\Omega)$

lineer operatör kullanılır.f fonksiyonu için ikinci tipte lineer operatör denklemi $L_2(\Omega)$ uzayına aittir.

Teorem 3.3.

L operatörü (2.11)-(2.12) koşullarını sağlasın ve

$h, h_t \in L_\infty(Q_T)$, $|h(x,T)| \geq \delta > 0 \; x \in \bar{\Omega} \; \delta \equiv sabit,$

$\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$

olsun.(3.21)Dirichlet probleminin sadece aşikar bir çözüme sahip olduğu kabul edilerek

$$\Psi(x) = -\frac{1}{h(x,T)}(L\varphi)(x) \tag{3.41}$$

yazılır. O halde aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(a) (3.40) çözülebilirse, o zaman (3.34) – (3.37) ters problemi de çözülebilirdir.

(b) (3.34) – (3.37) ters probleminin bir u, f çözümü varsa, o zaman f fonksiyonunu içeren (1.2.40) lineer denkleminin bir çözümünü verir.

Teorem 1.2.3 , Teorem 1.2.1 nin ispatı gibi aynı şekilde ispatlanabilir.Ters problemin çözülebilirlik sorusu (3.40) denkleminin dikkatli analizi ile yakından ilgilidir. (3.32) eşitsizliğindeki durum gibi aynı mantıkla A_2 operatörü için aşağıdaki ifadelerden (3.42) elde edilir. Bunun için, öncelikle, (3.39) ifadesinden,

$$\left|(A_2 f)(x)\right| = \left|\frac{1}{h(x,T)} u_t(x,T)\right|$$

$$\left|(A_2 f)(x)\right| = \frac{1}{\left|h(x,T)\right|} \left|u_t(x,T)\right|$$

$$\left|(A_2 f)(x)\right| \le \frac{1}{\delta} \left|u_t(x,T)\right|$$

$$\int_\Omega \left|(A_2 f)(x)\right| dx \le \frac{1}{\delta} \int_\Omega \left|u_t(x,T)\right| dx$$

$$\int_\Omega \left|(A_2 f)(x)\right|^2 dx \le \frac{1}{\delta^2} \int_\Omega \left|u_t(x,T)\right|^2 dx$$

$$\left(\int_\Omega \left|(A_2 f)(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} \le \frac{1}{\delta} \left(\int_\Omega \left|u_t(x,T)\right|^2 \right)^{1/2} dx$$

$$\left\| A_2 f \right\|_{2,\Omega} \le \frac{1}{\delta} \left(\int_\Omega \left| u_t^2(x,T) \right| dx \right)^{1/2}$$

$\left\| u_t(.,t) \right\| \le m_2(t) \left\| f \right\|$ ifadesinden yararlanılarak,

$$\left\| A_2 f \right\|_{2,\Omega} \le \frac{1}{\delta} \left\| u_t \right\|$$

$$\left\| A_2 f \right\|_{2,\Omega} \le \frac{1}{\delta} m_2 \left\| f \right\|_{2,\Omega}$$

$$\left\| A_2 f \right\|_{2,\Omega} \le m_3 \left\| f \right\|_{2,\Omega} \tag{3.42}$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$m_3 = \frac{1}{\delta} \left\{ \exp(-\alpha T) \operatorname*{ess\,sup}_\Omega \left| h(x,0) \right| + \int_0^T \exp\ -\alpha(T-\tau)\ \operatorname*{ess\,sup}_\Omega \left| h_t(.,t) \right| dt \right.$$

$$\alpha = \left[\frac{v}{2c_1(\Omega)} - \left(\mu_1 + \frac{1}{2v} \mu_1^2 \right) \right]$$

$$\mu_1 = \max\ \operatorname*{ess\,sup}_\Omega \left| C(x) \right|, \operatorname*{ess\,sup}_\Omega \left[\sum_{i=1}^n B_i^2(x) \right]^{1/2}$$

ve $c_1(\Omega)$, Poincare – Friedrichs eşitsizlik sabitidir.

Teorem 3.3 ile ilgili alt dizi ile lineer A_2 operatörüne sabit nokta teoremi ve (3.42) ifadesi uygulanarak önemli bir sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.

L operatörü (2.11) – (2.12) koşullarını sağlasın ve $h, h_t \in L_\infty(Q_T)$, $|h(x,T)| \geq \delta > 0,\ x \in \bar{\Omega}\ (\delta \equiv sabit),\ \varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ olsun.Ayrıca, (3.21) Dirichlet problemi bir aşikar çözüme sahip olduğu farzedilsin.

$$m_3 \langle 1 \qquad (3.43)$$

eşitsizliği (3.42) ifadesindeki m_3 için geçerli ise, (3.34) – (3.37) ters probleminin bir $u \in W_{2,0}^{2,1}\ Q_T$ çözümü vardır ve bu çözüm belirtilen fonksiyonlar sınıfında tektir. (2.13) ifadesindeki c* sabiti ile,

$$\| f \|_{2,\Omega} \leq \frac{\delta^{-1}}{1-m_3} \|L\varphi\|_{2,\Omega} \qquad (3.44)$$

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(2,1)} \leq \frac{c^* \delta^{-1}}{1-m_3} \|L\varphi\|_{2,\Omega}\ x \left(\int_0^T \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |h(x,t)|^2\, dt \right)^{1/2} \qquad (3.45)$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat.

(3.40) ifadesinden yola çıkılarak,

$$| f | = |A_2 f + \Psi|$$

$$| f |^2 = |A_2 f + \Psi|^2$$

$$\int_\Omega | f |^2 dx = \int_\Omega |A_2 f + \Psi|^2 dx$$

$$\| f \|_\Omega^2 \leq 2 \left(\int_\Omega |A_2 f|^2 + |\Psi|^2\, dx \right)$$

$$\| f \|_\Omega^2 \leq 2 \left(\|A_2 f\|^2 + \int_\Omega |\Psi|^2\, dx \right)$$

$$\| f\|_{\Omega}^{2} \leq \; m_3 \| f\|_{2,\Omega} \;^{2} + \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx$$

$$\| f\|_{\Omega} \leq m_3 \| f\|_{2,\Omega} + \left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\| f\|_{\Omega} - m_3 \| f\|_{2,\Omega} \leq \left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\| f\|_{\Omega} (1 - m_3) \leq \left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

ve (3.41) den yararlanılarak,

$$\| f\|_{\Omega} (1 - m_3) \leq \left(\int_{\Omega} \left| \frac{-1}{h(x,T)} (L\varphi)(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\| f\|_{\Omega} (1 - m_3) \leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|h(x,T)|^2} |(L\varphi)(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\| f\|_{\Omega} (1 - m_3) \leq \frac{1}{\delta} \left(\int_{\Omega} |(L\varphi)(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\| f\|_{\Omega} (1 - m_3) \leq \frac{1}{\delta} \| L\varphi \|_{2,\Omega}$$

$$\| f\|_{\Omega} (1 - m_3) \leq \delta^{-1} \| L\varphi \|_{2,\Omega}$$

elde edilir ve buradan da

$$\| f\|_{2,\Omega} \leq \frac{\delta^{-1}}{1 - m_3} \| L\varphi \|_{2,\Omega} \tag{3.44}$$

bulunur.Şimdi, (3.45) ifadesini elde etmek için $\|u\| \leq c^{*}(\|F\| + \|a\|)$ (2.13) ifadesi kullanılır.Ayrıca (2.9) koşulundan,

$$\|u\| \leq c^* \|F\|$$
$$\|u\| \leq c^* \| f(x)h(x,t)\|$$
$$\|u\| \leq c^* \left(\int_0^T (f(x)h(x,t))^2 dt \right)^{1/2}$$
$$\|u\| \leq c^* \left(\int_0^T h(x,t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T f(x)^2 dt \right)^{1/2}$$
$$\|u\| \leq c^* \left(\int_0^T \underset{\Omega}{ess\sup} |h(x,t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \frac{\delta^{-1}}{1-m_3} \|L\varphi\|_{2,\Omega}$$
$$\|u\| \leq \frac{c^* \delta^{-1}}{1-m_3} \|L\varphi\|_{2,\Omega} \left(\int_0^T \underset{\Omega}{ess\sup} |h(x,t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

bulunur.

Uyarı 3.1.

$$(Lu)(x,t) \equiv \Delta u(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x_i^2}$$

Laplace operatörü verilsin.Sadece t ye bağlı h fonksiyonunun

$h, h' \in C\ 0,T$,

$h(t)\ , h'(t) \geq 0, h(T) \neq 0$

koşularını sağladığı kabul edilsin ve

$$\alpha = \frac{1}{2c_1(\Omega)} > 0 \, ve \ m_3 = 1 - \tilde{m}_3$$
$$m_3 = \frac{1}{\alpha h(T)} \int_0^T h(t) \exp \ -\alpha(T-t) \ dt$$

ifadeleri verilsin. $m_3 > 0$ olduğundan, $\tilde{m}_3 < 1$ eşitsizliği doğru olur. Diğer bir taraftan $h(T) \neq 0$ ile keyfi bir $h(t) \geq 0$ fonksiyonu için $\tilde{m}_3 > 0$ olur. Bu yüzden, herhangi $T > 0$ *için* $0 < m_3 < 1$ olur ve Teorem 1.2.4 $0 < T < \infty$ iken herhangi T için çözümün tekliğini ortaya koyar.

Örnek 3.1.

Verilen son koşul ile ters problemin çözümünde Fourier değişkenlerine ayırma metodunun nasıl uygulanacağı ele alınır. Bu amaçla, aşağıdaki ifadelerden yeniden düzenlenen $u(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları için ters problem ortaya konulur.

$$u_t(x,t) = u_{xx}\,(x,t) + f(x) \quad ,0 < x < \pi \quad ,0 < t < T \tag{3.46}$$

$$u(x,0) = 0 \ , \qquad 0 < x < \pi \tag{3.47}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \qquad 0 \le t \le T \tag{3.48}$$

$$u(x,T) = \varphi(x) \ , \qquad 0 < x < \pi \tag{3.49}$$

$\varphi \in W_2^2(0,\pi)$ için sınır değerleri $\varphi(0) = \varphi(\pi) =$ alınır. (3.46) – (3.48) sistemine değişkenlere ayırma metodu aşağıdaki şekilde uygulanarak birtakım ifadeler elde edilir.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(t)$$

$$f(x,t) = f_1(t) Sin \pi x + f_2(t) Sin\, 2\pi x + \ldots + fn(t) Sin\, n\pi x + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) Sin(n\pi x)$$

Her taraf $\mathrm{Sin}\,(k\pi x)$ ile çarpılıp integre edilirse,

$$f(x,t)\, Sin\,(k\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) Sin\,(n\pi x) Sin\,(k\pi x)$$

$$\int_0^{\pi} f(x,t) Sin\,(k\pi x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \;\; t \int_0^{\pi} Sin(n\pi x) Sin(k\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{2} f_k(t) \qquad (n = k \;\; ise)$$

$n = k$ *iken,*

$$\int_0^{\pi} f(x,t)\sin(knx)dx = \frac{\pi}{2} f_k(t)$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x,t) Sin(n\pi x)dx$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, Sin(n\pi x)$$

denklemde yerine yazılır.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin n\pi x$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,T) = \varphi(x)$$

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} Tn^{'}(t) Sin\ n\pi x$$

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty}\ n\pi\ T_n(t) Cos\ n\pi x$$

$$u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) Sin\ n\pi x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{'}(t) Sin\ n\pi x = -\sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) Sin\, n\pi x\ + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) Sin(n\pi x)$$

Başlangıç koşullarından,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\, Sin\ n\pi x = 0$$

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) Sin\, n\pi 0 = 0$$

$$u(\pi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, Sin(n\pi)\pi = 0$$

$$u(x,T)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(T)\,Sin\,n\pi x=\varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n^{'}(t)Sin(n\pi x)+\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2T_n(t)\,Sin(n\pi x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\,Sin(n\pi x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\quad T_n^{'}(t)+(n\pi)^2T_n(t)-f_n(t)\quad Sin(n\pi x)=0$$

Adi dif. denklem çözümünden,

$$T_n(t)=a_ne^{-\ n\pi\ ^2t}+\int_0^t e^{\ -(n\pi)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau$$

Buradan,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)X_n(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-(n\pi)^2t}Sin(n\pi x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ Sin(n\pi x)\int_o^t e^{(n\pi)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\ \right]$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t f_n(\tau)e^{-\ n\pi\ ^2\ t-\tau}\ d\tau\ Sin(n\pi x)$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k(\tau)\exp\ -k^2(t-\tau)\ \ d\tau Sin\,kx$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\,k^{-2}\left[1-\exp\ -k^2t\ \ \right]Sin\ kx$$

ifadesi elde edilir.Burada,

$$f_k=\frac{2}{\rho}\int_0^{\pi}f(x)Sin\ kx\,dx$$

$$X_k(x)=Sink_x\ {}_{k=1}^{\infty}$$

sistemi ve $\lambda_k=k^2\ {}_{k=1}^{\infty}$ dizisi,

$$X_k^{''}(x)+\lambda_kX(x)=0\ ,\ 0<x<\pi \qquad (3.51)$$

$$X_k(0)=X_k(\pi)=0$$

spektral problemi ile ilişkilendirilen Sturm-Liouville operatörünün özdeğerleri ve öz fonksiyonları olarak bulunurlar.Denklemin katsayılarına uygun olarak

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k k^{-2}(1-\exp(-k^2T))Sinkx=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k Sinkx$$

$$f_k = k_2(1-\exp(-k^2T))^{-1}\phi_k \tag{3.53}$$

elde edilir. Buradan da f fonksiyonu için,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-\exp(-k^2T))^{-1}\varphi_k Sinkx \tag{3.54}$$

ifadesi yazılabilir. (3.50) ve (3.53) ifadelerinden yola çıkarak bilinmeyen u fonksiyonu üzerinden aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-\exp(-k^2T))^{-1}\varphi_k k^{-2}(1-\exp(-k^2t))Sin\,kx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\exp(-k^2T))^{-1}(1-\exp(-k^2t))\varphi_k Sinkx \tag{3.55}$$

(3.54) ifadesinin her iki tarafın karesi alınıp integre edildiğinde,

$$f^2(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k^4(1-\exp(-k^2T))^{-2}\varphi_k^2 Sinkx$$

$$\int_{\infty}^{\infty} f^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} k^4(1-\exp(-k^2T))^{-2}\varphi_k^2 Sin^2kxdx$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f_k(x)|^2\,dx\right)$$ Ters Fouirer Dönüşümü ile

$$\|f\|_{2,\Omega}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}k^4(1-\exp(-k^2T))^{-2}\phi_k^2$$ elde edilir.

Böylelikle, $L_2(0,\pi)$ uzayında bir f çözümünün varlığı için φ fonksiyonu gereklidir. Yukarıda elde edilen ifadenin sağ tarafındaki seri yakınsak olmalıdır.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}k^4(1-\exp(-k^2T))^{-2}\phi_k^2 \le \frac{2}{\pi}(1-\exp(-T))^2\sum_{k=1}^{\infty}k^4\phi_k^2$$

Bu anlamda (3.54) ifadesindeki serinin yakınsaklığı $k \to +\infty$ iken φ fonksiyonunun fourier katsayılarının nasıl davrandığına bağlıdır. Benzer bir ifade (3.55) deki yakınsaklık karakteri ile ilgilidir. (3.54) ve (3.55) nin özel araştırmaları fourier serilerinin genel teorisi çatısında yürütülebilir. Özelde, $\varphi(x) = Sinx$ olarak kabul edilirse (3.54) – (3.55) aşağıdaki ifadeyi meydana getirir.

$$u(x,t) = (1-\exp(-T))^{-1}(1-\exp(-t))^{-1}Sinkx$$
$$f(x)=(1-\exp(-T))-1\sin x \quad , \; k \to \infty$$

3.2. Lineer Ters Problem: Fredholm Çözümü

Bu bölümde, (3.2) – (3.5) ters problemin ilginç bir özelliği olan Fredholm karakteri üzerinden vurgulanır. Bu noktadaki bir durum, çözümün varlığı teoremini vurgulayan teklik teoreminde gerçekleşebilir. Final koşulu ile (3.34) – (3.37) ters problemi düşünülerek sonraki genel görünümün çıkarımı yapılır.Teorem 3.3 de ikinci tür operatör denkleminden bu ters problemin çözülebileceği ispat edildi.

Teorem 3.2.1.

L operatörü (2.15) – (2.16) koşullarını sağlasın ve $h, h_t \in L_\infty(Q_T)$, $|h(x,T)| \ge \delta > 0 \quad x \in \bar{\Omega}$ $(\delta \equiv sabit)$ olsun. A_2 operatörü $L_2(\Omega)$ de tamamen süreklidir.

İspat.

Öncelikle, Önerme 2.1 ve 2.2 den ortaya çıkan A_2 operatörünün bir özelliği tanımlanır. Genel olarak, sabit olan $L_2(\Omega)$ uzayından keyfi bir f fonksiyonu düşünülür ve (3.34) te yerine yazılır. Bu, bize (3.34) – (3.36) sisteminin (2.12) – (2.14) sistemi olarak aynı tipte olduğunu gösterir. Teorem 2.5 in çatısında (3.34) –

(3.36) problemi çözüldüğünde yukarıda bahsedilen sabitliği sağlayan $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ tek fonksiyonu bulunur. Önerme, 2.2 den

$$u_t \in C(\ 0,T\ ;L_2(\Omega)) \bigcap C(\ \in,T\ ;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),\ 0 < \in < T$$ ifadesini belirtir.

Bundan dolayı, (3.39) ile belirtilen A_2 operatörü $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ içinde $L_2(\Omega)$ uzayındadır. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ normunda $A_2(f)$ in ifadesinde (3.34) – (3.36) sisteminin terimleri alınarak (3.42) eşitsizliğinden yararlanılır. Bu,

$$\|u_{tx}(.,T)\|_{2,\Omega}^2 \le c_5(T)\left[\| fh(.,0)\|_{2,\Omega}^2 \ + c_6(T)\int_0^T \| fh(.,t)\|_{2,\Omega}^2\, dt\ \right]^2 \quad \forall f \in L_2$$

c_5 *ve* c_6(2.42) de ki ile aynıdır ve f e bağlı değildir. (3.39) ve (3.1) ifadeleri birleştirilerek,

$$\|(A_2 f)_x\|_{2,\Omega} \le c_7 \| f \|_{2,\Omega} \qquad ,\forall f \in L_2(\Omega)$$

Burada,

$$c_7 = \left\{ c_5(T)\left[\underset{\Omega}{ess\sup}|h(x,0)|^2 + c_6(T)\int_0^T \underset{\Omega}{ess\sup}|h_t(x,t)|^2\, dt \right]^2 \right\}^{1/2}$$

(3.2) ifadesi $L_2(\Omega)$ uzayından herhangi bir f fonksiyonu için geçerlidir ve c_7 katsayısı f den bağımsızdır.

(3.2) ifadesinin $L_2(\Omega)$ de tamamıyla sürekli lineer A_2 operatörü ifadesi yardımı ile oluşabileceği kolayca gözlemlenebilir. Gerçekten, D $L_2(\Omega)$ uzayında sınırlı bir küme olsun , A_2 operatörünün özellikleri ve (1.3.2) ifadesi, A_2 (D) kümesi $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ uzayına aittir ve $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ de sınırlıdır. Bu durumda Rellich’s teoremi $L_2(\Omega)$ uzayında

A_2 (D)kümesinin kompakt olduğunu belirtir. Bu durumda $L_2(\Omega)$ uzayının herhangi bir sınırlı kümesi $L_2(\Omega)$ de kompakt bir küme üzerinde operatördür. A_2 operatörü $L_2(\Omega)$ de tamamen süreklidir ve teorem ispatlanmış olunur.

Sonuç: 3.2.1.

Teorem 3.2.1 in koşulları altında takiben Fredholm alternatifi (3.40) denklemi için geçerlidir : yani (3. 40) denkleminin bir çözümü vardır ve $L_2(\Omega)$ uzayından herhangi bir Ψ fonksiyonu için tektir ya da

$$f = A_2 f \tag{3.56}$$

homojen denklemi bir nontrivial çözüme sahiptir. Yukarıda ifade edilen sonuç, özellikle, (3.56) homojen denklemi sadece trivial bir çözüme sahipse, o zaman (3.40) denklemi herhangi bir $\Psi \in L_2(\Omega)$ için tek çözüme sahiptir. Diğer bir deyişle, sonuç .3.2.1 , (3.40) için varlığı belirten teklik teoremini ortaya çıkarır. (3.34) – (3.37) ters problemine göre aşağıdaki teorem kurulur.

Teorem 3.2.2.

L operatörü (2.15) – (2.16) koşullarını sağlasın ve $h, h_t \in L_\infty(Q_T),\ |h(x,T)| \geq \delta > 0\ \ x \in \bar{\Omega}\ (\delta \equiv sabit)\ ,\ \varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ olsun.

(3.21) Dirichlet problemi sadece bir trivial çözüme sahipse, o zaman aşağıdaki çıkarımlar geçerlidir.

a) Eğer (3.56) lineer homojen denklem sadece bir trivial çözüme sahipse, (3.34) – (3.37) ters probleminin bir çözümü vardır ve bu çözüm belirtilen fonksiyonlarının sınıfında tektir.

b) Eğer teklik teoremi (3.34) – (3.37) ters problemi için geçerli ise, (3.34) – (3.37) ters probleminin bir çözümü vardır ve bu çözüm belirtilen fonksiyonların sınıfında tektir.

İspat.

Öncelikle (a) maddesi ispatlansın (3.56) sadece trivial bir çözüme sahip olsun sonuç (3.56) ile herhangi bir $\Psi \in L_2(\Omega)$ için (3.40) homojen olmayan denklemin bir çözümü vardır (özel olarak Ψ (3.41) formundadır) ve bu çözüm tektir (3.34) – (3.37) ters probleminin çözümünün varlığı Teorem 3.3 den takip eder ve sadece tekliğini göstermek için durur. Aksine (3.34) – (3.37) ters probleminin u_1, f_1 ve u_2, f_2 farklı iki çözümünün olduğu kabul edilsin f_1 , f_2 ye eşit olamaz, çünkü , (3.34) – (3.36) tipindeki direk problem için teklik teoremi ile u_1 ile u_2 arasında eşitliği belirtir ve bu çakışmaya neden olur. Teorem 3.3 ün (b) maddesine göre $f_1 - f_2$ fonksiyonu (3.3) homojen denkleminin bir nontrivial çözümüdür. Fakat bu başlangıç varsayımı ile çelişir. Böylece, (a) maddesi tamamıyle ispatlanmış olur.
(b) maddesinin ispatına geçilsin. Teklik teoremi (3.34) – (3.37) ters problemini sağlasın. Bu, aşağıdaki homojen ters probleminin sadece bir trivial çözüme sahip olabileceği anlamındadır.
Şimdi parabolik denklem için son ek koşul ile aşağıdaki ters problem dikkate alınmalıdır.

$$u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = f(x)h(x,t) \quad ,(x,t) \in Q_T \tag{3.57}$$
$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{3.58}$$
$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in S_T \tag{3.59}$$
$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{3.60}$$

Açıkça, (3.56) homojen denklemi Teorem 3.3 ün çatısında (3.58) – (3.60) ters problemi ile ilişkilendirilir. Aksine, $f \in L_2(\Omega)$ (3.56) ün bir nontrivial çözümü olsun. F (1.3.4) te yerine yazılarak ve Teorem 2.5 yardımı ile (3.58) – (3.60) direk problemi çözülerek Lemma 2.2 de belirtilen düzgünlük özelliği ile bir $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ fonksiyonu yeniden ele alınır. Açıkça doğrulanır ki u fonksiyonu,

$$u_t(x,T)-(Lu)(x,T)=f(x)h(x,T) \qquad ,(x,t)\in\Omega \tag{3.61}$$

ifadesini belirten (3.58) denkleminin basit bir gözlemi ile (3.60) ek koşulu da sağlar.Diğer bir taraftan, f fonksiyonu (3.58) ifadesine bağlıdır, bu

$$h(x,T)(A_2 f)(x)=f(x)h(x,T) \qquad , \ (x,T)\in\Omega$$

A_2 operatörünün (3.39) tanımından, (3.60) sınır koşulu ile iki önceki ifadelerin birleşimine takiben $u(x,t)$ fonksiyonu

$$L\ u(x,T)\ =0 \quad , x\in\Omega\ ;\ u(x,T)=0\ x\in\delta\Omega;$$

Dirichlet problemini çözer Bu teoremin koşulları altında sadece bir trivial çözüme sahiptir. Bu yüzden, $x\in\Omega$ için $u(x,T)=0$ *ve* u, f çifti böylece (3.58) – (3.60) ters probleminin bir nontrivial çözümü olarak elde edilir. Fakat bu, teklik teoremi ile ilgili olan (b) maddesinin bir koşulu ile çelişir. Böylece, (3.56) homojen denkleminin bir nontrivial çözümünün varlığı hakkındaki çıkarım doğru olamaz.

Sonuçta , (3.56) denklemi sadece bir trivial çözüme sahip olabilir ve (b) maddesinin çıkarımı (a) maddesinin çıkarımından takip eder. Böylece, teorem ispatlanmış olur.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ters problemlerin kullanıldığı alanlara ait birçok örnekler verilmiştir. Parabolik denklem için direkt problem ile ters problem arasındaki ilişki yapılan işlemlerle ve bunların sonucunda elde edilen birtakım kestirimlerle ortaya konmuştur.Ayrıca ,parabolik denklem için mevcut olan ters problemim varlığı ve tekliği sonucu elde edilmiştir.Daha fazla araştırmacının gelişen bilim koşulları altında çalışarak daha fazla problem ve çözüm ortaya koyacağını umut ediyoruz.

KAYNAKLAR

[1] PRILEPKO, I. A., ORLOVSKY, D., Methods for solving inverse problems in mathematics, 28, 3, pp. 255–258, 2002

[2] LAVRANİLEV, M. M., Journal of inverse problems, 54, 2, pp. 122-225, 2001

[3] GLADWELL, G.M.L., İnvese problems, 15, 3, pp. 77-79, 2000

[4] COLTON, D., LOUİS, A., Solving inverse problems, pp. 168-260, 1999

[5] TANAKA, M., DULİKRAVİCH, G.S., İnverse problems in engineering mechanics, 55, 3, pp. 210-265, 2001

[6] COSSİNİS, R., Solution ofinverse problems in geophyic, 43, 4, pp 81-98, 1998

ÖZGEÇMİŞ

Derya TUNÇ, 15.04.1983 de Kocaeli de doğdu. İlk, orta, lise ve üniversite eğitimini Kocaeli de tamamladı. 2002 yılında 19 Mayıs Süper Lisesinden mezun olarak Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2006 yılında bölüm ikincisi olarak dereceyle mezun oldu. 2 yıldır Kocaeli de matematik öğretmenliği yapmaktadır.