

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FARK DENKLEMLERİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat.Öğr. Kemal TEMEL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

Ağustos 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat.Öğr. Kemal TEMEL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 07/08/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.


Prof. Dr. Abdullah YILDIZ
Jüri Başkanı


Doç. Dr. Mehmet ÖZEN
Üye


Yrd. Doç. Dr. Yılmaz GÜNEY
Üye

ÖNSÖZ

Fark denklemleri, tabiattaki oluşumların doğal tanımlamaları olarak ortaya çıkar. Çünkü; zamanın değişim geçiren değişkenlerinin çoğunun ölçümleri ayrıktır ve bu tür denklemler matematiksel modeller olarak kendi başlarına önemlidirler. Daha önemlisi ise; fark denklemleri diferansiyel denklemlerde ayrıklaştırma problemlerinde de ortaya çıkar. Fark denklemleri teorisindeki sonuçların çoğu diferansiyel denklemlerdeki ilgili sonuçları aşağı yukarı benzerdir. Bu özellikle Liapunov'un denge teorisinde doğrudur. Yine de fark denklemleri teorisi diferansiyel denklemler teorisinden çok daha zengindir. Örneğin birinci mertebe diferansiyel denklemlerle ayrıklaştırılmasından elde edilen denklemi -ghost- çözüm diye tabir edilen veya yalnızca yüksek mertebe diferansiyel denklemlerde görülen kaotik yörünge sonuçlarını doğurabilir. Sonuç olarak, fark denklemleri kendi içerisinde ilginç bir teori olup yakın gelecekte büyük ilgi toplayacağını görmek mümkündür. Dahası fark denklemleri teorisi uygulaması, sayısal analiz, kontrol teorisi, sonlu matematik ve bilgisayar bilimi gibi çeşitli alanlarda hızla yayılmaktadır. Bu nedenle fark denklemleri teorisini ciddi bir şekilde çalışmak için birçok sebep vardır.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını benden esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Abdullah Yıldız'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca maddi ve manevi desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve meslektaşım Buket Sannav'a desteğinden ötürü teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
TABLolar LİSTESİ	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
ÖZET.....	viii
SUMMARY.....	ix

BÖLÜM 1.

AYRIK MATEMATİK	1
1.1. Ayrık Matematik ile İlgili Bazı Kavramlar	1
1.2. Δ nın Negatif Kuvvetleri	7
1.2.1. Basit forma indirgenebilen denklemler	10
1.3. Faktoriyel Kuvvetler ve Stirling Sayıları	26
1.4. Bernoulli Sayıları ve Polinomları	29
1.5. Matris Formu	33
1.5.1. Pascal matrisi ve kombinasyon hesapları	34
1.5.2. Pascal matrisi ve Bernoulli polinomları	41
1.5.3. Pascal matrisi ve Bernstein polinomları	43
1.5.4. Pascal matrisi ve Stirling sayıları	45
1.6. Mukayese Prensibi	48

BÖLÜM 2.

LİNEER FARK DENKLEMLERİ	56
2.1. Giriş	56
2.2. İlk Kavramlar	56
2.3. Temel Teori.....	60
2.3.1. Adjoint ve transpoz denklemler	66

2.4. Sabitlerin Değişimi Metodu	67
2.5. Sabit Katsayılı Lineer Denklemler.....	71
2.6. Δ ve E Operatörlerinin Kullanımı	98
2.7. Üretici Fonksiyonlar Metodu	110
2.8. Çözümlerin Kararlılığı	120
2.9. Mutlak Kararlılık	125
2.10.Sınır Değer Problemleri	131
KAYNAKLAR.....	134
EKLER	135
ÖZGEÇMİŞ.....	144

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1.1.	İkinci Cins Stirling Sayıları	28
Tablo 1.2.	Farklar ve Anti-Farklar	34
Tablo 2.6	Üretici Fonksiyonlar	120

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.	Örnek 2 Çözüm Grafiği	12
Şekil 1.2.	Örnek 3 Çözüm Grafiği	13
Şekil 1.3.	Örnek 4-a Çözüm Grafiği	15
Şekil 1.4.	Örnek 4-b Çözüm Grafiği	15
Şekil 1.5.	$y_n = (0.5)^n y_0, y_0 = 2$ Grafiği	17
Şekil 1.6.	$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), r = 3.65, y_0 = 0.3$ Grafiği	19
Şekil 1.7.	$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), r = 0.8, y_0 = 0.3$ Grafiği	20
Şekil 1.8.	$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), r = 1.8, y_0 = 0.3$ Grafiği	20
Şekil 1.9.	$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), r = 3.2, y_0 = 0.3$ Grafiği	21
Şekil 1.10.	$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), r = 3.5, y_0 = 0.3$ Grafiği	21
Şekil 1.11.	$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), r = 2, y_0 = 0.3$ Grafiği	22
Şekil 1.12.	Şekil 1.12 $y = \frac{r-1}{r}$,nin Grafiği	22
Şekil 1.13.	$y = 2.8x(1 - x), y = x$ 'in Grafiği	23
Şekil 2.1.	Örnek 17 Çözüm Grafiği	76
Şekil 2.2.	Örnek 18 Çözüm Grafiği	77
Şekil 2.3.	Örnek 19-a Çözüm Grafiği	79
Şekil 2.4.	Örnek 19-b Çözüm Grafiği	80
Şekil 2.5.	Örnek 19-c Çözüm Grafiği	82
Şekil 2.6.	Örnek 20 Çözüm Grafiği	84
Şekil 2.7.	Örnek 21 Çözüm Grafiği	86
Şekil 2.8.	Örnek 22 Çözüm Grafiği	88
Şekil 2.9.	Örnek 23 Çözüm Grafiği	90
Şekil 2.10.	Örnek 24-a Çözüm Grafiği	91
Şekil 2.11.	Örnek 24-b Çözüm Grafiği	92

Şekil 2.12.	Örnek 24-c Çözüm Grafiği	93
Şekil 2.13.	Örnek 25 Çözüm Grafiği	95
Şekil 2.14.	Örnek 27 Çözüm Grafiği	105
Şekil 2.15.	Örnek 28 Çözüm Grafiği	109
Şekil 2.16.	Örnek 30 Çözüm Grafiği	117
Şekil 2.17.	Örnek 32 Çözüm Grafiği	123
Şekil 2.18.	Örnek 33 Çözüm Grafiği	124
Şekil 2.19.	Örnek 1 Çözüm Grafiği	136
Şekil 2.20.	Örnek 2 Çözüm Grafiği	137
Şekil 2.21.	Örnek 3 Çözüm Grafiği	138
Şekil 2.22.	Örnek 4 Çözüm Grafiği	139
Şekil 2.23.	Örnek 5-a Çözüm Grafiği	140
Şekil 2.24.	Örnek 5-b Çözüm Grafiği	141

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fark denklemi, dizi, üretici fonksiyon

Bu çalışma, fark denklemleri teorisi ve uygulamalarının sistematik bir şekilde analizini verecektir. Örneğin iteratif işlemler süreci ve diferansiyel denklemler için sayısal metotlara özel bir ilgi gösterdik. Bu konulara fark denklemleri bakış açısından bakmamız, fikirlerin sistematize edilmesine ve genelleştirilmesine olanak sağlar ve sonuç olarak bu da bize; bu konuların daha verimli ve daha üst düzeye taşıma yolu açmıştır.

Tezde fark denklemleri teorisinin fark eşitsizlikleri ve çeşitli kıyaslama sonuçları verilmiştir. Bununla Stabilitate teorisinin Liapunov fonksiyonları ile incelenmesine imkan verilmiştir. Sayısal analizde fark denklemlerinin ve kombinatorik hesapta önemli uygulamalarına yer verilmiştir. Son olarak günlük hayatta fark denklemleri modelleri örnekleriyle verilerek tez tamamlanmıştır.

DIFFERENCE EQUATIONS AND APPLICATIONS

SUMMARY

Key Words: Difference Equation, Sequence, Generating Function

This research offers a systematic treatment of the theory of difference equations and its applications with special emphasis on numerical analysis. For example, we devote special attention to iterative processes and numerical methods for differential equations. The investigation of these subjects from the points of view of Difference equations allows us to systematize and clarify the ideas involved and, as a result, pave the way for further developments of this fruitful union.

Furthermore, in this thesis; we explain development of the theory of difference inequalities and the various comparison results; unified treatment of stability theory through Liapunov functions and the comparison method; emphasis on the important role of the theory of difference equations in numerical analysis and some basic notions of combinatorics (the Pascal matrix and its properties); demonstration of the versatility of difference equations by various models in the reel world and timely recognition of the importance of the theory of difference equations and of presenting a unified treatment.

BÖLÜM 1. AYRIK MATEMATİK

1.1. Ayrık Matematik ile İlgili Bazı Kavramlar

$n_0 \in \mathbb{Z}$ tamsayı olmak üzere,

$$N_{n_0}^{\pm} = \{n_0, n_0 \pm 1, \dots, n_0 \pm k, \dots\} = \{\dots, n_0 - k, \dots, n_0 - 1, n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}$$

ifadesinin üretici elemanı n ile gösterilir. $N_{n_0}^{\pm}$ üzerindeki tanımlı fonksiyonları bazen R de, bazen de C de kabul edeceğiz ve bu fonksiyonlara dizi diyeceğiz. Bu fonksiyonları f_n veya f_n ile göstereceğiz. Bununla birlikte $N_{n_0}^+$ ile birebir tekabül eden başka ayrık noktalar kümesi de tanım kümesi olarak alınabilirler. Örneğin, özel koşullar aşağıdaki kümelerin kullanımını gerektirir.

$$J_{x_0}^+ = \{x_0, x_{0+1}, \dots, x_{0+k}, \dots\}$$
$$J_{x_0, h}^+ = \{x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + kh, \dots\}$$

Burada $x_0 \in R$ 'dir. Üretici eleman x ile gösterilir. Fonksiyonun ilk değere bağlılığı gösterilmek istendiğinde $J_{x_0, h}^+$ kullanılabilir. $J_{x_0, h}^+$ ifadesini kullanmanın avantajı h parametresine de bağlılık göstermesidir. h parametresine adım uzunluğu denir. Bu bölümde genellikle $J_{x_0}^+$ ifadesini tanım kümesi olarak kullanacağız. $x \in R$ veya $x \in C$ noktalarına bağımlılığı vurgulayacağız. Örneğin türevin x 'e göre alındığını belirlemek gibi.

Diziler Uzayı

V ile $N_1^+ \rightarrow C(R)$ fonksiyonların diziler uzayını gösterelim.

$$x = [x_1, x_2, x_3, \dots]$$

$$y = [y_1, y_2, y_3, \dots]$$

keyfi iki dizinin elemanı olsunlar.

$$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots]$$

$$\lambda x = [\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots]$$

ile diziler uzayında iki işlem tanımlayalım.

$$\text{Toplama } (x + y)_n = x_n + y_n \text{ ve skaler ile çarpım } (\lambda x)_n = \lambda x_n$$

şeklindedir.

$0 = [0, 0, 0, \dots]$ olmak üzere bu iki işlem V dizi kümesine vektör uzayı yapısını kazandırır.

V sonsuz boyutlu bir uzay olsun.

$$e_1 = [1, 0, 0, \dots, 0, \dots]$$

$$e_2 = [0, 1, 0, \dots, 0, \dots]$$

\vdots

$$e_n = [0, 0, 0, \dots, 1, \dots]$$

$$e_{n+1} = [0, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots]$$

lineer bağımsız elemanları V 'nin bir bazıdır. (V, \oplus, \otimes) vektör uzayından kendine $L: V \rightarrow V$ lineer operatörleri ile uğraşacağız.

Bunlardan E öteleme operatörü x elemanını $x = [x_1, x_2, x_3, \dots]$ dizisi olmak üzere, $Ex = [x_2, x_3, x_4, \dots]$ dizisine çevirir.

$(Ex)_n = x_{n+1}$ genel terimi bu şekilde gösterilir.

$(EEEx)_n = x_{n+2}$, $(E^k x)_n = x_{n+k}$ olacağından, E 'nin lineer bileşimiyle oluşan

operatörler, $L = \sum_{i=0}^m c_i E^i$ genel formuyla lineer fark denklemleri operatörü olarak

bilinirler.

$Lx = 0$ homojen fark denklemi, L -operatörünün sıfır uzayını belirler(Nullspace).

$N(L) = \{x : Lx = 0\}$ olarak tanımlanır.

Örnek 1 : $(E^2 - 3E^1 + 2E^0)x = 0$ bir homojen fark denklemdir.

$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ olarak da yazabiliriz.

$P(E) = E^2 - 3E^1 + 2E^0$ dersek, $P(E)x = 0$ olur.

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

karakteristik polinom olarak bilinir.

x_1, x_2 baştan belli ise, x_3, x_4, \dots değerlerini bu denklem vasıtasıyla elde ederiz.

$$[1, 0, -2, -6, -14, -30, \dots]$$

$$[1, 1, 1, 1, \dots]$$

$$[2, 4, 8, 16, \dots]$$

çözümleri bu yolla elde edilebilen dizilerdir.

Bu çözümler nasıl bulundu?

λ bilinmeyen bir sayı olmak üzere, çözüm dizisini, $x_n = \lambda^n$ olarak teklif edelim.

Buna göre,

$$\lambda^{n+2} - 3\lambda^{n+1} + 2\lambda^n = 0$$

$$\lambda^n (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \quad \text{olur.}$$

$$\lambda^n (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda = 0$ alınır, $0 = [0, 0, 0, \dots]$ çözümü bulunur. Bu adi çözüm önemli değildir. $\lambda = 1$

alınır, $[1, 1, 1, \dots]$ çözümü bulunur. $\lambda = 2$ ise $x_n = 2^n$, $[2, 4, 8, \dots]$ çözümünü verir.

Bu iki çözüm öbür çözümlerin bazı olur.

Tanım 1.1.1 : $y = J_{x_0}^+ \rightarrow IR$ olsun.

Δ operatörü,

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan fark operatörüdür.

E operatörü,

$$Ey(x) = y(x+1) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanan öteleme operatörüdür. Bu kullanılarak Örnek 1'de basit bir fark denklemi nasıl kurulur görülmüştür.

Δ ve E nin lineer olduğunu göstermek kolaydır ve Δ ve E değişme özelliği vardır.

Herhangi iki fonksiyon $y(x)$ ve $z(x)$ ve herhangi iki skaler α ve β için

$$\Delta(\alpha y(x) + \beta z(x)) = \alpha \Delta y(x) + \beta \Delta z(x),$$

$$E(\alpha y(x) + \beta z(x)) = \alpha E y(x) + \beta E z(x),$$

ve $\Delta E y(x) = E \Delta y(x)$ tir. $y(x)$ in ikinci farkı,

$$\Delta^2 y(x) = \Delta(\Delta y(x)) = y(x+2) - 2y(x+1) + y(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Genel olarak $\forall k \in N^+$ için

$$\Delta^k y(x) = \Delta(\Delta^{k-1} y(x))$$

ve

$$E^k y(x) = y(x+k)$$

$\Delta^0 y(x) = E^0 y(x) = I y(x)$ dir ve I ya birim operatör denir ve $I y(x) = y(x)$

şeklindedir.

Bu durumda tanım kümesi $N_{n_0}^+$ olduğunda $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ ve $E y_n = y_{n+1}$ dir.

Buradan Δ ve E arasındaki temel bağıntı, $\Delta = E - I$ 'dir. Δ , E 'nin kuvvetleri cinsinden ve tersine E de Δ 'nın kuvvetleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilirler.

Gerçekten,

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i \quad (1.3)$$

ve

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i \quad (1.4)$$

burada $\binom{k}{i}$ binom katsayılarıdır. $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{0}{j} = 0$ ($j \neq 0$) dır.

Yukarıdaki (1.3) ve (1.4) eşitlikleri genellikle ayrık fonksiyonunun genel teriminin bir önceki noktadaki değişimi cinsinden ifade eder. Bu bağıntıların bir kaç tanesini örneklerle gösterelim. Bu tarz bağıntıları geçmişte çok önemli sayılmış ve birçoğu ünlü matematikçilerin adlarıyla özdeşleşmiştir. Bu özdeşlikler el hesaplarının kolaylaşmasını ve zaman tasarrufu sağlamıştır.

Teorem 1.1.1 : u_n , N_0^+ üzerinde tanımlı olsun.

$$u_n \equiv E^n u_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i u_0 \quad (1.5)$$

$$\Delta^n u_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} E^i u_0 \quad (1.6)$$

İspat : (1.3) ve (1.4) formülleri u_0 'a uygulanarak ispat görülür.

Teorem 1.1.2 (Ayrık Taylor Formülü) :

$k, n \in N_0^+$, $k \leq n$ ve u_n , N_0^+ üzerinde tanımlı olsun.

Öyleyse,

$$u_n = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-s-k}{k-1} \Delta^k u_s \text{ 'dir.} \quad (1.7)$$

İspat : (1.5) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k+j} \Delta^{k+j} u_0 \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k+j} \Delta^k u_0 \sum_{s=0}^j (-1)^{j-s} \binom{j}{s} E^s u \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k} \left[\sum_{j=s}^{n-k} (-1)^{j-s} \binom{n}{k+j} \binom{j}{s} \right] \Delta^k E^s u_0
\end{aligned}$$

ve buradan da,

$$\sum_{j=s}^{n-k} (-1)^{j-s} \binom{n}{k+j} \binom{j}{s} = \binom{n-s-1}{k-j-1} \Delta^k u_s$$

denkliği kullanılarak (1.7) elde edilir. Teoremin genelleştirilmesi şu şekildedir.

Teorem 1.1.3 : $j, k, n \in N_0^+$, $j \leq k-1$, $k \leq n$ ve u_n , N_0^+ üzerinde tanımlı olsun.

Öyleyse,

$$\Delta^j u_n = \sum_{i=j}^{k-1} \binom{n}{i-j} \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j} \binom{n-s-1}{k-j-1} \Delta^k u_s \quad \text{dir.} \quad (1.8)$$

1.2. Δ nın Negatif Kuvvetleri

Tanım 1.2.1 : $\omega: J_{x_0}^+ \rightarrow IR$ olmak üzere; eğer $\omega(x+k) = \omega(x)$ ise, $\omega(x)$

fonksiyonu periyodu k olan bir fonksiyondur denir.

Örneğin, $\omega(x) = e^{i2\pi x}$ periyodu 1 olan bir periyodik fonksiyondur. Sabit fonksiyonlar özel periyodik fonksiyonlardır. Periyodu 1 olan fonksiyonlar için $\Delta\omega(x) = 0$ olduğu kolayca görülebilir.

Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$\Delta y(x) = g(x) \quad (1.9)$$

burada $g : J_{x_0}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bilinen bir fonksiyondur. Aynı noktalar kümesinde tanımlanan $y(x)$ fonksiyonu bilinmeyen fonksiyondur. $\bar{y}(x) \equiv \Delta^{-1}g(x)$ yukarıdaki denklemin özel çözümünü verir. Bu çözüm tek değildir, çünkü $y(x) = \bar{y}(x) + \omega(x)$ 'tir. Burada $\omega(x)$ periyodu 1 olan keyfi bir periyodik fonksiyondur. Ayrıca (1.9)'un bir çözümüdür. Δ^{-1} operatörü anti-fark operatörü diye adlandırılır ve lineerdir. Bununla birlikte, Δ ve Δ^{-1} operatörleri değişme özelliğine sahip değildir ve

$$\Delta\Delta^{-1} = I \text{ ve } \Delta\Delta^{-1} = I + \omega(x) \text{ elde edilir.}$$

Son ifade formel olarak doğru değildir, çünkü $\omega(x)$ operatör değildir. Bununla birlikte kullanışlıdır çünkü bu ifade Δ^{-1} operatörünün keyfi bir periyodlu fonksiyon ilavesiyle vermektedir.

Eğer $f, g : J_{x_0}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta f(x) = \Delta g(x)$ olacak şekilde iki fonksiyon ise, $f(x) = g(x) + \omega(x)$ dir. Özellikle eğer $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlar ise, $\Delta f = \Delta g$, c sabit olmak üzere $f(x) = g(x) + c$ anlamına gelir.

Şimdi $\sum_{i=0}^n f(x+i)$ ve $\Delta^{-1}f(x)$ arasındaki bağıntıyı belirteceğiz.

Teorem 1.2.1 : $\Delta F(x) = f(x)$ olsun.

$$\sum_{i=0}^n f(x+i) = F(x+n+1) - F(x) \equiv F(x+i) \Big|_{i=0}^{i=n+1} \text{ dir.} \quad (1.10)$$

İspat : Hipotezden $f(x) = \Delta F(x)$ tir.

Buradan görülür ki;

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f(x+i) &= \sum_{i=0}^n \Delta F(x+i) \\ &= \sum_{i=0}^n [F(x+i+1) - F(x+i)] \\ &= F(x+n+1) - F(x) \end{aligned}$$

(1.10) denklemi aynı zamanda şu şekilde yazılabilir.

$$\sum_{i=0}^n f(x+i) = \Delta^{-1} f(x+i) \Big|_{i=0}^{i=n+1} \quad (1.11)$$

Eğer toplamı sonsuza kadar alırsak ve ayrık x değişkenini hesaba katarsak, (1.10) denklemini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\sum f(x) = \Delta^{-1} f(x) + \omega(x),$$

Belirsiz integraller için de benzer notasyon vardır.

Tanım kümesi $N_{n_0}^+$ ise, yukarıdaki formüller indirgenerek sırasıyla,

$$\sum_{i=n_0}^n y_i = \Delta^{-1} y \Big|_{i=n_0}^{i=n+1} \text{ ve } \sum y_i = \Delta^{-1} y + \omega \text{ şeklini alır.}$$

x_0 da başlangıç değeri y_0 yerine koyarsak, $\omega = y_0$ olur ve (1.9) denkleminin çözümü,

$$y(x) = y_0 + \sum_{s=x_0}^{x-1} g(s) \quad (1.12)$$

şeklindedir.

1.2.1. Basit forma indirgenebilen denklemler

Daha zor lineer fark denklemleri ya da lineer olmayan fark denklemleri, bir veya daha çok uygun dönüşüm kullanılarak, yukarıdaki basit lineer denklem formuna indirgenebilir.

Örneğin,

$$z(x+1) - p(x)z(x) = q(x), \quad z(x_0) = z_0 \quad (1.13)$$

denklemini göz önüne alırsak,

$$P(x) = \prod_{t=x_0}^{x-1} p(t), \quad P(x_0) = 1 \text{ ve (1.13) denklemini } P(x+1) \text{ ile bölünürse,}$$

$$\frac{z(x+1)}{P(x+1)} - \frac{z(x)}{P(x)} = \frac{q(x)}{P(x+1)} \text{ elde ederiz.}$$

Eğer $y(x) = \frac{z(x)}{p(x)}$ ve $g(x) = \frac{q(x)}{p(x+1)}$ yazılırsa, (1.13) denklemini $\Delta y(x) = g(x)$

formuna dönüşür.

(1.13) denkleminin çözümü şu şekilde verilebilir:

$$z(x) = P(x) \Delta^{-1} \frac{q(x)}{P(x+1)} + z_0 P(x)$$

$$= P(x) \sum_{s=x_0}^{x-1} \frac{q(s)}{P(s+1)} + z_0 P(x) \quad (1.14)$$

$$= \sum_{s=x_0}^{x-1} q(s) \prod_{t=s+1}^{x-1} p(t) + z_0 \prod_{t=x_0}^{x-1} p(t)$$

Örnek 2 : Aşağıdaki denklem ardışık-iteratif- işlemlerle hata yayılması problemine karşılık gelir. Basit lineer forma indirgeme çok kolaydır.

$$y_{n+1} = ay_n^2 .$$

Çözüm,

$$y_{n+1} = ay_n^2$$

$$\ln y_{n+1} = \ln a + p \ln y_n$$

$$z_n = \ln y_n$$

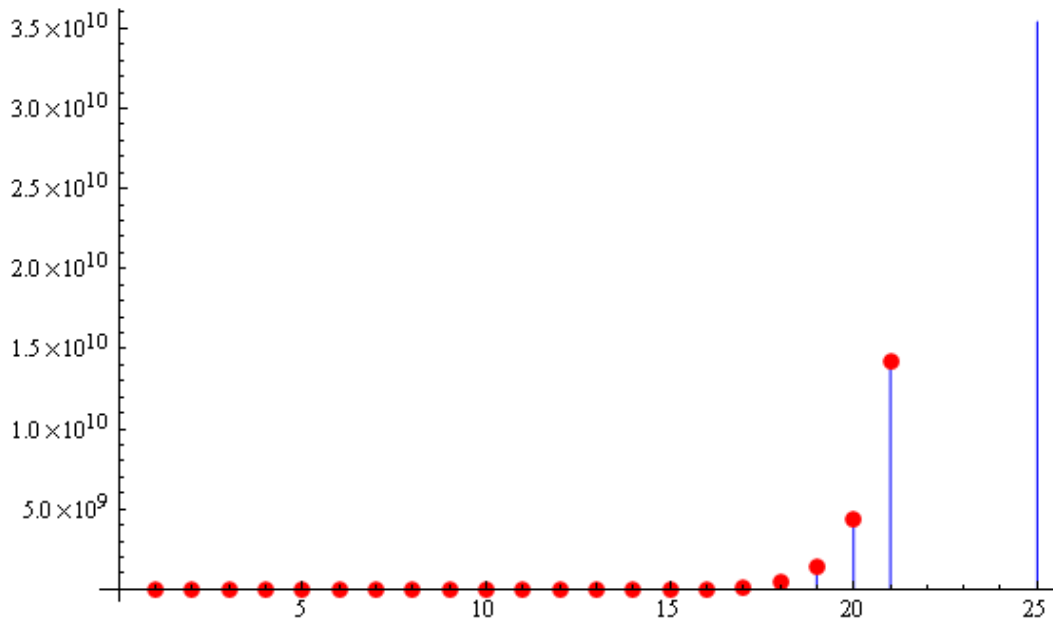
$$z_{n+1} = pz_n + \ln a$$

$$y_n = \frac{1}{a^{\frac{1}{1-p}}} \left(y_0 a^{\frac{1}{1-p}} \right)^{p^n}$$

$$y_n = \frac{1}{a} (ay_0)^{2^n} \text{ şeklindedir.}$$

Denklemin $a = 2$ değeri için genel çözümünü ve $y_1 = 1$ başlangıç değeri için çözümün ilk yirmi beş değerinin mathematica programı ile grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow 2^{-1+2^{-1+n}} \right\}, \left\{ a[n] \rightarrow \frac{1}{2} e^{i 2^{-1+n} (2\pi - i \text{Log}[2])} \right\} \right\}$$



Şekil 1.1. Örnek 2 Çözüm Grafiği

Örnek 3 :
$$y_{n+1} = 2y_n^2 - 1 \quad (1.15)$$

Bu denklem $y_n = T_{2^n}(z)$ ile çözülür. Burada $T_j(z)$ ler birinci çeşit Chebyshev polinomlarıdır ve z daha sonra tespit edilecek bir kompleks değerdir. Bu iddiayı doğrulamak için Chebyshev polinomlarının yarı grup özelliklerine ihtiyacımız vardır. Yani, $T_{jm}(z) = T_j(T_m(z))$ gibi. Gerçektende $T_2(z) = 2z^2 - 1$ olduğu hesaba katılırsa bunlardan biri,

$$y_{n+1} = T_{2^{n+1}}(z) = T_2(T_{2^n}(z)) = T_2(y_n) = 2y_n^2 - 1 \text{ dir.}$$

Üstelik $y_0 = T_1(z)$ alınır, $z = y_0$ elde edilir ve buradan

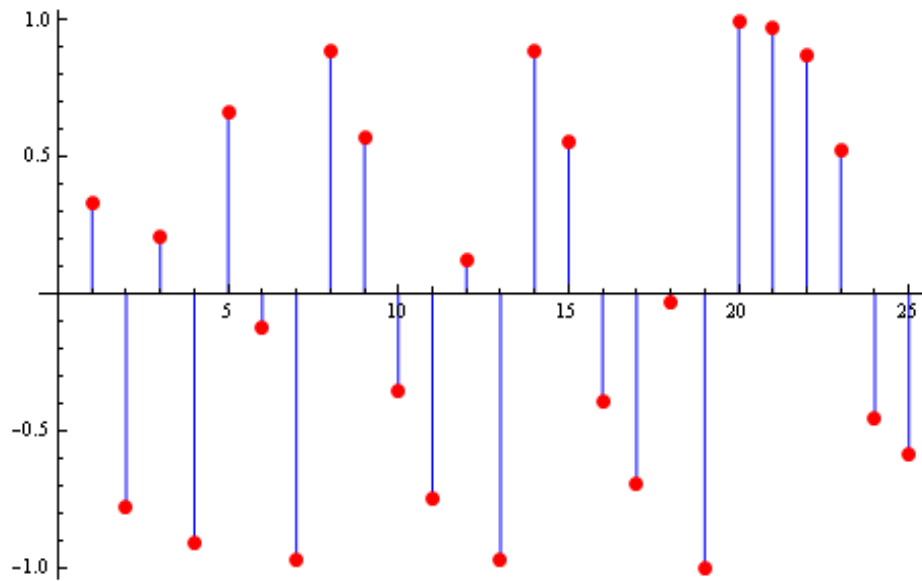
$$y_n = T_{2^n}(y_0) \text{ bulunur.}$$

Tüm j değerleri için, $|z| \leq 1$ ve $|T_j(z)| \leq 1$ iken, y_n nin salımlı hareket ettiği açıkça görülür.

y_0 ın ilk koşulunun küçük değişimleri çözümü aniden değiştirebilir.

Denklemin genel çözümünü mathematica programı ile bulalım çözümün ilk yirmi beş değerinin grafiğini çizelim.

$$\{\{a[n] \rightarrow \text{Cos}[2^n C[1]]\}\}$$



Şekil 1.2. Örnek 3 Çözüm Grafiği

Aşağıdaki örnekte (1.15) denkleminin kaos halini göreceğiz.

Örnek 4 : $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$.

Bu denklem, çözümü karmaşık davranış gösteren en basit denklemdir. r nin genel bir değeri için çözümü kapalı formda yazmak mümkün değildir. Fakat $r = 2$ ve

$r = 4$ değerleri için bu mümkündür. $y_n = \frac{1 - z_n}{2}$ dönüşümüyle yukarıdaki denklem,

$$z_{n+1} = 1 + \frac{r}{2}(2z_n^2 - 1)$$

haline gelir.

$r = 2$ durumu birinci örneğe döner. $r = 4$ durumu ikinci örnek için geçerlidir. Bu, iki çözümün denklemin farklı davranışlarının görülmesini sağlar.

$r = 2$ için çözüm $y_n = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2y_0)^{2^n})$ dir. $0 < y_0 < \frac{1}{2}$ için $\lim y_n = \frac{1}{2}$ olduğu

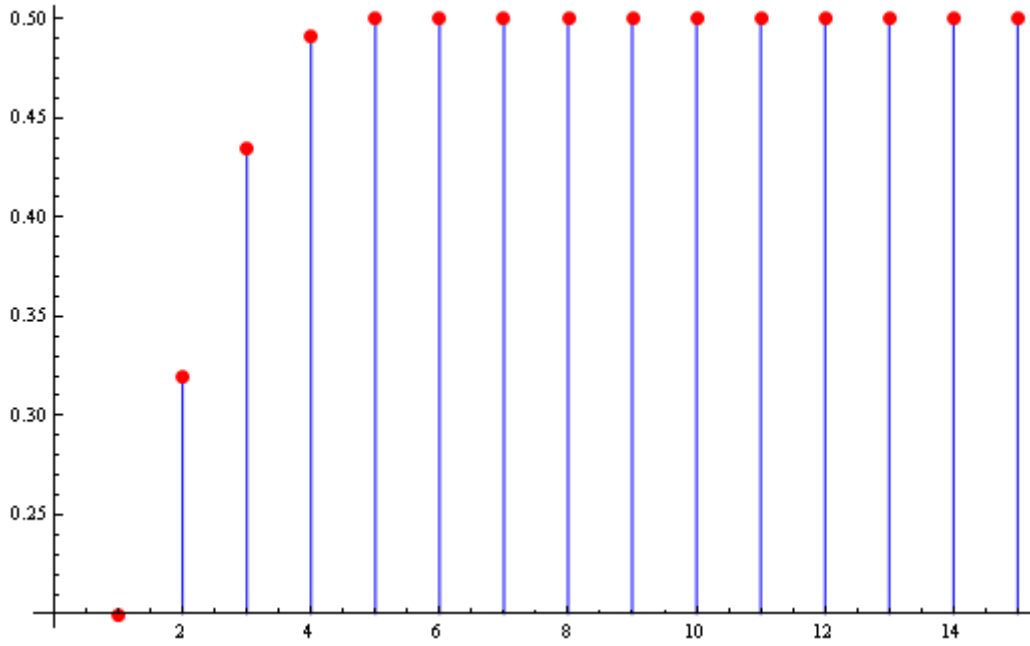
açıktır. İkinci durumda davranış salınımlıdır. Asıl sorun $r = 2$ değeri karmaşıklık aralığının dışında, $r = 4$ değeri içindedir.

Aşağıdaki denklem algoritmalar teorisinde sıkça karşımıza çıkar, özellikle de bölünebilme ve modüler algoritmalarda karşımıza çıkar.

a) Çözümü $r = 2$ değeri için genel çözümünü matematica programı ile bulalım ve

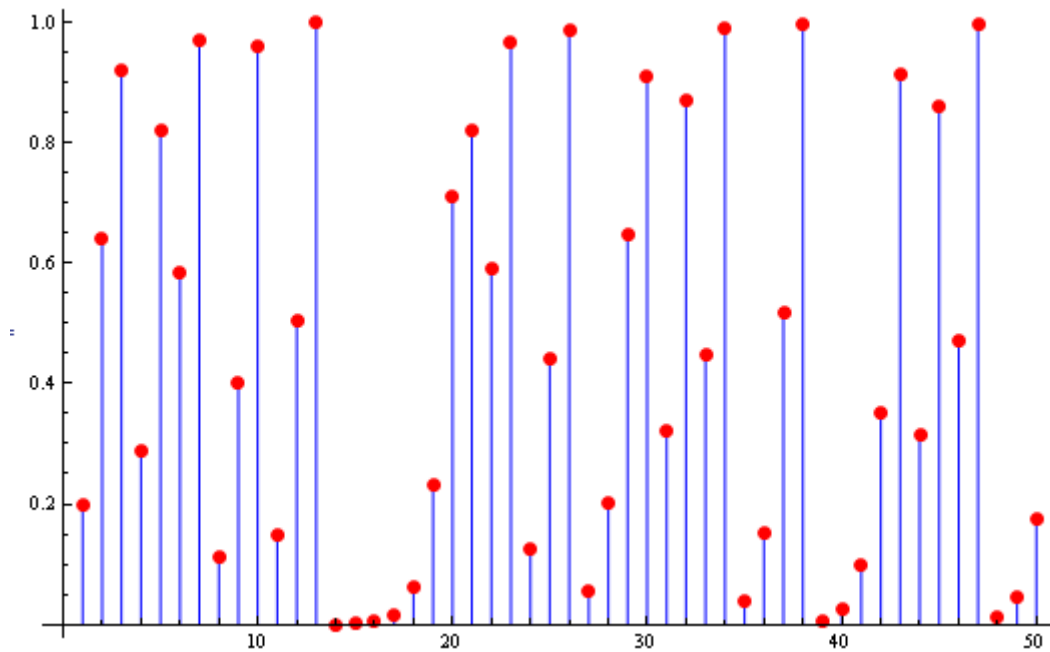
$y_1 = \frac{1}{5}$ başlangıç değeri için çözümünün ilk on beş değerinin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{z^n c[1]} \right\} \right\}$$



Şekil 1.3. Örnek 4-a Çözüm Grafiği

b) Çözümü $r = 4$ değeri için mathematica programı ile bulalım ve $y_1 = \frac{1}{5}$ başlangıç değeri için çözümün ilk elli değerinin grafiğini çizelim.



Şekil 1.4. Örnek 4-b Çözüm Grafiği

Diferansiyel denklemler sürekli hallerin modelleri olmasına karşın, fark denklemleri bazı -ayrık modellemeler- tipi problemler için daha uygundur. Bileşik faizin sürekli hali ve ayrık hali gibi. Her ikisi de sıkça kullanılmaktadır.

$$\frac{dy(x)}{dx} = ry(x), \quad y(0) = y_0 \text{ anında } y_0 \text{ ilk yatırılan para, } r \text{ faiz oranı ve } y(x), x$$

zamanında biriken meblağ olarak bu diferansiyel denlemi sağlar. $y(x) = y_0 e^{rx}$ aranan çözümdür. Eğer k miktar para yatırıldı veya çekildi ise sürekli denklem;

$$\frac{dy}{dx} = ry + k, \quad y(0) = y_0 \text{ halinde } y(x) = y_0 e^{rx} + \frac{k}{r} (e^{rx} - 1) \text{ çözümüne sahiptir.}$$

Örnek 5 :

25 yaşında bir kişi özel sigorta şirketine 2000 lira başlangıç yatırımı ve %8 den faiz oranı ile her ay 2000 lira yatırarak 65 yaşında emekli olmak istiyor. Sonunda biriken parası kaç liradır?

$$y_0 = 2000, \quad r = 0,08, \quad k = 2000, \quad y(40) = ?$$

olarak, denklemde yerine konursa,

$$y(40) = (2000)e^{3.2} + (25000)(e^{3.2} - 1) = 637378 \text{ elde edilir.}$$

Yatırılan 82000 lira ve 555378 lira faizdir.

r ve k değişken olursa çözüm daha da zor olabilir.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = y_0 \text{ birinci mertebeli diferansiyel denkleme karşılık,}$$

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ birinci mertebeli fark denklemdir.}$$

Burada f fonksiyonu değişkenlerine göre sürekli bir fonksiyondur. f lineer ise fark denkleminin lineer olduğu denir. Aksi takdirde non-lineer fark denklemi olarak adlandırılır.

En basit lineer fark denklemi,

$y_{n+1} = r_n y_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 'dir ve çözüm olarak da, $y_n = r_{n-1} \dots r_0 y_0$ 'dır. $r_n = r$ ise,

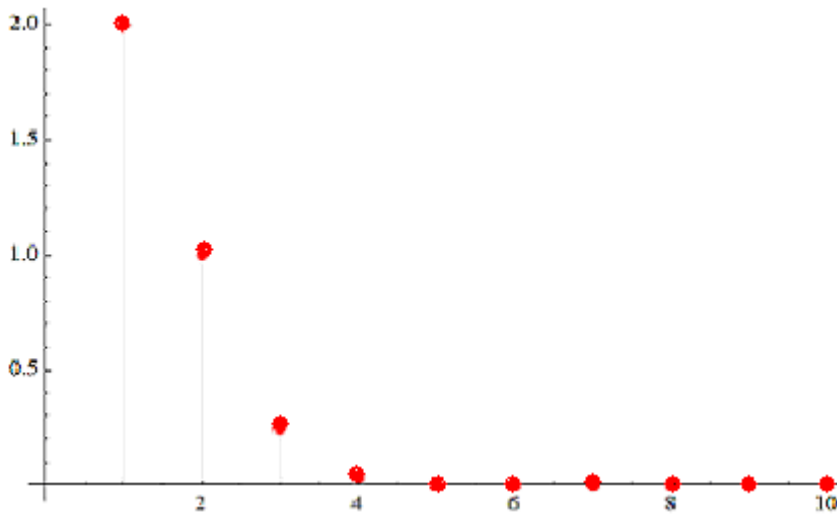
$$y_n = r^n y_0 \text{ 'dır.}$$

Bir indisten itibaren her n için aynı değeri alan çözümlere denge çözümü denir.

$y_n = f(n, y)$, $y(0) = y_0$ olarak hesaplanırlar. İlk değer sıfır alınırsa $y_n = r^n y_0$,

$y_n = 0$ denge(equilibrium) çözümü bulunur. Sonsuzdaki davranışı,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ y_0, & r = 1 \\ \text{mevcut değil} & \end{cases} \text{ olarak belirlenir.}$$



Şekil 1.5. $y_n = (0.5)^n y_0$, $y_0 = 2$ Grafiği

0 çözümü denge çözümüdür.

$y_{n+1} = r y_n + b_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ lineer fark denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned}
y_1 &= ry_0 + b_0 \\
y_2 &= ry_1 + b_1 = r(ry_0 + b_0) + b_1 = r^2 y_0 + rb_0 + b_1 \\
y_3 &= ry_2 + b_2 = r^3 y_0 + r^2 b_0 + rb_1 + b_2 \\
&\vdots \\
y_n &= r^n y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} r^{n-1-j} b_j
\end{aligned}$$

bulunur.

$b_n = b$ sabit ise,

$$y_n = r^n y_0 + \frac{1-r^n}{1-r} b \text{ olur. Ya da daha kullanışlı olarak, } y_n = r^n \left(y_0 - \frac{b}{1-r} \right) + \frac{b}{1-r}$$

formunda yazılır.

Bu bize sonsuzdaki davranışı $y_n \rightarrow \frac{b}{1-r}$, $|r| < 1$ olacağını söyler.

$r = 1$ ise $n \rightarrow \infty$, $y_n = y_0 + nb$ olarak sınırsız olur.

Bu model bazı finans problemlerinin çözümünde kullanılabilir.

Örnek 6 :

Bir araba alan birisi, 10.000 birimlik kredi alır. 4 yılda geri ödeyecektir. %12 faizle her ay eşit olarak ödeyecekse, aylık ödemeleri ne kadar olmalıdır?

b aylık ödeme miktarı, aylık faiz %1, $y_0 = 10.000$, $r = 1.01$, y_n n. periyotta kalan borç miktarıdır.

$$y_n = (1.01)^n (10000 + 100b) - 100b.$$

$y_{48} = 0$ olmalı, buradan $b = -100 \frac{(101)^{48}}{(101)^{48} - 1} = -263.34$ bulunur. 10000 yerine

12640,32 ödenmiştir. 2640,32 faizdir.

Lineer olmayan bir örnek:

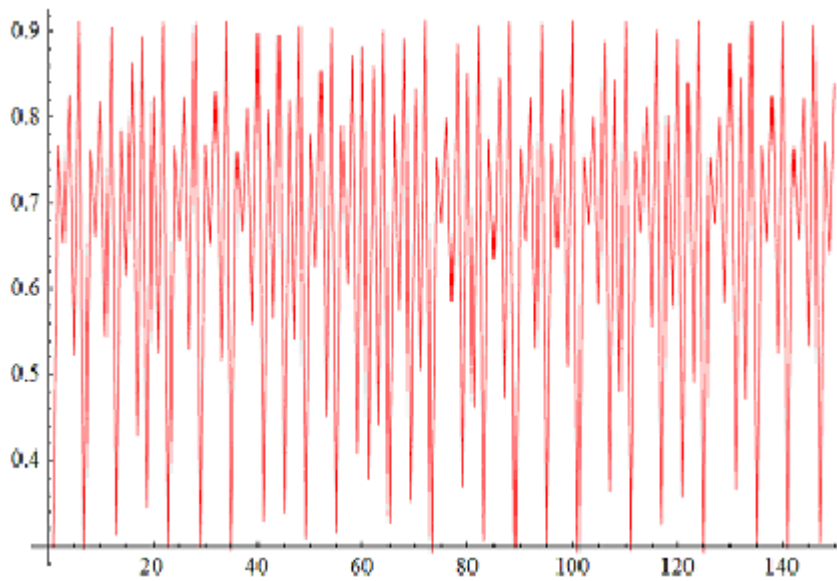
$u_{n+1} = ru_n(1-u_n)$ Lojistik diferansiyel denklemi $\frac{dy}{dx} = ry\left(\frac{1-y}{K}\right)$ 'nin karşılığı,

$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$ yazılınca ayırık fark denklemi elde edilir. $u_n = 0$ ve $u_n = \frac{r-1}{r}$ denge

çözümleridir. Aşağıdaki grafikler Parametrelerin değişiminin çözümleri çok fazla değiştirmekte olduğunu gösteriyor.

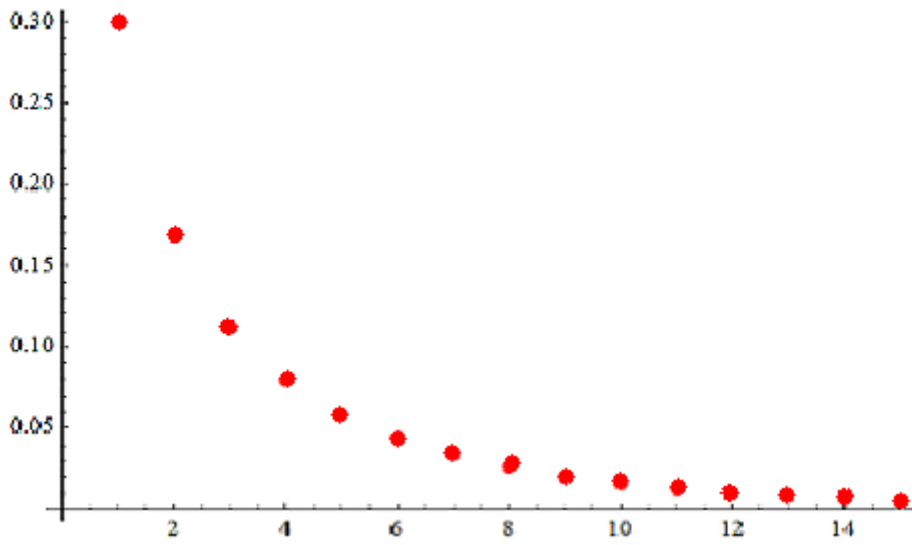
Başlangıç koşulları çok küçük değişirse çözümler denge çözümlerinden ayrılacak mı, yoksa eninde sonunda denge çözümlerine yaklaşacak mı? Bu soru denge çözümleri stabil mi, değil mi önemli sorudur.

Aşağıdaki şekillerde r 'nin bazı değerlerinde fark denklemlerinin çözümlerinin grafikleri verilmiştir.



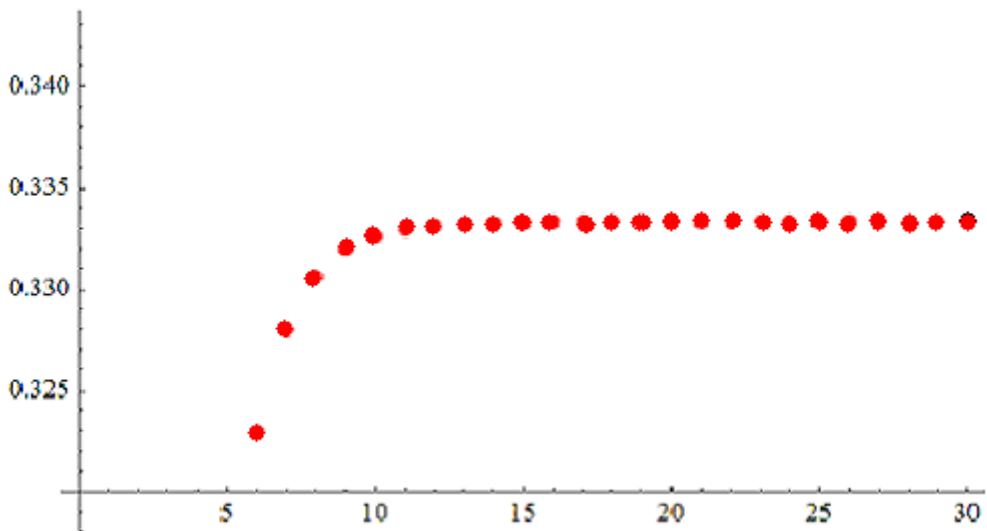
Şekil 1.6. $y_{n+1} = ry_n(1-y_n)$, $r = 3.65$, $y_0 = 0.3$ Grafiği

Şekil $y_{n+1} = ry_n(1-y_n)$, $r = 3.65$, $y_0 = 0.3$ başlangıç değeri ile kaotik çözüm oluşmaktadır.



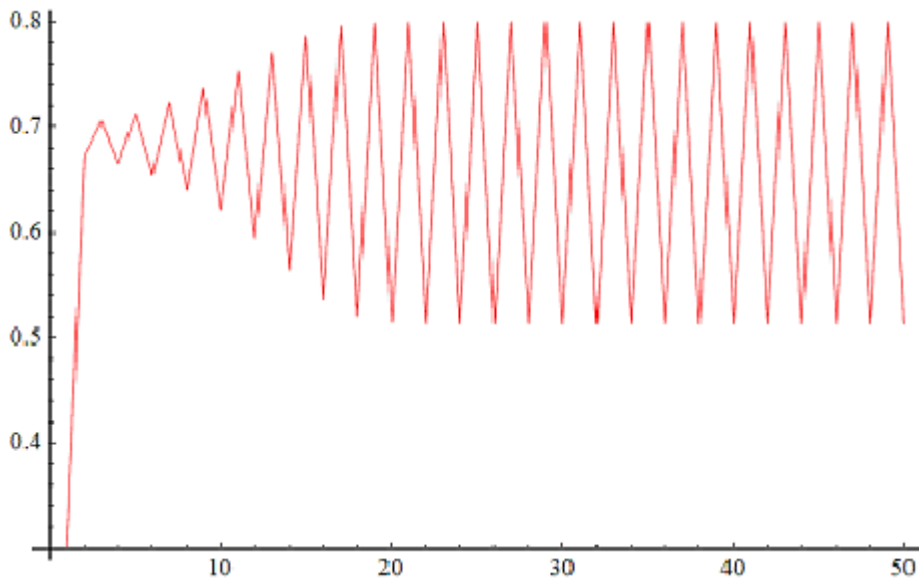
Şekil 1.7. $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$, $r = 0.8$, $y_0 = 0.3$ Grafiği

Şekil $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$, $r = 0.8$, $y_0 = 0.3$ sıfır çözüm denge çözümüdür.



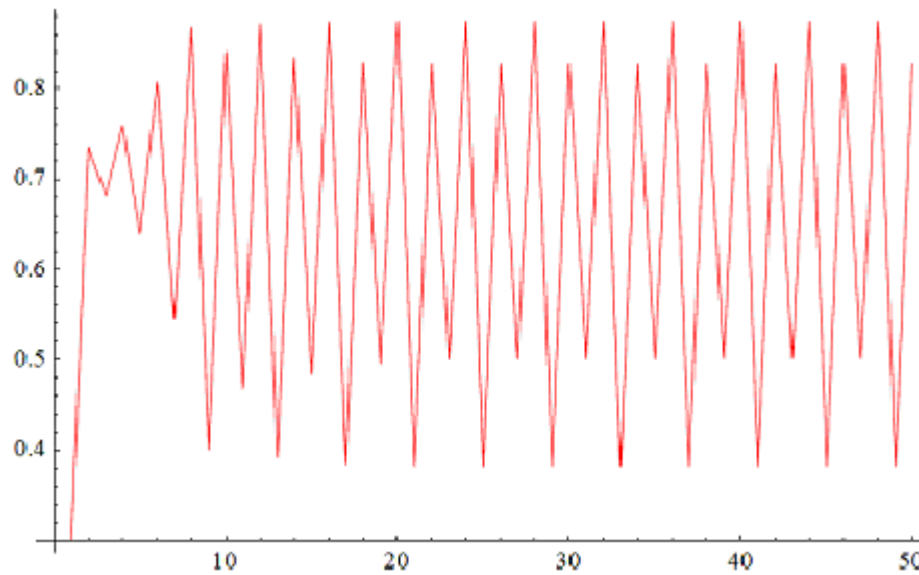
Şekil 1.8. $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$, $r = 1.8$, $y_0 = 0.3$ Grafiği

Şekil $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$, $r = 0.8$, $y_0 = 0.3$, $y = 1/3$ denge çözümüdür.



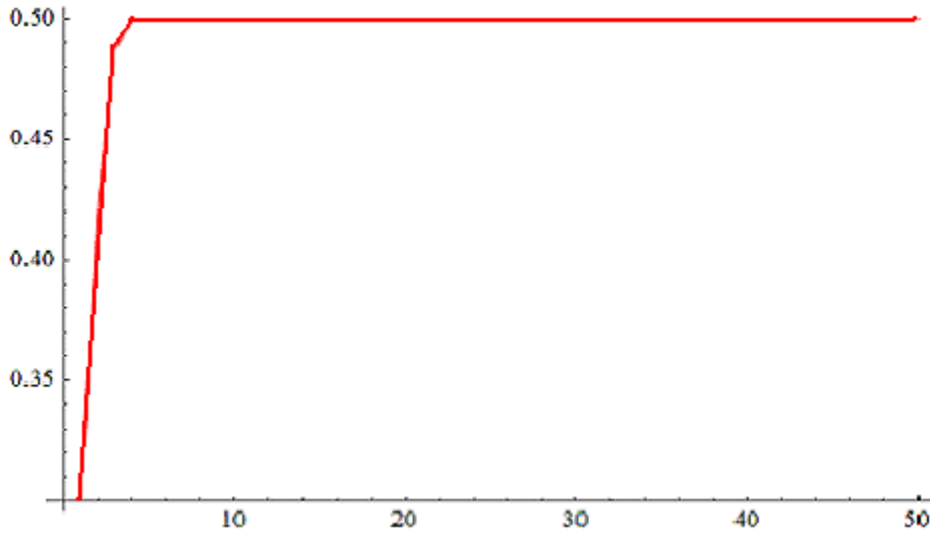
Şekil 1.9. $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$, $r = 3.2$, $y_0 = 0.3$ Grafiği

Şekil $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$, $r = 3.2$, $y_0 = 0.3$ ve 2 periyotlu çözümdür.



Şekil 1.10. $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$, $r = 3.5$, $y_0 = 0.3$ Grafiği

Şekil $y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$, $r = 3.5$, $y_0 = 0.3$ ve 4 periyotlu çözümdür.

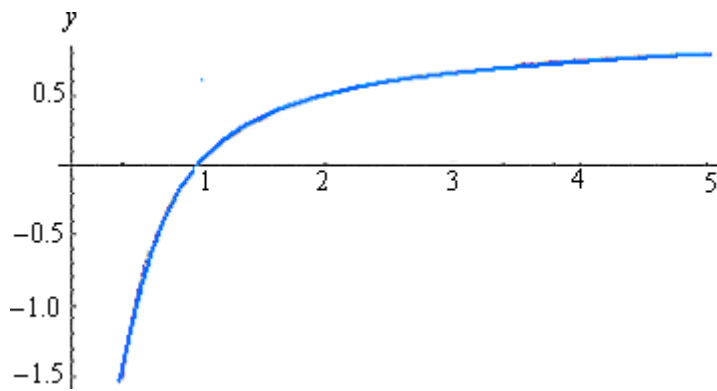


Şekil 1.11. $y_{n+1} = ry_n(1-y_n)$, $r = 2$, $y_0 = 0.3$ Grafiği

Şekil $y_{n+1} = ry_n(1-y_n)$, $r = 2$, $y_0 = 0.3$, $y = 0.5$ çözüm denge çözümüdür.

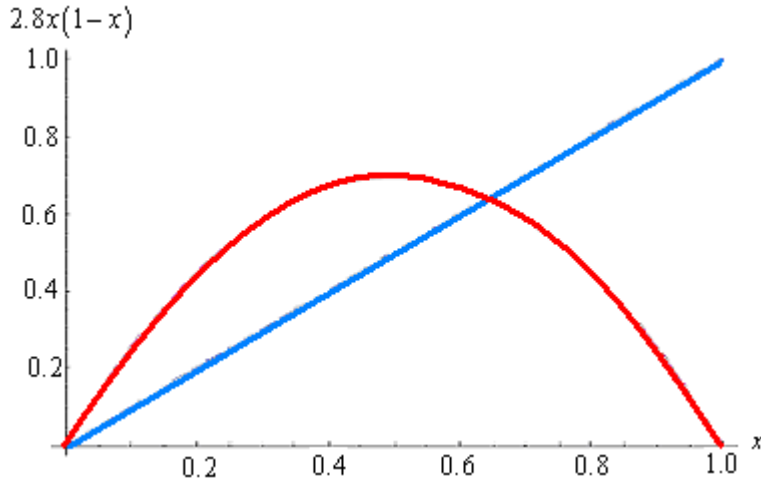
$1 < r < 3$ için $y_n = \frac{r-1}{r}$ asimptotik stabildir.

$0 \leq r < 1$ için $y_n = 0$ stabildir.



Şekil 1.12 $y = \frac{r-1}{r}$ 'nin Grafiği

1 ile 3 arası r değerlerinde stabillik var.



Şekil 1.13. $y = 2.8x(1-x)$, $y = x$ 'in Grafiği

$y = 2.8x(1-x)$, $y = x$ kesim yeri stabilite çözümleri belirler. $r = 2.8$ için bu $y = 0.6429$ 'dır.

Örnek 7 : $y_n = ky_{\frac{n}{2}} + f(n)$ özel tatbikatlarına bağlı olarak $f(n)$ farklı formlarda şu

şekilde kabul edilebilir:

1. $k = 1$, $f(n) \equiv 1$;
2. $k = 2$, $f(n) = n \log_2 n$;
3. $k = 7$, $f(n) = n^2$.

Birinci durum, y_n ikili arama için olağan maksimum maliyetini gösterir. İkinci durumda bir çok farklı uygulama ortaya çıkar, örneğin tek ve çift parçalar oluşturmak. Üçüncü durumda matris çarpımlarının gerçek algoritmalarının karmaşıklığının değerlendirilmesi ortaya çıkar. Tüm uygulamalarda, birinci y_1 değeri bilinir. Çözüm $n = 2^m$, $z_m = y_{2^m}$ ve $g_m = f(2^m)$ yerine konularak elde edilir. Sonuç denklemi,

$$z_m = kz_{m-1} + g_m.$$

Çözümü de,

$$z_m = k^m z_0 + \sum_{j=0}^{m-1} g_{j+1} k^{m-j-1} \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Örneğin,

$$y_n = k^{\log_2 n} \left(y_1 + \sum_{j=1}^{\log_2 n} f(2^j) k^{-j} \right) \text{ dir.}$$

Yukarıda bahsedilen durumlar sırasıyla şu çözümlere uymaktadır.

1. $y_n = y_1 + \log_2 n$;
2. $y_n = n \left(y_1 + \frac{(\log_2 n)(\log_2 n + 1)}{2} \right)$;
3. $y_n = 7^{\log_2 n} \left(y_1 - 1 + 7^{\frac{1 - (\frac{4}{7})^m}{3}} \right) \approx O(n^{\log_2 7})$.

Yukarıda verilen örneğin matematica programı ile genel çözümü ve verilen şartlardaki çözümleri sırası ile,

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow f n + k a \left[\frac{n}{2} \right] \right\} \right\}$$

1. $k = 1$, $f(n) \equiv 1$;

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow 1 + \frac{\text{Log}[n]}{\text{Log}[2]} \right\} \right\}$$

2. $k = 2$, $f(n) = n \log_2 n$;

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow n + 2n \sum_{\kappa[1]=0}^{-1 - \frac{\text{Log}[n]}{\text{Log}[2]}} -2^{-1+\kappa[1]} n \text{Log}[2, 2^{-\kappa[1]}] \right\} \right\}$$

3. $k = 7$, $f(n) = n^2$

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow \frac{1}{3} \left(-4^{1 + \frac{\text{Log}[n]}{\text{Log}[2]}} + 7^{1 + \frac{\text{Log}[n]}{\text{Log}[2]}} \right) \right\} \right\}$$

şeklindedir.

Örnek 8 : $(n+1)(n+2)y_{n+1} - n(n^2 - n - 1)y_n + (n-1)^3 y_{n-1} = 0$,

$n > 2$ ve $y_2 = y_3 = 1$.

$x_n = ny_n$ değişimiyle denklem,

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{n-1} - (n-1) \frac{x_n - x_{n-1}}{n-2} = 0 \text{ haline dönüşür.}$$

ve sırayla $z_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{n-1}$ konarak,

$$z_n - (n-1)z_{n-1} = 0$$

elde edilir ve bunun çözümü $z_n = (n-1)!$ dir. Buradan orjinal denklemin çözümü,

$$y_n = \frac{(n-1)! + 1}{n} \text{ olarak bulunur.}$$

Sayılar Teorisinin (Wilson Teoremi) bir teoreminin y_n değerinin n in asal sayı değerleri için bir tamsayı olduğunu belirtmek için kullanılması ilginçtir.

1.3. Faktoriyel Kuvvetler ve Stirling Sayıları

Faktoriyel kuvvetler ayrık matematikte aşağıdaki gibi tanımlıdır ve x^n kuvvet fonksiyonlarının diferansiyel ve integral matematikte kullanımlarıyla aynı rolde dirler.

Tanım 1.3.1 : $x \in R$ olmak üzere, x 'in n . faktoriyel kuvveti

$$x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1)$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki formüller tanımdan kolayca görülür.

$$\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)} \quad (1.16)$$

ve

$$\Delta^{-1} x^{(n-1)} = \frac{1}{n} x^{(n)} + \omega \quad (1.17)$$

Son bölümde yapılan gözleme göre, (1.16) nın iki tarafı da polinom olduğundan, periyodik fonksiyon bir sabittir. Bununla birlikte; $x^{(m+n)} = x^{(m)}(x-m)^{(n)}$ dir. $m=0$ iken, $x^{(0+n)} = x^{(0)}x^{(n)}$ ifadesi de gösterir ki $x^{(0)} = 1$ dir. Üstelik $m=-n$ için, $1 = x^{(0)} = x^{(-n)}(x+n)^{(n)}$ ifadesine göre, $x^{(-n)}$ in negatif faktoriyel kuvveti,

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan da $0^{(-n)} = \frac{1}{n}$ ifadesinden,

$$(-x)^{(n)} = (-1)^n (x+n-1)^{(n)} \quad (1.18)$$

elde edilir.(1.16) ve (1.19) bağıntılarından diğer fonksiyon ifadeleri uygun durumlarda faktoriyel kuvvetleri cinsinden ifade edilebilirler. Örneğin, polinomlarla ilgili aşağıdaki sonuçlara varılır.

Teorem 1.3.1 : $n \in N_0^+$ olmak üzere, x^n kuvvet fonksiyonu ile faktoriyel kuvvetleri arasındaki bağıntı

$$x^n = \sum_{i=0}^n S_i^n x^{(i)} \quad (1.19)$$

şeklindedir. Burada S_i^n ler Stirling sayıları(ikinci cins) olmak üzere aralarındaki bağıntı $S_n^n = S_1^n = 1$, $S_0^n = 0$, $n \neq 0$ için,

$$S_i^{n+1} = S_{i-1}^n + iS_i^n \text{ şeklindedir.}$$

İspat : $n = 1$ için (1.19) sağlanır. Bazı n 'ler için doğru olduğunu kabul edelim. (1.19)'un her iki yanını x ile çarparsak,

$$\begin{aligned} x^n x &= \sum_{i=1}^n S_i^n x x^{(i)} \\ x^{n+1} &= \sum_{i=1}^n S_i^n x(x-1)\dots(x-i+1)(x-i+i) \\ &= \sum_{i=1}^n iS_i^n x^{(i)} + \sum_{i=1}^n S_i^n x^{(i+1)} \\ &= S_1^n x^{(1)} + \sum_{i=2}^n [iS_i^n + S_{i-1}^n] x^{(i)} + S_{n+1}^{n+1} x^{(n+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} S_i^{n+1} x^{(i)} \end{aligned}$$

bu da gösterir ki, (1.19) $n + 1$ için doğrudur. Böylece ispat tümevarımla gösterilmiş oldu.

Stirling sayıları S_i^n , $i = 1, 2, \dots, 6$ için Tablo 1.1’de verilmiştir. (1.19) bağıntısı kullanılarak bir polinomun doğrudan farkları ve anti-farkları türetilir.

Tablo 1.1. İkinci Cins Stirling Sayıları

n/i	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	9	65	15	1

Teorem 1.3.2 : k dereceli bir polinomun birinci farkı $k - 1$ dereceli bir polinomdur ve genel olarak bir polinomun s inci farkı $k - s$ derecelidir.

İspat : k ıncı dereceden polinomunun yerine x^k alınması bir kısıtlama değildir.

(1.19) ifadesinden,

$$\Delta^s x^k = \sum_{i=1}^k S_i^k \Delta^s x^{(i)} = \sum_{i=1}^k i^{(s)} S_i^k x^{(i-s)}$$

derecesi $k - s$ olan denklem elde edilir. (1.16) denklemi kullanılarak $x \in N_0^+$ için,

$$\Delta \binom{x}{j} = \Delta \frac{x^{(j)}}{j!} = \binom{x}{j-1}, \quad j \geq 1$$

olduğu görülür.

Son sonuçlar genellikle Stirling özdeşliği olarak adlandırılır. Genellikle binom katsayılarının oluşturulmasında kullanılır.

$$\binom{x}{j} - \binom{x}{j-1} = \binom{x-1}{j-1} \quad (1.20)$$

Örnek 9 : (1.11) ve (1.20) den kolaylıkla

$$\sum_{x=a}^b \binom{x}{q} = \binom{b+1}{q+1} - \binom{a}{q+1} \text{ elde edilir.}$$

1.4. Bernoulli Sayıları ve Polinomları

(1.19)'dan $n \in N_0^+$ ve $x \in R$ için,

$$\Delta^{-1} x^n = \sum_{i=1}^n S_i^n \frac{x^{(i+1)}}{i+1} + \omega_n \quad (1.21)$$

elde edilir. Burada ω_n , x ile ilişkili bir sabittir. $\omega_n = \frac{1}{n+1}C_{n+1}$ olsun ve yerine koyarsak,

$$B_{n+1}(x) = (n+1)\Delta^{-1}x^n = (n+1)\sum_{i=1}^n S_i^n \frac{x^{(i+1)}}{i+1} + C_{n+1} \quad (1.22)$$

elde edilir.

$B_0(x)$, $B_n(x)$ polinomları şu bağıntıya karşılık gelir.

$$\Delta B_n(x) = nx^{n-1} \quad (1.23)$$

C_n sabitlerinden dolayı bunlar tek türlü belirlenemezler. Genellikle; $B_n(x)$ belirlenmesinde Stirling sayılarından kaçınmak daha uygundur. Aşağıdaki gibi yapılır.

Teorem 1.4.1 : $n \in N_0^+$ için $B_0(x) = 1$ ve $B_n(x)$ polinomları (1.23) denklemini sağlayan polinomlar olsun. Öyleyse iki fonksiyon sabit farkıyla,

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i(x) \quad (1.24)$$

ve

$$G_n(x) = nx^{n-1} \quad (1.25)$$

şeklindedir.

İspat: (1.23) den

$$\Delta F_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} ix^{i-1}$$

ve

$$\Delta G_n(x) = n \left[(x+1)^{n-1} - x^{n-1} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} i x^{i-1}$$

birbirine eşittir.

Burada, $\Delta F_n(x) = \Delta G_n(x)$ ve $F_n(x)$, $G_n(x)$ ifadeleri polinomlarsa,

$$F_n(x) = G_n(x) + d_n \quad (1.26)$$

elde edilir. Buradaki d_n 'ler x 'e göre sabitlerdir.

d_n sabit tutulduğunda (1.24), $B_n(x)$ polinomlarının inşasına müsaade eder.

$B_n(x)$ 'lere bir ilave şart daha sağlanmalıdır. Bu şart,

$$\frac{dB_n(x)}{dx} = nB_{n-1}(x) \quad (1.27)$$

veya

$$\int_0^1 B_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

olmak şartıyla aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 1.4.2 : Eğer $\forall n \in N^+$ için $B_n(x)$ polinomları $B_0(x) = 1$ ile (1.23)

denklemini sağlıyorsa, (1.27) veya (1.28) sağlanır. Öyleyse,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i(x) = nx^{n-1} \quad (1.29)$$

elde edilir.

İspat : (1.27) ile başlayalım. (1.26)'nın diferansiyelinden ve (1.27)'yi kullanılarak,

$nF_{n-1}(x) = F_n'(x) = G_n'(x) = nG_{n-1}(x)$ elde edilir. $d_{n-1} = 0$ ifadesi

$0 = n(F_{n-1}(x) - G_{n-1}(x)) = nd_{n-1}$ anlamına gelir. Farz edelim ki, (1.28) sağlansın.

(1.24)'ten $\int_0^1 F_n(x) dx = \int_0^1 B_0(x) dx = 1$ ve $\int_0^1 G_n(x) dx = 1$ elde edilir. Çünkü (1.26) dan

$d_n = 0$ ifadesine karşılık gelen $1 = 1 + d_n$ elde edilir.

(1.29), $B_n(x)$ polinomlarının tek olarak belirlenmesini sağlar. Bernoulli polinomlarının ilk beş tanesi aşağıda verilmiştir:

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

$B_n(0)$ değerleri Bernoulli sayıları olarak adlandırılırlar ve B_n ile gösterilirler.

(1.29)'un bir sonucu olarak, Bernoulli sayılarının şu bağıntıya karşılık geldiği görülür:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.30)$$

Öyle ki; B^i kuvvetleri B_i 'lerle yer değiştirdiğinde yukarıdaki bağıntı $(1+B)^n - B^n$ bağıntısına karşılık gelir. Bu özellik genellikle Bernoulli sayılarını tanımlamak için kullanılır ve gösterir ki; tek indeksli Bernoulli sayıları B_1 hariç sıfırdır. İlk on sayının değeri,

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}.$$

(1.23) denkleminde her tarafa Δ^{-1} uygulanarak,

$$\Delta^{-1} x^{n-1} = \frac{B_n(x)}{n} \quad (1.31)$$

elde edilir.

Aşağıda (1.31)'in basit bir tatbikatını yapalım. Kabul edelim ki; (1.11) ve (1.29) ifadelerinden,

$$\sum_{x=0}^m x^{n-1} = \frac{B_n(x)}{n} \Big|_{x=0}^{x=m+1} = \frac{1}{n} [B_n(m+1) - B_n]$$

$(n-1)$ inci kuvvetten bir tamsayının toplamlarını elde ederiz. Örneğin; $n = 3$ olduğunda,

$$\sum_{x=0}^m x^2 = \frac{1}{3} \left((m+1)^3 - \frac{3}{2}(m+1)^2 + \frac{1}{2}(m+1) \right) = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1)$$

elde edilir.

1.5. Matris Formu

Ayrık matematiğin birçok uygulaması vardır ve nümerik analiz, analiz, algoritma teorisi, dalgacıklar gibi birçok eski ve yeni bilim dalının temelini oluşturur. Vektör ve matris kullanımları sadece kısa ve daha karmaşık formları basitçe ifade etmenin yanında aynı zamanda bu gibi sonuçları genellememizi sağlar. Bu bölümde bu yaklaşımı geliştireceğiz.

Tablo 1.2 de $\omega(x)$ periyodik fonksiyonu dışındaki basit fonksiyonların farklarını ve anti-farklarını listeledik.

Tablo 1.2. Farklar ve Anti-Farklar

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^{-1} f(x)$
c	0	cx
c^x	$(c-1)c^x$	$\frac{c^x}{c-1}, c \neq 1$
xc^x	$(c-1)xc^x + c^{x+1}$	$\frac{c^x}{c-1} \left(x - \frac{c}{c-1}\right), c \neq 1$
$(x+b)^{(n)}$	$n(x+b)^{(n-1)}$	$\frac{(x+b)^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$
$\binom{x}{n}$	$\binom{x}{n-1}$	$\binom{x}{n+1}$
$\cos(ax+b)$	$-2 \sin \frac{a}{2} \sin \left(ax + bx + \frac{a}{2}\right)$	$\frac{\sin \left(ax + b - \frac{a}{2}\right)}{2 \sin \frac{a}{2}}$
$\sin(ax+b)$	$2 \sin \frac{a}{2} \cos \left(ax + b + \frac{a}{2}\right)$	$-\frac{\cos \left(ax + b - \frac{a}{2}\right)}{2 \sin \frac{a}{2}}$
x^n	$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i$	$\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}, n \neq -1$
$\log(x+c)$	$\log \left(1 + \frac{1}{x+c}\right)$	$\log \Gamma(x+c)$

1.5.1. Pascal Matrisi ve Kombinasyon hesapları

Birçok uygulamalarda Pascal matrisinin sayısız özellikleri rol oynar. Bu matris bilinen en eski matrislerden olsa dahi, sistematığı ile ilgili çalışmalar çok yenidir. Geçmiş bölümlerde matris formunun kullanılması -özellikle Pascal matrisinin kullanılması- birçok sonuç elde etmemizi sağladı. Burada matrislerin temel özellikleriyle alakalı matris uygulamalarını birkaç örnekle vereceğiz. $n > 0$ için, n boyutlu Pascal matrisinin elemanları şöyle ifade edilir:

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(j+s)^{(s)}}{s!} \delta_{i,j+s}$$

şeklindedir. Gerçekten de, $\delta_{i,j}$ Kronecker sembolüdür. Benzer olarak yukarıdaki sıfır olmayan elemanlar kolayca kontrol edilebilirler. Eğer $i < j$ ise, yukarıdaki tanım sıfıra eşdeğerdir.

Aksi taktirde,

$$(e^H)_{ij} = \frac{i^{(i-j)}}{(i-j)!} = \binom{i}{j} \text{ ve bu da ispatı tamamlar.}$$

PP^T matrisi simetri Pascal matrisi olarak adlandırılır. Elemanları;

$$(PP^T)_{ij} = \binom{i+j}{j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.34)$$

şeklindedir.

Bu bağıntı bilinen Vandermonde konvolusyon formülünü içerir. Yani,

$$\binom{n}{m} = \sum_{s=0}^m \binom{n-p}{m-s} \binom{p}{s}, \text{ dir.}$$

P^x 'in kuvvetleri $\forall x \in R$ için $P^x = \exp(xH)$ şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki benzer ifadelerle göre, sıfır olmayan elemanları şunlardır:

$$(P^x)_{ij} = x^{i-j} \binom{i}{j} \quad (1.35)$$

P 'nin negatifleri de dahil bütün kuvvetleri kolayca ispatlanabilir. Bu kuvvetleri uygun bir şekilde birleştirirsek, kombinasyonla ilgili bilinen birçok özelliği gösterebiliriz. Bununla ilgili birkaç örnek verelim.

$$\sum_{k=j}^i \binom{i}{k} \binom{k}{j} = 2^{i-j} \binom{i}{j},$$

$$\sum_{k=j}^i (1)^k \binom{i}{k} \binom{k}{j} = (-1)^j \delta_{ij}$$

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k}^2 = \binom{2i}{i} \equiv (i+1)c_i,$$

burada c_i 'ler Katalan sayılarıdır.

Birinci özdeşlik (1.35) denklemi kullanılarak $P.P = P^2$ ifadesinden elde edilir. İkinci özdeşlik benzer olarak (1.35) denkleminde $x = -1$ alınarak P ve tersinin çarpılmasıyla elde edilir. Diğer özdeşlikler bu kadar kolay değildir fakat ispatlarını matris formunda kanıtlamak daha kolaydır. Daha karmaşık sonuçlar için örnek olarak ikinci bölümde kullanılacak olan bir özdeşliğin ispatını verelim. Bunu yaparken ötelenmiş Pascal matrisine ihtiyaç duyacağız. s bir tamsayı olsun. Ötelenmiş Pascal matrisi P_s ,

$$(P_s)_{i,j} = \begin{cases} \binom{i+s}{j+s} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \quad (1.36)$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu matrislerin terslerinin elemanlarını veren ifade,

$$(P_s^{-1})_{ij} = (-1)^{i-j} (P_s)_{ij} \text{ şeklindedir.}$$

Öteleme matrisi göz önünde bulundurularak,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (1.37)$$

aşağıdaki özellikler hemen görülür.

Teorem 1.5.2 : Her s değeri için, aşağıdakiler doğrudur.

$$(i) P_s = e^{(H+sK)};$$

$$(ii) P_{s-1} = (I - K)P_s;$$

$$(iii) P_s = P_{s-1}(I + K).$$

İspat : Birinci bağıntının ispatı Teorem 1.5.1 de verilen şarta benzerdir. Geri kalan iki tanesi kolaylıkla Stirling özdeşliklerinden Stirling özdeşliği (1.20)'nin sonucu olarak kolaylıkla görülür.

Bunlara göre, aşağıdaki bağıntılar her s tamsayısı için elde edilebilir.

$$P = (I - K)^s P_s,$$

$$P_s = (I - K)P_s(I + K),$$

$$\Delta^j P_s = P_s (K^T)^j,$$

$$P_s K - K P_s = K P_s K,$$

$$K P_s = P_{s-1} K,$$

$$(I - K)^{-j} = P(I + K)^j P^{-1}.$$

$e = (1, 1, \dots, 1)^T$ olsun. (ii)'den $P_{s-1} P_s^{-1} e = e_0$ olur. İlk bölümde kullanılan aşağıdaki özelliği ispatlayalım. Yani,

$$\sum_{j=0}^{q-n} (-1)^j \binom{q}{n+j} = \binom{q-1}{n-1}.$$

Sol taraf $m = q - n$ için,

$$\sum_{j=0}^{q-n} (-1)^j \binom{q-n+n}{n+j} = (-1)^m \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m+n}{n+j} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu eşitlik matris formunda,

$$(-1)^m (P_n^{-1} e) m = (-1)^m (P_n^{-1} P_n P_{n-1}^{-1} e_0) m = (-1)^m (P_{n-1}^{-1} e_0) m = \begin{pmatrix} q-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

P 'nin daha birçok özelliği R^n 'de aşağıdaki diferansiyel denklem göz önüne alınarak belirlenebilir.

$$\frac{dy}{dx} = Hy \quad (1.38)$$

Bu denklemin çözümü $y(x) = P^x y(0)$ 'dir. Başlangıç koşulu değiştirilerek, yukarıdaki denklemi sağlayan bir sürü bilinen fonksiyon elde edilir.

Örneğin; $\xi(x) = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1})^T$ böyle fonksiyonlardan birisidir. $y(0) = e_0$ seçimine göre bulunmaktadır. $P\xi(x) = \exp((x+1)H)e_0 = \xi(x+1)$ ve genel olarak;

$$P^j \xi(x) = \xi(x+j) \text{ 'dir.}$$

Bu çok basit bir ilişkidir. Bu basit bağıntı birçok faktoriyel özdeşliği belirlemek için kullanılır. Örneğin, $x=1$ ve $j=1$ için $Pe = \xi(2)$ elde edilir. Bu da,

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

yazımının kısa halidir.

Benzer olarak, $\xi(x-j) = P^{-j} \xi(x)$ ifadesinden bir çıkarım elde edilir. Örneğin $\xi(0) = P^{-j} \xi(1)$. Yani,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = \delta_{k0}.$$

Kolay olmayan bir problem aşağıdadır.

Örnek 10 : $F(y) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(1-y)^{n+k+1}}{n+k+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{y^{m+k+1}}{m+k+1}$ ifadesi;

$$\begin{aligned}
 F(y) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \int_0^{1-y} x^{n+k} dx + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^y x^{m+k} dx \\
 &= (-1)^m e_m^T P^{-1} \int_0^{1-y} \xi(x) x^n dx + (-1)^n e_n^T P^{-1} \int_0^y \xi(x) x^m dx \\
 &= (-1)^m e_m^T \int_0^{1-y} \xi(x-1) x^n dx + (-1)^n e_n^T \int_0^y \xi(x-1) x^m dx \\
 &= \int_0^{1-y} (1-x)^m x^n dx + \int_0^y (1-x)^n x^m dx \text{ şeklinde yazılabilir.}
 \end{aligned}$$

$F'(y) = 0$ olduğunu kanıtlamak kolaydır. Yani $F(y)$, y 'nin bağımsızdır. Orijinal ifade,

$$F(0) = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

ifadesine eşit olur.

Eğer x reel sayısı yerine ξ tanımında E veya Δ operatörü kullanırsak; (1.5) ve (1.6) bağıntılarından Δ ve E operatörlerinin arasındaki şu ilişki elde edilir.

$$\xi(E) = P\xi(\Delta) \quad (1.39)$$

u_0, u_1, \dots , dizisinin s inci satırına yukarıdaki ilişki uygulanırsa, $s-1$ inci terimi $\Delta^i u_0$, $i = 0, \dots, s-1$ terimi olur.

$$\frac{d}{dx} P^x = H P^x \quad (1.40)$$

ifadesinde P^x , (1.38) için temel matristir.

1.5.2. Pascal Matrisi ve Bernoulli polinomları

$B_i(x)$, Bernoulli polinomlarını göz önüne alalım.

$$b(x) = (B_0(x), B_1(x), \dots, B_{n-1}(x))^T$$

şeklinde olsun.

(1.27)'den vektör (1.38)'i sağlar ve $b(x) = P^x b(0)$ 'dır. $b(0)$ 'ın elemanları bilindiğinden polinomların değerleri kolayca elde edilebilir. Bununla birlikte tüm j tamsayıları için,

$$b(x+j) = P^j b(x) \text{ eşitliğine sahip oluruz.}$$

Aşağıdaki L matrisi tanımlanarak, (1.28) özelliği, matris göz önüne alınarak, $Lb(0) = e_0$ ve $b(0) = L^{-1}e_0$ halini alır. Yani; Bernoulli sayıları L^{-1} matrisinin birinci sütun elemanları olur.

$$L = \int_0^1 P^x dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{H^i}{(i+1)!} \text{ şeklinde uygulanır.}$$

Bununla birlikte P ve L , aynı H matrisinin polinomlarıdır ve değişme özelliğine sahiptirler. Bu ise aşağıdaki özelliği yazmamıza müsaade eder.

$$b(x) = P^x b(0) = P^x L^{-1} e_0 = L^{-1} P^x e_0 = L^{-1} \xi(x).$$

Bu da gösterir ki; L matrisi Taylor açılımı ve Bernoulli açılımı arasında transformasyon matrisidir. Başka bir ifadeyle, eğer bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki Taylor açılımına sahipse,

$$f(x) = f^T \xi(x) + \text{yüksek mertebeden terimler}$$

şeklinde dir.

Burada, f^T vektörü açılımın katsayılarını içeren bir vektördür ve bu ifadenin Bernoulli terimleri cinsinden ifadesi aşağıdaki şekilde olur.

$$f(x) = f^T Lb(x) + \text{yüksek mertebeden terimler}$$

L 'nin tanımından

$$LH = HL = P - I \quad (1.41)$$

elde edilir.

Bu özellik bize birçok bilinen bağıntıyı elde etme imkanı verir. Aşağıda birkaç örnek verilmiştir.

Örnek 11 : $b(x)$ ifadesinin ardışık iki vektör arasındaki farkı,

$$b(x+1) - b(x) = (P - I)b(x) = (P - I)P^x L^{-1}e_0 = (P - I)L^{-1}\xi(x) = H\xi(x) \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

Bu (1.23)'teki ifadenin vektör formundan başka bir şey değildir .

Örnek 12 : Sağ tarafı $b(x)$ ile çarparak, $(P - I)b(x) = HLb(x) = H\xi(x)$ elde ederiz, bu da (1.29)'a eşittir.

Örnek 13 : Sağ tarafı $b(0)$ ile çarparak, $(P - I)b(0) = HLb(0) = H\xi(0) = He_0$ elde ederiz, bu da (1.30)'a eşittir.

1.5.3. Pascal Matrisi ve Bernstein polinomu

Pascal matrisinin bir başka uygulaması modern bilgisayar grafiklerinin temellerini oluşturan Bernstein polinomu üzerinde olacaktır.

Bu polinomlar $B_i^j(x)$ ile ifade edilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$B_i^j(x) = \begin{cases} \binom{j}{i} x^i (1-x)^{j-i} & , j \geq i \\ 0 & , \text{diğer durumlarda, } i, j = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

$B_e(x)$ Bernstein matrisini $(B_e(x))_{ij} = B_i^j(x)$ şeklinde tanımlayabiliriz. Pascal matrisi kullanılarak; B_e matrisinin basit bir formu olan

$$B_e = PD_x P^{-1} \quad (1.42)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $D_x = \text{diag}(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$ olarak tanımlanır. (1.42)

eşitliğinden Bernstein polinomlarının özellikleri basitçe türetilebilir. Örneğin; B_e 'nin köşegen formuna benzer bir dönüşüm olduğu kolaylıkla gösterilebilir. B_e 'nin öz değerleri, D_x 'in köşegen elemanlarıdır. Birinci özdeğer olan 1, $e = Pe_0$ öz vektörüne karşılık gelir. P 'nin birinci sütunu $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ 'dir. Buradan,

$$B_e e = e \quad (1.43)$$

elde edilir.

Yukarıdaki vektör formundaki ifade iyi bilinen Bernstein polinomlarının birimin parçalanması formunu oluşturmasıdır. Alt bölünme özelliği denilen

$B_e(ct) = B_e(c)B_e(t)$ özelliği açıktır. H ve P matrisleri arasındaki çok kullanışlı ve ilgili ilişki aşağıdaki D_x matrisi ile şu şekilde verilir:

$$P^x = D_x P D_{-x}, \quad D_x H D_{-x} = xH.$$

Bundan başka,

$$\int_0^1 B_e(x) dx = P \int_0^1 D_x dx P^{-1} \equiv P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/n \end{pmatrix} P^{-1}$$

ifadesi göz önüne alınarak,

$$P \int_0^1 D_x dx = \int_0^1 D_x dx P_1,$$

elde edilir. Burada P_1 , ötelenmiş Paskal matrisidir. Teorem 1.5.2'nin sonucu kullanılarak şunlar elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_e(x) dx &= \int_0^1 D_x dx P_1 P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1/2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1/n & \dots & \dots & 1/n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bu ise, Bernstein polinomlarının önemli bir özelliğinin kompakt formunda yazılışdır.

Yani,

$$\int_0^1 B_i^j(x) dx = \frac{1}{j+1}. \quad (1.44)$$

Son olarak, daha az bilinen bir sonuç,

$$(B_e(x))^{-1} = B_e(x^{-1}), \quad \forall x \in \mathbb{R} / \{0\} \quad (1.45)$$

ve tüm j tamsayıları için daha genel olarak aşağıdaki ifade verilir.

$$(B_e(x))^j = B_e(x^j) \quad (1.46)$$

1.5.4. Pascal Matrisi ve Stirling sayıları

Stirling sayıları bir matris formunda yazılabilir. Yani,

$$S = \begin{pmatrix} S_0^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_1^1 & \dots & & \vdots \\ 0 & S_1^2 & S_2^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \dots & 0 \\ 0 & S_1^{n-1} & \dots & \dots & S_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

S 'nin sıfır olmayan elamanları Bölüm 1.3'te tanımlanan ikinci cins Stirling sayılarıdır.

Yukarıdaki tanımlanan vektör $\xi(x)$ göz önüne alındığında, benzer bir vektör faktoriyel kuvvetleri cinsinden şöyle tanımlanır:

$$\eta(x) = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})^T.$$

Bölüm 1.3'te göz önüne alınan Stirling dönüşümü matris formunda

$$\xi(x) = S\eta(x)$$

şeklinde yazılabilir.

Ters ilişki, elemanları birinci cins Stirling sayıları olan ters matris tarafından tanımlanır.

Sütunları şu şekilde tanımlanmış Vandermonde matrisi göz önüne alınarak,

$$W_x = (\xi(x), \xi(x+1), \dots, \xi(x+n-1))$$

ve benzer matris,

$$V_x = (\eta(x), \eta(x+1), \dots, \eta(x+n-1))$$

şeklinde tanımlanarak yukarıdaki ifade,

$$W_x = SV_x$$

şeklinde yazılabilir.

Buradaki V_0 matrisi bir üst üçgensel matristir. Buradan W_0 Vandermonde matrisinin LU tipinde çarpanlara ayrılmış hali elde edilir.

Diagonal faktoriyel matris $D_f = \text{diag}(1!, 2!, \dots, n!)$ tanımlanarak sonuçları şöyle yazılabilir:

$$V_0 = D_f P^T.$$

Diğer taraftan, madem ki W_x

$$\frac{d}{dx} W_x = H W_x \tag{1.47}$$

diferansiyel denklemini sağlar, öyleyse (1.38) eşitliğini sağlayan W_x 'in her sütunu bulunabilir.

$$W_x = P^x W_0 = P^x S D_f P^T$$

Yukarıdaki ifade LDU tipinden çarpanlara ayrılması anlamına gelir. Bu çarpanlara ayırma nümerik analizde çok boyutlu Vandermonde sistemlerinin çözümünde çok kullanılır.

Bununla birlikte,

$$V_x = S^{-1}P^xSV_0 \quad (1.48)$$

alınabilir. Öyle ki, bu göz önünde bulundurularak,

$$\frac{d}{dx}V_x = S^{-1}\frac{d}{dx}W_x = S^{-1}HSV_x$$

elde edilir ve bu da

$$e^{S^{-1}HSx} = S^{-1}P^xS \text{ ifadesini verir.}$$

S ve P arasındaki daha derin bir ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir. (1.16) ilişkisi vektör formunda $\Delta\eta(x) = H\eta(x)$ 'dir. V_x 'in sütunları $\eta(x)$ vektörünün ardışık terimleridir. Ve biz,

$$\Delta V_x = HV_x$$

eşitliğine sahibiz. Buradan,

$$V_1 = V_0 + HV_0 \text{ ve } V_1V_0^{-1} = I + H$$

bulunur.

$x = 1$ için (1.48) göz önüne alınarak,

$$S^{-1}PS = I + H \quad (1.49)$$

veya $P - I = SHS^{-1}$ elde edilir. Üstelik $D_f^{-1}HD_f = K$ olduğundan aşağıdaki ifade,

$$(SD_f)^{-1}P(SD_f) = I + K \quad (1.50)$$

şeklinde elde edilir.

Bu bir teoremle şu şekilde ifade edilebilir.

Teorem 1.5.3 : SD_f matrisi P Pascal matrisini Jordan iki köşegenli forma dönüştürür.

1.6. Mukayese Prensibi

Fark denklemlerinin davranışları hakkında bilgi elde etmenin en etkili yollarından bir tanesi, fark denklemleri kolayca çözülemediği zaman kullanılan mukayese prensibidir. Genel olarak mukayese prensibi, bir fark denklemine tekabül eden çözümün fark eşitsizliğini sağlayan fonksiyonun tahminine dayanır. Bu bölümde bu prensiplerin değişik formlarıyla ilgileneceğiz.

Teorem 1.6.1 : $n \in N_o^+$, $r \geq 0$ ve $g(n, r)$, r 'ye göre n sabit tutulduğunda azalmayan bir fonksiyon olsun. Farz edelim ki $n \geq n_0$,

$$y_{n+1} \leq g(n, y_n) \quad (1.51)$$

$$u_{n+1} \geq g(n, u_n) \quad (1.52)$$

eşitsizlikleri olsun. O zaman,

$$y_{n_0} \leq u_{n_0} \quad (1.53)$$

olduğunda,

$$y_n \leq u_n, \quad n \geq n_0 \quad (1.54)$$

olmasını gerektirir.

İspat : (1.54) ifadesinin doğru olmadığını varsayalım. (1.53)'ten $y_{k+1} = u_{k+1}$ olacak şekilde bir $k \in N_o^+$ vardır. (1.51), (1.52) ve g 'nin monotonluk özelliği kullanılarak,

$$g(k, u_k) \leq u_{k+1} < y_{k+1} \leq g(k, y_k) \leq g(k, u_k)$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Genellikle, (1.52) bir denklemdir ve buna tekabül eden sonuç ise mukayese prensibi olarak adlandırılır.

Sonuç1.6.1 : $n \in N_o^+$, $k_n \geq 0$ ve $y_{n+1} \leq k_n y_n + p_n$ olsun. $n \geq n_0$ için,

$$y_n \leq y_{n_0} \prod_{s=n_0}^{n-1} k_s + \sum_{s=n_0}^{n-1} p_s \prod_{\tau=s+1}^{n-1} k_\tau \quad (1.55)$$

elde edilir.

İspat : $k_n \geq 0$ olduğundan Teorem 1.6.1'deki hipotez doğrulanır.

$y_n \leq u_n$ olduğundan, u_n lineer fark denkleminin çözümüdür.

$$u_{n+1} = k_n u_n + p_n, \quad u_{n_0} = y_{n_0}. \quad (1.56)$$

(1.12)'den görülür ki, (1.55) eşitsizliğinin sağ tarafı (1.56) eşitsizliğinin çözümüdür.

Teorem 1.6.2 : $g(n, s, y)$, $N_{n_0}^+ \times N_{n_0}^+ \times R$ üzerinde tanımlı olsun ve y 'ye göre azalmayan bir fonksiyon olsun.

Farz edelim ki, $n \in N_{n_0}^+$ için,

$$y_n = \sum_{s=n_0}^{n-1} g(n, s, y) + p_n \text{ olsun.}$$

O zaman, $y_{n_0} \leq p_{n_0}$ ifadesi $y_n \leq u_n$, $n \geq n_0$ anlamındadır. Burada u_n ,

$$u_n = \sum_{s=n_0}^{n-1} g(n, s, y) + p_n, \quad u_{n_0} = p_{n_0}$$

denkleminin çözümüdür.

İspat : Eğer yukarıdaki iddia doğru değilse; $s \leq k$ için $y_{k+1} > u_{k+1}$ ve $y_s \leq u_s$ olacak şekilde bir $k \in N_0^+$ vardır. Fakat,

$$y_{k+1} - u_{k+1} \leq \sum_{s=n_0}^{n-1} [g(k+1, s, y) - g(k+1, s, u_s)] \leq 0 \text{ çelişkisi vardır.}$$

Sonuç 1.6.2 (Ayrık Gronwall Eşitsizliği) : $n \in N_0^+$, $k_n \geq 0$ olsun ve

$$\begin{aligned} y_n &\leq y_{n_0} \prod_{s=n_0}^{n-1} (1+k_s) + \sum_{s=n_0}^{n-1} p_s \prod_{\tau=s+1}^{n-1} (1+k_\tau) \\ &\leq y_{n_0} \exp\left(\sum_{s=n_0}^{n-1} k_s\right) \sum_{s=n_0}^{n-1} p_s \exp\left(\sum_{\tau=s+1}^{n-1} k_\tau\right), \text{ dir.} \end{aligned}$$

İspat : Kıyaslama denklemi

$$u_n = u_{n_0} + \sum_{s=n_0}^{n-1} [k_s u_s + p_s], \quad u_{n_0} = y_{n_0}$$

şeklindedir.

Bu ifade $\Delta u_n = k_n u_n + p_n$ ifadesine eşittir.

Çözüm,

$$u_n = u_{n_0} \prod_{s=n_0}^{n-1} (1+k_s) + \sum_{s=n_0}^{n-1} p_s \prod_{\tau=s+1}^{n-1} (1+k_\tau),$$

$1+k_s \leq \exp(k_s)$ ifadesi göz önüne alınarak ispat tamamlanır.

Aşağıdaki sonuçta benzer olarak hesaplanır.

Sonuç 1.6.3 : $n \in N_0^+$, $k_n \geq 0$ ve

$$y_{n+1} \leq P_{n+1} + \sum_{s=n_0}^n k_s y_s, \quad y_{n_0} \leq P_{n_0} \text{ olsun.}$$

Öyleyse, $q_n = \Delta P_n$ iken;

$$y_n \leq P_{n_0} \prod_{s=n_0}^{n-1} (1+k_s) + \sum_{s=n_0}^{n-1} q_s \prod_{\tau=s+1}^{n-1} (1+k_\tau)$$

$$\leq P_{n_0} \exp\left(\sum_{s=n_0}^{n-1} k_s\right) + \sum_{s=n_0}^{n-1} q_s \exp\left(\sum_{\tau=s+1}^{n-1} k_\tau\right), \text{dir.}$$

Yukarıdaki sonuçla ilgili bir diğer sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç 1.6.4 : $n \in N_0^+$, $k_n > 0$ ve

$$y_{n+1} \leq P_{n+1} + \sum_{s=n_0}^n k_s y_s, \quad y_{n_0} \leq P_{n_0} \text{ olsun.}$$

Öyleyse;

$$y_n \leq P_n + \sum_{s=n_0}^{n-1} P_s k_s \prod_{\tau=s+1}^{n-1} (1+k_\tau) \leq P_n + \sum_{s=n_0}^{n-1} P_s k_s \exp\left(\sum_{\tau=s+1}^{n-1} k_\tau\right), \text{dir.}$$

İspat :
$$V_n = \sum_{s=n_0}^{n-1} k_s y_s, \quad V_{n_0} = 0 \quad (1.57)$$

olsun. Öyleyse,

$$y_n \leq P_n + V_n \quad (1.58)$$

elde edilir. (1.57) ifadesinin iki tarafına Δ operatörü uygulanırsa,

$$\Delta V_n = k_n y_n \leq k_n P_n + k_n V_n$$

elde edilir. Buradan Sonuç 1.6.1'e göre,

$$V_n \leq \sum_{s=n_0}^{n-1} k_s P_s \prod_{\tau=s+1}^{n-1} (1+k_\tau), \text{dir.}$$

Burada, (1.58)'in karşısındaki istenen değer elde edilmiş olur.

Sonuç 1.6.5 : $k(n, s, x) : N_{n_0}^+ \times N_{n_0}^+ \times R^+ \rightarrow R^+$, x 'e göre monoton azalmayan ve

$g(n, u) : N_{n_0}^+ \times R^+ \rightarrow R^+$, u 'ya göre monoton azalmayan olsun.

Farz edelim ki,

$$y_n \leq g\left(n, \sum_{s=n_0}^{n-1} k(n, s, y_s)\right) \quad (1.59)$$

olsun.

$$u_n = \sum_{s=n_0}^{n-1} k(n, s, g(s, u_s))$$

ifadesindeki u_n ,

$$y_n \leq g(n, u_n)$$

ifadesinin çözümüdür.

İspat : (1.59) bağıntısı $y_n \leq g(n, r_n)$ şeklinde yazılabilir. Burada

$$r_n = \sum_{s=n_0}^{n-1} k(n, s, y_s) \text{ 'dir.}$$

$r_n \leq \sum_{s=n_0}^{n-1} k(n, s, g(s, r_s))$ eşitsizliğini sağlar. Teorem 1.6.2 kullanılarak $r_n \leq u_n$

bulunur. Bu da aşağıdaki eşitsizliği verir.

$$y_n \leq g(n, r_n) \leq g(n, u_n).$$

Teorem 1.6.3 : Farz edelim ki, $g_1(n, u)$ ve $g_2(n, u)$ $N_{n_0}^+ \times R^+$ üzerinde tanımlı ve

u 'ya göre azalmayan fonksiyonlar olsunlar ve

$$g_2(n, u_n) \leq u_{n+1} \leq g_1(n, u_n)$$

olsun. Öyleyse,

$$P_n \leq u_n \leq r_n \text{ 'dir.}$$

Burada P_n ve r_n aşığıdaki fark denklemlerinin çözümleridir.

$$r_{n+1} = g_1(n, r_n), \quad r_{n_0} \geq u_{n_0},$$

$$P_{n+1} = g_2(n, P_n), \quad P_{n_0} \geq u_{n_0}$$

İspat : Teorem 1.6.1 iki defa uygulanarak istenen sonuca ulaşılır.

Teorem 1.6.4 (Ayrık Bihari Eşitsizliği) : Farz edelim ki $h_n, N_{n_0}^+$ üzerinde tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $M > 0$ ve W, R^+ üzerinde tanımlı pozitif kesinlikle artan fonksiyon olsun.

Eğer $n \geq n_0$ için,

$$y_n \leq V_n$$

ise, V_n ;

$$V_n = y_0 + M \sum_{s=n_0}^{n-1} h_s W(y_s)$$

şeklindedir. O halde,

$$n \in N_1 = \left\{ n \in N_{n_0}^+ / M \sum_{s=n_0}^{n-1} h_s \leq G(\infty) - G(x_0) \right\}$$

iken,

$$y_n \leq G^{-1} \left(G(y_0) + M \sum_{s=n_0}^{n-1} h_s \right)$$

elde edilir. Burada G ,

$$\Delta G(V_n) = \frac{\Delta V_n}{W(V_n)}$$

ifadesinin çözümüdür.

İspat : $\Delta V_n = Mh_n W(y_n) \leq Mh_n W(V_n)$ eşitliğine sahibiz. Buradan;

$$G(V_{n+1}) \leq G(V_n) + Mh_n$$

elde edilir.

Teorem 1.6.1'den,

$$G(V_n) \leq G(y_0) + M \sum_{s=n_0}^{n-1} h_s \text{ elde ederiz.}$$

Bundan dolayı $n \in N_1$ için,

$$V_n \leq G^{-1} \left(G(y_0) + M \sum_{s=n_0}^{n-1} h_s \right) \text{ 'dir.}$$

Teorem 1.6.5 : $y_j, j = 0, 1, \dots$ dizisi

$$y_{n+1} \leq g \left(y_n, \sum_{j=0}^{n-1} y_j, \sum_{j=0}^{n-2} y_j \right) \text{ ifadesini sağlayan pozitif bir dizi olsun.}$$

Burada, $g(y, z, w)$ argümanlarına göre azalmayan bir fonksiyondur.

Eğer, $y_0 \leq u_0$ ve

$$u_{n+1} \leq g \left(u_n, \sum_{j=0}^{n-1} u_j, \sum_{j=0}^{n-2} u_j \right) \text{ ise,}$$

tüm $n \geq 0$ değerleri için,

$$y_n \leq u_n \text{ 'dir.}$$

İspat : İspat tümevarımla gösterilebilir. $n = 0$ için iddiamız doğrudur. $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$y_{n+1} \leq g \left(y_n, \sum_{j=0}^{n-1} y_j, \sum_{j=0}^{n-2} y_j \right) \leq g \left(u_n, \sum_{j=0}^{n-1} u_j, \sum_{j=0}^{n-2} u_j \right) = u_{n+1}$$

elde edilir.

Teorem 1.6.6 : $y_i, i = 0, 1, \dots$ dizisi

$$y_{n+1} \leq g(y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k})$$
 eşitsizliğini sağlayan bir pozitif dizi olsun.

Burada g , argümanlarına göre azalmayan bir fonksiyondur.

u_n ,

$$u_{n+1} \leq g(u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-k}), \quad u_j \geq y_j, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

ifadenin çözümü olmak üzere,

$$y_n \leq u_n \text{ 'dir.}$$

İspat : Farz edelim ki sonuç doğru değildir. $m \geq k$ olacak şekilde bir indis vardır.

Öyleyse, $y_{m+1} \leq u_{m+1}$ ve $y_j \leq u_j, j \leq m$ 'dir. Buradan,

$$g(y_m, y_{m-1}, \dots, y_{m-k}) \geq y_{m+1} > u_{m+1} = g(u_m, u_{m-1}, \dots, u_{m-k})$$

bu bir çelişkidir.

BÖLÜM 2. LİNEER FARK DENKLEMLERİ

2.1. Giriş

Bu bölümde, lineer fark denklemlerinin çözümleri için gerekli teknikleri inceleyeceğiz. Bölüm 2.3 ile lineer fark denklemlerinin esas teorisine başlayacağız ve sabitlerin değişimi metodunu vereceğiz. Daha sonra sabit katsayılı lineer fark denklemlerini vereceğiz. 2.4-2.6 bölümleri içerisinde fark operatörlerini ve üretici fonksiyonları kullanarak belirli fark denklemlerinin mükemmel çözen iki yöntem vereceğiz. Bölüm 2.7 de sabit katsayılı fark denklemlerinin stabilite-kararlılık teorisinden bahsedeceğiz. Bölüm 2.8 de lineer çok adımlı metodlarla diferansiyel denklemlerinin çözümlerini, uygulamalarını ve stabilite teoremini vereceğiz. Bölüm 2.9 da daha sonra gerekli olacak olan sınır değer problemlerinden oluşur. Bölüm 2.10 da bu konuyla ilgili problemleri tamamlayacağız.

2.2. İlk Kavramlar

Geçmiş bölümde, basit olarak verilen $\Delta y = g(x)$ denklemini $\Delta^{-1}g(x)$ operatörü belirleyerek çözmüştük. Genel olarak, k nıncı mertebe fark denklemi,

$$F(x, y(x), \Delta y(x), \dots, \Delta^k y(x), g(x)) = 0 \text{ şeklinde fonksiyonel bir}$$

ilişkidir ve burada $y, g : J_{x_0}^+ \rightarrow R$ dirler.

Genellikle, Δ operatörü yerine E operatörü kullanılır.

Öyleyse fark denklemi

$$G(x, y(x), Ey(x), \dots, E^k y(x), g(x)) = 0$$

formunda yazılabilir.

F (veya G) fonksiyonu $y(x), \Delta y(x), \dots, \Delta^k y(x)$ (veya $y(x), Ey(x), \dots, E^k y(x)$) ifadesine göre lineer ise, fark denkleminin lineer olduğu söylenir. Lineer fark denklemleri teorisi bu bölümde daha sonra gösterilecektir.

Bazı özel durumlar hariç, fark denklemlerinin aşağıdaki normal formunda

$$E^k y(x) = \Phi(x, y(x), Ey(x), \dots, \Delta^k y(x), g(x)) \quad (2.1)$$

yazılabilir olduğunu kabul edeceğiz.

Burada $\Phi: J_{x_0}^+ \times D \times \dots \times D \rightarrow D$, $D \subseteq R$ fonksiyonu tek türlü tanımlı bir fonksiyondur.

(2.1) denklemi, k tane başlangıç koşulları verilerek,

$$y(x_0) = c_1, y(x_0 + 1) = c_2, \dots, y(x_0 + k - 1) = c_k, c_i \in D \text{ belirlenir.} \quad (2.2)$$

(2.1)-(2.2) problemlerinin varlık ve teklik sonucu aşağıdadır.

Teorem 2.2.1 : (2.1) fark denklemi (2.2) başlangıç koşulları ile, tek çözüme sahiptir.

İspat: (2.1) ve (2.2) den, $y(x_0 + k)$ elde edilir. x_0 ile $x_0 + 1$ i değiştirerek ve (2.2) nin son $(k - 1)$ değerleri kullanılarak $y(x_0 + 1 + k)$ elde edilir. Bu kural tekrarlanarak tüm n ler için $y(x_0 + n)$ tek çözümü bulunur.

Ardışık olarak fark denklemlerinin çözümlerini ilk verilenler ile elde etme yolu oldukça önemlidir. Bundan dolayı sürekli problemler, uygun ayrık problemlere dönüştürülür. Bununla beraber bu yöntem çözümler elde etmek için her ne kadar etkili olsa da, diğer bazı problemler için uygun değildir. Örneğin, bu çözüm

asimptotik davranışlar hakkında bilgi vermez. Böylece kapalı form-analitik çözümler elde edilir.

Bazen lineer olmayan denklemleri lineer denklemlere veya daha düşük mertebeden denklemlere indirgemek mümkündür. Bu tarz örneklerle birinci bölümde karşılaşmıştık. Burada onlara iki tane daha örnek verelim.

Örnek 14 : Riccati tipi diferansiyel denklemlere benzer olan aşağıdaki fark denklemini göz önüne alalım.

$$y(x)y(x+1) + p_1(x)y(x+1) + p_2(x)y(x) + p_3(x) = 0 \quad (2.3)$$

Burada $p_1(x), p_2(x), p_3(x), J_{x_0}^+$ da tanımlı keyfi fonksiyonlardır. (2.3) denklemini

$$y(x) = \frac{z(x+1)}{z(x)} - p_1(x) \text{ dönüşümüyle lineer denkleme indirgenir.}$$

Sonuç,

$$z(x+2) + [p_2(x) - p_1(x+1)]z(x+1) + [p_3(x) - p_1(x)p_2(x)]z(x) = 0. \quad (2.4)$$

Aşağıdaki örnekte lineer olmayan bir denklem lineer bir denkleme indirgenemez, fakat daha düşük mertebeye dönüştürülebilir. Bu da önemli bir avantaj sağlar.

Örnek 15 :

$$y_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}y_n^2}{1 - \sum_{j=0}^n y_j} \quad (2.5)$$

fark denklemini göz önüne alalım.

$$y_n = z_n - z_{n-1}, \quad z_{-1} = 0 \text{ alarak, (2.5) denklemini,}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{\frac{1}{2}(z_n - z_{n-1})^2}{1 - z_n} \quad (2.6)$$

ikinci mertebe denklemine indirgeyebiliriz.

Şimdi birinci mertebe fark denklemi, α sabit iken

$$z_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}(z_n^2 - \alpha)}{1 - z_n} \quad (2.7)$$

şeklindedir.

(2.7) çözümünün (2.5) denklemini sağladığını görmek kolaydır.

Gerçekte (2.7) yi z_{n-1} ile çarparak,

$$z_{n+1}z_n - z_{n+1} + \frac{1}{2}z_{n+1}^2 = \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{1}{2}z_{n+1}^2 - \frac{1}{2}\alpha$$

elde ederiz. Buradan,

$$z_{n+1} - z_n = \frac{\frac{1}{2}z_n^2 - z_n + \frac{1}{2}\alpha}{1 - z_n} = \frac{\frac{1}{2}(z_n - z_{n-1})}{1 - z_n}$$

elde edilir.

z_0 ın ilk iki değerinin aynı olduğunu farz edersek $\alpha = 2z_0$ olur ve (2.7) denklemine

(2.5) in birinci integrali denir. (2.7) nin çözümü,

$$z_n = \frac{1 - u_n}{2} \text{ yazılırsa,}$$

$$u_{n+1} = u_n^2 \text{ yazılır. Buradan,}$$

$$z_n = \frac{1}{2} \left[- (1 - 2z_0)^{2^n} \right] \text{ olarak bulunur.}$$

2.3. Temel Teori

Bu bölümde tanım kümesi olarak $N_{n_0}^+$ kullanacağız. Diziyi $\{y_n\}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.3.1 : $p_0(n)=1, p_1(n), \dots, p_k(n), g_n, N_{n_0}^+$ üzerinde tanımlı $k+2$ fonksiyon olsun.

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \dots + p_k(n)y_n = g(n) \quad (2.8)$$

Bu formdaki bir denklem k ıncı merteye lineer fark denklemi olarak adlandırılır ve $p_k(n) \neq 0$ olmalıdır.

Aşağıda k başlangıç koşulları,

$$y_{n_0} = c_1, y_{n_0+1} = c_2, \dots, y_{n_0+k-1} = c_k \quad (2.9)$$

c_i reel veya kompleks katsayıları, tek bir çözüm elde etmek için (2.8) ile birlikte ele alınır.

Teorem 2.3.1 : (2.8) denklemi, (2.9) un başlangıç koşullarıyla tek bir çözüme sahiptir.

$y(n, n_0, c)$ ile (2.8)-(2.9) un çözümünü ifade edebiliriz. Burada

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_k) \in R^k \text{ dir}$$

ve

$$y(n_0 + j, n_0, c) = c_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \text{ elde ederiz.}$$

Tanım 2.3.2 : Her $n \in N_{n_0}^+$ için, $g_n = 0$ ise, (2.8) denklemi homojendir denir.

L operatörünü

$$Ly_n = \sum_{i=0}^k p_i(n)y_{n+k-i} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlayalım.

(2.8) denklemi,

$$Ly_n = g_n \quad (2.11)$$

formunda yazılır ve homojen denklem,

$$Ly_n = 0 \text{ olur.} \quad (2.12).$$

$\alpha, \beta \in R$ ve y_n, z_n iki dizi alınarak,

$$L(\alpha y_n + \beta z_n) = \alpha Ly_n + \beta Lz_n$$

olduğu gösterilerek L operatörünün lineer olduğu kanıtlanır. S , (2.12) nin çözüm uzayı olsun. L operatörünün lineerliğinden ötürü, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Lemma 2.3.1 : S nin elemanlarının herhangi lineer kombinasyonu S uzayında bulunur.

$y(n, n_0, E_1), \dots, y(n, n_0, E_k)$, (2.12)nin çözümleri olsun. Burada

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, E_k = (0, 0, \dots, 1)$$

ve bu nedenle,

$$Ly(n, n_0, E_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.13)$$

Lemma 2.3.2 : $c \in R^k$ başlangıç koşulları verilsin. (2.12) nin $y(n, n_0, c)$,

$(i = 1, 2, \dots, n)$ gibi herhangi bir çözümü $y(n, n_0, E_i)$ nin lineer kombinasyonu olarak ifade edilir.

İspat : Eğer $y(n, n_0, c)$, c_1, c_2, \dots, c_k başlangıç şartlarına sahip bir çözüm ise,

$$z_n = \sum_{i=1}^k c_i y(n, n_0, E_i) \quad (2.14)$$

toplamı Lemma 2.3.1 den dolayı (2.12) nin bir çözümüdür ve başlangıç koşulları

$z_{n_0} = c_1, z_{n_0+1} = c_2, \dots, z_{n_0+k-1} = c_k$ yı sağlar. Teorem 2.3.1 den iki çözümün aynı olduğu görülür.

Şimdi $N_{n_0}^+$ da tanımlı k tane $f_i(n)$ fonksiyonlarını alalım ve aşağıdaki matrisi tanımlayalım.

$$K(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \dots & f_k(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \dots & f_k(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(n+k-1) & f_2(n+k-1) & \dots & f_k(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

Tanım 2.3.3 : $f_i(n)$ fonksiyonları, $i = 1, 2, \dots, k$ tüm n ler için lineer bağımsız olması için,

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i f_i(n) = 0 \quad (2.15)$$

denkleminde $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ olmalıdır.

Teorem 2.3.2 : $f_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, k$ lerin lineer bağımsız olması için, $\bar{n} \geq n_0$ için $\det K(\bar{n}) \neq 0$ olacak şekilde n_0 sayısının var olmasıdır.

İspat : Eğer (2.15) sağlanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(n) &= 0, \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(n+1) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(n+k-1) &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

k bilinmeyenli k denklemden oluşan lineer homojen sistem $K(n)$ matrisinin katsayılarına sahiptir. Bu nedenle eğer $n = \bar{n}$, $\det K(\bar{n}) \neq 0$ ise sistemin tek çözümü $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ ve fonksiyonlar lineer bağımsız olurlar.

Teorem 2.3.3 : Farz edelim ki, $f_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, k$ (2.12) nin çözümleri olsun.

Öyleyse, $\det K(n_0) \neq 0$ ise, $n \geq n_0$ için $\det K(n) \neq 0$ dir.

İspat : $K(n)$ matrisinin tanımından

$$\det K(n_0+1) = \det \begin{pmatrix} f_1(n_0+1) & f_2(n_0+1) & \dots & f_k(n_0+1) \\ f_1(n_0+2) & f_2(n_0+2) & \dots & f_k(n_0+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(n_0+k) & f_2(n_0+k) & \dots & f_k(n_0+k) \end{pmatrix}$$

elde ederiz.

Sütunlar (2.12) nin çözümleri olduğundan, son satır önceki noktalarda aynı çözümlerin kombineleri olarak yazılır ve sıfır determinantları ihmal edilerek,

$$\det K(n_0 + 1) = (-1)^k p_k(n_0) \det K(n_0) \text{ sonucuna ulaşılır.}$$

$p_k(n_0) \neq 0$ olduğundan $\det K(n_0 + 1) \neq 0$ dır. Genel olarak, her $n \in N_{n_0}^+$ için

$$\det K(n + 1) = (-1)^k p_k(n) \det K(n) \quad (2.17)$$

elde ederiz ve böylece tümevarımla $\det K(n) \neq 0$ dır.

Sonuç 2.3.1 : $y(n, n_0, E_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ çözümleri lineer bağımsızdır.

İspat : Bu halde $\det K(n_0) = 1$ dir.

$$K(n_0) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ olduğundan,}$$

Sonuç 2.3.1 den, $y(n, n_0, E_i)$ tabanı kanonik taban olarak adlandırılır. Lemma 2.3.2 ve Sonuç 2.3.1 kullanılarak, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.3.4 : (2.12) nin çözümleri olan S uzayı k boyutlu bir vektör uzayıdır.

Eğer $a_i \in R^k$, $i = 1, 2, \dots, k$ lineer bağımsız ise gerçekten bu halde, $y(n, n_0, a_i)$ çözümlerinin kümesi ayrıca S uzayının tabanı olarak kullanılabilir. Gerçekten a_i ler $K(n_0)$ matrisinin i . sütunları olduğu takdirde $K(n_0) = (a_1, \dots, a_k)$ dır. Bunlar lineer bağımsız olduğundan, tüm $n \in N_{n_0}^+$ için $K(n) \neq 0$ dır.

$K(n)$ matrisi Casorati matrisi olarak adlandırılır ve fark denklemleri teorisinde, lineer diferansiyel denklemler teorisindeki Wranskion matrisiyle aynı görevi görür.

Tanım 2.3.4 : (2.12) nin k tane lineer bağımsız çözümleri verilsin, bunların herhangi bir lineer kombinasyonu (2.12) nin genel çözümü adını alır. Genel çözümün anlamı herhangi bir başlangıç koşulları kümesini sağlamasıdır.

Lemma 2.3.3 : y_n ve \bar{y}_n (2.11)'in herhangi iki çözümü arasındaki fark (2.12)'yi sağlar.

İspat : Çünkü, $Ly_n = g_n$ ve $L\bar{y}_n = g_n$,

$$L\left(y_n - \bar{y}_n\right) = 0 \text{ ifade eder.}$$

Teorem 2.3.5 : $y(n, n_0, a_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ (2.12)'nin k tane lineer bağımsız çözümü olsun ve \bar{y}_n (2.11)'in çözümü olsun. Buradan, (2.11)'in diğer çözümleri şu şekilde yazılabilir:

$$y_n = \bar{y}_n + \sum_{i=1}^k \alpha_i y(n, n_0, a_i) \quad (2.18)$$

İspat : Lemma 2.2.3 den bir tane $y_n - \bar{y}_n \in S$ vardır ve bu nedenle, $y(n, n_0, a_i)$ nin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

Önceki teorem ayrıca, (2.11) in genel çözümünün (2.12) nin genel çözümüne (2.11) in herhangi çözümünün katılarak elde edilebileceği anlamına gelir.

2.3.1. Adjoint ve transpoz denklemler

L operatörü ile ilgili adjoint operatörü L^* ,

$$L^* y_n = \sum_{i=0}^k p_i (n+i) y_{n+i}$$

şeklinde tanımlanır ve adjoint homojen ve homojen olmayan denklemler

$$L^* y_n = 0 \quad (2.19)$$

$$L^* y_n = g_n \quad (2.20)$$

şeklinde dir.

(2.11) ve (2.12) denklemlerinin çözümleri ve onların adjoint denklemlerinin çözümleri arasındaki ilginç özellikler ile birbirlerine bağıdırlar. Nümerik analiz kullanılırsa, L transpoze operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L^T y_n = \sum_{i=0}^k p_i (n-k+i) y_{n+i} \quad (2.21)$$

ve transpoz denklemleri,

$$L^T y_n = g_n \quad (2.22)$$

şeklinde dir.

Teorem 2.3.6 : u_n , $Lu_n = 0$ olarak homojen denkleminin bir çözümleri olsun ve (2.22)

nin $(L^T y_n = g_n)$ y_n çözümleri, $y_{N+j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$ ve $N > k$ olmak üzere verilsin.

Bu halde,

$$\sum_{n=0}^N u_n g_n = \sum_{j=0}^{k-1} y_j \sum_{i=0}^j p_i (j-k) u_{j-i} \text{ 'dir.}$$

İspat :
$$\sum_{n=0}^N u_n g_n = \sum_{n=0}^N u_n L^T y_n = \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^k u_n p_i (n-k+i) y_{n+i}$$
 eşitliğine

sahibiz.

$j = n+i$ ve $s = \min(j, k)$ alarak,

$$\sum_{n=0}^N u_n g_n = \sum_{j=0}^{N+k} y_j \sum_{i=0}^s p_i (j-k) u_{j-i}, \quad p_i \equiv 0, \quad i > k \text{ için elde edilir.}$$

$j > N$, $y_j = 0$ için ve $\sum_{i=0}^s p_i (j-k) u_{j-i} = 0$, $s \geq k$ alınarak sonuca ulaşılır.

2.4. Sabitlerin Değişimi Metodu

(2.11)'deki özel çözümü (2.12) deki genel çözümü bildiğimizde bulabiliriz.

Sabitlerin değişimi metodunu kullanarak bu özel çözümü şöyle bulabiliriz.

$y(n, n_0, c)$, (2.12) nin bir çözümü ve $y(n, n_0, E_j)$, (2.12) nin çözümünün S uzayındaki kanonik tabanı olsun.

Öyleyse genel çözüm,

$$y(n, n_0, c) = \sum_{j=1}^k c_j y(n, n_0, E_j) \quad (2.23)$$

şeklindedir.

Şimdi kabul edelim ki, c_j n nin $c_j(n_0) = c_j$ şartını sağlayan fonksiyonu olsun ve

$$y(n, n_0, c(n)) = \sum_{j=1}^k c_j(n) y(n, n_0, E_j) \quad (2.24)$$

diyelim. Bu fonksiyon (2.11)'deki denklemi sağlamasını isteyelim. (2.24)'ten şu denklem çıkar.

$$\begin{aligned} y(n+1, n_0, c(n+1)) &= \sum_{j=1}^k c_j(n+1)y(n+1, n_0, E_j) \\ &= \sum_{j=1}^k c_j(n)y(n+1, n_0, E_j) + \sum_{j=1}^k \Delta c_j(n)y(n+1, n_0, E_j). \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^k \Delta c_j(n)y(n+1, n_0, E_j) = 0 \quad (2.25)$$

alınarak,

$$y(n+1, n_0, c(n+1)) = \sum_{j=1}^k c_j(n)y(n+1, n_0, E_j)$$

yazalım.

Benzer olarak, $i = 2, \dots, k-1$ alınıp ilerleyerek,

$$y(n+i, n_0, c(n+i)) = \sum_{j=1}^k c_j(n)y(n+i, n_0, E_j) \quad (2.26)$$

elde ederiz.

Eğer,

$$\sum_{j=1}^k c_j(n)y(n+i, n_0, E_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.27)$$

alınırsa en sonunda,

$$y(n+k, n_0, c(n+k)) = \sum_{j=1}^k c_j(n)y(n+k, n_0, E_j) + \sum_{j=1}^k \Delta c_j(n)y(n+k, n_0, E_j)$$

buluruz.

(2.11)'de yerine koyduğumuzda sonuç,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^k p_j(n) y(n+k-i, n_0, c(n+k-i)) \\
&= \sum_{i=0}^k p_i(n) \left(\sum_{j=1}^k c_j(n) y(n+k-i, n_0, E_j) + \sum_{j=1}^k \Delta c_j(n) y(n+k, n_0, E_j) \right) \\
&= g_n.
\end{aligned}$$

$y(n, n_0, E_j)$ 'ler (2.12)'nin çözümleri olduğundan denklem,

$$\sum_{j=1}^k \Delta c_j(n) y(n+k, n_0, E_j) = g_n \quad (2.28)$$

halinde yazılır.

(2.25), (2.27) ve (2.28) denklemleri k tane, $\Delta c_j(n)$ bilinmeyenleri için k tane denklem katsayıları Casorati matrisi $K(n+1)$ olan bir lineer denklem sistemine dönüşür.

Çözüm şu şekilde verilebilir:

$$\begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \\ \vdots \\ \Delta c_k(n) \end{pmatrix} = K^{-1}(n+1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$K(n+1)$ adjoint matrisinin (i, k) elemanları $M_{ik}(n+1)$ ile gösterilirse,

(2.29) denklemi,

$$\Delta c_i(n) = \frac{M_{ik}(n+1)}{\det K(n+1)} g_n, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.30)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$c_i(n) = \Delta^{-1} \frac{M_{ik}(n+1)}{\det K(n+1)} g_n + \omega_i, \quad c_i(n_0) = c_i \text{ yazılabilir.}$$

$c_i(n)$ değerlerini (2.24) te yerine koyarsak görürüz ki, $z(n, n_0, c) \equiv y(n, n_0, c(n))$ eşitliği (2.11) denklemini sağlar.

Örnek 16 : $y_{n+1} - ay_n = g_n$ denklemini çözelim.

Örnek 15'ten homojen denkleminin genel çözümü $c.a^n$ dir. Sabitin değişimi metodu uyguladığında,

$$(c(n+1) - c(n))a^{n+1} = g_n$$

ve

$$y_n = y_0 a^n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g(j)}{a^{j+1}}$$

buradan,

$$y_n = y_0 a^n + \sum_{j=0}^{n-1} g(j) a^{n-j-1}$$

elde edilir.

Yukarıdaki örneğin çözümünü mathematica programı ile bulalım.

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow -\frac{g(1-k^n - n + kn)}{(-1+k)^2} + k^{-1+n} c[1] \right\} \right\}$$

2.5. Sabit Katsayılı Lineer Denklemler

Eğer (2.8) denklemindeki $p_i(n)$ katsayıları n ye bağlı olmayan sabitlerse, fark denklemlerinin aşağıdaki önemli sınıfını elde edilir.

$$\sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = g(n), \quad p_0 = 1. \quad (2.31)$$

Bu sınıfta uygun homojen denklem,

$$\sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = 0 \quad (2.32)$$

şeklindedir.

Teorem 2.5.1 : (2.32) denkleminin çözümü, $z \in C$, $z \neq 0$ için,

$$y_n = z^n \quad (2.33)$$

formundadır ve bu çözüm,

$$p(z) = \sum_{i=0}^k p_i z^{k-i} = 0 \quad (2.34)$$

denklemini sağlar.

İspat : (2.33) denklemini (2.32)'de yerine koyarsak,

$$z^n \sum_{i=0}^k p_i z^{k-i} = 0 \text{ elde ederiz.}$$

Burada z , (2.34) denkleminin bir köküdür.

(2.34) denklemi bir polinomdur ve kompleks düzlemde k tane çözüme sahiptir.

Buna (2.32)'nin karakteristik denklemi de denir ve $p(z)$ polinomu karakteristik polinom olarak adlandırılır.

Teorem 2.5.2 : Eğer $p(z)$ nin z_1, z_2, \dots, z_k kökleri farklıysa, $z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n$ 'ler (2.32)'nin lineer bağımsız çözümleridir.

İspat : Bunu doğrulamak kolaydır. Bu durumda Casorati determinanı, matrisin determinantıyla orantılıdır.

$$V(z_1, z_2, \dots, z_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_k \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{k-1} & z_2^{k-1} & \dots & z_k^{k-1} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

matrisi Cauchy-Vandermonde matrisi (Vandermonde matrisi) olarak adlandırılır.

Onun determinanı şu şekilde verilir.

$$\det V(z_1, z_2, \dots, z_k) = \prod_{i>j} (z_i - z_j) \quad (2.36)$$

Eğer tüm i ve j ler için $z_i \neq z_j$ ise determinan sıfırdan farklıdır.

Teorem 2.3.4 ten $p(z)$ nin kökleri farklıysa, (2.32)'nin herhangi bir çözümü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y_n = \sum_{i=0}^k c_i z_i^n \quad (2.37)$$

Eğer $p(z)$ polinomu katlı köklere sahipse, z_i^n çözümlerinin farklı kökleri lineer bağımsızdır. Fakat bu kökler S de bir taban teşkil etmek için yeterli değildirler. Bununla birlikte, taban için diğer çözümler bulunabilir.

Teorem 2.5.3 : m_s , $p(z)$ fonksiyonunun kökü olan z_s 'nin katlılığı olsun.

$$y_s(n) = u_s(n) z_s^n \quad (2.38)$$

fonksiyonlarında, $u_s(n)$, n cinsinden üretici polinom fonksiyondur derecesi $m_s - 1$ derecesini geçmez ve (2.32)'nin çözümleridirler ve lineer bağımsızdırlar.

İspat : Eğer z_s , $p(z)$ nin m_s katlı bir kökü ise,

$$p(z_s) = 0, p'(z_s) = 0, \dots, p^{(m_s-1)}(z_s) = 0 \quad (2.39)$$

elde edilir.

(2.38) değerini (2.32)'de yerine koyarsak,

$$\sum_{i=0}^k p_i u_s(n+k-i) z_s^{k-i} = 0 \quad (2.40)$$

elde ederiz. (1.4)'teki ilişkiden,

$$u_s(n+k-i) = E^{k-i} u_s(n) = \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} \Delta^j u_s(n) \quad (2.41)$$

elde edilir ve (2.40)'den,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k p_i z_s^{k-i} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} \Delta^j u_s(n) &= \sum_{j=0}^k \Delta^j u_s(n) \sum_{i=0}^{k-j} \binom{k-i}{j} p_i z_s^{k-i} \\ &= \sum_{j=0}^k \Delta^j u_s(n) z_s^j \frac{p^{(j)}(z_s)}{j!} \end{aligned} \quad (2.42)$$

elde edilir.

(2.39)'a göre, (2.42)'nin $j = 0, 1, \dots, m-1$ e bağlı terimleri tüm $u_s(n)$ fonksiyonları için sıfırdır. $\Delta^j u_s(n) = 0$, $m_s \leq j \leq k$ olduğundan diğer $k - m_s + 1$ terimleri de sıfıra eşitlenmelidir. Bu, $u_s(n)$ polinomunun derecesi $m_s - 1$ den daha büyük alınmamak şartıyla gerçekleştirilebilir. Lineer bağımsız olduğu da ayrıca ispatlanabilir.

Sonuç 2.5.1 : (2.32) 'nin genel çözümü şöyledir.

$$y_n = \sum_{i=1}^d a_i u_i(n) z_i^n = \sum_{i=1}^d a_i \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i n^j z_i^n = \sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{ij} n^j z_i^n \quad (2.43)$$

Burada, $A_{ij} = a_i c_j$ ve d farklı köklerin sayısıdır. Eğer bir y_n dizisi $n \in N_{n_0}^+$ için fark denkleminin çözümü ise, aşağıdaki teorem kullanışlıdır.

Teorem 2.5.4 : Bir y_n dizisi, $n \in N_0^+$ olmak üzere, her $n \in N_{n_0}^+$ için (2.33)

denklemini sağlar ancak ve ancak,

$$D(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = \det \begin{pmatrix} y_n & y_{n+1} & \cdots & y_{n+k} \\ y_{n+1} & y_{n+2} & \cdots & y_{n+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n+k} & y_{n+k+1} & \cdots & y_{n+2k} \end{pmatrix} = 0$$

üstelik,

$$D(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}) \neq 0 \text{ ise.}$$

İspat : Farz edelim ki; y_n , (2.32) denklemini sağlasın. Öyleyse,

$$y_{n+k+j} = - \sum_{i=1}^k p_i y_{n+k+j-i}, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

ifadesi doğrudur.

$D(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k})$ 'nin son satırında yerine koyduğumuzda, $D(y_n, \dots, y_{n+k}) = 0$ olduğu görülür. Tersine eğer bu determinant 0 ise, birinci satıra göre ikinci satıra ve tüm satırlara göre işlem yaptığımızda sonuç aynı şekilde sıfır bulunur. Bu elemanlar birinci satırın elemanlarına bağlı olarak,

$$\sum_{i=0}^k y_{n+j+k-i} A_i(n) = 0 \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Burada, $j = 1, 2, \dots, k-1$ iken, $A_j(n)$ $k-j$.inci elemanın kofaktörüdür. Eğer, D 'ye birinci satır, ikinci satır ve diğerleri ilave edilirse determinantın sıfır olduğu görülür.

Hipoteze göre $A_k(n)$ determinanı 0 değildir. $p_i(n) = \frac{A_i(n)}{A_k(n)}$ koyarsak,

$$y_n = -\sum_{i=0}^{k-1} p_i(n) y_{n+k-i},$$

$$y_{n+1} = -\sum_{i=0}^{k-1} p_i(n) y_{n+1+k-i},$$

$$y_{n+k-1} = -\sum_{i=0}^{k-1} p_i(n) y_{n+2k-1-i}$$

olur. n yerine $n+1$ koyar birinci bağıntıdan ikinci bağıntıyı çıkarırsak,

$$0 = -\sum_{i=0}^{k-1} \Delta p_i(n) y_{n+k-1-i}$$
 elde ederiz ve benzer olarak ilerleyip denklemlerin bir

homojen sistemini elde ederiz.

$$\sum_{i=0}^{k-1} \Delta p_i(n) y_{n+k+j-i}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

bu denklemlerin $A_k(n)$ determinanı hipoteze göre 0 değildir.

$\Delta p_i(n) = 0$ olarak çözüm çıkar, burada p_i 'ler n 'ye göre sabittir ve sonuç bulunmuş olur.

Örnek 17 : $y_{n+1} - ay_n = 0, \quad a \in C$ (2.44)

denklemini düşünelim.

$p(z) = z - a$ karakteristik polinom ve onun tek kökü $z = a$ dır. (2.44)'ün genel

çözümü ise, $y_n = k.a^n$ dir.

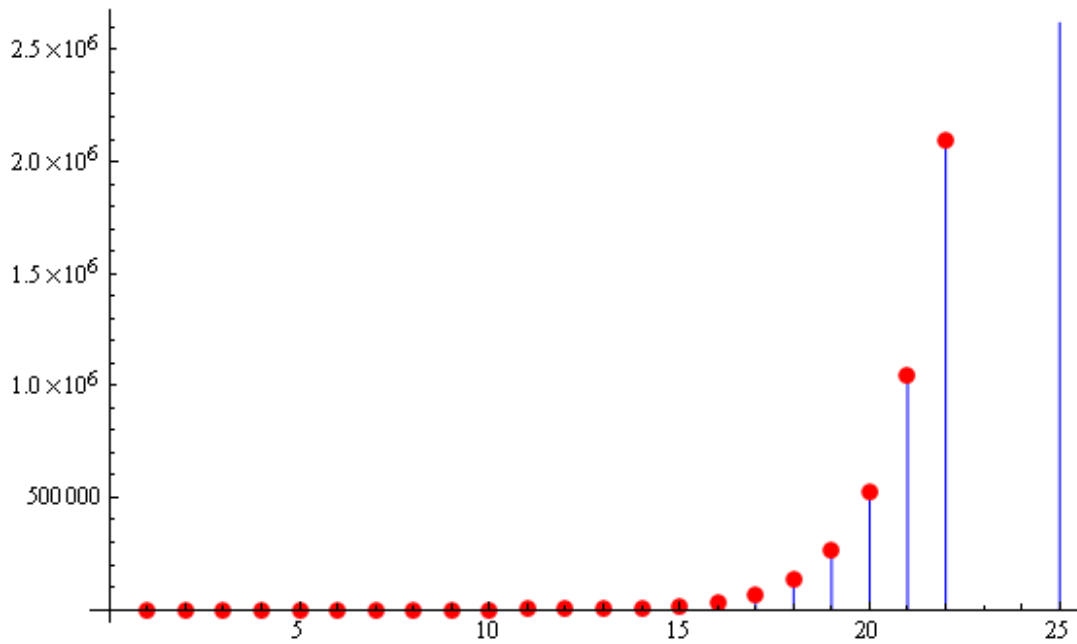
Çözümü mathematica programı ile bulalım.

$$\{\{a[n] \rightarrow k^{-1+n} c[1]\}\}$$

Örneğin $k = 2$ değeri için, fark denklemini mathematica programı ile tekrar çözelim ve $y_1 = 1$ başlangıç değeri için ilk yirmi beş değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

$$\{\{a[n] \rightarrow 2^{-1+n} c[1]\}\}$$

{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216}



Şekil 2.1. Örnek 17 Çözüm Grafiği

Örnek 18 : $y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$ (2.45)

denklemini düşünelim.

Karakteristik polinom $p(z) = z^2 - z - 1$ ve kökleri

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} ; z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Buradan (2.45)'in genel çözümü,

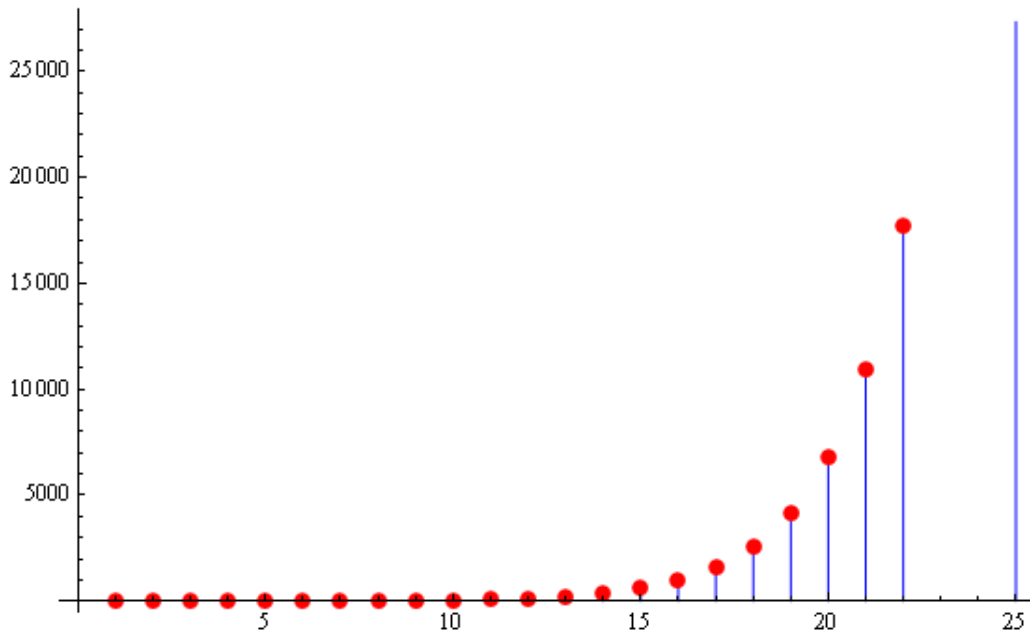
$$y_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

olarak bulunur ve bu Fibonacci dizisi olarak adlandırılır.

Bu dizinin çözümünü mathematica programı ile bulalım ve ilk yirmi beş teriminin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

```
{a[n] -> C[1] Fibonacci[n] + C[2] LucasL[n]}
```

```
{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025}
```



Şekil 2.2. Örnek 18 Çözüm Grafiği

Örnek 19 :

a) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0$ fark denklemini $y_0 = 1$ ve $y_1 = 5$ başlangıç değerleri için çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$(r-1)(r-3) = 0 \text{ ise, kökler } r_1 = 1 \text{ ve } r_2 = 3 \text{ dir.}$$

Buradan çözüm,

$$y_n = c_1 1^n + c_2 3^n = c_1 + c_2 3^n \text{ şeklindedir.}$$

Lineer sistemdeki başlangıç değerlerinden,

$$y_0 = 1 \text{ için } y_0 = c_1 + c_2 = 1$$

$$y_1 = 5 \text{ için } y_1 = c_1 + 3c_2 = 5$$

ve bu iki denklem sistemi beraber çözümlerse, $c_1 = -1$ ve $c_2 = 2$ elde edilir.

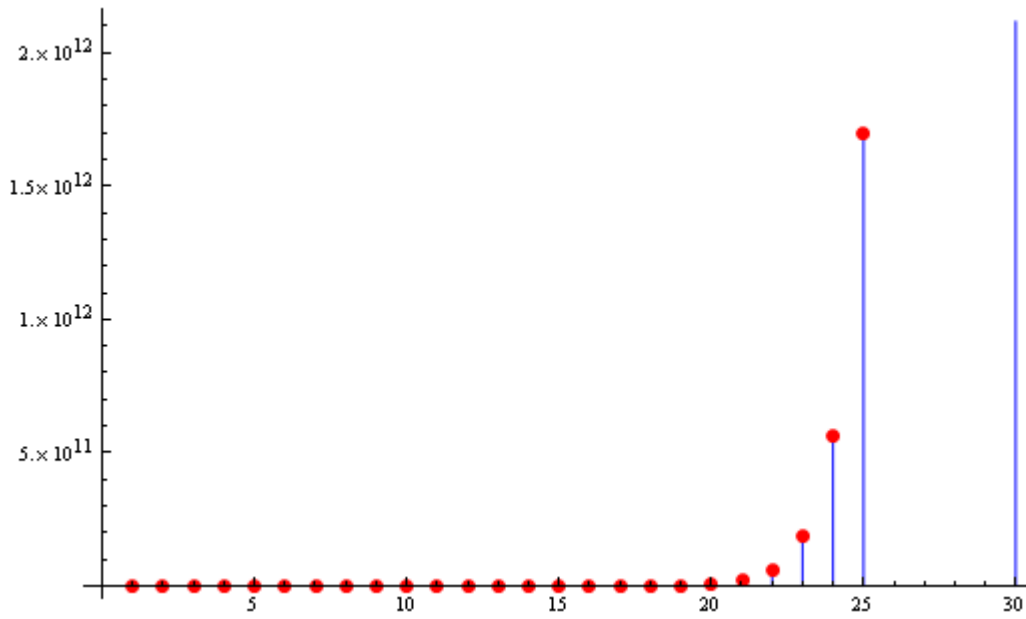
Buradan çözüm,

$$y_n = -1 + 2 \cdot 3^n \text{ olarak bulunur.}$$

Aynı fark denklemini, aynı başlangıç koşulları için mathematica programıyla çözelim ve çözümün ilk otuz değeri için grafiğini çizelim.

$$\{\{a \rightarrow \text{Function}[\{n\}, -1 + 2 \cdot 3^n]\}\}$$

{5, 17, 53, 161, 485, 1457, 4373, 13121, 39365, 118097, 354293, 1062881, 3188645, 9565937, 28697813, 86093441, 258280325, 774840977, 2324522933, 6973568801, 20920706405, 62762119217, 188286357653, 564859072961, 1694577218885, 5083731656657, 15251194969973, 45753584909921, 137260754729765, 411782264189297}



Şekil 2.3. Örnek 19-a Çözüm Grafiği

b) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$ fark denklemini $y_0 = 1$ ve $y_1 = 5$ başlangıç değerleri için çözüünüz.

Karakteristik denklem,

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r - 2)^2 = 0$$

birbirine eşit iki reel kök vardır. $r_1 = r_2 = 2$ olduğundan genel çözüm;

$$y_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n \text{ şeklindedir.}$$

Başlangıç şartları kullanılarak,

$$y_0 = 1 \text{ için, } y_0 = c_1 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = 1 \text{ ise } c_1 = 1$$

$$y_1 = 5 \text{ için, } y_1 = c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 5 \text{ ise } c_2 = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

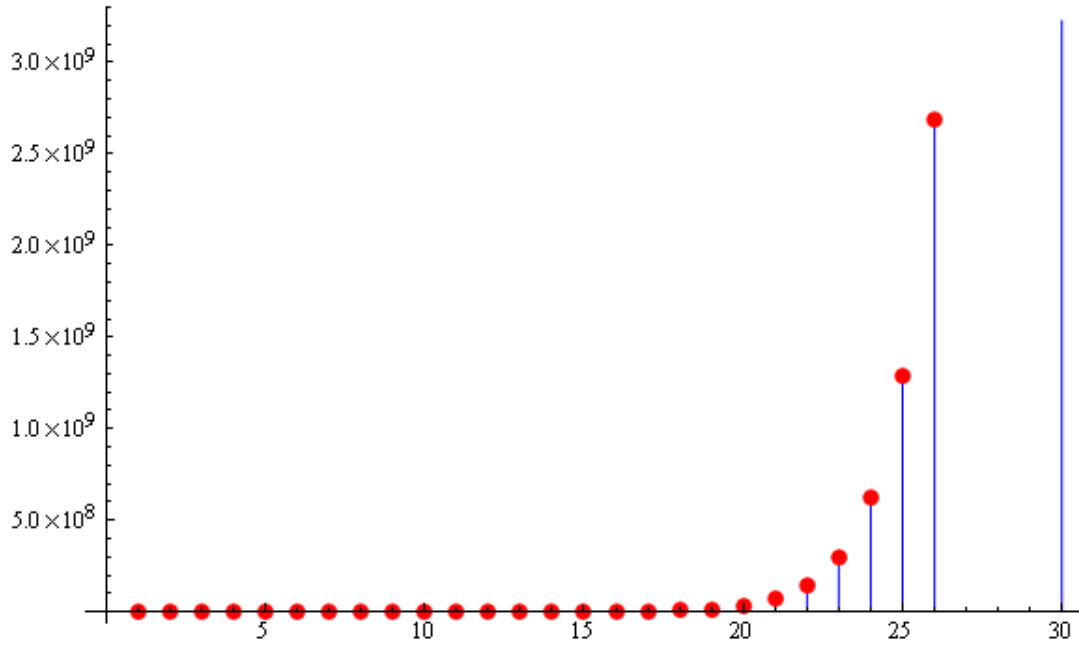
Buradan da çözüm,

$$y_n = 2^n + \frac{3}{2} \cdot n \cdot 2^n = 2^n + 3 \cdot n \cdot 2^{n-1} \text{ şeklinde bulunur.}$$

Aynı fark denklemini, aynı başlangıç koşulları için mathematica programıyla çözüm ve çözümün ilk otuz değerinin grafiğini çizelim.

$$\{\{a[n] \rightarrow 2^{-1+n} (2 + 3 n)\}\}$$

{5, 16, 44, 112, 272, 640, 1472, 3328, 7424, 16384, 35840, 77824, 167936, 360448, 770048, 1638400, 3473408, 7340032, 15466496, 32505856, 68157440, 142606336, 297795584, 620756992, 1291845632, 2684354560, 5570035712, 11542724608, 23890755584, 49392123904}



Şekil 2.4. Örnek 19-b Çözüm Grafiği

c) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 5y_n = 0$ fark denklemini $y_0 = 1$ ve $y_1 = 5$ başlangıç değerleri için çözüünüz.

Karakteristik denklem

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

$$-2a = -4 \text{ ise, } a = 2 \text{ ve } b = 5 \text{ 'tir.}$$

Burada $b > a^2$ ve dolayısıyla reel kök yoktur. Kökler komplekstir ve bu kökler,

$$r_1 = a - i\sqrt{b - a^2} = 2 - i\sqrt{5 - 4} = 2 - i$$

$$r_2 = a + i\sqrt{b - a^2} = 2 + i\sqrt{5 - 4} = 2 + i \text{ bulunur.}$$

Denklemin çözümü,

$$y_n = c_1(2 + i)^n + c_2(2 - i)^n \text{ şeklindedir.}$$

Başlangıç değerleri kullanılarak,

$$y_0 = c_1 + c_2 = 1$$

$$y_1 = c_1(2 + i) + c_2(2 - i) = 5 \text{ ve bu iki denklem beraber çözümlerse,}$$

$$c_1 \text{ ve } c_2 \text{ sabitleri } c_1 = \frac{i+3}{2i} \text{ ve } c_2 = \frac{i-3}{2i} \text{ şeklinde bulunur.}$$

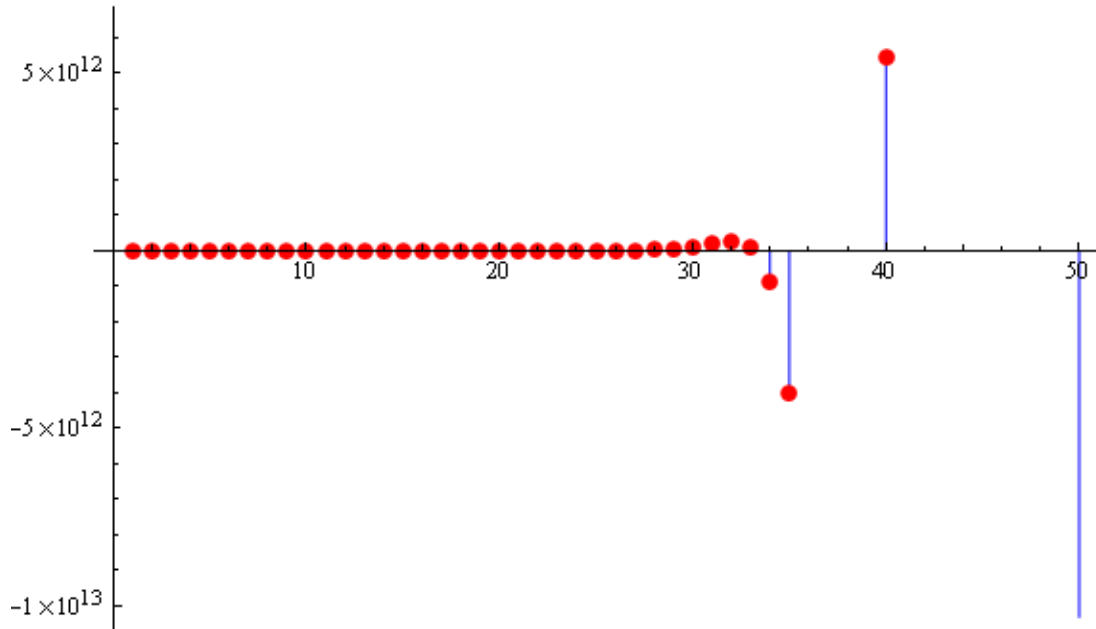
c_1 ve c_2 sabitlerini çözümde yerine koyarsak, denklemin çözümü

$$y_n = \frac{i+3}{2i}(2+i)^n + \frac{i-3}{2i}(2-i)^n \text{ şeklinde bulunur.}$$

Aynı fark denklemini, aynı başlangıç koşulları için mathematica programıyla çözelim ve çözümün ilk elli değerininin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \text{Function} \left[\{n\}, \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \left(5 (2 - i)^{-1+n} - (1 + 2i) (2 + i)^n \right) \right] \right\} \right\}$$

{5, 15, 35, 65, 85, 15, -365, -1535, -4315, -9585, -16765, -
 19135, 7285, 124815, 462835, 1227265, 2594885, 4243215, 3998435, -
 5222335, -40881515, -137414385, -345249965, -693927935, -
 1049461915, 728207985, 2334477635, 12978950465, 40243413685, 960789
 02415, 183098541235, 251999652865, 92505905285, -889974643185, -
 4022428099165, -11639839180735, -26447216227115, -
 47589669004785, 58122594883565, 5457965489665, 312444836376485, 12
 22489518057615, 3327733890348035, 7198487971104065, 1215528243267
 6085, 12628689875184015, -10261652662644365, 104190060026497535, -
 365451976792768315, -940857607038585585}



Şekil 2.5. Örnek 19-c Çözüm Grafiği

Örnek 20 : $y_{n+2} - \frac{6}{5}y_{n+1} + y_n = 0$ fark denkleminin $y_0 = 0$ ve $y_1 = 1$ başlangıç

koşulları için çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem,

$$r^2 - \frac{6}{5}r + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{64}{25} < 0$$

olduğundan kompleks iki kök vardır. Bu kökler $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülüyle,

$$r_1 = \frac{3-4i}{5} \text{ ve } r_2 = \frac{3+4i}{5} \text{ şeklinde bulunur.}$$

Genel çözüm,

$$y_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n \text{ şeklindedir.}$$

Başlangıç şartları kullanılarak,

$$y_0 = 0 \text{ için, } y_0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$y_1 = 5 \text{ için, } y_1 = \frac{3}{5}(c_1 + c_2) + \frac{4i}{5}(c_1 - c_2) = 1 \text{ ise } c_1 = -\frac{5}{8i} \text{ ve } c_2 = \frac{5}{8i} \text{ şeklinde}$$

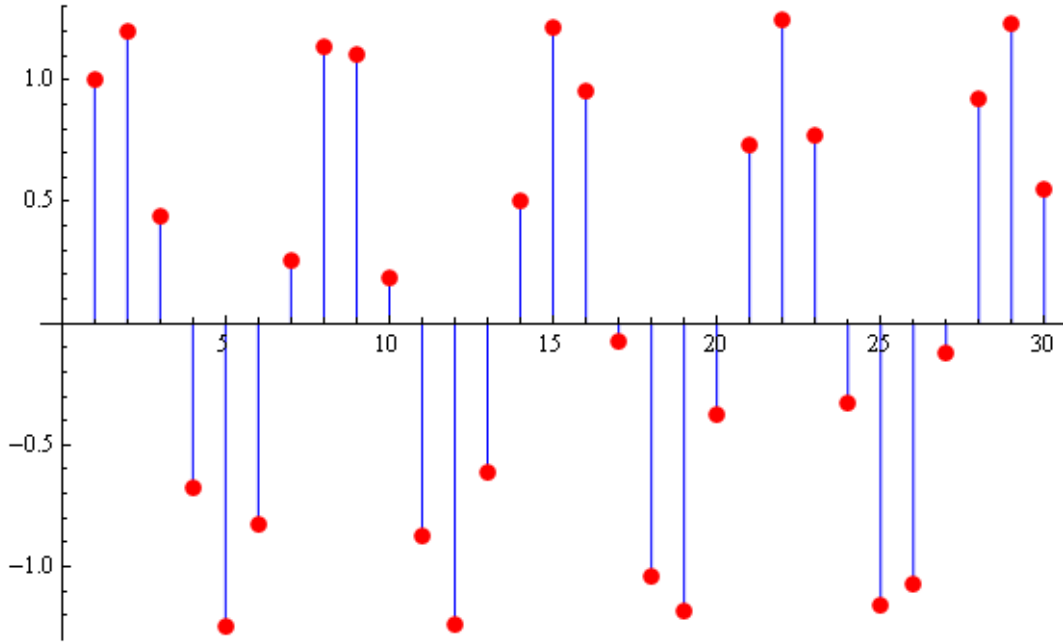
bulunur.

Buradan da çözüm,

$$y_n = -\frac{5}{8i} \left(\frac{3-4i}{5}\right)^n + \frac{5}{8i} \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n \text{ şeklinde bulunur.}$$

Aynı fark denklemini, aynı başlangıç koşulları için mathematica programıyla çözelim ve çözümün ilk otuz değerininin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \text{Function} \left[\{n\}, \frac{1}{8} i 5^{1-n} \left((3-4i)^n - (3+4i)^n \right) \right] \right\} \right\}$$



Şekil 2.6. Örnek 20 Çözüm Grafiği

Örnek 21 : Aşağıdaki denklem sık sık ikinci mertebe diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılmasında olarak ortaya çıkar.

$$y_{n+2} - 2qy_{n+1} + y_n = f_n \quad (2.46)$$

Burada $q \in C$ dir. Homojen denklemin genel çözümü $y_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n$, z_1 ve z_2 ikinci derece $z^2 - 2qz + 1 = 0$ denkleminin farklı kökleridir. Uygulamada genel çözümü iki farklı formda yazmak kullanışlıdır.

Birinci formda lineer bağımsız çözümler,

$$y_n^{(1)} = \frac{z_2 z_1^n - z_1 z_2^n}{z_2 - z_1} ; y_n^{(2)} = \frac{z_2^n - z_1^n}{z_2 - z_1}$$

şekindedir ve bu çözümlere bağlı homojen denklemin genel çözümü

$$y_n = c_1 y_1^{(1)} + c_2 y_2^{(2)} \quad (2.47)$$

şeklindedir.

İkinci durumda T_n ve $U_n(q)$ Chebysev polinomlarının lineer bağımsız olarak kullanılması ile,

$$y_n = c_1 T_n(q) + c_2 U_{n-1}(q) \quad (2.48)$$

elde edilir.

(2.47)'yi kullanmanın avantajı, $y_n^{(1)}$ ve $y_n^{(2)}$ bazlarının kanonik bazlar olmasıdır.

$$y_0^{(1)} = 1 \quad y_0^{(2)} = 0$$

$$y_1^{(1)} = 0 \quad y_1^{(2)} = 1$$

Buradan (2.47)'nin başlangıç değer problemi için,

$$y_n = y_0 y_n^{(1)} + y_1 y_n^{(2)} \text{ elde edilir.}$$

(2.48) in formunun avantajı, $T_n(q)$ ve $U_n(q)$ fonksiyonlarının özellikle Nümerik Analiz ve Yaklaşım Teorisinde kullanılan bire sürü özelliğinin olmasıdır.

(2.46) nın çözümü,

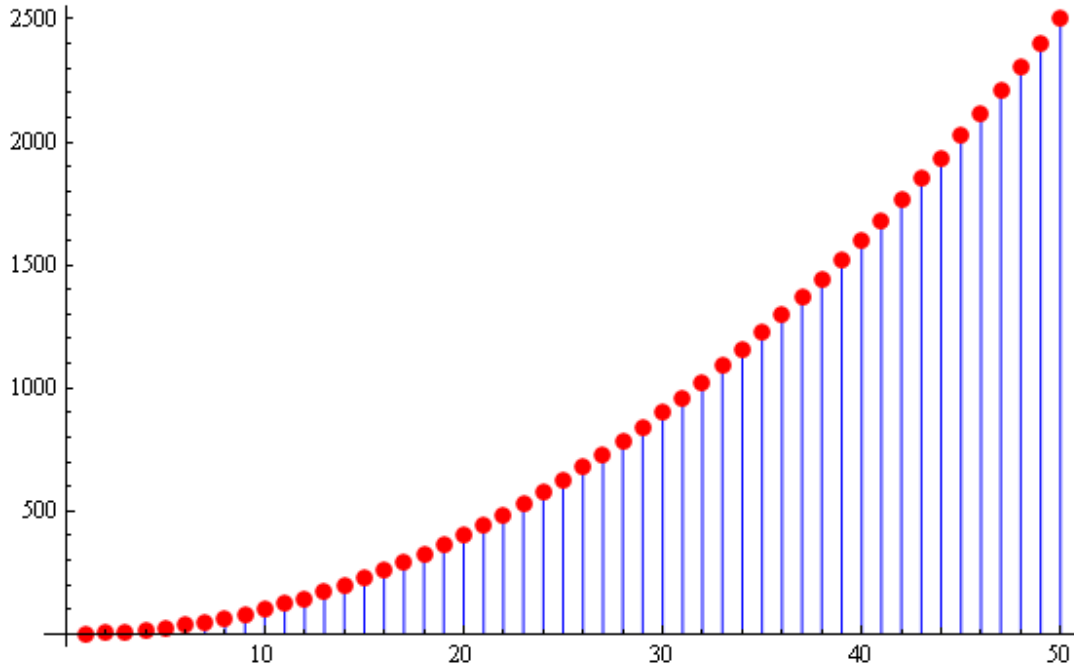
$$y_n = y_0 y_n^{(1)} + y_1 y_n^{(2)} + \sum_{j=0}^{n-2} y_{n-j}^{(2)} f_j$$

şeklinde yazılabilir.

Aynı denklemin çözümünü $q=1$, $f(n)=2$ ve $y_0=1$, $y_1=2$ başlangıç değerleri için tekrar mathematica programı ile çözelim ve çözümün ilk elli değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

$$\{\{a[n] \rightarrow 1 + n^2\}\}$$

{1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, 122, 145, 170, 197, 226, 257, 290, 325, 362, 401, 442, 485, 530, 577, 626, 677, 730, 785, 842, 901, 962, 1025, 1090, 1157, 1226, 1297, 1370, 1445, 1522, 1601, 1682, 1765, 1850, 1937, 2026, 2117, 2210, 2305, 2402, 2501}



Şekil 2.7. Örnek 21 Çözüm Grafiği

Örnek 22 : $y_{n+1} - 2y_n - 3y_{n-1} = (n+1)$ sonlu fark denkleminin çözümünü bulalım.

Bir özel çözüm,

$y_n = \alpha_0 + \alpha_1 n$ şeklinde aranır. Çünkü sağ taraf birinci dereceden bir polinomdur.

Varsayılan çözümü denkleme yerine yazarsak,

$$\alpha_0 + \alpha_1(n+1) - 2(\alpha_0 + \alpha_1 n) - 3[\alpha_0 + \alpha_1(n-1)] = n+1$$

Polinom eşitliğinden,

$$\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_0 - 3\alpha_0 + 3\alpha_1 = 1$$

$$4\alpha_1 - 4\alpha_0 = 1$$

ve n nin katsayılar eşitliğinden,

$$\alpha_1 - 2\alpha_1 - 3\alpha_1 = 1 \text{ ise, } \alpha_1 = -\frac{1}{4}$$

α_1 değerini $4\alpha_1 - 4\alpha_0 = 1$ denkleminde yerine yazarsak,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Özel çözüm,

$$y_n^p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}n \text{ 'dir.}$$

Lineer bağımsızlığı özel çözümden irdelemek için homojen denklemin karakteristik denkleminin köklerine bakılır.

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \text{ ise; } r_1 = -1, r_2 = 3$$

$$y_n^c = A(-1)^n + B(3)^n$$

ve bu da özel çözümlerin bağımsızlığını ifade eder. Genel çözüm homojen ve özel çözümün birleşimi olarak yazılır.

$$y_n = y_n^c + y_n^p$$

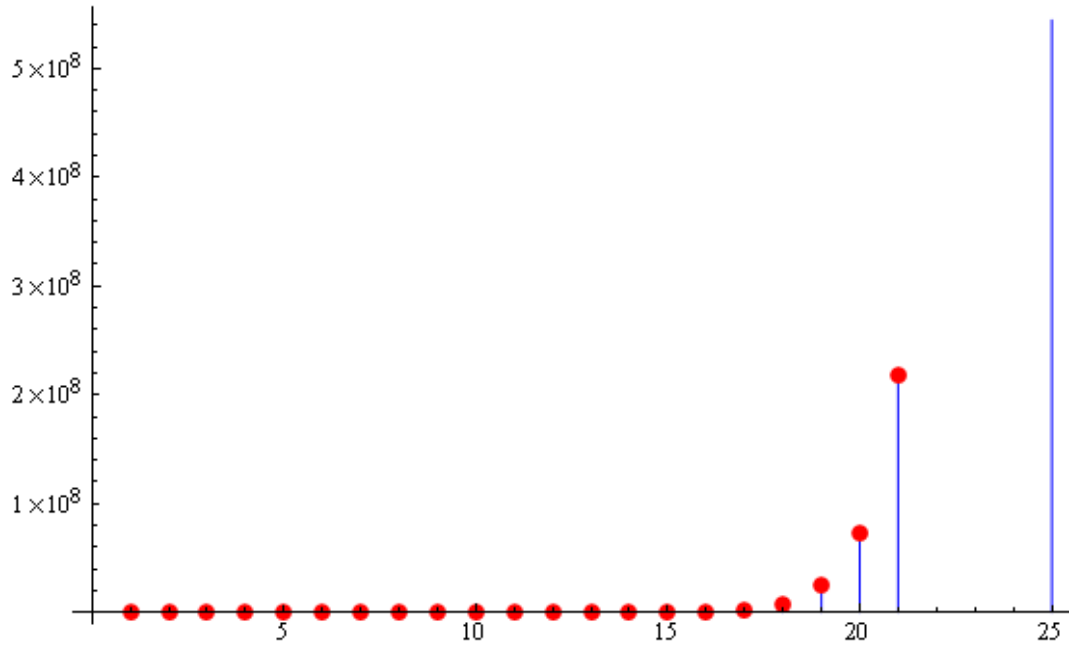
A ve B katsayıları genel çözümün başlangıç şartlarından bulunur.

Aynı fark denklemini, $y_1 = -1$ ve $y_2 = 0$ başlangıç koşulları için mathematica programıyla çözelim ve çözümün ilk yirmi beş değerinin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow \frac{1}{4} (-1 - n) + (-1)^n C[1] + 3^n C[2] \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \text{Function}\left[\{n\}, \frac{1}{48} (-12 + 27 (-1)^n + 3^n - 12 n) \right] \right\} \right\}$$

{-1, 0, 1, 1, 3, 14, 43, 135, 407, 1228, 3687, 11069, 33211, 99642, 298931, 896803, 2690415, 8071256, 24213775, 72641337, 217924019, 653772070, 1961316219, 5883948671, 17651846023}



Şekil 2.8. Örnek 22 Çözüm Grafiği

Örnek 23 : Bir önceki problemi $f(n) = (3)^n$ için tekrar inceleyelim.

Yani, $y_{n+1} - 2y_n - 3y_{n-1} = (3)^n$ fark denkleminin çözümünü bulalım.

Varsayılan formdaki

$$y_n^p = \alpha(3)^n$$

çözümü özel çözümlerden lineer bağımsız değildir.

Buradan lineer bağımsız bir çözüm olan,

$$y_n^p = \beta n(3)^n$$

çözümü denklemde yerine yazılırsa,

$$\beta(n+1)3^{n+1} - 2\beta n3^n - 3(n-1)3^{n-1} = 3^n$$

Her iki taraf 3^n ile bölünürse,

$$3\beta(n+1) - 2\beta n - \beta(n-1) = 1 \text{ elde edilir.}$$

Katsayıların eşitliğinden β bulunabilir.

$$3\beta + \beta = 1 \text{ ise, } \beta = \frac{1}{4}$$

Ayrıca n nin katsayıları tamamen denktir.

$$3\beta n - 2\beta n - 1\beta = 0$$

Öyleyse, lineer bağımsız özel çözüm,

$$y_n^p = n \frac{(3)^n}{4}$$

ve genel çözüm;

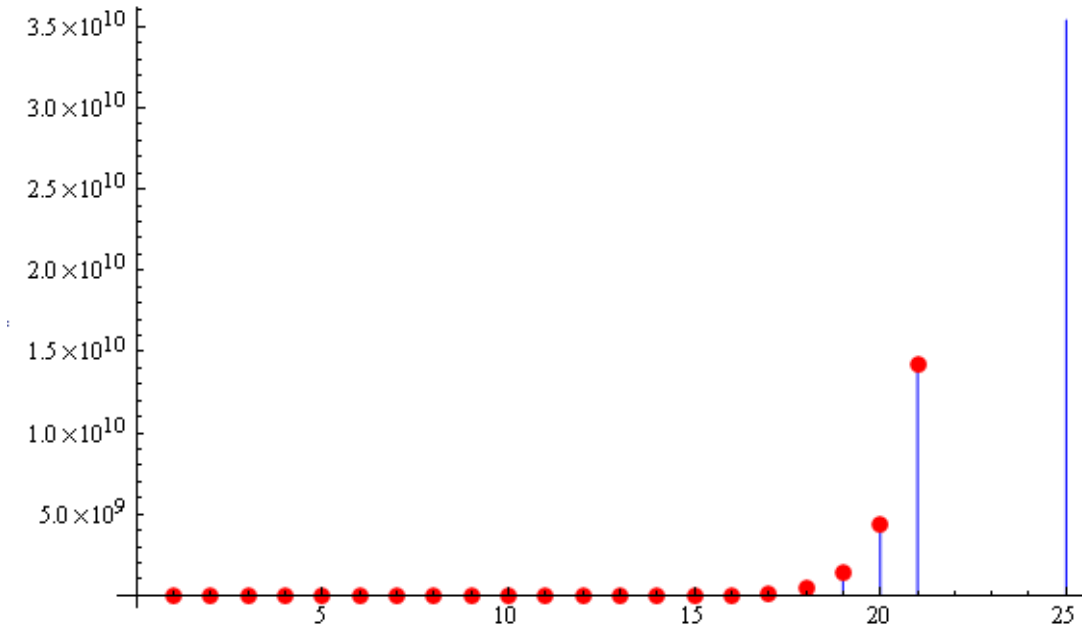
$$y_n = A(3)^n + B(-1)^n + n \frac{(3)^n}{4} \text{ olur.}$$

Aynı fark denklemini, $y_1 = -4$ ve $y_2 = 1$ başlangıç koşulları için mathematica programıyla çözelim ve çözümün ilk yirmi beş değerininin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow \frac{1}{16} 3^{-1+n} (-3 + 4 n) + (-1)^n C[1] + 3^n C[2] \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow \frac{1}{48} (147 (-1)^n - 19 3^n + 4 3^n n) \right\} \right\}$$

{-4, 1, -7, -2, 2, 79, 407, 1780, 6968, 25837, 92261, 321082, 1096094, 3686875, 12256355, 40356304, 131830580, 427776793, 1380185489, 4431121846, 14165061626, 45110273191, 143176084463, 453064048108, 1429799528432}



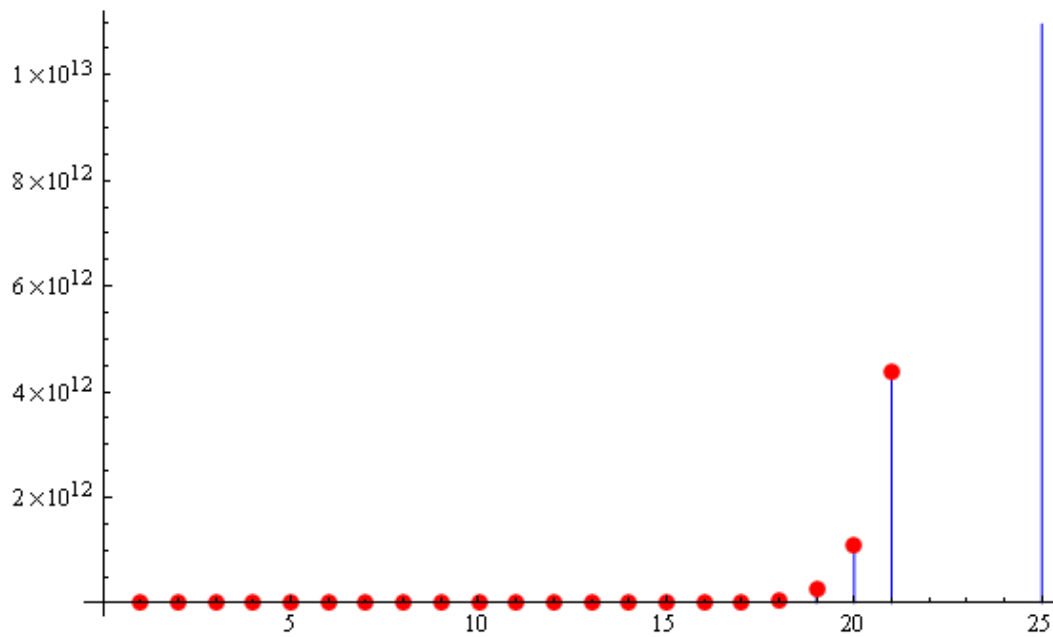
Şekil 2.9. Örnek 23 Çözüm Grafiği

Örnek 24 :

a) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = 3^n$ fark denklemini $y_0 = 1$ ve $y_1 = 3$ başlangıç koşulları için mathematica ile çözelim ve çözümün ilk yirmi beş değerinin grafiğini çizelim.

$$\{\{a \rightarrow \text{Function}[\{n\}, 2^n + 2^{2n} - 3^n]\}\}$$

{1, 3, 10, 36, 136, 528, 2080, 8256, 32896, 131328, 524800, 2098176, 8390656, 33558528, 134225920, 536887296, 2147516416, 8590000128, 34359869440, 137439215616, 549756338176, 2199024304128, 8796095119360, 35184376283136, 140737496743936, 562949970198528}

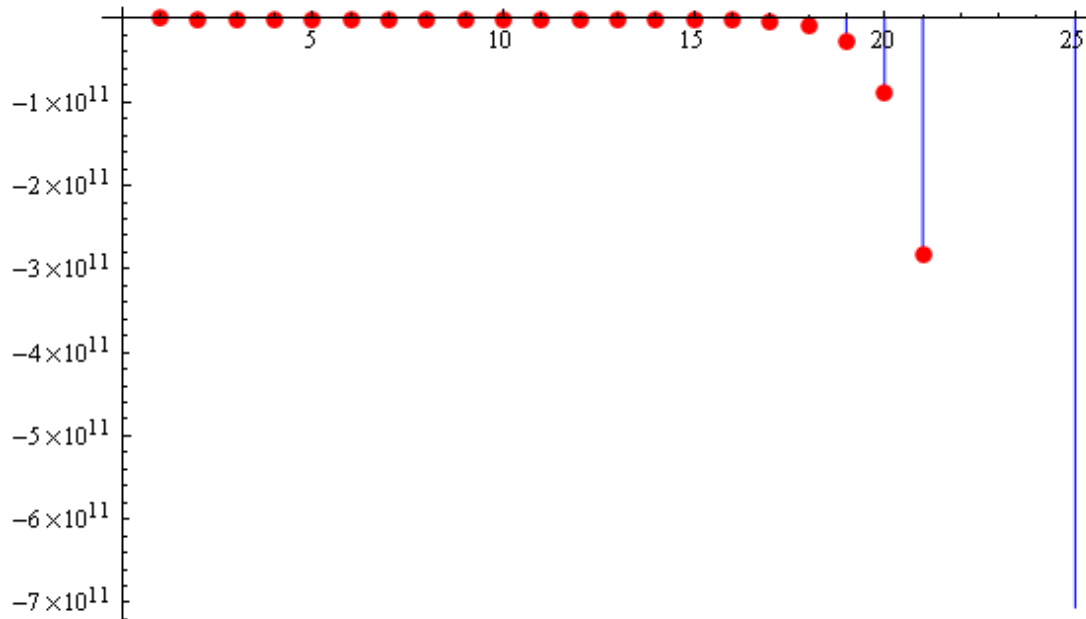


Şekil 2.10. Örnek 24-a Çözüm Grafiği

b) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 2^n$ fark denklemini $y_0 = 2$ ve $y_1 = 1$ başlangıç koşulları için mathematica ile çözelim ve çözümün ilk yirmi beş değerinin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \text{Function} \left[\{n\}, \frac{1}{3} \left(3 \cdot 2^n + 3^{1+n} - 4 \cdot 3^n n \right) \right] \right\} \right\}$$

{2, 1, -11, -73, -335, -1345, -5039, -18097, -63167, -216001, -727247, -2418961, -7967519, -26032417, -84482735, -272596465, -875217791, -2797905793, -8910409103, -28281171409, -89493084383, -282427439329, -889125827951, -2792905916593, -8755298853695, -27395631484225}

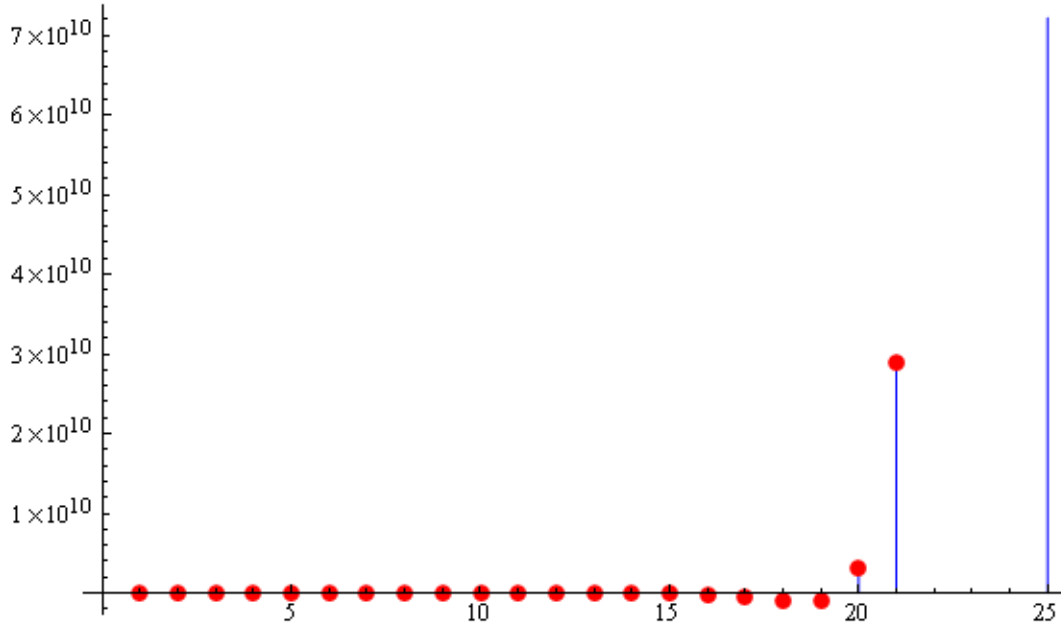


Şekil 2.11. Örnek 24-b Çözüm Grafiği

c) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 10y_n = 2^{n+1}$ fark denklemini $y_0 = 1$ ve $y_1 = 4$ başlangıç koşulları için mathematica ile çözelim ve çözümün ilk yirmi beş değerinin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \text{Function} \left[\{n\}, i (3 - i)^n - i (3 + i)^n + \left(\frac{3}{5} - \frac{i}{5} \right)^n (3 + i)^n \right] \right\} \right\}$$

{1, 4, 16, 60, 208, 664, 1936, 5040, 11008, 15904, -14144, -242880, -1313792, -5449856, -19553024, -62803200, -181256192, -459439616, -943944704, 1069009920, 3025911808, 28846618624, 142822690816, 568474152960, 1982626398208, 6211033636864}



Şekil 2.12. Örnek 24-c Çözüm Grafiği

Örnek 25 : $p_0 y_{n+2} + p_1 y_{n+1} + p_2 y_n = 0$ (2.49)

denklemini düşünelim.

Çözüm yukarıda söylendiği gibi $p_0 z^2 + p_1 z + p_2$ polinomunun kökleri cinsinden yazılabilir. Çözümün Chebyshev polinomları cinsinden verilmesi de enteresandır.

Farz edelim ki, $p_0 p_2 > 0$ ve $\rho = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{1/2}$ ve $q = -\frac{p_1}{2(p_0 p_2)^{1/2}}$.

$\rho^n T_n(q)$ ve $\rho^n U_{n-1}(q)$, (2.49)'un çözümleridir. Buradan,

$y_n = c_1 \rho^n T_n(q) + c_2 \rho^n U_{n-1}(q)$ genel çözümdür.

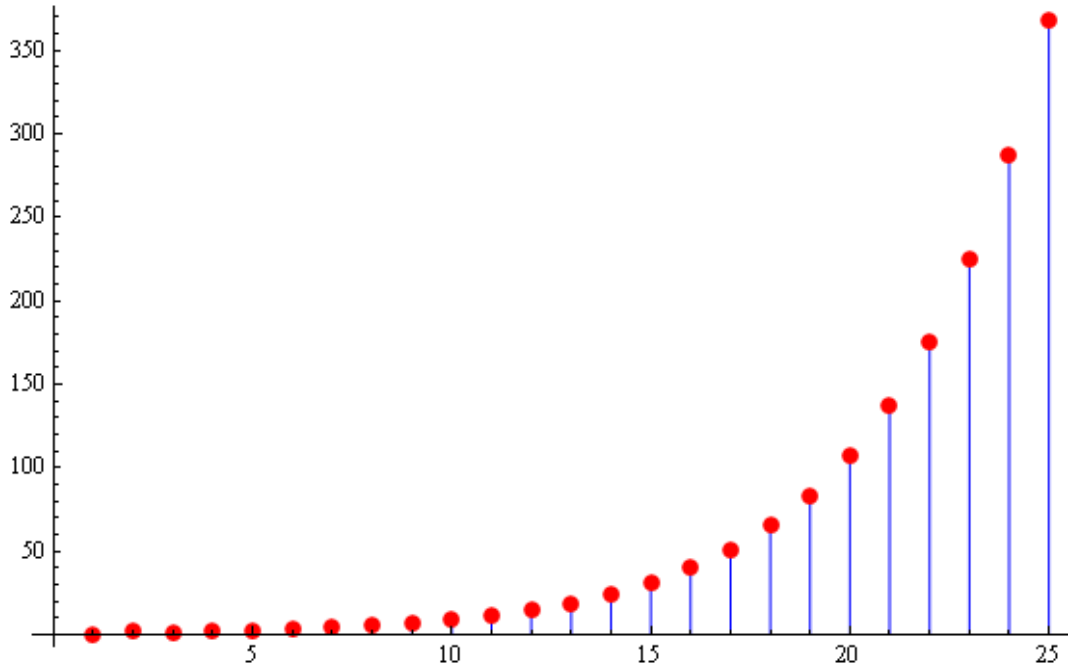
Yukarıdaki denklemin genel çözümünü mathematica programı ile bulalım.

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow 2^{-n} c[1] \left(\frac{p[1] - \sqrt{p[1]^2 - 4 p[0] p[2]}}{p[0]} \right)^n + 2^{-n} c[2] \left(\frac{p[1] + \sqrt{p[1]^2 - 4 p[0] p[2]}}{p[0]} \right)^n \right\} \right\}$$

Aynı denklemin çözümünü $p(0)=2$, $p(1)=1$, $p(2)=-2$ ve $y_1=0$, $y_2=2$

başlangıç değerleri için tekrar mathematica programı ile çözelim ve çözümün ilk sekiz değerinin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \text{Function}[n], \frac{1}{17} \left(17 \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} \right)^n + \sqrt{17} \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} \right)^n + 17 \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \right)^n - \sqrt{17} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \right)^n \right) \right\} \right\}$$



Şekil 2.13. Örnek 25 Çözüm Grafiği

Örnek 26 : Aşağıdaki fark denklemlerinin verilen başlangıç şartları için çözümünü bulunuz.

a) $y_{n+2} - \sqrt{2}y_{n+1} + y_n = 0$, başlangıç şartları $y_0 = 2$ ve $y_1 = \sqrt{2}$.

Karakteristik denklem,

$$r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0$$

$$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 4 = -2 < 0 \text{ olduğundan kompleks iki kök var. Bu}$$

kökler:

$$r_1 = \frac{-(-\sqrt{2}) + i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-(-\sqrt{2}) - i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

Çözüm, $y_n = c_1 \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right)^n$ olarak bulunur.

Başlangıç şartları kullanılırsa,

$$y_0 = 2 \text{ şartına göre, } y_0 = c_1 \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right)^0 = 2$$

$$y_1 = \sqrt{2} \text{ şartına göre, } y_1 = c_1 \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right)^1 = \sqrt{2},$$

$$y_0 = c_1 + c_2 = 2$$

$$y_1 = c_1 - c_2 = 0$$

denklemleri ortak çözümlürse; $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ bulunur.

c_1 ve c_2 değerleri yerine konarak denklemin çözümü,

$$y_n = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^n + \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right)^n \text{ olarak bulunur.}$$

b) $y_{n+2} - \sqrt{2}y_{n+1} + y_n = 0$, başlangıç şartları $y_0 = 0$ ve $y_1 = \sqrt{2}$.

Karakteristik denklem,

$$r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0$$

$$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 4 = -2 < 0 \text{ olduğundan kompleks iki kök var. Bu}$$

kökler:

$$r_1 = \frac{-(-\sqrt{2}) + i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-(-\sqrt{2}) - i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

Çözüm; $y_n = c_1 \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right)^n$ olarak bulunur.

Başlangıç şartları kullanılırsa;

$$y_0 = 0 \text{ şartına göre, } y_0 = c_1 \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right)^0 = 0$$

$$y_1 = \sqrt{2} \text{ şartına göre, } y_1 = c_1 \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right)^1 = \sqrt{2},$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 - c_2 = -2i$$

denklemleri ortak çözümlürse; $c_1 = -i$ ve $c_2 = i$ bulunur.

c_1 ve c_2 değerleri yerine konarak, denklemin çözümü

$$y_n = -i \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^n + i \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right)^n \text{ olarak bulunur.}$$

2.6. Δ ve E Operatörlerinin Kullanımı

Sabit katsayılı fark denklemlerinin çözüm metodu, Δ ve E operatörleri kullanıldığında çok kolaydır. E operatörü kullanılarak (2.31) ve (2.32) denklemleri

$$p(E)y_n = g_n \quad (2.50)$$

$$p(E)y_n = 0 \quad (2.51)$$

formunda yazılabilir.

Burada,

$$p(E) = \sum_{i=0}^k p_i E^{k-i} \text{ 'dir.} \quad (2.52)$$

$$p(E)z^n = z^2 p(z) \text{ ve } p(E) = \prod_{i=0}^k (E - z_i I) \quad (2.53)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada, z_1, z_2, \dots, z_k , $p(z)$ nin kökleridir.

Katlılıkları m_j olan, $j = 1, 2, \dots, s$ s tane farklı kök olsun. O zaman,

$$p(E) = \prod_{i=1}^s (E - z_i I)^{m_i}$$

şeklinde yazılabilir ve (2.51) şu hale gelir.

$$\prod_{i=1}^s (E - z_i I)^{m_i} y_n = 0 \quad (2.54)$$

Burada görülür ki, homojen denklem s tane m_j mertebeli fark denklemine ayrılabilir. Gerçekten de operatörlerin değişme özelliğinden ve $(E - z_i I)$ operatörünün değişme özelliğinden dolayı aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

Teorem 2.6.1 : $(E - z_j I)^{m_i} x_n = 0$ (2.55)

denklemindeki x_n çözümleri (2.54) denkleminin de çözümleri olduğundan problem daha basitleştirilebilir. $(E - z_i I)$, $i = 1, 2, \dots, k$ ifadesinin tersini bulmak kolaydır.

Teorem 2.6.2 : $\{y_n\}$ bir dizi olsun ve $f(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^i$ m dereceli bir polinom olsun.

Buradan,

$$f(E)(z^n y_n) = z^n f(zE) y_n \quad (2.56)$$

elde edilir.

İspat : $f(z)$ nin tanımından aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned} f(E)(z^n y_n) &= \sum_{i=0}^m a_i E^i (z^n y_n) = \sum_{i=0}^m a_i z^{n+i} E^i y_n \\ &= z^n \sum_{i=0}^m a_i E^i (z_i E^i) y_n = z^n f(zE) y_n \end{aligned}$$

Tanım 2.6.1 : $(E - z_i I)$ operatörünün ters operatörü $(E - z_i I)^{-1}$ şeklindedir ve

$$(E - z_i I)(E - z_i I)^{-1} = I \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Teorem 2.6.3 : $z \in C$ olsun. $E - z_i I$ ifadesinin tersi

$$(E - z_i I)^{-1} = z^{n-1} \Delta^{-1} z^{-n} \quad (2.57)$$

şeklinde verilir.

İspat : (2.57) nin iki tarafında $(E - z_i I)$ uygulanırsa ve Teorem 2.6.2'nin sonuçları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (E - z_i I)(E - z_i I)^{-1} &= (E - z_i I) z^{n-1} \Delta^{-1} z^{-n} \\ &= z^{n-1} z (E - I) \Delta^{-1} z^{-n} \\ &= z^n z^{-n} I = I \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 2.6.1 : $m = 1, 2, \dots$, için

$$(E - zI)^{-m} = z^{n-m} \Delta^{-m} z^{-n} \quad (2.58)$$

ifadesi vardır.

(2.58) denklemini, (2.55) ve (2.50) çözümlerini kolayca bulmamızı sağlar.

Gerçekten (2.55) ve (2.58)'den

$$x_n = (E - z_j I)^{-m_j} .0 = z_j^{n-m_j} .0$$

elde edilir.

Fakat $\Delta^{-m_j} .0 = q_j(n)$ olduğunu biliyoruz. Burada $q_j(n)$ derecesi m_j den küçük olan bir polinomdur. Bundan dolayı x_n çözümü $x_n = z_j^{n-m_j} q_j(n)$ şeklinde verilebilir ve bu $j = 1, 2, \dots, s$ için tekrarlanabilir.

Genellikle m_j, n den bağımsız olduğu için önceki çözümü $z_j^{m_j}$ ile çarpmayı tercih ederiz. z_j katlı köklerine göre çözüm, $z_j^n q_j(n)$ şeklindedir. Böylece (2.51)'in genel çözümü ise, $y_n = \sum_{j=1}^s a_j q_j(n) z_j^n$ dir ve (2.43) ifadesine denktir. Genel olarak (2.50) homojen olmayan denklemin çözümü bulunurken, daha önceki bölümlerde tanımlanmış olan sabitin değişimi metodu uygulanabilir. Genellikle bu yol çok uzundur ve bazı hallerde $p^{-1}(E)$ kullanılmasını tercih ederiz.

Teorem 2.6.4 : $f(z)$ derecesi k ve $z \in C, f(z) \neq 0$ olan bir polinom olsun.

Öyleyse,

$$f^{-1}(E)z^n = \frac{z^n}{f(z)}. \quad (2.59)$$

İspat : (2.59) un iki tarafına $f(E)$ uygulanırsa,

$$f(E)f^{-1}(E)z^n = f(E)\frac{z^n}{f(z)} = z^n$$

elde ederiz.

Teorem 2.6.5 : $f(z)$ derecesi k olan bir polinom ve $z_1 \in C$ m katlı kök olsun.

$$g(z) = (z - z_1)^{-m} f(z) \text{ konarak,}$$

$$f^{-1}(E)z_1^n = \frac{z_1^{n-m} n^{(m)}}{g(z_1)m!} \quad (2.60)$$

elde edilir.

İspat : (2.59)'un iki tarafına $f(E)$ uygulanarak,

$$f(E)f^{-1}(E)z_1^n = \frac{z_1^{n-m} f(z_1 E) n^{(m)}}{g(z_1) m!} = z_1^n \frac{g(z_1 E)(E-I)^m n^{(m)}}{g(z_1) m!} = \frac{z_1^n g(z_1 E) \cdot 1}{g(z_1)} = z_1^n$$

elde edilir.

Teorem 2.6.6 : $f(z)$ derecesi k olan bir polinom ve y_n bir dizi olsun.

Her $n \in N$ için, $f^{-1}(E)z^n y_n = z^n f^{-1}(zE) y_n$ 'dir.

Bu sonuçlar, $p(E)y_n = g(n)$ denkleminin özel çözümünü elde etmek için kullanılır.

Çok kullanılan bazı halleri hatırlatalım:

(a) $g(n) = g$ sabit. Eğer $p(1) \neq 0$ ise, (2.59)'dan,

$$\bar{y}_n = p^{-1}(E)g = gp^{-1}(E) \cdot 1^n = \frac{g}{p(1)} = \frac{g}{\sum_{i=0}^k p_i} \text{ elde edilir.}$$

(b) $p(z_i) \neq 0$ için $g(n) = \sum_{i=1}^s a_i z_i^n$ olsun.

(2.59)'dan,

$$\bar{y}_n = p^{-1}(E) \sum_{i=1}^s a_i z_i^n = \sum_{i=1}^s a_i p^{-1}(E) z_i^n = \sum_{i=1}^s a_i \frac{z_i^n}{p(z_i)}$$

elde edilir.

(c) (b) ile aynı olarak fakat z_j , $p(z)$ nin m katlı kökü olsun. (2.59) ve (2.60)'dan,

$$\bar{y}_n = \sum_{i \neq j}^s \frac{a_i z_i^n}{p(z_i)} + a_j \frac{z_j^{n-m} n^{(m)}}{g(z_j) m!}$$

elde edilir. Burada $g(z) = \frac{p(z)}{(z - z_j)^m}$ 'dir.

(d) $g(n) = e^{in\alpha}$ olsun. Bu husus (c) de $z = e^{i\alpha}$ konarak elde edilir.

(e) $g(n) = \cos n\alpha$, $g(n) = \sin n\alpha$ (d) de olduğu gibi reel ve imajiner kısımlar alınarak ilerlenerek elde edilir.

Örnek 27 : $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = n$ fark denkleminin çözümünü irdeleyelim.

Bu denklem sağ taraflı bir fark denklemi olup, burada $f_n = n$ şeklinde birinci dereceden bir polinomdur. $f_n = (d_0 + d_1n)$ olmak üzere, bu ifadeyle

$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = n$ denkleminde gidilecek olursa,

$$\begin{aligned} d_0 + d_1(n+2) - 5[d_0 + d_1(n+1)] + 6(d_0 + d_1n) &= n \\ (2d_0 - 3d_1) + 2d_1n &= n \end{aligned}$$

buradan katsayıların eşitliğinden,

$$2d_0 - 3d_1 = 0$$

$$2d_1 = 1$$

$$d_1 = \frac{1}{2} \text{ ve } d_0 = \frac{3}{4} \text{ bulunur ve bunların yardımıyla}$$

$$f_n = \frac{3}{4} + \frac{n}{2} \text{ elde edilir.}$$

$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ fark denkleminin karakteristik denklemi $r^2 - 5r + 6 = 0$ olup, $\Delta > 0$ olduğundan farklı iki reel kök vardır. Bu kökler $r_1 = 2$ ve $r_2 = 3$ 'dir ve denklemin homojen çözümü,

$$y_n = A(2)^n + B(3)^n$$

şeklindedir. $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = n$ fark denkleminin genel çözümü ise,

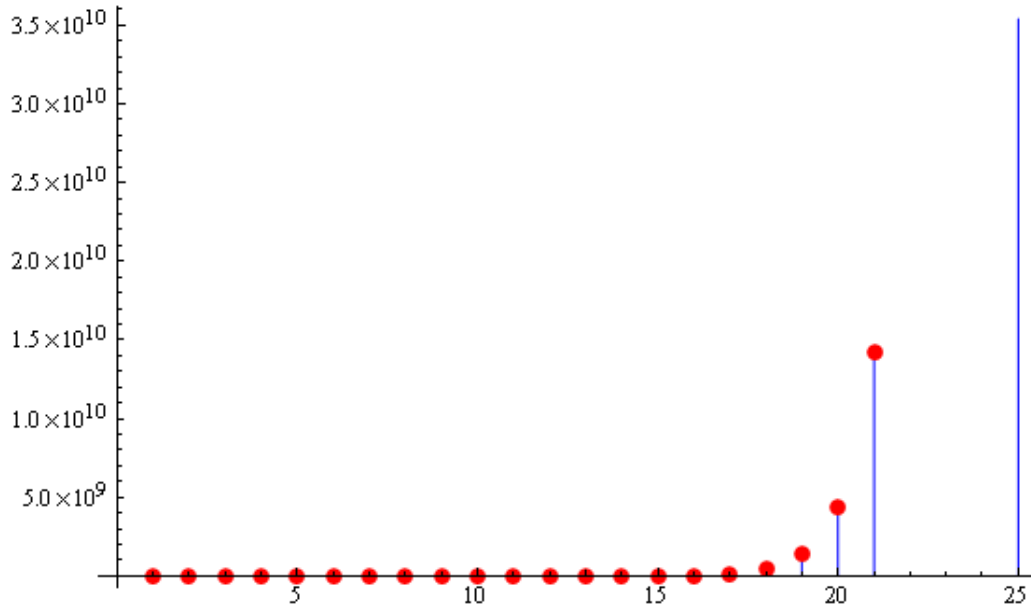
$$y_n = A(2)^n + B(3)^n + \frac{3}{4} + \frac{n}{2}$$

olarak elde edilmiş olur. Yani homojen olmayan fark denklemlerinin genel çözümü, sıfır çözümü ile partiküler çözümün toplamı olarak bulunur.

Aynı fark denkleminin çözümünü $y_1 = 0$ ve $y_2 = 1$ başlangıç değerleri için mathematica programı ile bulalım. İlk yirmi beş değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

$$\{\{a \rightarrow \text{Function}[\{n\}, \frac{1}{12} (9 - 9 \cdot 2^{1+n} + 7 \cdot 3^n + 6n)]\}\}$$

{0, 1, 6, 26, 97, 333, 1088, 3448, 10719, 32915, 100270, 303870, 917741, 2765497, 8321052, 25012292, 75135163, 225602079, 677199434, 2032384714, 6098726985, 18299326661, 54904271416, 164725397136, 494201357207}



Şekil 2.14. Örnek 27 Çözüm Grafiği

Örnek 28 : $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n \cdot n$ fark denkleminin çözümünü irdeleyelim.

Bu denklem sağ taraflı bir fark denklemini olup, burada $f_n = 2^n \cdot n$ şeklinde birinci dereceden bir polinom ve üstel fonksiyondan oluşmaktadır.

$f_n = 2^n (d_0 + d_1 n)$ alınır ve $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n \cdot n$ fark denkleminde yerine konursa,

$$2^{n+2} [d_0 + d_1 (n+2)] - 5 \cdot 2^{n+1} [d_0 + d_1 (n+1)] + 6 \cdot 2^n [d_0 + d_1 n] = 2^n \cdot n$$

ve buradan,

$$-2d_1 = n$$

elde edilir.

Fakat buradan d_0 ve d_1 bulunamaz. Bir önceki örnekten farklı olan bu durum, f_n fonksiyonunun farklı formda olmasından kaynaklanır. Birinci örnekte üstel fonksiyon $1^n (=1)$ olmasına karşılık ikinci örnekte üstel fonksiyon 2^n formundadır. Bu 2^n ise $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ homojen denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla $f_n = 2^n (d_0 + d_1 n)$ dönüşümünden vazgeçilir.

Eğer üstel fonksiyon t^n ,

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0$$

homojen denkleminin bir çözümü veya aynı şey olan t nin karakteristik denkleminin bir kökü olması halinde,

$$t^2 + a_1 t + a_2 = 0$$

olarak alınır ve denklemde her iki taraftaki n^n li terimlere göre yazılacak olursa,

$$d^n n^n (t^2 + a_1 t + a_2) + \dots = c_n n^n + \dots$$

elde edilir. $t^2 + a_1 t + a_2 = 0$ ifadesinin sıfıra eşit olmasından ötürü parantez içindeki ifade sıfır olacağından d_n ler için denklem elde edilemez.

$d^n n^n (t^2 + a_1 t + a_2) + \dots = c_n n^n + \dots$ denkleminde görüleceği gibi sol tarafta $(n-1)$ inci mertebeden bir tam rasyonel fonksiyon yer almakta ve sağ taraftaki fonksiyon ise n inci mertebeden olmaktadır. Her iki taraftaki fonksiyonların n inci mertebeden olması gerektiğine göre f_n için $(n+1)$ inci mertebeden bir tam rasyonel fonksiyon kabul etmemiz gerekir.

$$f_n = d_0 + d_1 n + \dots + d_n n^n + d_{n+1} n^{n+1}$$

Bu ifade denklemde yerine konacak olursa,

$$\begin{aligned} & t^2 \left[d_{n+1} (n+2)^{n+1} + d_n (n+2)^n + \dots + d_0 \right] \\ & + a_1 t \left[d_{n+1} (n+1)^{n+1} + d_n (n+1)^n + \dots + d_0 \right] \\ & + a_2 \left[d_{n+1} n^{n+1} + d_n n^n + \dots + d_0 \right] = c_n n^n + \dots + c_0 \end{aligned}$$

veya,

$$n^{n+1} \cdot d_{n+1} \cdot (t^2 + a_1 t + a_2) + n^n \left[t^2 \cdot d_n + t^2 d_{n+1} (n+1)^{n+1} \cdot 2 + a_1 t \cdot d_n + a_1 t \cdot d_{n+1} (n+1) + a_2 \cdot d_0 \right] + \dots = c_n n^n + \dots + c_0$$

elde edilir. n^{n+1} terim düşeceğinden sol tarafta n^n li terim,

$$n^n \left[d_n (t^2 + a_1 t + a_2) + d_{n+1} t \cdot (n+1) (2t + a_1) \right] = n^n \left[d_{n+1} t \cdot (n+1) (2t + a_1) \right]$$

olarak elde edilir. Bu suretle daha önce söylendiği gibi her iki taraf içinde n inci mertebeden birer tam rasyonel fonksiyon elde edilmiş olur.

Yukarıdaki $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n \cdot n$ fark denkleminin çözümünü tekrar irdeleyecek olursak, f_n için lineer bir fonksiyondan ziyade kuadratik bir fonksiyon seçmek uygundur.

$$f_n = 2^n (d_0 + d_1 n + d_2 n^2).$$

Bununla $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n \cdot n$ denkleminde 2^n ile bölüldükten ve basitleştirildikten sonra,

$$-4 \cdot d_2 \cdot n - 2d_1 + 6d_2 = n$$

elde edilir ve buradan,

$$-4.d_2 = 1$$

$$-2d_1 + 6d_2 = 0$$

$d_1 = -\frac{3}{4}$ ve $d_2 = -\frac{1}{4}$ olarak bulunur. d_0 ise bilinmeyen olarak kalır.

Buna göre $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n \cdot n$ fark denkleminin partiküler çözümü,

$$f_n = 2^n \cdot \left(d_0 - \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}n^2 \right)$$

olarak bulunur. Fark denkleminin genel çözümü ise partiküler çözüme sıfır çözümü eklenerek bulunacağından,

$$y_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + 2^n \cdot \left(d_0 - \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}n^2 \right)$$

şekindedir. Veya yeni bir A_1 sabiti yardımıyla,

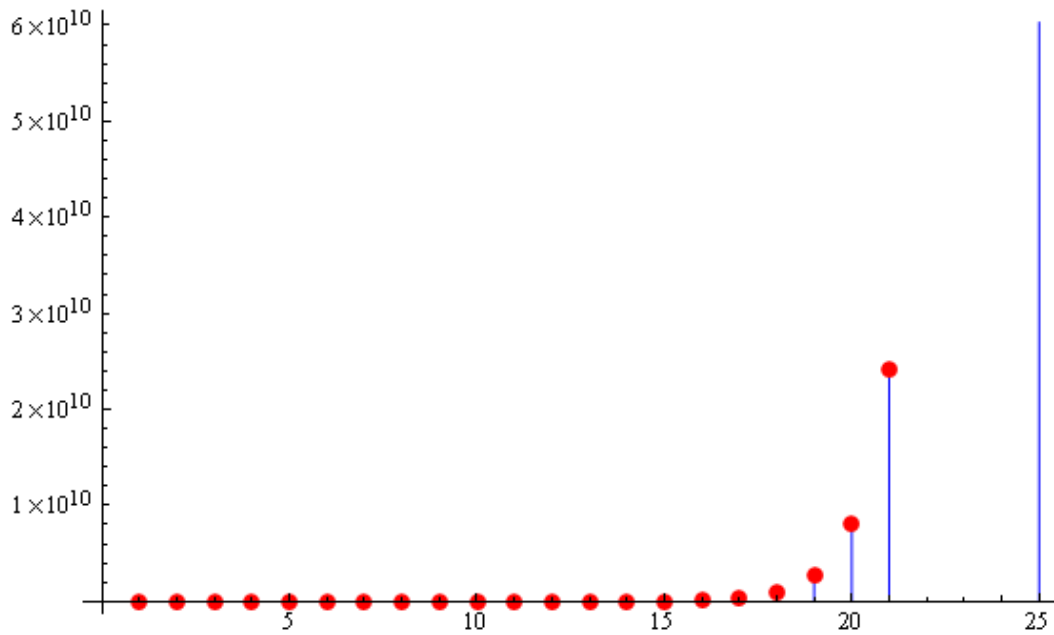
$$y_n = 2^n \cdot \left(A_1 - \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}n^2 \right) + B \cdot 3^n$$

şeklinde elde edilir.

Aynı fark denkleminin çözümünü $y_1 = 0$ ve $y_2 = 1$ başlangıç değerleri için mathematica programı ile bulalım. İlk yirmi beş değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

$$\{ \{ a \rightarrow \text{Function}[\{n\}, \frac{1}{12} (-15 2^{1+n} + 28 3^n - 9 2^n n - 3 2^n n^2)] \} \}$$

{0, 1, 7, 37, 167, 677, 2543, 9037, 30823, 101941, 329375, 1045469, 3273623, 10144453, 31187023, 95297773, 289858247, 878553173, 2655844607, 8012622589, 24138006775, 72635269861, 218392348847, 656242399757, 1971050843687}



Şekil 2.15. Örnek 28 Çözüm Grafiği

Örnek 29 : $y_{n+2} + 2y_n = n \cdot \sin n$ fark denkleminin çözümünü irdeleyelim.

Bu denklem sağ taraflı bir fark denklemini olup, burada $f_n = n \cdot \sin n$ şeklinde birinci dereceden bir polinom ve trigonometrik fonksiyondan oluşmaktadır.

$$f_n = (a + bn) \sin n + (c + dn) \cos n$$

ifadesi ile fark denklemine gidilirse,

$$[a + b(n+2)] \cdot \sin(n+2) + [c + d(n+2)] \cdot \cos(n+2) + 2(a + bn) \sin n + 2(c + dn) \cos n = n \cdot \sin n$$

elde edilir. \sin ve \cos için toplam teoremleri kullanılarak ve $n.\sin n$, $\sin n$, $n \cos n$ ve $\cos n$ li terimler bir araya getirilerek her iki tarafın katsayıları eşitlenecek olursa, a , b , c , d sabitlerini tayin etmek için aşağıdaki

$$\begin{aligned} b.\cos 2 - d.\sin 2 + 2b &= 1 \\ (a + 2b).\cos 2 - (c + 2d).\sin 2 + 2a &= 0 \\ b.\sin 2 + d.\cos 2 + 2d &= 0 \\ (a + 2b).\sin 2 + (c + 2d).\cos 2 + 2c &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilmiş olur. Buradan da,

$$a = -0,35 ; b = 0,47 ; c = -0,49 ; d = -0,27$$

bulunur. Buna göre aranan partiküler(özel) çözüm ise,

$$f_n = (-0,35 + 0,47n).\sin n - (0,49 + 0,27n)\cos n$$

olarak elde edilir.

2.7. Üretici Fonksiyonlar Metodu

Üretici fonksiyonlar metodu sabit katsayılı lineer fark denklemlerini çözmek için kullanılan güzel bir metottur.

Tanım 2.7.1 : $\{y_n\}$ dizisi verilsin. Aşağıdaki formda,

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i x^i \quad (2.61)$$

x bir sembol olmak üzere, ifadesine formel seri denir.

Eğer x kompleks bir değer ise, (2.61)'in yakınsama problemi ortaya çıkar. Formel serilere genellikle $\{y_n\}$ 'in üretici fonksiyonları ismini veririz. Tüm formel seriler kümesinde, işlemleri cebirsel olarak rasyonel sayılar kümesine benzer olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 2.7.2 : Y ve Z formel serileri verilsin. Bu serilerin toplamı

$$Y + Z = \sum_{n=0}^{\infty} (y_n + z_n) x^n \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Tanım 2.7.3 : Y ve Z formel serilerinin çarpımı

$$c_n = \sum_{i=0}^n y_i z_{n-i} = \sum_{i=0}^n z_i y_{n-i} \quad (2.62)$$

olmak üzere,

$$YZ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2.63)$$

ifadesiyle verilir.

Formel serilerin bazı özellikleri:

- (i) İki formel serinin çarpımı değişme özelliğine sahiptir.
- (ii) Y, Z, T formel serileri için $(Y + Z)T = YT + ZT$.

(iii) Formel serilerin birim elemanı $I = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$

(iv) Formel serilerin sıfır elemanı $0 + 0x + 0x^2 + \dots$

(v) $Y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i x^i$ olsun. Eğer $y_0 \neq 0$ ise, $YY^{-1} = I$ şeklinde Y^{-1} formel serisi vardır.

Polinomlar sonlu sayıdaki terimleri ile özel formel serilerdir.

$$\sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = 0, \quad p_0 = 1 \quad (2.64)$$

fark denklemini düşünelim.

$$\begin{aligned} P &= p_0 + p_1 x + \dots + p_k x^k \\ Y &= y_0 + y_1 x + \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

P karakteristik polinomdan farklıdır. Gerçekten,

$$P = x^k p\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{p}(x) \quad (2.66)$$

elde edilir.

Burada $p(z)$ karakteristik polinomdur. İki serinin çarpımı Q ,

$$Q = YP = q_0 + q_1 x + \dots + q_{k-1} x^{k-1} + q_k x^k + \dots \quad (2.67)$$

şeklindedir. Burada,

$$q_n = \sum_{i=0}^n p_i y_{n-i} \quad (2.68).$$

$n > k$ için (2.64)'ten $q_n = 0$ olduğu kolayca görülür. Bunun anlamı da, Q nun sonlu sayıdaki terimleri olan formel bir seridir. Bununla birlikte P , tersi alınabilir olduğundan ($p_0 = 1$)

$$Y = P^{-1}Q \quad (2.69)$$

elde edilir.

Eğer x sembolünü kompleks düzlemindeki bir z elemanı gibi düşünürsek, (2.69) ifadesine göre Y nin değerleri iki polinom oranı şeklinde yazılır.

$$Y = \frac{q(z)}{\bar{p}(z)} = \frac{q(z)}{z^k p\left(\frac{1}{z}\right)}. \quad (2.70)$$

Burada $p\left(\frac{1}{z}\right)$ karakteristik polinom ve $q(z) = \sum_{i=0}^{k-1} q_i z^i$ 'dir. z^i ler $p(z)$ nin kökleri

iken z_i^{-1} ler $\bar{p}(z)$ nin kökleridir. Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisine göre, (2.70) tipindeki ifadeler kutuplarının esas kısımlarının toplamına eşit olurlar.

(2.70)'in kutupları paydanın kökleridir $\frac{1}{z_i}$ kökleridir.

Böylece,

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = \sum_{i=1}^s \sum_{j=i}^{m_j} a_{ij} (z - z_i^{-1})^{-j} \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=i}^{m_j} a_{ij} (-1)^j z_i^j (1 - z_i z)^{-j} \end{aligned} \quad (2.71)$$

elde edilir. Burada s , $p(z)$ nin farklı köklerinin sayısıdır ve m_j katlılıklarıdır. a_{ij}

ise, (2.70) ifadesindeki Laurent serilerinin katsayılarıdır. $|z_i z| < 1$, $i = 1, 2, \dots, s$ için

$(1 - z_i z)^{-j}$ şu şekilde ifade edilir:

$$(1 - z_i z)^{-j} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_i^n z^n \right)^j = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} z_i^n z^n. \quad (2.72)$$

(2.72) ifadesi (2.71) ifadesinde yerine konarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=1}^s \sum_{j=i}^{m_j} a_{ij} (-1)^j \binom{n+j-1}{n} z_i^{n+j}$$

elde edilir.

Burada,

$$q_i(n) = \sum_{j=i}^{m_j} a_{ij} \binom{n+j-1}{n} (-1)^j z_i^j$$

yazılarak,

$$y_n = \sum_{i=1}^s q_i(n) z_i^n \quad (2.73)$$

elde edilir ve bu da (2.43)'e eşittir.

Teorem 2.7.1 : Farz edelim ki, $p(z)$ karakteristik polinomun kökleri kompleks düzlemde birim diskin içerisinde olsun. Öyleyse, Y formel serileri diskin içinde yakınsaktır.

İspat : $\bar{p}(z)$ polinomu birim diskin dışında köklere sahip olsun ve $q(z)/\bar{p}(z)$ birim disk içinde kutba sahip olmasın. Birim yuvar üzerinde Y , Taylor serisi ile çakışır.

Teorem 2.7.2 : Eğer $p(z)$ karakteristik polinomu birim diskin dışında köklere sahip değilse ve birim çember üzerinde basit kökleri varsa o zaman, y_n katsayıları ve Y sınırlıdır.

İspat : (2.73)'ten $q_i(n)$ 'lerin, $|z_i|=1$ 'e tekabül eden $q_i(n)$ 'leri n 'ye bağlı sabitlerdir.

Üretici fonksiyon metodu (2.11) homojen olmayan denkleminin çözümlerini elde etmek için de kullanılır. Daha önce yapıldığı gibi, q_k, q_{k+1}, \dots farkı sıfırdan farklı ise,

gerçekten (2.68) ve (2.11) den $q_k = \sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = g_0$ elde edilir ve $n = 1, 2, \dots$ için

genel formu,

$$q_{n+k} = \sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = g_n \quad (2.74)$$

şeklinde elde edilir.

$i > k$ için $p_i = 0$ şeklinde yazılır.

$$Q = \sum_{n=0}^{k-1} z^n \sum_{i=0}^n p_i y_{n-i} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \quad (2.75)$$

buradan (2.69),

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i z^i = \frac{Q_1(z) + z^k Q_2(z)}{\bar{p}(z)} \quad (2.76)$$

ifadesine dönüşür.

Burada, $Q_1(z)$ polinomu sadece y_0, y_1, \dots, y_{k-1} başlangıç değerlerine bağlıdır. $Q_2(z)$

ise, $\{g_n\}$ dizisi tarafından tanımlı formel bir seridir. (2.70), (2.71) ve (2.72)

ifadelerden $\{y_n\}$ çözümü elde edilir. Bu işlem yakınsaklık bölgesinin içinde

düşünüldüğünde daha da basitleştirilebilir. Bu $f(z)$ fonksiyonu ile gösterilir ve

buna $\{y_n\}$ dizisinin dönüşüm fonksiyonu denir. Örneğin, birim disk içerisindeki

$(1-z)^{-1}$ fonksiyonu $\{1\}$ dizisinin dönüşüm fonksiyonudur. Çünkü,

$$(1-z)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i, \text{ dir.}$$

Tablo 2.6 da bazı önemli dizilerin dönüşüm fonksiyonları verilmiştir.

Farz edelim ki, $Q_2(z)$, $\{g_n\}$ dizisinin dönüşüm fonksiyonu olsun. Gerekli cebirsel

işlemler yapılırsa (2.76) dan,

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i z^i = G(z)$$

elde edilir. Burada $G(z)$, (2.76) ifadesinin sağ tarafını veren fonksiyondur. $G(z)$ Taylor serisine açıldığında ve iki taraftaki eşit mertebeli ifadelerin katsayıları eşitlendiğinde, $\{y_n\}$ çözümü bulunabilir.

Örnek 30 : $y_{n+1} + y_n = -(n+1)$ denklemini $y_0 = 1$ koşulu için düşünelim.

Burada,

$$Q_1(z) = 1, \quad Q_2(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = -\frac{1}{(1-z)^2}$$

ve

$$G(z) = \frac{1 - \frac{z}{(1-z)^2}}{1+z} = \frac{1-3z+z^2}{(1-z)(1-z)^2} = \frac{5}{4} \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Tablo 2.6'dan,

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^n$$

bulunur.

Bundan dolayı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5}{4} (1)^n - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} n \right] z^n,$$

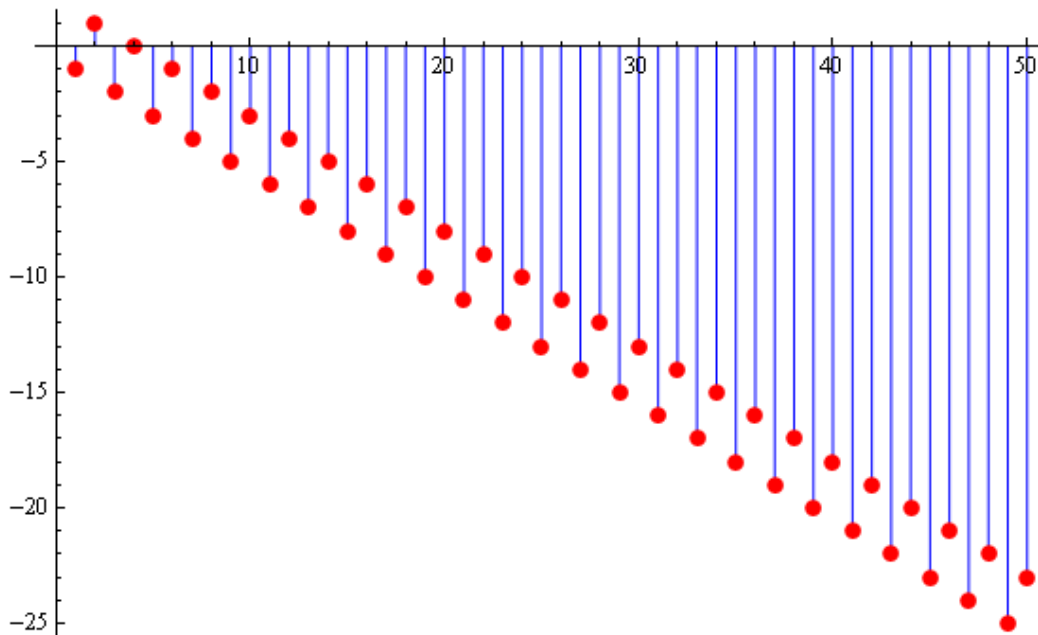
$$y_n = \frac{5}{4}(1)^n - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n$$

elde ederiz.

Denklemin çözümünü mathematica programı ile bulalım ve $y_0 = -1$ başlangıç değeri için çözümün ilk elli değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \text{Function} \left[\{n\}, \frac{1}{4} (3 + 5 (-1)^n - 2 n) \right] \right\} \right\}$$

{2, -1, 1, -2, 0, -3, -1, -4, -2, -5, -3, -6, -4, -7, -5, -8, -6, -9, -7, -10, -8, -11, -9, -12, -10, -13, -11, -14, -12, -15, -13, -16, -14, -17, -15, -18, -16, -19, -17, -20, -18, -21, -19, -22, -20, -23, -21, -24, -22, -25, -23}



Şekil 2.16. Örnek 30 Çözüm Grafiği

Şimdi, bir diziye karşılık fark denklemini yazmada üreteç fonksiyonun nasıl yardımcı olduğunu bir örnekle göstereyim.

Örnek 31 : Varsayalım ki, polinomların dizisi

$$g_n(y) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+j}{n-j} y^j$$

şeklinde tanımlansın.

Buna göre bu dizi bir fark denklemini sağlar mı? Eğer sağlarsa, bu hangi fark denklemdir? Teorem 2.5.4 kullanarak bulunabilir. Gerekli hesaplamalar bir hayli çoktur. Fakat üretici fonksiyonu kullanmak daha elverişlidir.

Gerçekte,

$$\begin{aligned} f(y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+j}{n-j} y^j z^n \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} (-1)^j \binom{n+j}{n-j} y^j z^n = \sum_{j=0}^{\infty} (-yz)^j \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+2j}{s} z^s \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-yz)^j f_j(z) \end{aligned}$$

düzenlediğimizde,

$$f_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+2j}{s} z^s, \quad j = 0, 1, \dots$$

kolayca $f_0(z) = \frac{1}{1-z}$ olduğu görülür. Bununla birlikte,

$$f_j(z) = \frac{f_0^{(2j)}}{(2j)!} \text{ ve } f_0^{(2j)} = \frac{(2j)!}{(1-z)^{2j+1}}, \text{ dir.}$$

Buradan,

$$f(y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-yz)^j}{(1-z)^{2j+1}} = \frac{1-z}{(1-z)^2 + yz}$$

elde edilir.

Orijinal dizinin zorluğuna karşı, üretici fonksiyonu çok basit olarak ortaya çıkar.

Tablo 2.6'ya bakılırsa, Chebshev polinomlarına benzer fakat tamamen aynı olmayan üretici fonksiyonları vardır. Eğer $y = 2(1-x)$ değişkeni kullanırsak, payda aynı olur.

Gösterilebilir ki,

$$g_n(x) = 2T_n(x) - U_{n-1}(x) \text{ olarak Chebyshev polinomlarının lineer}$$

bileşimi olarak verilir. $g_n(x)$ dizisi de aynı fark denklemlerine karşılık gelir. Orjinal değişken y için, $g_n(y)$ dizisi,

$$g_n(y) = (y-2)g_{n+1}(y) + g_{n+2}(y) = 0 \text{ denklemi sağlar.}$$

Bazı uygulamalarda, özellikle sistem teorisinde, (2.61) de tanımlı üretici fonksiyonu

yerine $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$ şeklinde üretici fonksiyonunun Z transformu kullanılır.

$X(z) = Y\left(\frac{1}{z}\right)$ olduğu aşikardır ve bu yüzden,

$$X(z) = \frac{Q_1\left(\frac{1}{z}\right) + z^{-k}Q_2\left(\frac{1}{z}\right)}{p\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{Q_1\left(\frac{1}{z}\right) + z^{-k}Q_2\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{-k}p(z)}$$

$$= \frac{z^k Q_1\left(\frac{1}{z}\right) + Q_2\left(\frac{1}{z}\right)}{p(z)}, \text{ dir.}$$

Burada $Q_2\left(\frac{1}{z}\right)$, $\{g_n\}$ in Z dönüşümüdür ve $p(z)$ karakteristik polinomdur. Z

dönüşüm tabloları kullanılarak önceden yapılanlara benzer işlemler yapılır.

Tablo 2.6. Üretici Fonksiyonlar

y_n	$f(z)$	Yakınsaklık Aralığı
1	$(1-z)^{-1}$	$ z < 1$
n	$z(1-z)^{-2}$	
$(n+m)^{(m)}$	$m!(1-z)^{-m-1}$	
$n^{(m)}$	$m!z^m(1-z)^{-m-1}$	
n^m	$zp_m(z)(1-z)^{-n-1(*)}$	
k^n	$(1-kz)^{-1}$	$ z < k^{-1}$
$(n+m)^{(m)}k^n$	$m!(1-kz)^{-m-1}$	
$e^a n$	$(1-a^a z)^{-1}$	$ z < e^{-a}$
$k^n \cos an$	$\frac{1-kz \cos a}{1-2kz \cos a+k^2 z^2}$	$ z < k^{-1}$
$k^n \sin an$	$\frac{kz \sin a}{1-2kz \cos a+k^2 z^2}$	$ z < k^{-1}$
$\frac{B_n}{n!}$	$\frac{z}{e^z-1}$	$ z < 2\pi$
$\binom{n}{m}$	$z^m(1-z)^{-m-1}$	$ z < 1$
$\binom{k}{m}$	$(1+z)^k$	$ z < 1$
$(-1) \cdot \binom{k}{m}$	$(1-z)^k$	$ z < 1$

2.8. Çözümlerin Kararlılığı

Bu bölümde uygulamalarda çok önemli olan lineer fark denklemlerinin kararlılığı üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.8.1 : $Ly_n = g_n$ 'in bir çözümü \bar{y}_n olsun. \bar{y}_n kararlıdır, şayet aynı denklemin her y_n çözümleri için $e_n = y_n - \bar{y}_n$ farkı sınırlı ise.

Tanım 2.8.2 : Eğer (2.11)'in her y_n için çözümü $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$ ise, (2.11) in \bar{y}_n çözümü asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 2.8.3 : (2.11) in \bar{y}_n çözümü kararlı değilse, kararsızdır denir.

Lemma 2.2.3'ten, e_n farkı (2.12)'deki homojen denklemi $Ly_n = 0$ denklemini sağlar. Sabit katsayılı lineer denklemler için aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Teorem 2.8.1 : Eğer karakteristik polinomun kökleri kompleks düzlemde birim çemberin içinde ise, ancak ve ancak (2.11) in \bar{y}_n çözümü asimptotik kararlıdır..

İspat : (2.43)'ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| y_n - \bar{y}_n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} \left| A_{ij} \right| n^j \left| z_i^n \right| \text{ elde ederiz.}$$

Eğer $|z_i| < 1$ ise, karşılıklı olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| y_n - \bar{y}_n \right| = 0$ 'dır.

Teorem 2.8.2 : (2.31) denkleminin \bar{y}_n çözümü, ancak ve ancak karakteristik polinomun köklerinin mutlak değerleri 1'den küçük ve 1'e eşit ise ve mutlak değeri 1 olan karakteristik denklemin kökleri basit ise kararlıdır.

İspat : (2.43)'ten açıktır ki, mutlak değeri 1'den küçük olan modül kısmından gelen köklerin $n \rightarrow \infty$ iken sıfırlayıcı bir etkisi vardır. Fakat mutlak değerlerin 1'e eşit olması halinde $j=0$ olduğundan e_n 'ye sınırlayıcı bir etkileşim söz konusudur.

Bazı başlangıç şartlarından çözümler, birim çember üzerinde katlı kök olmasına rağmen sınırlı olabilirler. Bununla ilgili örnek aşağıdadır.

Örnek 32 : $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$, $y_0 = y_1 = c$ denklemini düşünelim.

Bu denklem $y_n = c$ çözümü kabul eder.

Eğer g_n sabit ise, uygulamalarda sık sık karşımıza çıkan sabit çözümün kararlılığını incelemek gereklidir.

Denklemin genel çözümünü ve $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ başlangıç değerleri için çözümü mathematica programı ile bulalım. Çözümün ilk elli değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

Genel çözüm,

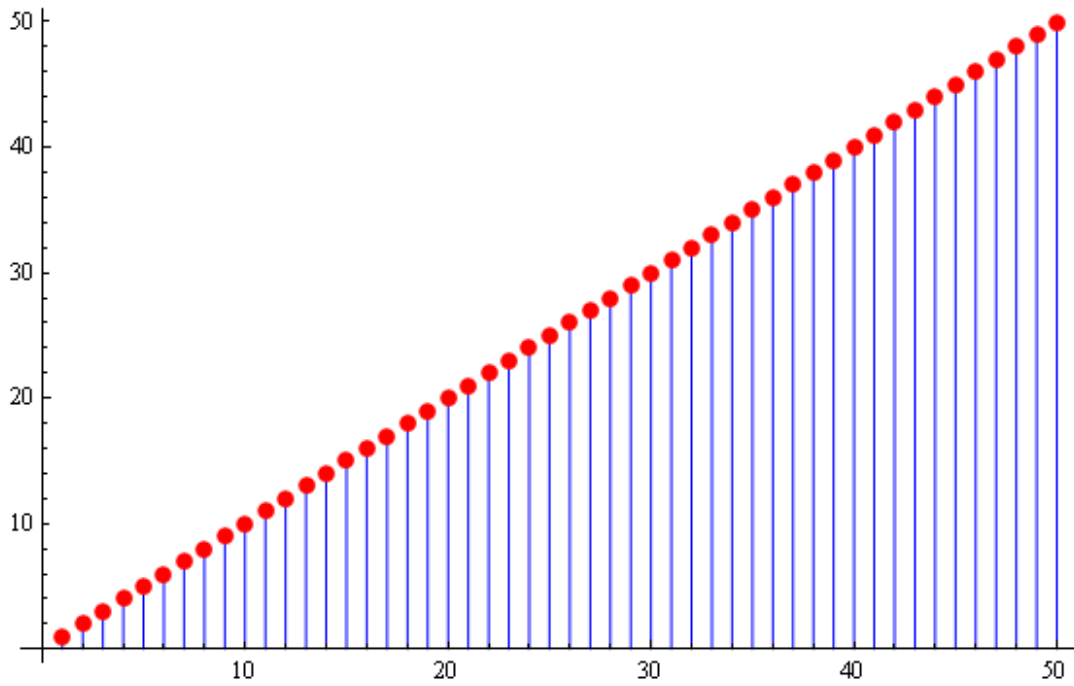
$$\{ \{ a[n] \rightarrow C[1] + n C[2] \} \}$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ başlangıç değerleri için çözüm

$$\{ \{ a[n] \rightarrow n \} \}$$

şeklindedir.

{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50}



Şekil 2.17. Örnek 32 Çözüm Grafiği

Örnek 33 : $y_{n+2} - y_{n+1} + \frac{1}{4} y_n = 2$ denklemini düşünelim.

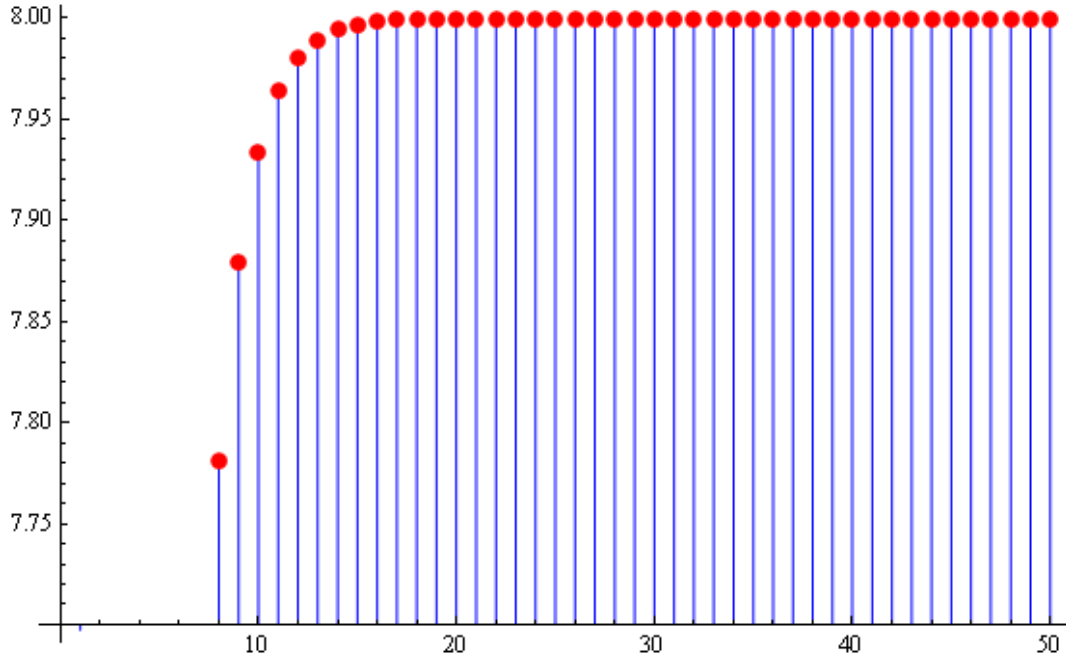
$p(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2$. Sabit çözüm $\bar{y} = 8$ asimptotik olarak kararlıdır. Burada genel

çözüm $y_n = (c_1 + c_2 n)2^{-n} + 8$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - 8) = 0$.

Tanım 2.7.1, 2.7.2 ve 2.7.3'ten kararlılık ve kararsızlık özellikleri \bar{y}_n özel çözümüne aittir. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ iken tüm çözümler \bar{y}_n tek çözümüne yaklaşır ise, bilhassa Nümerik Analizde fark denkleminin asimptotik kararlı olduğunu söylenir.

Denklemin çözümünü $y_0 = 0$, $y_1 = 2$ başlangıç değerleri için mathematica programı ile bulalım çözümün ilk elli değerinin grafiğini çizelim.

$$\left\{ \{ a[n] \rightarrow 2^{1-n} (-4 + 2^{2+n} - 3 n) \} \right\}$$



Şekil 2.18. Örnek 33 Çözüm Grafiği

Tanım 2.8.4 : Kökleri kompleks düzlemdeki birim çemberin içinde olan polinoma Schur polinomu denir.

Tanım 2.8.5 : Komleks düzlemde birim disk içinde köklere sahip, sınırında ise basit köklere sahip polinoma, Van-Neuman polinomu denir.

Bu terminoloji kullanılarak Teorem 2.8.1 ve Teorem 2.8.2 ifadelerini aşağıdaki şekilde yeniden ifade edebiliriz.

Teorem 2.8.3 : \bar{y}_n çözümü asimptotik kararlıdır ancak ve ancak eğer karakteristik polinom bir Schur polinomu ise.

Teorem 2.8.4 : \bar{y}_n çözümleri kararlıdır, ancak ve ancak karakteristik polinom Van-Neumann polinomu ise.

2.9. Mutlak Kararlılık

Lineer fark denkleminin önemli uygulamalarından birisi de diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırmasıdır. Fark denklemleri ard arda rekürsif olarak çözülebilir. Fakat bu diferansiyel denklemler için mümkün değildir ve genellikle bunlar uygun koşullar sağlandığında fark denklemleri kullanılarak yaklaşık olarak çözümler.

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.78)$$

skaler diferansiyel denklemini verilsin.

$t \in [t_0, T)$ ve farz edelim ki, bu sürekli problem tek bir $y(t)$ çözümüne sahip olsun.

$h > 0$ ve $t_i = t_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N = \frac{T-t_0}{h}$ olsun.

$y_i = y(t_i) + O(h^q), q > 1$ ve $i = 0, 1, \dots, k-1, n+k \leq N$ olmak üzere, (2.78)'in yaklaşık ayrık problemi,

$$F_h(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}, f_n, \dots, f_{n+k}) = 0 \quad (2.79)$$

ifadesiyle gösterilsin. Burada, $f_i = f(t_i, y_i)$ 'dir. y_n , (2.79) ifadesinin tek çözümü olsun. Ayrık problem, k inci mertebeye fark denklemi ile temsil edilmek üzere, k tane başlangıç koşuluyla çözümler. Fakat sürekli problemde bir koşul verilmiştir.

Tanım 2.9.1 : (2.79) ayrık probleminin (2.78) sürekli problemiyle uyumlu olduğu söylenir.

Eğer,

$$F_h \left(y(t_n), y(t_{n+1}), \dots, y(t_{n+k}), f(t_n, y(t_n)), \dots, f(t_{n+k}, y(t_{n+k})) \right) = \tau_n \quad (2.80)$$

olmak üzere,

$$\tau_n = O(h^{p+1}), \quad p \geq 1 \text{ ise.}$$

τ_n ifadesine kesme hatası denir. (2.80) denklemi, (2.79)'un bir perturbesi olarak yorumlanır.

Tanım 2.9.2 : (2.79) ayrık denklemi sürekli (2.78) denkleme yaklaşıyor denir eğer (2.79)'un y_n çözümü $n \rightarrow \infty$ iken, $t_n - t_0 = nh \leq T$ şartlarını sağlıyor ise.

Madem ki, sürekli probleminin çözümü (2.80) şartını sağlamakta ve (2.79)'un bir perturbesidir yakınsama ancak (2.79) bu perturbelere karşı hassas değilse, yani (2.79) bu pertürbelere karşı kararlı ise olur. Sonuç olarak uyumluluk yakınsamayı garanti edememektedir. Yakınsama uyumluluk ve kararlılığın beraber olduğu hallerde mümkündür.

Lineer çok adımlı metodu bu açıdan derinlemesine inceleyelim.

Burada F_h , bütün argümanlarına göre lineer olarak (2.81) formundadır.

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} - h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} = 0 \quad (2.81)$$

$\alpha_k = 1$ ve α_i, β_i katsayıları reel sayılardır. E kaydırma operatörü ve ρ ve σ polinomları kullanılarak,

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i \quad (2.82)$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=0}^k \beta_i z^i \quad (2.83)$$

elde edilen ifadeler kullanılarak (2.81) denklemi,

$$\rho(E) y_n - h\sigma(E) f_n = 0 \quad (2.84)$$

şeklinde yazılır.

$\rho(z)$ ve $\sigma(z)$ polinomları (2.79) metodunun tekliğini karakterize eder ve onları (ρ, σ) metodu olarak ifade eder.

(2.80) denklemi,

$$\rho(E) y_n - h\sigma(E) f(t_n, y(t_n)) = \tau_n \quad (2.85)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 2.9.1 : Farz edelim ki, f yeterince düzgün olsun. $\tau_n = O(h^2)$ olması için aşağıdaki iki şart sağlanmalıdır.

$$\rho(1) = \sum_{i=0}^k \alpha_i = 0 \quad (2.86)$$

ve

$$\rho'(1) - \sigma(1) = \sum_{i=0}^k i\alpha_i - \sum_{i=0}^k \beta_i = 0 \quad (2.87)$$

(2.86) ve (2.87) şartları uyumluluk şartlarıdır. Eğer f lineer değilse, (2.84)'ün kararlılığının çalışılması genel olarak zordur. Genel olarak, (2.84) test fonksiyonları denilen f lineer fonksiyonları çalışılır.

En çok kullanılan test fonksiyonları,

$$f(y) = 0 \quad (2.88)$$

ve

$$f(y) = \lambda y, \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0. \quad (2.89)$$

fonksiyonlarıdır. (2.88) test fonksiyonunun sağlanması için, (2.84)'teki f değerlerinin h ile çarpımı $h \rightarrow 0$ limit halinde f_{n+i} terimleri düşürülür. $y' = 0$ basit denklemi için sabit çözümlerin kararlılığı sağlanır. Örneğin, onlar sabit çözümleri üretirler.

(2.89) test fonksiyonları ise, (2.84)'ün asimptotik kararlı çözümlerinin komşuluklarında test edilir.

(2.88) test denklemine göre, (2.84)

$$\rho(E) y_n = 0 \quad (2.90)$$

değerini verir.

Tanım 2.9.3 : Eğer (2.90) denkleminin $y_n = 0$ çözümü kararlı ise, (ρ, σ) metodu 0-kararlıdır denir.

Teorem 2.9.2 : Eğer $\rho(z)$ bir Van-Neumann polinomu ise, (ρ, σ) metodu 0-kararlıdır denir.

Aşağıdaki teorem tutarlılık, 0-kararlılık ve yakınsaklık arasındaki ilgili ilişkiyi kurmaktadır.

Teorem 2.9.3 : Ancak ve ancak (ρ, σ) metodu uyumlu ve 0-kararlı ise, (ρ, σ) $(0, T)$ sınırlı aralığında yakınsaktır.

İspat için “Theory of Difference Equations: Numarical Methods and Applications” isimli kitaba bakınız.

(2.89) test fonksiyonunun kullanılması daha uygundur. Bundan dolayı (2.84) denklemi,

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i - h\lambda\beta_i) y_{n+i} = 0 \quad (2.91)$$

halini alır.

$$h\lambda = q \text{ ve } \pi(z, q) = \rho(z) - q\sigma(z) \quad (2.92)$$

koyarsak, (2.91) denklemi $\text{Re}(q) \leq 0$ olmak üzere,

$$\pi(E, q) y_n = 0 \quad (2.93)$$

denklemine indirgenir. $\pi(z, q)$ polinomu Dahlquist polinomu olarak adlandırılır.

Tanım 2.9.4 : Eğer (2.93) denkleminin $y_n = 0$ çözümü asimptotik kararlı ise, (ρ, σ) metodu mutlak kararlıdır denir.

Teorem 2.9.4 : Eğer $\pi(z, q)$ Schur polinomu ise (ρ, σ) metodu mutlak kararlıdır.

Tanım 2.9.5 : (ρ, σ) metodunu mutlak kararlı yapan $q \in C$ 'ler kümesi mutlak kararlılık bölgesi olarak adlandırılır.

Tanım 2.9.6 : Eğer (ρ, σ) metodu mutlak kararlılık bölgesi negatif kompleks yarı düzlemi içeriyorsa, metot A-kararlıdır denir.

Örnek 34 : $y_{n+1} = y_n + h[(1-\theta)f_{n+1} + \theta f_n]$ (2.94)

$0 \leq \theta \leq 1$ şeklinde tanımlı metoda θ -metodu denir.

Buradan, $\rho(z) = z-1$ ve $\sigma(z) = (1-\theta)z + \theta$ ifadelerinden (2.86) ve (2.87)'nin doğruluğu kanıtlanır.

Bununla birlikte,

$$\pi(z, q) = (1 - q - q\theta)z - 1 - q\theta$$

ifadesinin tek kökü $z = \frac{1+q\theta}{1-q-q\theta}$ şeklindedir.

$|z|=1$ noktalarının geometrik yeri, merkezi $\left(\frac{1}{1-2\theta}, 0\right)$ ve yarıçapı $\left|\frac{1}{(1-2\theta)}\right|$ olan

bir çemberdir. $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ için mutlak kararlılık bölgesi yukarıdaki çemberin

dışındadır, $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ için bölge içeridedir. $\theta = \frac{1}{2}$ için, çember sanal eksen

bozulur ve mutlak kararlılık bölgesi negatif yarı uzay olur. Sonuç olarak, θ metodu

$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ için A-kararlıdır.

$\theta = 0$ için θ -metodu kapalı Euler metodu, $\theta = \frac{1}{2}$ için θ -metodu yamuk kuralı ve

ve $\theta = 1$ için θ -metodu açık Euler metodu olarak adlandırılır.

Yukarıdaki örneği mathematica programı ile çözelim.

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow 1 + \sum_{k[1]=0}^{-1+n} -h[-(-1+k) f[1+k[1]] + kf[k[1]]] \right\} \right\}$$

Aynı örneğin $k = 2$ ve $h = 1$ değerleri için çözümünü mathematica programı ile bulalım.

$$\left\{ \left\{ e[n] \rightarrow 1 + \sum_{k[1]=0}^{-1+n} (-2 f[k[1]] + f[1 + k[1]]) \right\} \right\}$$

2.10. Sınır Değer Problemleri

Bu bölümde ikinci mertebe fark denklemlerinin ayrıklaştırılmasında ortaya çıkan en yaygın durumları detaylı olarak ele alacağız.

$$y_{n+1} - 2zy_n + y_{n-1} = 0 \quad (2.95)$$

denklemini göz önüne alalım ve aşağıdaki üç çeşit sınır koşuluyla,

$$y_0 = y_N = 0 \quad (2.96)$$

$$y_0 = 0, \quad y_{N-1} - zy_N = 0 \quad (2.97)$$

$$y_0 = y_N, \quad y_1 = y_{N+1} \quad (2.98)$$

problemini ele alalım.

Bu tarz problemleri hesaplamak için (2.95)'in genel çözümünü aşağıdaki genel formunda almak faydalıdır.

$$y_n = c_1 T_n(z) + c_2 U_{n-1}(z).$$

İlk olarak (2.96) şartlarını uygularsak,

$$c_1 = 0, \quad c_2 U_{n-1}(z) = 0 \quad (2.99)$$

ve

$$y_n = c_2 U_{n-1}(z) \quad (2.100)$$

buluruz.

Eğer z , $U_{n-1}(z)$ nin bir kökü ise (2.99) şartı sağlanır.

$$y_n^{(k)} = c_2 U_{n-1}(z_k) = \bar{c}_2 \sin \frac{kn\pi}{N}$$

denklemine karşılık $N-1$ çözüm

$$z_k = \cos \frac{k\pi}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \text{ ifadesiyle bulunur.}$$

\bar{c}_2 parametresi genellikle normalize etme şartlarından belirlenir.

(2.97) deki karmaşık sınır koşullarını ele alalım. Bunları uygularsak aşağıdaki ifadeleri buluruz.

$$c_1 = 0, \quad c_2 (U_{N-2}(z) - zU_{N-1}(z)) = 0$$

son denklem $T_N(z) = 0$ ifadesini verir. Bu da,

$$z_k = \cos \frac{k\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

olduğunda bu denklem sağlanır. Bu da,

$$y_n^{(k)} = c_2 U_{N-1}(z_k) = c_2^{(k)} \sin \frac{n(2k+1)\pi}{2N}$$

çözümüne karşılık gelir.

Son olarak periyodik koşullarıyla (2.98),

$$c_1 (1 - T_N(z)) - c_2 U_{N-1}(z) = 0$$

ve

$$c_1 (T_{N+1}(z) - z) + c_2 (-1 - U_N(z)) = 0$$

ifadelerini sağlar.

Bu , homojen bir sistemdir ve determinantların köklerine karşılık gelen adi olmayan çözümleri vardır. T_n ve U_n özellikleri kullanılarak $2(1 - T_N(z))$ ifadesi elde edilir.

Bu ifade,

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

ifadesini verir. Böylelikle buna karşılık çözümler,

$$y_n^{(k)} = c_1^{(k)} \cos \frac{2k\pi n}{N}, \quad k = 0, \frac{N}{2},$$

$$y_n^{(k)} = c_1^{(k)} \cos \frac{2k\pi n}{N} + c_2^{(k)} \sin \frac{2k\pi n}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad k \neq \frac{n}{2}$$

olarak bulunur.

Uygulamalarda (2.95) denklemi genellikle $\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$ ayrıklaştırmasından elde

edilir ve z parametresi $z = 1 - \frac{1}{2} \lambda (\Delta x)^2$ şeklindedir. Sonuçlar gösterir ki, çözüm

sadece $\lambda_k = \frac{2}{(\Delta x)^2} (1 - z_k)$ da verilen λ değerleri için geçerlidir. Bunlar da

özdeğerler olarak adlandırılırlar ve çözümleri de öz fonksiyonlar olarak isimlendirilirler.

KAYNAKLAR

- [1] BRAND, L., Differential and Difference Equations, John Wiley, New York, 1966.
- [2] DANNAS, F., ELAYDI, S. AND LIU, P., Periodic solutions of difference equations, J. of Diff. Eq. and Appl., 6 (2000), pp. 203-232.
- [3] KELLEY, W.G., AND PETERSON, A.C., Difference Equations, an Introduction with Applications, Academic Pres, San Diego, 2001.
- [4] LAKSHMIKANTHAM, V. AND TRIGIANTE, D., Theory of difference equations, Numerical Methods and Applications, vol.181 of Mathematics in Science and Engeneering, Academic Pres, New York, 1988.
- [5] MILLER, K.S., An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations, Hold and Company, New York, 1960.
- [6] KOCIC, V., AND LADAS. G., Global behaviour of nonlinear difference equations of higher order with applications, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [7] OLVER, F.W., Numerical solutions of second order linear difference equations, Jour. of Research, NBS, 71B (1967), pp. 111-129.

EKLER

Ek A : Bazı Çözülmüş Problemler

Örnek 1 : $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ ikinci mertebeden fark denkleminin çözümünü bulalım.

Yukarıdaki ikinci mertebe fark denkleminin karakteristik denklemi $r^2 - 5r + 6 = 0$ olup, $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$ olduğundan farklı iki reel kök vardır.

r değerleri $r_1 = 2$ ve $r_2 = 3$ olarak bulunur. Genel çözüm,

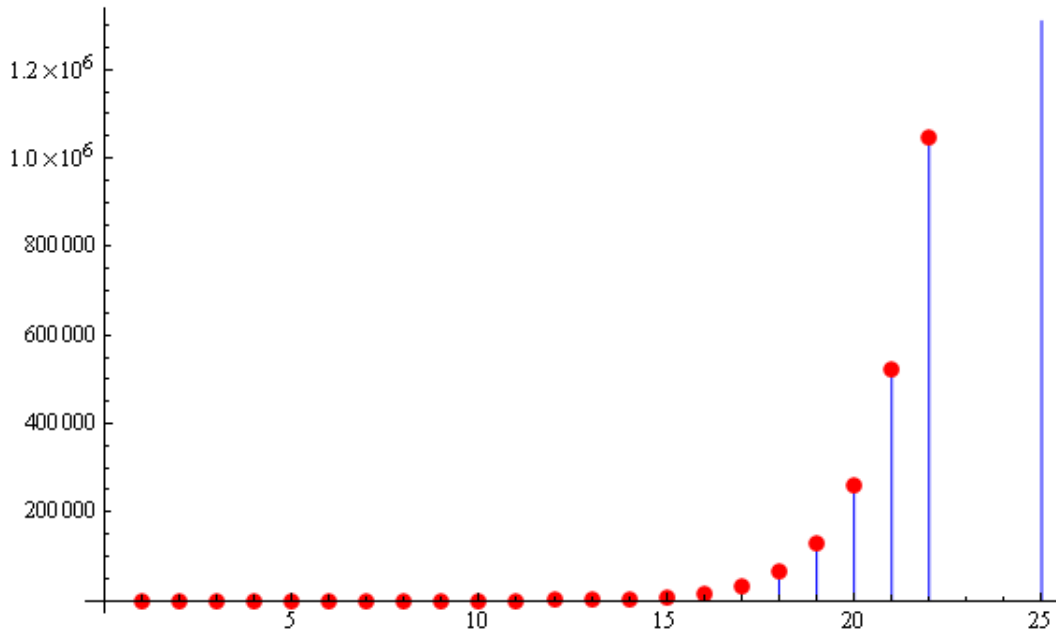
$$y_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

şeklindedir.

Aynı fark denkleminin çözümünü $y_1 = \frac{1}{2}$ ve $y_2 = 1$ başlangıç değerleri için

matematica programı ile bulalım. İlk yirmi beş değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

{1/2, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608}



Şekil 2.19. Örnek 1 Çözüm Grafiği

Örnek 2 : $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$ ikinci mertebeden fark denkleminin çözümünü bulalım.

Yukarıdaki ikinci mertebeye fark denkleminin karakteristik denklemi $r^2 - 2r + 2 = 0$ olup, bunun denklemin kökleri

$$r_1 = 1+i \text{ ve } r_2 = 1-i$$

şeklindedir. Buna göre genel çözüm,

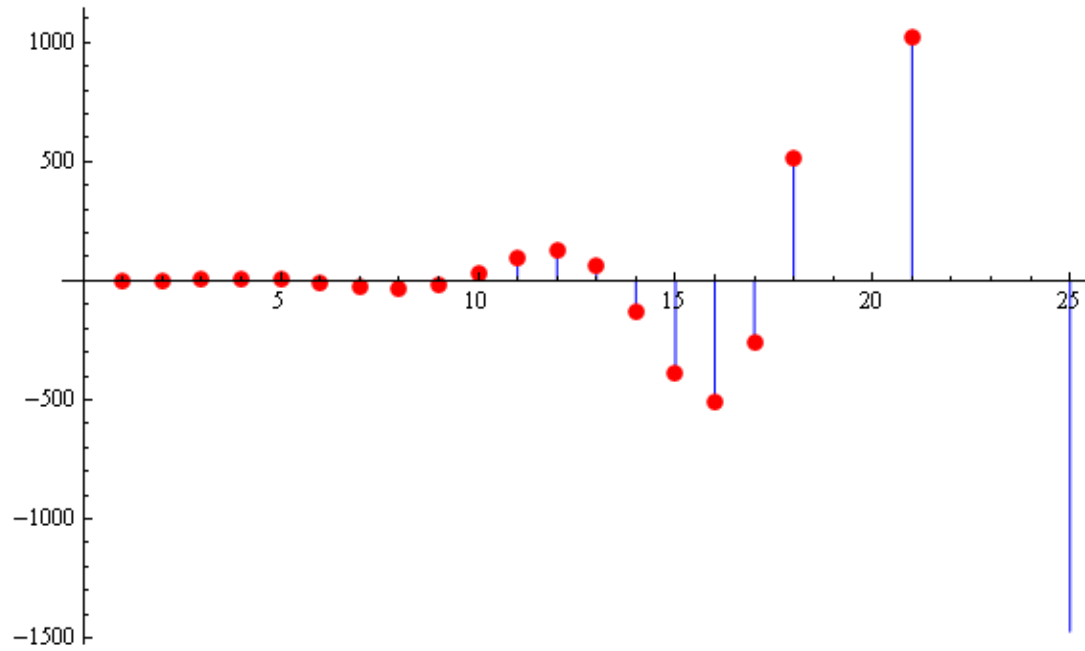
$$y_n = c_1 (1+i)^n + c_2 (1-i)^n$$

olarak bulunur.

Aynı fark denkleminin çözümünü $y_1 = 1$ ve $y_2 = 2$ başlangıç değerleri için mathematica programı ile bulalım. İlk yirmi beş değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

$$\{ \{ a \rightarrow \text{Function}[\{n\}, \frac{1}{2} i ((1 - i)^n - (1 + i)^n)] \} \}$$

{1, 2, 2, 0, -4, -8, -8, 0, 16, 32, 32, 0, -64, -128, -128, 0, 256, 512, 512, 0, -1024, -2048, -2048, 0, 4096}



Şekil 2.20. Örnek 2 Çözüm Grafiği

Örnek 3 : $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$ fark denkleminin çözümünü bulalım.

Fark denkleminin karakteristik denklemi $r^2 - 4r + 4 = 0$ olup,

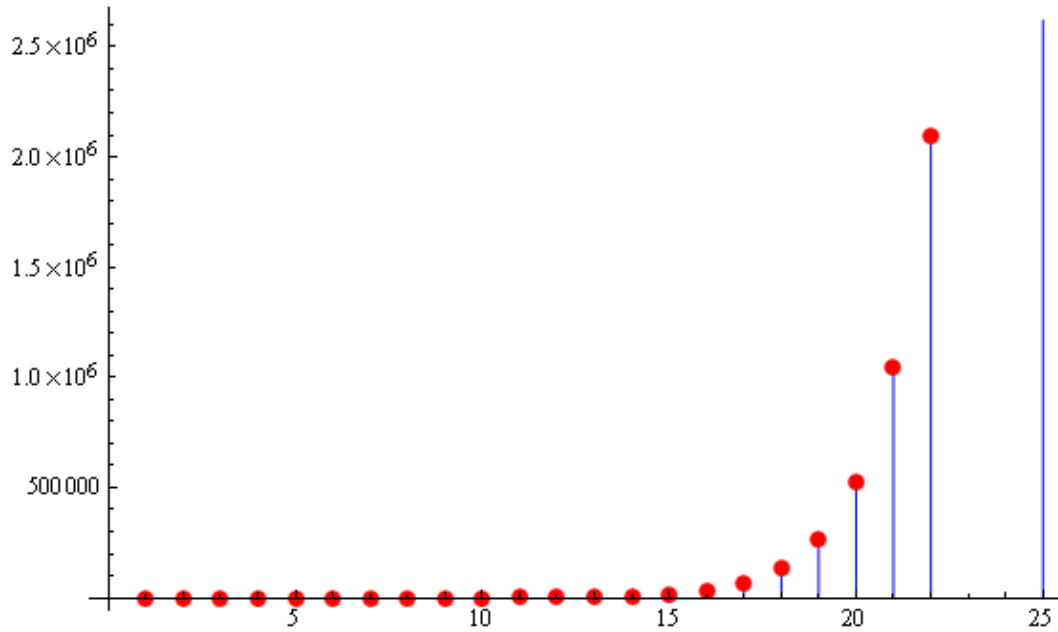
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$ olduğundan bu denklemin $r_1 = r_2 = 2$ gibi çift katlı kökü vardır. O halde genel çözüm,

$$y_n = 2^n (c_1 + c_2 n) \text{ olarak bulunur.}$$

Aynı fark denkleminin çözümünü $y_1 = 1$ ve $y_2 = 2$ başlangıç değerleri için mathematica programı ile bulalım. İlk yirmi beş değerinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

$$\{\{a \rightarrow \text{Function}[\{n\}, 2^{-1+n}]\}\}$$

{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216}



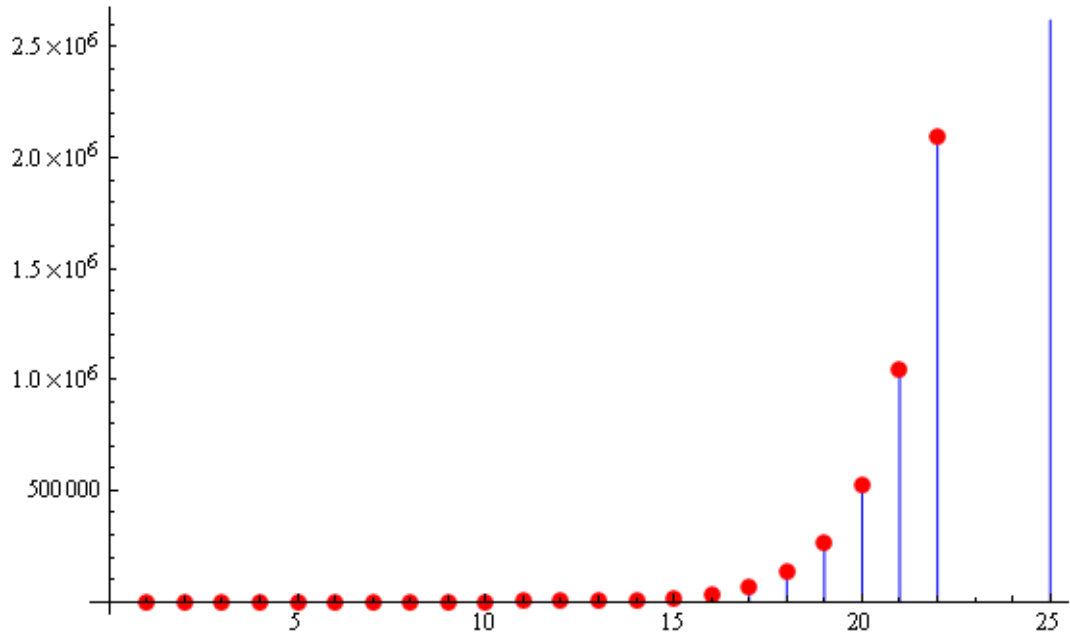
Şekil 2.21. Örnek 3 Çözüm Grafiği

Örnek 4 : $y_{n+2}y_n - y_{n+1}^2 = 0$ fark denkleminin çözümünü, $y_1 = 1$ ve $y_2 = 2$ başlangıç değerleri için çözümünü matematica programı ile bulalım ve çözümün ilk yirmi beş değerinin grafiğini çizelim.

$$\{\{a[n] \rightarrow e^{c[1]+n c[2]}\}\}$$

$$\{\{a \rightarrow \text{Function}[\{n\}, 2^{-1+n}]\}\}$$

{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216}

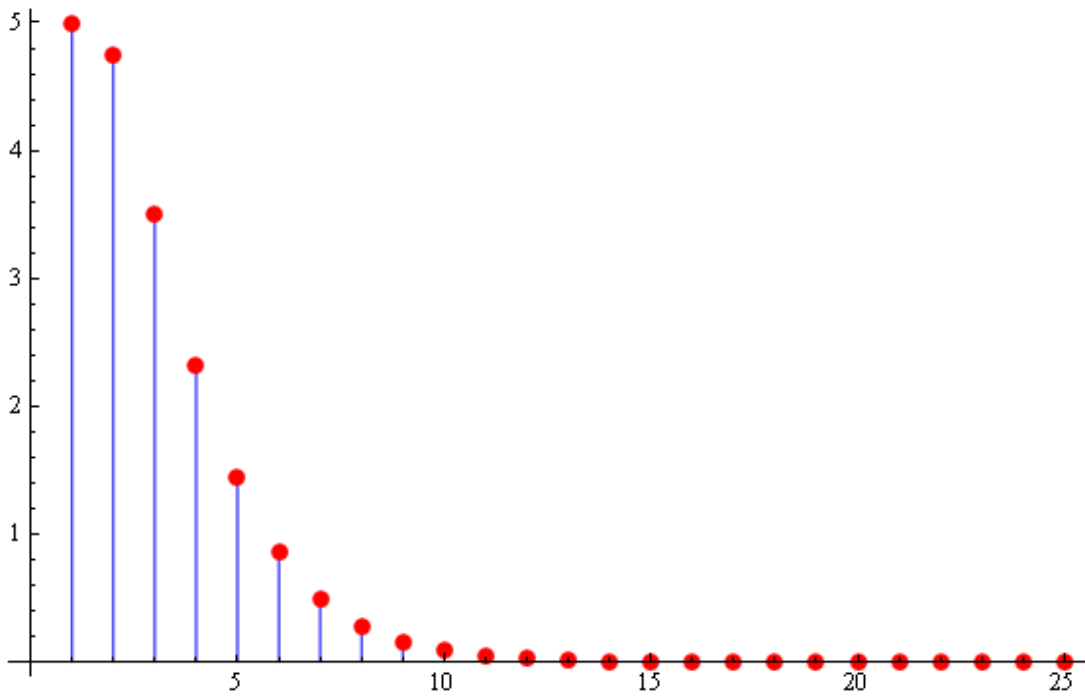


Şekil 2.22. Örnek 4 Çözüm Grafiği

Örnek 5 :

a) $y_{n+2} - y_{n+1} + \frac{1}{4}y_n = 0$ fark denklemini $y_0 = 1$ ve $y_1 = 5$ başlangıç koşulları için mathematica ile çözelim ve çözümün ilk yirmi beş değerinin grafiğini çizelim.

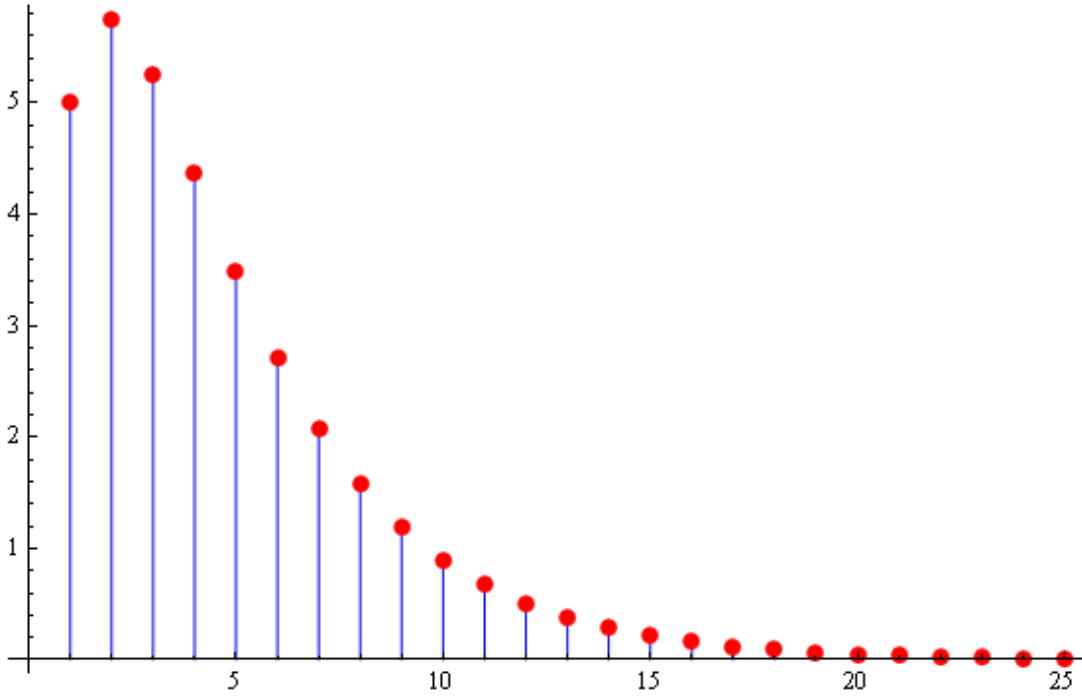
$$\{ \{ a[n] \rightarrow 2^{-n} (1 + 9 n) \} \}$$



Şekil 2.23. Örnek 5-a Çözüm Grafiği

b) $y_{n+2} - y_{n+1} + \frac{1}{4}y_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ fark denklemini $y_0 = 1$ ve $y_1 = 5$ başlangıç koşulları için mathematica ile çözelim ve çözümün ilk yirmi beş değerinin grafiğini çizelim.

$$\{ \{ a[n] \rightarrow 2^{-2n} (-15 2^n + 16 3^n + 2^n n) \} \}$$



Şekil 2.24. Örnek 5-b Çözüm Grafiği

Örnek 6 : $y_{n+4} - 4\frac{4}{5}y_{n+3} + 8\frac{2}{5}y_{n+2} - 4\frac{4}{5}y_{n+1} + y_n = 0$ denklemin çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem $r^4 - 4\frac{4}{5}r^3 + 8\frac{2}{5}r^2 - 4\frac{4}{5}r + 1 = 0$ 'dır.

Bu şekilde orta terimden $\left(8\frac{2}{5}r^2\right)$ aynı derecede farklı üsleri var olan r 'li terimlerin

katsayıları aynı olan karakteristik denkleme sahip fark denklemlerine resiprok fark denklemleri denir. Bu tür denklemlere statik konularında sıkça rastlamak mümkündür.

Eğer r_1 , bir resiprok denklemin kökü ise $\frac{1}{r_1}$ de bu denklemin bir köküdür. Örneğin

dördüncü mertebeden resiprok bir denklem genel olarak,

$$f(r) \equiv r^4 + ar^3 + br^2 + cr + 1 = 0$$

şeklinde yazılabildiğinden $f(r_1) = 0$ olduğuna göre,

$$f\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{r_1^4} f(r_1) = 0 \text{ bulunur.}$$

$f(r) \equiv r^4 + ar^3 + br^2 + cr + 1 = 0$ denkleminde $\rho = r + \frac{1}{r}$ şeklinde bir dönüşüm

yapılırsa ρ için $\rho^2 - 2 + a\rho + b = 0$ şeklinde bir kuadratik denklem elde edilir.

Bunun kökleri,

$$\rho_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2 - b} \text{ şeklindedir.}$$

$f(r) \equiv r^4 + ar^3 + br^2 + cr + 1 = 0$ denkleminin aranan r kökleri,

$$r + \frac{1}{r} = \rho_1, \quad r + \frac{1}{r} = \rho_2 \text{ denklemlerinden hesaplanır.}$$

Bu metot denkleme uygulanırsa kökler,

$$r_1 = 2 + i, \quad r_3 = \frac{1}{2 + i} = \frac{1}{5}(2 - i)$$

$$r_2 = 2 - i, \quad r_4 = \frac{1}{2 - i} = \frac{1}{5}(2 + i)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla fark denkleminin çözümü,

$$y_n = c_1(2 + i)^n + c_2(2 - i)^n + \frac{1}{5}[c_3(2 - i) + c_4(2 + i)]$$

şeklinde bulunur.

Örnek 7 : $y_{n+2} - 2y_{n+1} - 8y = e^n$ fark denkleminin özel çözümünü ve $y_1 = 0$ ve $y_2 = 1$ başlangıç değerleri için çözümünü mathematica programı ile bulalım.

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow \frac{e^n}{-8 - 2e + e^2} + (-2)^n c[1] + 4^n c[2] \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \text{Function} \left[\{n\}, -\frac{(-1)^n 2^{2+n} + 2^{1+2n} - (-2)^n e + 2^{2n} e - 6 e^n}{6 (-8 - 2e + e^2)} \right] \right\} \right\}$$

ÖZGEÇMİŞ

Kemal TEMEL, 1982 yılında Bursa'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bursa'nın Mudanya ilçesinde ve lise öğrenimini Bursa Süleyman Çelebi Lisesinde tamamladı.. 1999 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Kimya Bölümüne bir yıl devam ettikten sonra, 2001 yılında Maltepe Üniversitesi Matematik Bölümüne burslu olarak girdi ve 2006 yılında mezun oldu. Mezun olduktan sonra 2006 yılında özel bir eğitim kurumunda Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. Şu anda hala özel bir eğitim kurumunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.